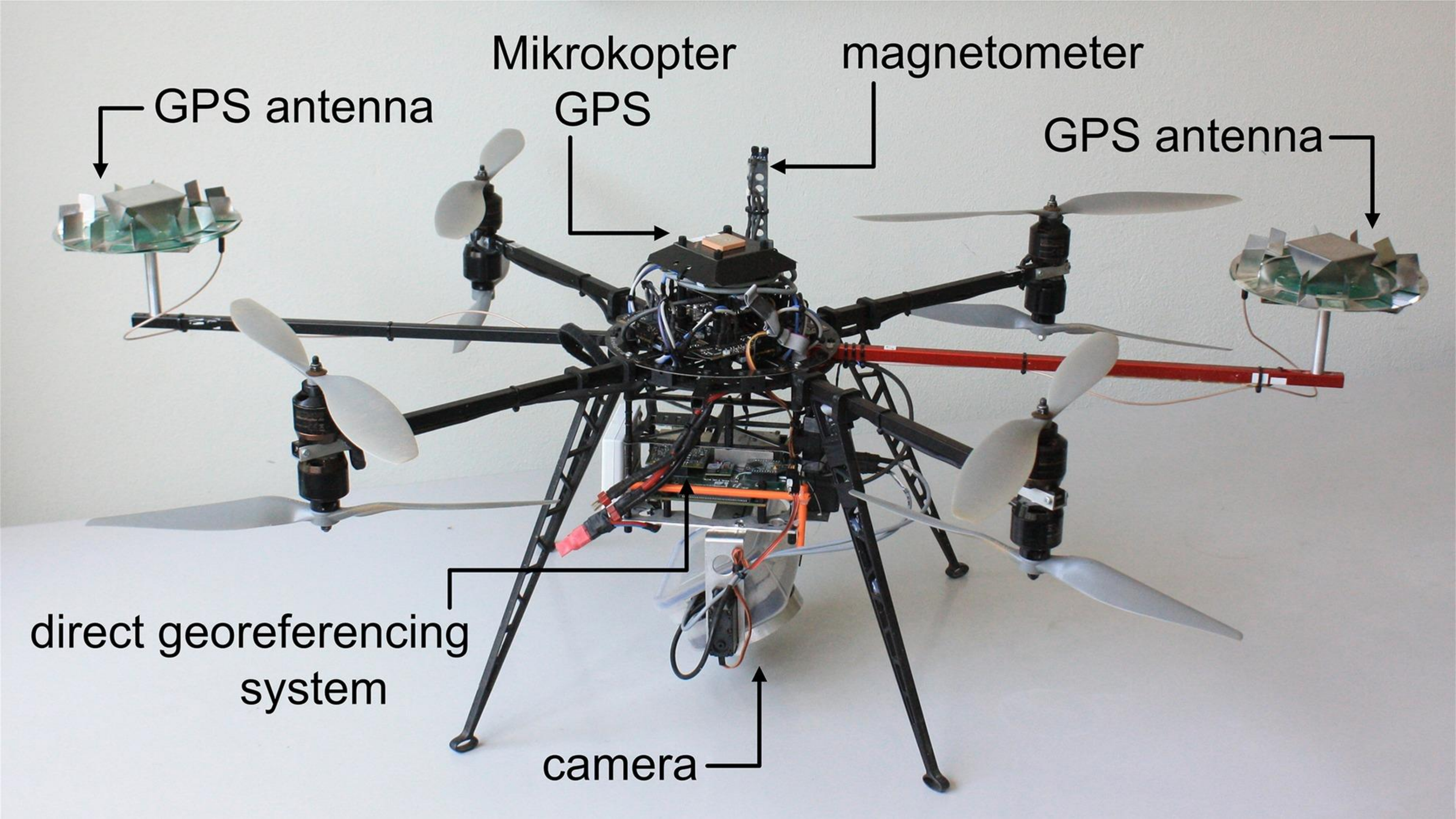
Xilinx Zynq FPGA, TI DSP, MCU 프로그래밍 및 회로 설계 전문가 과정

강사 – Innova Lee(이상훈)
gcccompil3r@gmail.com

Kalman Filter

Introduction Kalman Filter

우선 Kalman Filter 가 어디에 사용되는지 부터 알아보도록 하자 ~
수업 시간에 학습하였던 Low Pass Filter 라든지 IIR Filter 라든지 와 마찬가지로
복잡한 수식이 들어가지만 왜 사용하는지를 알면 좀 더 공부할 명분과 의욕이 생길 것이다.


