Лабораторная работа №2

17 Вариант

Имя: **Татарников Максим Станисловович**
Группа: А-07-22
Проверил:
Оценка:

Москва 2023

Содержание

1 Задача

1. Описать класс, представляющий нелинейное уравнение вида:
$$ax - cos(x) = 0$$
.
2. Описать метод, вычисляющий решение этого уравнения на заданном интервале методом деления пополам и выбрасывающий исключение в случае отсутствия корня.
3. Описать свойства для получения состояния объекта.
4. Написать программу, демонстрирующую все разработанные элементы класса.
5. Создать дочерний класс, реализующий метод вычисления решения этого уравнения на заданном интервале методом Ньютона.

2 Постановка задачи

Методы приближенных вычислений для уточнения корня Для того, чтобы найти значение корня функции $y = f(x)$ вовсе не обязательно искать обратную функцию $x = f^{-1}(y)$, существуют методы приближенного вычисления, которые позволяют вычислить корень с заданной точностью имея начальное приближение или отрезок.

2.1 Методы

2.1.1 Деление отрезка пополам

Рисунок 1 иллюстрирует метод половинного деления, который состоит в постепенном сужении отрезка поиска корня до заданной величины ε. На каждом шаге отрезок уменьшается вдвое.

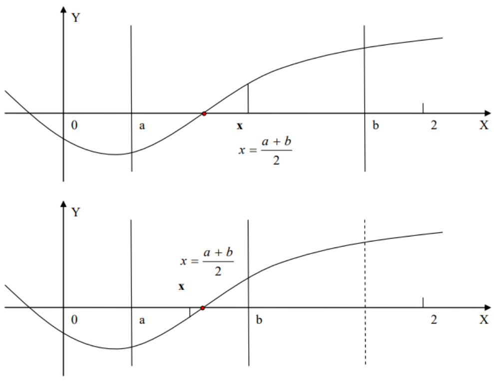

Рис. 1: Метод деление отрезка пополам

В начале каждой итерации находим середину нового отрезка $[a, b]$

$$x = \frac{a+b}{2}$$

Затем следует определить, с какой стороны от середины отрезка x находится корень $x*$. Для этого достаточно сравнить знаки $f(x)$ и $f(b)$ или знаки $f(x)$ и $f(a)$.

Если знаки $f(x)$ и $f(b)$ не совпадают, то это означает, что $f(x)$ пересекает ось x на правом полуотрезке $[x, b]$. Следовательно, корня нет на левом полуотрезке $[a, x]$, и этот полуотрезок можно отбросить, то есть можно перенести левую границу a в среднюю точку x (заменить значение приближения a на значение x).

Если же знаки $f(x)$ и $f(b)$ совпадают, то $f(x)$ пересекает ось x на левом полуотрезке $[a, x]$ и, следовательно, корня нет на правом полуотрезке $[x, b]$, и этот полуотрезок можно отбросить, то есть можно перенести правую границу b в среднюю точку x (заменить значение приближения b на значение x).

Итак, в результате выполнения итерации отрезок $[a, b]$ как и прежде, содержит единственный корень, но его длина стала меньше в два раза.

Вычисления следует прекратить, если на очередном шаге длина отрезка $[a, b]$ станет меньше ε. Тогда с точностью ε любая точка этого отрезка будет являться корнем уравнения $f(x)$, а середина этого отрезка – с точностью $\varepsilon/2$. Совпадение знаков $f(x)$ и $f(b)$ можно проверить, проверив неравенство

$$f(x) \cdot f(b) > 0$$

поскольку произведение двух чисел с одинаковыми знаками дает положительное значение.

2.2 Метод Ньютона (касательных)

Пусть имеется начальное приближение к корню, которое обозначим x_1. Например, можно взять середину отрезка $[a, b]$:

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

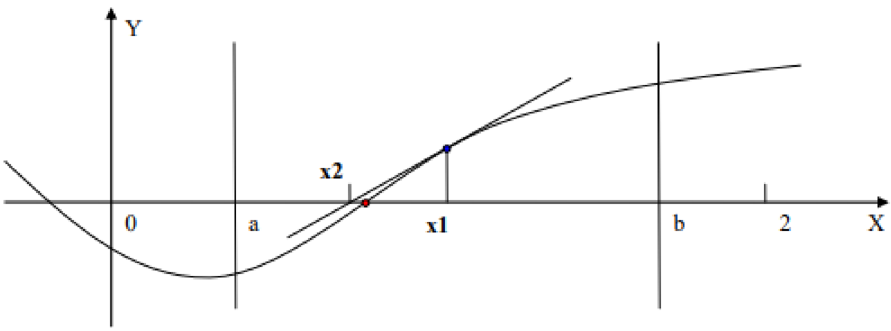

Рис. 2: Метод Ньютона (касательных)

Проведем касательную к графику $y = f(x)$ в точке с координатами $(x_1, f(x_1))$. Новое приближение к корню, которое мы будем называть следующим приближением, x_2 получим как точку пересечения этой касательной с осью абсцисс. Это правило приводит к следующей расчетной формуле:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

При соблюдении некоторых условий (они называются условиями сходимости), которые будут перечислены ниже, строго доказано, что приближение x_2 находится ближе к корню, чем приближение x_1. Теперь заменим значение начального приближения x_1 на значение только что полученного приближения x_2. Мы пришли к той же самой задаче, но теперь начальное приближение расположено ближе к корню, чем до его изменения на x_2. Каждое такое улучшение приближения к корню за счет вычисления следующего приближения называется итерацией. Сколько нужно выполнить итераций, чтобы нас могла устроить точность приближение x_2 к значению корня $x*$? Обычно считают, что требуемая точность достигнута, если после вычисления x_2 при выполнении очередной итерации соблюдается условие

$$|f(x_1)| < \varepsilon$$

При выполнении этого неравенства итерационный процесс уточнения корня следует прекратить и в качестве искомого приближенного значения корня взять x_2. Смысл условий сходимости метода Ньютона состоит в том, что

1. Начальное приближение x_1, используемое при выполнении первой итерации, должно быть не слишком далеко от корня.

2. Производная $f'(x)$, которая находится в знаменателе, должна изменяется на отрезке $[a, b]$ не очень быстро и не обращаться в ноль ни в одной точке отрезка $[a, b]$.

Мы будем считать, что они выполняются. Метод Ньютона является наиболее быстрым среди численных методов вычисления корня функционального уравнения. На практике необходимая точность достигается буквально после выполнения нескольких (не более 10) итераций.