

Лабораторная работа № 3

Численное интегрирование и дифференцирование

для потока А-4,6,7,8,9,10,12,17,20,Аэ-21—22 «Вычислительные методы»

Цель работы. Применить на практике простейшие численные методы вычисления интегралов и производных. Исследовать поведение погрешности методов при измельчении шага. Познакомиться с понятиями порядка точности и обусловленности (плохой/хорошей) задачи и их отражением в расчетах. Вычислить определенный интеграл с заданной точностью.

Задача 1. Найти приближенные значения интеграла $\int_a^b f(x)dx$ и производной $f'(a)$, используя указанные в индивидуальном варианте методы. Организовать серию расчетов с шагами $h_k = (b-a)/10^k$ ($k = 1, 2, \dots, 15$). Сделать выводы о порядке точности и обусловленности методов.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1. Вычислить точное значение J интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.
2. Реализовать программно составную формулу численного интегрирования. Вычислить с ее помощью приближенные значения интеграла I_k для $k = 1, 2, \dots, 15$. Заполнить второй столбец таблицы.
3. Для каждого приближенного значения интеграла найти погрешность $\Delta_k = |J - I_k|$. Заполнить третий столбец таблицы.

Прим 1. Вычисления можно прекратить на том значении шага, при котором расчет занимает более 40 минут.

4. Вычислить точное значение D производной, подставив число a в формулу для $f'(x)$.
5. Реализовать программно формулу численного дифференцирования. Вычислить с ее помощью приближенные значения производной d_k для $k = 1, 2, \dots, 15$. Заполнить 4-ый столбец таблицы.
6. Для каждого приближенного значения производной найти погрешность $\Delta_k = |D - d_k|$. Заполнить 5-ый столбец таблицы.

Прим 2. Все приближенные значения и их погрешности должны быть округлены по принятым правилам.

Таблица 1

Шаг h	Приближенное значение интеграла	Погрешность численного интегрирования	Приближенное значение производной	Погрешность численного дифференцирования
$(b-a)/10$				
$(b-a)/10^2$				
...				
$(b-a)/10^{15}$				

7. Сделать выводы (отдельно для каждой из двух формул).
 1. Указать порядок точности формулы по h .
 2. Пользуясь заполненной таблицей, показать, что расчет подтверждает указанный порядок точности.
 3. Отметить, все ли данные соответствующего столбца можно использовать для анализа порядка точности.
 4. Указать шаг h , при котором достигается наилучшая точность.
 5. Определить, проявилась ли в расчетах (и в чем именно) хорошая или плохая обусловленность метода.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ 1

N	$f(x)$	a	b	Квадратурная формула	Формула численного дифференцирования
1	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	левых прямоугольников	левая
2	$\frac{1+\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}$	0	$\frac{\pi}{4}$	центральных прямоугольников	правая
3	$\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}$	1	3	правых прямоугольников	центральная
4	$\frac{\sin x(1+\cos x)}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$	0	$\frac{\pi}{2}$	трапеций	левая
5	$\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{(1+x)^3}}$	0	2	левых прямоугольников	правая
6	$\operatorname{tg} x \ln \cos x$	0	$\frac{\pi}{4}$	центральных прямоугольников	центральная
7	$\frac{x}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	правых прямоугольников	левая
8	$\frac{1}{2+\sqrt{5-4x}}$	-1	1	трапеций	правая
9	$x \cos^2 x$	0	$\frac{\pi}{2}$	левых прямоугольников	центральная
10	$(3x+2) \cos 3x$	0	$\frac{\pi}{3}$	центральных прямоугольников	левая
11	$(2x+3)4^{2x}$	0	1	правых прямоугольников	правая
12	$x \sin^2 \frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	трапеций	центральная
13	$(x^2+1) \sin 2x$	0	$\frac{\pi}{4}$	левых прямоугольников	левая
14	$(2x-1) \cos 2x$	0	$\frac{\pi}{4}$	центральных прямоугольников	правая
15	$(x^2-x) \sin \frac{\pi x}{2}$	0	1	правых прямоугольников	центральная
16	$e^{-x}(x^2-x)$	0	3	трапеций	левая
17	$(3x+1) \sin 2x$	0	$\frac{\pi}{4}$	левых прямоугольников	правая
18	$(2x-1)3^x$	0	1	центральных прямоугольников	центральная
19	$(x^2-1)e^{2x}$	1	2	правых прямоугольников	левая
20	$(x-2)e^{-2x}$	0	3	трапеций	правая
21	$\frac{\arccos 2x}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	левых прямоугольников	центральная