Mikrokopter
GPS
magnetometer
GPS antenna
GPS antenna
direct georeferencing
system
camera

Characteristics
Length 610 ft
Beam 80.7 ft
Draft 27.6 ft
Speed 30 kt
Displacement 15,742 LT
Installed Power 78 MW
Crew Size 175 (incl. Aviation detachment)
(2) TCDL
(Tactical Common Data Link)
Electro-Optical Window Enclosure (CEWE)
Hangar
XKA
(SEWIP)
CEC
SPY 3
(2) MK-46 Gun Mounts
Personal Safety Barriers (PSB)
EHF
UHF
IFF
Bridge
Helo Control Station
SLQ-25
NIXIE
Boat Bay
SQR-20
MFTA
HF
1000
MK-57 Peripheral Vertical
Launch System (PVLS)
Advanced Gun System
Anchor Handling
SQS - 61
SONAR SQS - 60
Boats
• (1) 7m RHIB
• (1) 11m RHIB
Aviation
• (2) MH-60R
Superstructure
• Steel structure
• Composite Deckhouse / Hangar
Integrated Power System (IPS)
• (2) Main Turbine Generators (MTG)
• (2) Auxiliary Turbine Generators (ATG)
• (2) MW Advanced Induction Motors (AIM)
• Integrated Fight Through Power
Weapons
• MK-57 (80 Cells Total)
• (2) Advanced Gun Systems (AGS)
• (600) 155 mm rounds
• (2) MK-46 Gun System
Hull
• Wave-piercing tumblehome
Glass Ship DDG 1000 RevK - David Heath 101315


76
70

이와 같이 최첨단 군용 시스템에서 Kalman Filter 는 밥먹듯이 활용되고 있다.
우리가 진행하는 프로젝트가 RC 항공기, RC 선박, RC 탱크등이므로 이의 자세를 제어하는데 필수적이다.
군용으로 사용되는데는 아래와 같은 경우들이 존재한다.

1. 미사일 정밀 타격
2. 헬기 자세 제어
3. 전투기 자세 제어
4. 선박 자세 제어

위의 모든 케이스에서 Kalman Filter 가 필수적으로 활용된다.
서론이 길었으니 이제 실제로 Kalman Filter 에 대해 알아보도록 하자
Kalman Filter 에 대해 알아보기 이전에 Gamma Function 에 대한 간략한 개요를 살펴보도록 하겠다.

Gamma Function

감마 함수를 아래와 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt}$$

Euler 가 정의한 감마 함수는 아래와 같다.

$$\boldsymbol{\Gamma(x) = \int_0^1 [-ln(u)]^{x-1}\, du}$$

$$\boldsymbol{t = -ln(u), \qquad du = -e^{-t} dt}$$

$$\boldsymbol{\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt}$$

위 감마 함수를 아래와 같이 확장할 수 있다.

$$\boldsymbol{\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x}\, dt = -e^{-t} t^{x}\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt = x\Gamma(x)}$$

$$\boldsymbol{\Gamma(1) = 1 = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1}$$

또한 아래와 같은 함수를 생각해보자!

$$y = e^{-ax^2}$$

여기서 좀 더 나아가 아래와 같은 가정을 하고 Laplace Integral 을 수행해보도록 한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = S, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = S,$$

위의 둘을 곱하면 아래와 같은 결과가 나올 것이다.

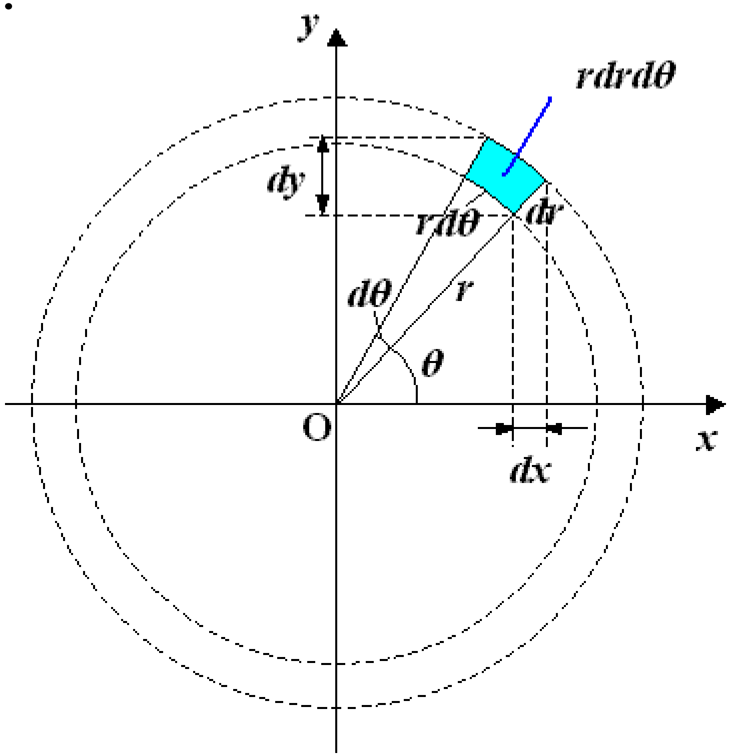
$$S^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)}\,dxdy$$

이를 해석하기에 적절한 좌표계는 바로 극좌표이므로 이를 도입한다.

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$dxdy = rdrd\theta$$

$$x^2+y^2=r^2$$
$$dxdy=rdrd\theta$$

반지름 항이 하나 추가로 붙는 이유는 수업 시간에 설명한 Taylor Series 의 결과 때문이다.
또한 극좌표가 도입되면서 적분 구간이 바뀌게 된다.
반지름은 0 ~ 무한대, 각도는 0 ~ 2pi 구간이 된다.



$$S^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x^2+y^2\right)}\,dxdy = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} re^{-ar^2}\,drd\theta$$

여기서 치환 적분을 다시 시도해보자

$$ar^2 = t \rightarrow 2ardr = dt$$
$$\int_0^{\infty} re^{-ar^2}\,dr = \int_0^{\infty}\frac{1}{2a}e^{-t}\,dt = \frac{1}{2a}$$

나머지 적분을 계산한다.

$$S^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2a}d\theta = \frac{\pi}{a} \rightarrow S = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

확률 함수는 적분 결과가 1 이어야 하므로

$$\therefore y = \sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-ax^2}$$

이제 분산과 관련된 계수 sigma 값을 구해보자!

$$\sigma^2 = \int (x-m)^2 y\,dx$$

가우시안 분포를 가정하면 평균은 0 이다.

$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}\,dx$$

원래라면 적분을 수행할 수 없지만 이제 우리는 감마 함수와 관련하여
Laplace Integral 기법을 알고 있으므로 이 적분을 수행할 수 있다.

$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot x e^{-ax^2}\,dx$$

부분 적분법을 사용하도록 한다.

$$u = x, \qquad u' = 1, \qquad v' = xe^{-ax^2}, \qquad v = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2}$$

$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot x e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \left\{ \left[-\frac{1}{2a} x e^{-ax^2} \right]_{\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a} e^{-ax^2}\,dx \right\}$$

중괄호의 첫 번째 항이 기함수이므로 Fourier Integral 에서와 마찬가지로 무한대 적분의 결과는 0 이다.

$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \left\{ 0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a} e^{-ax^2}\,dx \right\} = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \times \frac{1}{2a} \times \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{2a}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2\sigma^2}$$

다음으로 평균을 고려해서 이를 완료해보도록 하자!

$$y = \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-ax^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

이 함수는 여전히 우함수로 평균이 0 이다.

$$E(Ax + B) = AE(x) + B$$
$$E(x + m) = E(X) + m = 0 + m$$

결국 변수들을 m 만큼 증가시키는 것은 f(x) 대신 f(x – m) 을 대입하면 된다.

$$y = \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-ax^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

이것이 정규분포의 확률밀도 함수에 해당한다.

Covariance

$$cov(x, y) = E[(x - x_m)(y - y_m)] = E[xy] - x_m y_m = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n - 1}$$

x 의 분산은 x 들의 평균을 중심으로 얼마나 흩어져 있는지를 나타낸다.
x 와 y 의 공분산은 x, y 의 흩어진 정도가 얼마나 서로 상관 관계를 가지고 흩어졌는지를 나타낸다.
예로 x 와 y 각각의 분산은 일정한데 x 가 x 의 평균보다 클 때 y 도 y 의 평균보다 크다면 공부산은 최대가 되고
x 가 x 의 평균보다 커질 때 y 가 y 의 평균보다 작아지면 공분산은 최소인 음수가 된다.
서로 상관관계가 없을 경우에는 공분산이 0 이 된다.

Covariance Matrix

공분산 행렬은 데이터의 좌표 성분들 사이의 공분산 값을 원소로 하는 행렬로
데이터의 i 번째 좌표 성분과 j 번째 좌표 성분의 공분산 값을 행렬의 i 행 j 열 원소값으로 하는 행렬이다.

$$cov(x, y) = E[(x - x_m)(y - y_m)] = E[xy] - x_m y_m = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n - 1}$$

$$var(X) = \begin{bmatrix} cov(x_1, x_1) & cov(x_1, x_2) & \cdots & cov(x_1, x_n) \\ cov(x_2, x_1) & cov(x_2, x_2) & \cdots & cov(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ cov(x_n, x_1) & cov(x_n, x_2) & \cdots & cov(x_n, x_n) \end{bmatrix}$$

이외에도 일반화시켜 아래와 같이 표기할 수 있다.

$$var(X) = E[(X - E[X])(X - E[X])^T]$$

Linear Transform of Expectation & Variance

분산과 기대값은 모두 아래와 같은 선형 변환을 만족한다.

$$\boldsymbol{E(AX+B)=AE(X)+B}$$
$$\boldsymbol{Var(AX+B)=A^2Var(X)}$$

이 내용들을 활용하여 Kalman Filter 를 도출해낼 수 있다.

Kalman Filter 는 아래의 Linear System 을 가정한다.

$$\boldsymbol{x_k = F_{k-1}x_{k-1} + G_{k-1}u_{k-1} + \omega_{k-1},} \qquad \boldsymbol{\omega_{k-1} \sim N(0, Q_{k-1})} \qquad \textbf{(입력)}$$
$$\boldsymbol{y_k = H_k x_k + V_k,} \qquad \boldsymbol{v_k \sim N(0, R_k)} \qquad \textbf{(출력)}$$

$\boldsymbol{X, F, G, H}$ 는 보편적으로 상수값의 벡터 혹은 행렬로 구성된다.

$$\boldsymbol{\hat{x}_k^- = E[x_k | y_1, \dots, y_{k-1}]} \qquad \textbf{Dynamic Update}$$
$$\boldsymbol{\hat{x}_k^+ = E[x_k | y_1, \dots, y_k\,]} \qquad \textbf{Measurement Update}$$
$$\boldsymbol{\hat{P}_k^- = E[(x - \hat{x}_k^-)(x - \hat{x}_k^-)^T]} \qquad \textbf{Dynamic Update(공분산)}$$
$$\boldsymbol{\hat{P}_k^+ = E[(x - \hat{x}_k^+)(x - \hat{x}_k^+)^T]} \qquad \textbf{Measurement Update(공분산)}$$

Dynamic Update

$$\boldsymbol{\hat{x}_k^- = E[x_k | y_1, \dots, y_{k-1}] = E[F_{k-1}x_{k-1} + G_{k-1}u_{k-1} + \omega_{k-1} | y_1, \dots, y_{k-1}] = F_{k-1}\hat{x}_{k-1}^+ + G_{k-1}u_{k-1}}$$
$$\boldsymbol{\hat{P}_k^- = E[(x_k - \hat{x}_k^-)(x - \hat{x}_k^-)^T] = E[(F_{k-1}x_{k-1} + G_{k-1}u_{k-1} + \omega_{k-1} - F_{k-1}\hat{x}_{k-1}^+ - G_{k-1}u_{k-1})(F_{k-1}x_{k-1} + G_{k-1}u_{k-1} + \omega_{k-1} - F_{k-1}\hat{x}_{k-1}^+ - G_{k-1}u_{k-1})^T]}$$

아래의 식들을 참고하여 위 식을 변환한다.

$$\boldsymbol{\hat{P}_{k-1}^+ = E[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)^T]}$$
$$\boldsymbol{E[(F_{k-1}x_{k-1} + G_{k-1}u_{k-1} + \omega_{k-1} - F_{k-1}\hat{x}_{k-1}^+ - G_{k-1}u_{k-1})] = E[F_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+) + \omega_{k-1}]}$$
$$\boldsymbol{E[(F_{k-1}x_{k-1} + G_{k-1}u_{k-1} + \omega_{k-1} - F_{k-1}\hat{x}_{k-1}^+ - G_{k-1}u_{k-1})^T] = E[\{F_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+) + \omega_{k-1}\}^T]}$$

