Лабораторная работа №2

для потоков

А-4,6,7,8,9,10,12,17,20,Аэ-21—22 «Вычислительные методы»

Решение нелинейных уравнений

Цель работы. Изучить и применить на практике средства языка Python для поиска корней нелинейных уравнений. Познакомиться на практике с понятием сходимости со скоростью геометрической прогрессии. Научиться сравнивать скорость работы итерационных методов.

Задача 1. Локализуйте максимальный вещественный корень уравнения $f(x)=0$ и найдите его с точностью ε, используя средства языка Python.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (пример - в приложении)

1. Постройте график заданной функции, используя средства библиотеки ***matplotlib.*** По графику определить отрезок локализации и начальное приближение для искомого корня.
2. Найдите корень, используя библиотечную функцию ***scipy.optimize.newton().***
3. Найдите тот же корень, используя библиотечную функцию ***scipy.optimize.newton()*** с передаваемой в нее производной. Проконтролируйте совпадение результатов.

Задача 2. Даны два уравнения *f(x)=0* и *g(x)=0*. Найдите с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$ все их корни, содержащиеся на отрезке [*a*, *b*]. Для решения задачи реализуйте программно метод бисекции.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1. Найти аналитическое решение уравнения *f(x)=0*.
2. Составить программу для нахождения корня с заданной точностью методом бисекции, с ее помощью найти корни уравнения с заданной точностью.
4. Используя библиотечную функцию ***scipy.optimize.root().***, найти корни уравнения *f(x)=0* с заданной точностью. Сравнить полученные результаты.
5. Аналогично п. 1-4 попытаться найти корни уравнения *g(x)=0*. Объяснить причины расхождения результатов для двух функций.

Задача 3. Методом простой итерации найти <u>все вещественные корни</u> уравнения из задачи 1 точностью $\varepsilon = 10^{-13}$. Проследить за поведением погрешности.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ.

1. Локализовать все вещественные корни заданного уравнения.
2. По графику производной или путем ее табулирования найти диапазон изменения ее значений на очередном отрезке локализации.
3. Построить расчетные формулы метода простой итерации с оптимальным параметром: $x^{(n+1)} = x^{(n)} - \alpha \cdot f\left(x^{(n)}\right)$, где $\alpha = \dfrac{2}{m+M}$, $m = \min\limits_{[a,b]} f'(x)$, $M = \max\limits_{[a,b]} f'(x)$, [a,b] - очередной отрезок локализации корня.
4. Составить программу для нахождения корня с заданной точностью методом простой итерации с оптимальным параметром (предусмотреть возможность вывода промежуточной информации о расчетах).
5. Заполнить таблицу (для каждого корня).

Номер итерации n	**Приближение $x^{(n)}$**	**Апостериорная оценка погрешности**

6. Проанализировать полученные результаты.

3.1. Указать, на какой итерации достигается точность $\varepsilon = 10^{-13}$ (для каждого корня).
3.2. Сравнить скорость работы методов (по количеству итераций) для разных корней.
3.3. Определить практически скорость убывания погрешности для каждого из корней (для чего вычислять отношение погрешностей у каждой пары последовательных шагов метода).
3.4. Предложить объяснение причины, по которой поиск различных корней происходит с различной скоростью сходимости (если таковое наблюдается).