22	$\ln(x^2 + 1)$	0	1	центральных прямоугольников	левая
23	$x \operatorname{arctg} 2x$	0	$\frac{1}{2}$	правых прямоугольников	правая
24	$\arccos \frac{x}{2}$	0	1	трапеций	центральная
25	$\frac{\cos x}{4 + \sqrt{\sin x}}$	0	$\frac{\pi}{2}$	левых прямоугольников	левая

Задача 2. Повторить расчет интеграла из Задачи 1 с помощью квадратурной формулы Ньютона-Котеса высокого порядка точности, указанной в индивидуальном варианте. Заполнить соответствующую таблицу (табл. 1). Сравнить результаты с результатами Задачи 1 (с учетом порядков точности использованных формул). **Сделать выводы:** пользуясь результатами вычислений, показать, что расчет подтверждает порядок точности формулы Ньютона-Котеса; а также показать, в чем проявилось преимущество одной из двух квадратурных формул (из задач 1 и 2) над другой.

Используя алгоритм подбора единого на всем отрезке шага интегрирования (см. Приложение 2), вычислить значение интеграла из Задачи 1 с помощью той же квадратурной формулы Ньютона-Котеса высокого порядка точности с заданной в индивидуальном варианте точностью ε . Предусмотреть возврат значения шага, на котором происходит выход из расчета.

Заполнить

таблицу

2.

Таблица 2

Значение точности	Точное значение I	Приближенное значение I	Абсолютная погрешность	Значение шага интегрирования

Сделать выводы: сопоставить значение шага, на котором достигнута заданная точность, с данными из предыдущей таблицы.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ 2

N	$\varepsilon = p10^{-k}$	Формулы Ньютона-Котеса при использовании многочленов степеней $m=2,3,4,5,6$ (описание в Приложении 1)
1	$p=1, k=9$	$m=2$ (Симпсона)
2	$p=1, k=10$	$m=3$ (Правило 3/8)
3	$p=1, k=11$	$m=4$ (Милна)
4	$p=1, k=12$	$m=5$
5	$p=2, k=9$	$m=6$ (Вэджла)
6	$p=2, k=10$	$m=2$ (Симпсона)
7	$p=2, k=11$	$m=3$ (Правило 3/8)
8	$p=2, k=12$	$m=4$ (Милна)
9	$p=3, k=9$	$m=5$
10	$p=3, k=10$	$m=6$ (Вэджла)
11	$p=3, k=11$	$m=2$ (Симпсона)
12	$p=3, k=12$	$m=3$ (Правило 3/8)
13	$p=4, k=9$	$m=4$ (Милна)
14	$p=4, k=10$	$m=5$
15	$p=4, k=11$	$m=6$ (Вэджла)
16	$p=4, k=12$	$m=2$ (Симпсона)
17	$p=5, k=9$	$m=3$ (Правило 3/8)

18	$p=5, k=10$	$m=4$ (Милна)
19	$p=5, k=11$	$m=5$
20	$p=5, k=12$	$m=6$ (Вэддла)
21	$p=6, k=9$	$m=2$ (Симпсона)
22	$p=6, k=10$	$m=3$ (Правило 3/8)
23	$p=6, k=11$	$m=4$ (Милна)
24	$p=6, k=12$	$m=5$
25	$p=7, k=9$	$m=6$ (Вэддла)

Задача 3 Вычислить значение интеграла

$$\int_a^b f(x) dx \text{ с помощью квадратурной формулы из задачи 2 (см. варианты заданий) с}$$

заданной в задаче 2 точностью $\varepsilon = p10^{-k}$,

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1. Разбить отрезок интегрирования на M отрезков.
2. На каждом отрезке применить алгоритм, разработанный в задаче 2, с точностью $\varepsilon_M = p10^{-k}/M$.
3. Сложить полученные результаты.
4. Заполнить таблицу 3 для значений $M = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Таблица 3

Значение точности ε	Точное значение J	Приближенное значение I	Абсолютная погрешность	Значение минимального из шагов интегрирования на всех отрезках h_{min}	Число отрезков разбиения M

5. Сделать выводы:
 - а) выбрать число отрезков M , для которого заданная точность достигается при наибольшем значении величины h_{min} (см. табл. 3);
 - б) выбрать параметр M , при котором достигнута наименьшая трудоемкость (по количеству вычислений интегрируемой функции) и объяснить, за счет чего произошла экономия действий.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ 3

N	$f(x)$	a	b	$\varepsilon = p10^{-k}$	Формулы Ньютона-Котеса при использовании многочленов степеней $m=2,3,4,5,6$ (описание в Приложении)
1	$\frac{x}{x^2 + 3x + 2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$p=1, k=9$	$m=2$ (Симпсона)
2	$\frac{1}{x\sqrt{(1+x)^3}}$	0	2	$p=1, k=10$	$m=3$ (Правило 3/8)
3	$\frac{x}{x^4 - 2x^2 + 5}$	3	8	$p=1, k=11$	$m=4$ (Милна)
4	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$	1	$\sqrt{3}$	$p=1, k=12$	$m=5$
5	$\frac{1}{\sqrt{e^x + 4}}$	4	9	$p=2, k=9$	$m=6$ (Вэддла)
6	$\frac{\sqrt{\arctg x + 1}}{1 + x^2}$	$\ln 21$	$\ln 32$	$p=2, k=10$	$m=2$ (Симпсона)

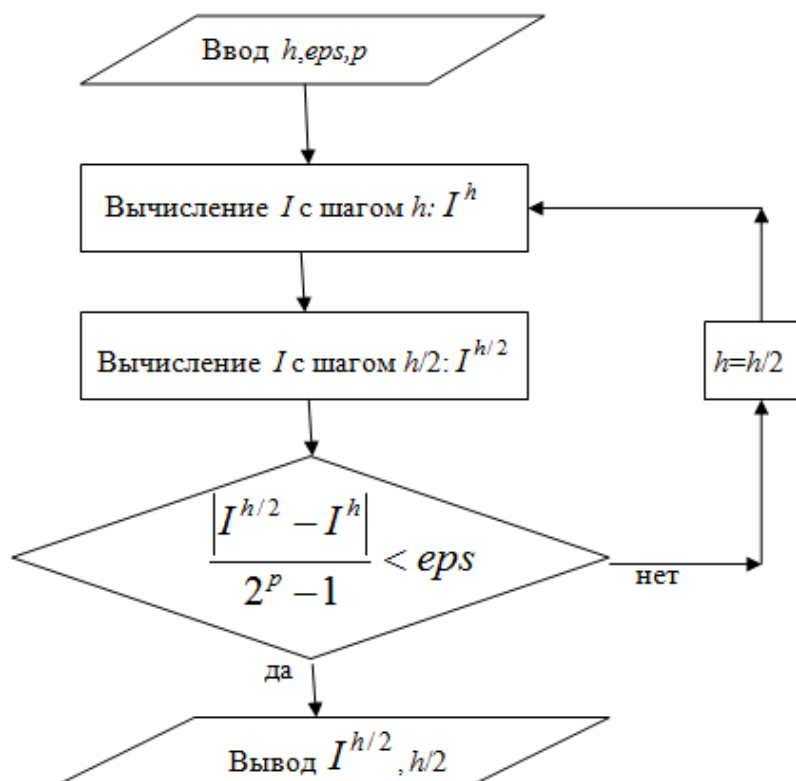
7	$x^3\sqrt{x^2-16}$	0	1	p=2, k= 11	m=3 (Правило 3/8)
8	$\frac{x}{\cos^2 x^2}$	4	5	p=2, k= 12	m=4 (Милна)
9	$\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	0	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	p=3, k= 9	m=5
10	$\frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}$	$\frac{\pi^2}{9}$	π^2	p=3, k= 10	m=6 (Вэддла)
11	$\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos^9 x}}$	0	2	p=3, k= 11	m=2 (Симпсона)
12	$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x+1)^2}}$	0	$\frac{\pi}{4}$	p=3, k= 12	m=3 (Правило 3/8)
13	$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{3}$	p=4, k= 9	m=4 (Милна)
14	$\frac{1}{e^x(3+e^{-x})}$	15	80	p=4, k= 10	m=5
15	$\sqrt{16-x^2}$	0	ln 2	p=4, k= 11	m=6 (Вэддла)
16	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	0	4	p=4, k= 12	m=2 (Симпсона)
17	$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	p=5, k= 9	m=3 (Правило 3/8)
18	$\frac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)}$	0	3	p=5, k= 10	m=4 (Милна)
19	$\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}$	e^2	e^3	p=5, k= 11	m=5
20	$\frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}$	3	8	p=5, k= 12	m=6 (Вэддла)
21	$\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}$	$-\frac{1}{2}$	0	p=6, k= 9	m=2 (Симпсона)
22	$x \operatorname{arctg} 3x$	0	ln 5	p=6, k= 10	m=3 (Правило 3/8)
23	$e^{-x} \sin 2x$	0	$\frac{1}{3}$	p=6, k= 11	m=4 (Милна)
24	$\operatorname{arctg} \sqrt{5x-1}$	0	π	p=6, k= 12	m=5
25	$e^{2x} \cos x$	$\frac{1}{2}$	1	p=7, k= 9	m=6 (Вэддла)

Квадратурные формулы и порядки точности формул для приближенного вычисления

интеграла $\int_a^b f(x)dx$

Формула	Название	Порядок точности
$\sum_{i=1}^N hf(x_{i-1})$	левых прямоугольников	1
$\sum_{i=1}^N hf(x_i)$	правых прямоугольников	1
$\sum_{i=1}^N hf(x_i - \frac{h}{2})$	центральных прямоугольников	2
$\sum_{i=1}^N \frac{h}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i))$	трапеций	2
$\sum_{i=1}^N \frac{h}{6} (f(x_{i-1}) + 4f(x_i - \frac{h}{2}) + f(x_i))$	Ньютона-Котеса при m=2 (Симпсона)	4
$\sum_{i=1}^N \frac{h}{8} (f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-1} + \frac{h}{3}) + 3f(x_i - \frac{h}{3}) + f(x_i))$	Ньютона-Котеса при m=3 (Правило 3/8)	4
$\sum_{i=1}^N \frac{h}{90} (7f(x_{i-1}) + 32f(x_{i-1} + \frac{h}{4}) + 12f(x_i - \frac{h}{2}) + 32f(x_i - \frac{h}{4}) + 7f(x_i))$	Ньютона-Котеса при m=4 (Милна)	6
$\sum_{i=1}^N \frac{h}{288} (19f(x_{i-1}) + 75f(x_{i-1} + \frac{h}{5}) + 50f(x_{i-1} + \frac{2h}{5}) + 50f(x_i - \frac{2h}{5}) + 75f(x_i - \frac{h}{5}) + 19f(x_i))$	Ньютона-Котеса при m=5	6
$\sum_{i=1}^N \frac{h}{840} (41f(x_{i-1}) + 216f(x_{i-1} + \frac{h}{6}) + 27f(x_{i-1} + \frac{h}{3}) + 272f(x_i - \frac{h}{2}) + 27f(x_i - \frac{h}{3}) + 216f(x_i - \frac{h}{6}) + 41f(x_i))$	Ньютона-Котеса при m=6 (Вэддла)	8

Алгоритм вычисления интеграла с заданной точностью (для Задачи 2)



Пример вычисления определенного интеграла с помощью библиотек на Python

```

File Edit View Insert Cell Kernel Widgets Help Доверенный Python 3
[Icons] [Icons] [Icons] [Icons] [Icons] [Icons] [Icons] [Icons] [Icons] [Icons] [Icons]
B [16]: from scipy import integrate
        from math import cos, pi

        def f(x):
            return 1.0/cos(x)
        J = integrate.quad(f, 0, pi/4)
        print(J)

        (0.881373587019543, 9.785212496055606e-15)
  
```

The screenshot shows a Jupyter Notebook interface. The top bar contains menu items: File, Edit, View, Insert, Cell, Kernel, Widgets, Help, and a status bar with 'Доверенный' and 'Python 3'. Below the menu is a toolbar with various icons for file operations and execution. The main area displays a code cell with the following Python code: `from scipy import integrate`, `from math import cos, pi`, a function definition `def f(x): return 1.0/cos(x)`, and a call to `integrate.quad(f, 0, pi/4)` followed by `print(J)`. The output of the code is `(0.881373587019543, 9.785212496055606e-15)`.