아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\boldsymbol{\hat{P}_k^- = E[(x_k - \hat{x}_k^-)(x - \hat{x}_k^-)^T] = F_{k-1}E[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)^T]F_{k-1}^T + F_{k-1}E\left[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)\omega_{k-1}^T\right] + E[\omega_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)]F_{k-1}^T + E\left[\omega_{k-1}\omega_{k-1}^T\right]}$$

앞서 얻은 식을 다시 적어보도록 하자!

$$\hat{P}_k^- = E[(x_k - \hat{x}_k^-)(x - \hat{x}_k^-)^T] = F_{k-1}E[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)^T]F_{k-1}^T + F_{k-1}E\left[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)\omega_{k-1}^T\right] + E[\omega_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)]F_{k-1}^T + E\left[\omega_{k-1}\omega_{k-1}^T\right]$$

앞서 적었던 상관 관계에 대해 상기해보자!
여기서 입력치와 측정치간에 발생하는 오차와 시스템 모델에 대한 오차(Process Noise)는 어떠한 상관 관계도 없다.
그러므로 아래와 같이 적을 수 있다.

$$F_{k-1}E\left[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)\omega_{k-1}^T\right] = E[\omega_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)]F_{k-1}^T = 0$$

즉 위의 공분산 오차에 대한 예측치는 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\hat{P}_k^- &= E[(x_k - \hat{x}_k^-)(x - \hat{x}_k^-)^T] = F_{k-1}E[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)^T]F_{k-1}^T + E\left[\omega_{k-1}\omega_{k-1}^T\right] \\ &= F_{k-1}\hat{P}_{k-1}^+F_{k-1}^T + Q_{k-1}\end{aligned}$$

Measurement Update

$$\hat{x}_k^+ = E[x_k|y_1, \dots, y_k] = \hat{x}_k^- + Cov(x,y) \cdot Cov(y,y)^{-1}(y - Ey)$$
$$\hat{P}_k^+ = E[(x - \hat{x}_k^+)(x - \hat{x}_k^+)^T] = Cov(x,x) - Cov(x,y) \cdot Cov(y,y)^{-1}Cov(x,y)$$

앞서 얻은 식을 다시 적어보도록 하자!

$$\hat{\boldsymbol{P}}_k^- = E[(x_k - \hat{x}_k^-)(x - \hat{x}_k^-)^T] = F_{k-1}E[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)^T]F_{k-1}^T + F_{k-1}E\left[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)\omega_{k-1}^T\right] + E[\omega_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)]F_{k-1}^T + E\left[\omega_{k-1}\omega_{k-1}^T\right]$$

앞서 적었던 상관 관계에 대해 상기해보자!
여기서 입력치와 측정치간에 발생하는 오차와 시스템 모델에 대한 오차(Process Noise)는 어떠한 상관 관계도 없다.
그러므로 아래와 같이 적을 수 있다.

$$F_{k-1}E\left[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)\omega_{k-1}^T\right] = E[\omega_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)]F_{k-1}^T = 0$$

즉 위의 공분산 오차에 대한 예측치는 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\hat{P}_k^- &= E[(x_k - \hat{x}_k^-)(x - \hat{x}_k^-)^T] = F_{k-1}E[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)^T]F_{k-1}^T + E\left[\omega_{k-1}\omega_{k-1}^T\right] \\ &= F_{k-1}\hat{P}_{k-1}^+F_{k-1}^T + Q_{k-1}\end{aligned}$$

Measurement Update

앞서 얻은 식을 다시 적어보도록 하자!

$$\hat{P}_k^- = E[(x_k - \hat{x}_k^-)(x - \hat{x}_k^-)^T] = F_{k-1}E[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)^T]F_{k-1}^T + F_{k-1}E\left[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)\omega_{k-1}^T\right] + E[\omega_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+)]F_{k-1}^T + E\left[\omega_{k-1}\omega_{k-1}^T\right]$$

$$y = \sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-ax^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}} = P\left(x\middle|m, \sigma^2\right)$$

$$\frac{1}{Z(R)}e^{\frac{-(x-m)^T R(x-m)}{2}} = P(x|m, R)$$

$$Z(R) = \left[det\left(\frac{R}{2\pi}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$ (여기서 R 은 공분산 행렬의 역행렬이다)