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица к задаче 1

N	$f(x)$	ε	***N***	$f(x)$	ε
1	$0.9x^3+3.5x^2-0.3x-1$	10^{-8}	**16**	$0.9x^3+3.5x^2-0.3x-4$	10^{-6}
2	$0.7x^3+3.4x^2-12x+1$	10^{-5}	**17**	$9.8x^3+10x^2-8.8x-4.2$	10^{-5}
3	$-1.7x^3-23x^2+6x+1$	10^{-6}	**18**	$-2.8x^3+2x^2+19x-3.7$	10^{-8}
4	$1.5x^3+4.5x^2-18x+4$	10^{-4}	**19**	$0.9x^3+3.5x^2+3x-0.1$	10^{-9}
5	$1.5x^3-8.4x^2-16x+2$	10^{-9}	**20**	$0.6x^3-8.5x^2+4x+1.3$	10^{-7}
6	$2.8x^3-13.6x^2+11x+3$	10^{-7}	**21**	$1.8x^3-5.3x^2-13x+12$	10^{-7}
7	$6.2x^3+1.3x^2-9.6x-4$	10^{-8}	**22**	$-2.8x^3+9.3x^2+13x-5$	10^{-5}
8	$-5.8x^3-3.2x^2+10.1x-2$	10^{-7}	**23**	$-4.9x^3+9.4x^2+7.8x-5.1$	10^{-9}
9	$-0.8x^3+2.3x^2+14.1x-3.7$	10^{-8}	**24**	$5.3x^3+13x^2-8x-16$	10^{-6}
10	$-0.9x^3+3.5x^2-0.3x-1$	10^{-6}	**25**	$-0.7x^3-2.3x^2+6.7x+0.4$	10^{-6}
11	$1.1x^3-1.9x^2-2.5x+1$	10^{-4}	**26**	$7.1x^3+5.3x^2-6.1x-2.5$	10^{-7}
12	$0.5x^3-1.1x^2-1.9x+2.1$	10^{-9}	**27**	$-7.1x^3-1.3x^2+6.1x+0.5$	10^{-6}
13	$-1.8x^3-3.5x^2+1.2x+3$	10^{-6}	**28**	$1.3x^3+1.3x^2-8x-5$	10^{-9}
14	$5.9x^3+22x^2-8x-1$	10^{-9}	**29**	$5.6x^3+1.3x^2-6x+1.4$	10^{-5}
15	$4.6x^3-35x^2+4.8x+1$	10^{-5}	**30**	$-4.7x^3-2.3x^2+6.5x-0.4$	10^{-7}

Таблица к задаче 2

N	*f(x)*	*g(x)*	$[a,b]$
1	$(\sin x)^2-\frac{5}{6}\sin x+\frac{1}{6}$	$(\sin x)^2-\sin x+\frac{1}{4}$	$[0,1]$
2	$(\sin x)^2+\frac{7}{12}\sin x+\frac{1}{12}$	$(\sin x)^2+\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{9}$	$[-1,0]$
3	$(\sin x)^2-\frac{1}{30}\sin x-\frac{1}{30}$	$(\sin x)^2-\frac{2}{5}\sin x+\frac{1}{25}$	$[-0.5,0.5]$

4	$(\cos x)^2+\frac{2}{35}\cos x-\frac{1}{35}$	$(\cos x)^2-\frac{2}{7}\cos x+\frac{1}{49}$	$[0,2]$
5	$(\cos x)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\right)\cos x+\frac{1}{4\sqrt{2}}$	$(\cos x)^2-\frac{2}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{2}$	$[0,1.5]$
6	$(\cos x)^2+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{18}$	$(\cos x)^2+\frac{1}{3}\cos x+\frac{1}{36}$	$[0,2]$
7	$(\ln x)^2-5\ln x+6$	$(\ln x)^2-4\ln x+4$	[5,25]
8	$(\ln x)^2-\ln x-2$	$(\ln x)^2+2\ln x+1$	[0.1,10]
9	$(\ln x)^2-\frac{3}{4}\ln x+\frac{1}{8}$	$(\ln x)^2-\ln x+\frac{1}{4}$	[0.1,2]
10	$(tgx)^2+(\sqrt{3}-1)tgx-\sqrt{3}$	$(tgx)^2-2tgx+1$	$[-1.2,1]$
11	$(tgx)^2-\frac{28}{9}tgx+\frac{1}{3}$	$(tgx)^2-6tgx+9$	$[0,1.5]$
12	$(tgx)^2-\frac{53}{6}tgx-\frac{3}{2}$	$(tgx)^2-\frac{1}{3}tgx+\frac{1}{36}$	$[-0.5,1.5]$
13	x^4-7x^2+10	x^4-4x^2+4	[0,3]
14	$x^4-\frac{10}{3}x^2+1$	x^4-6x^2+9	[0,2]
15	$x^4-\frac{13}{2}x^2+3$	$x^4-x^2+\frac{1}{4}$	[0,3]
16	$(\sin x)^2+\frac{5}{6}\sin x+\frac{1}{6}$	$(\sin x)^2+\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{9}$	$[-1,0]$
17	$(\sin x)^2-\frac{7}{12}\sin x+\frac{1}{12}$	$(\sin x)^2-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{16}$	$[0,1]$
18	$(\sin x)^2+\frac{1}{30}\sin x-\frac{1}{30}$	$(\sin x)^2+\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{36}$	$[-0.5,0.5]$
19	$(\cos x)^2-\frac{2}{35}\cos x-\frac{1}{35}$	$(\cos x)^2-\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{25}$	$[0,3]$
20	$(\cos x)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\right)\cos x-\frac{1}{4\sqrt{2}}$	$(\cos x)^2-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{16}$	$[0,2]$
21	$(\cos x)^2-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{18}$	$(\cos x)^2-\frac{2}{3}\cos x+\frac{1}{9}$	$[0,2]$
22	$(\lg x)^2+\frac{5}{3}\lg x-\frac{2}{3}$	$(\lg x)^2-\frac{2}{3}\lg x+\frac{1}{9}$	[0.001,3]
23	$(\lg x)^2-\lg x-\frac{3}{4}$	$(\lg x)^2-3\lg x+\frac{9}{4}$	[0.1,35]
24	$(\lg x)^2+\frac{3}{4}\lg x-\frac{1}{4}$	$(\lg x)^2+2\lg x+1$	[0.01,3]
25	$(tgx)^2-(1+\frac{1}{\sqrt{3}})tgx+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(tgx)^2-2tgx+1$	$[0,1]$
26	$(tgx)^2-\frac{7}{4}tgx-\frac{1}{2}$	$(tgx)^2+\frac{1}{2}tgx+\frac{1}{16}$	[-0.5,1.5]

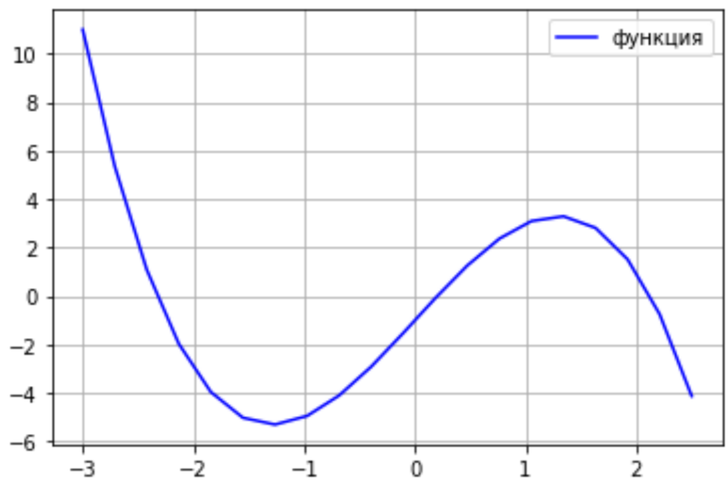
27	$(tgx)^2 + \frac{37}{6}tgx + 1$	$(tgx)^2 + 12tgx + 36$	[-1.5,0]
28	$x^4 - 11x^2 + 24$	$x^4 - 6x^2 + 9$	[1,3]
29	$x^4 - \frac{26}{5}x^2 + 1$	$x^4 - 10x^2 + 25$	[0,3]
30	$x^4 - \frac{21}{2}x^2 + 5$	$x^4 - x^2 + \frac{1}{4}$	[0,5]

In [1]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return -x**3 + 5*x - 1
def df(x):
    return -3*x**2 + 5

x = np.linspace(-3.0,2.5,20)
plt.grid(True)
plt.plot(x,f(x), color='blue', label='функция')
#plt.plot(x,df(x), color='red', label='производная',
          #ls='', marker='.',markersize=12)
plt.legend()
# можно сохранить (на память):
plt.savefig('график.png', dpi=500)
```



In [5]:

```
from scipy.optimize import newton

x0 = 0.8
res1 = newton(f, x0, tol=1e-10, full_output=True)
res2 = newton(f, x0, tol=1e-10, full_output=True, fprime=df)

print ("метод секущих:\n", res1)
print ("метод Ньютона:\n", res2)
```

```
метод секущих:
 (0.20163967572340463,       converged: True
           flag: 'converged'
 function_calls: 8
     iterations: 7
           root: 0.20163967572340463)
метод Ньютона:
 (0.2016396757234047,       converged: True
           flag: 'converged'
 function_calls: 10
     iterations: 5
           root: 0.2016396757234047)
```

In [3]:
```
from scipy.optimize import root

x0 = 0.8
Q = root(f,x0)
x_res = Q.x[0]

print("%0.9f" %x_res, ' :" ', "%0.9f" %f(x_res))
# или так:
print("%0.9e" %x_res, ' :" ', "%0.9e" %f(x_res))
```

```
0.201639676  :"  0.000000000
2.016396757e-01  :"  2.220446049e-16
```

In [ ]: