参考サイト：受験の月

軌跡

→「何らかの同一の条件を満たす点の集合」

<ex>

・ある点について，距離がrの点の軌跡は半径rの円である。

・2つの点について，その2点からの距離の等しい点の軌跡は ＿＿＿＿＿ である。

軌跡の解法

求めたい点を(x, y)とおく。

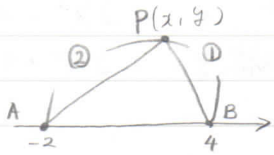
⇓ 条件を式にして

(x, y)の式を導く。

- そのまま整理するだけパターン <ex1>
- 媒介変数表示のパターン <ex2>
- 連動点パターン <ex3>

<ex> アポロニウスの円

2点 $A(-2, 0)$，$B(4, 0)$ からの距離の比が $2:1$ の点の軌跡は。



Step1. 点を(x, y)とおく。

条件を満たす点を$P(x, y)$とおく。

Step2. 条件を式にする

$AP:PB = 2:1 \iff AP = 2PB$ よって $AP^2 = 4PB^2$

$$\therefore \underbrace{(x+2)^2 + y^2}_{AP^2} = \{\underbrace{(x-4)^2 + y^2}_{BP^2}\} \times 4$$

$$\vdots$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 16 \quad \cdots ①$$

したがって，点Pは①上にある。

逆に①上の全ての点は条件を満たす。

"お約束"みたいなものと思って書こう。

∴ 求める軌跡は①で，中心$(6, 0)$ 半径4の円

一般に軌跡は図形なので，特徴をかいて答える。

<ex2> $y = x^2 + (2a-4)x - a^2$ $(a \geqq 0)$ の頂点Pの軌跡は?

Step 1.

P(X, Y) とおくと

Step 2.

$y = \{x + (a-2)\}^2 - a^2 - (a-2)^2$ より

$$\begin{cases} X = -(a-2) \\ Y = -a^2 - (a-2)^2 \end{cases} \quad (a \geqq 0)$$

☆目標: aを消去して X, Y の式にする

$X = -a+2 \iff a = 2 - X$

$a \geqq 0$ なので $2 - X \geqq 0 \iff 2 \geqq X$

変数を消去するときは情報をひきつぐ!

$$\begin{aligned} Y &= -(2-X)^2 - (-X)^2 \\ &= -(X^2 - 4X + 4) - X^2 \\ &= -2X^2 + 4X - 4 \end{aligned}$$

∴ 放物線 $y = -2x^2 + 4x - 4$ $(x \leqq 2)$ である。

問

(1) $2x - y - 3 = 0$, $x - 2y = 0$ のなす角(2つある)の2等分線の方程式を求めよ。

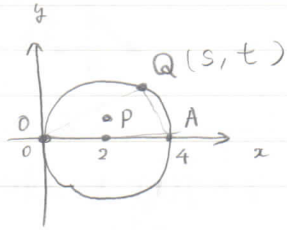
Hint
- 角の2等分線上の点を (x, y) とおく。
- 角の2等分線はどんな点の集合?
- $|A| = |B| \iff A = \pm B$

Ans. $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = t^2 + 2 \\ y = t^4 + 3t^2 + 2 \end{cases}$ で表される軌跡を求めよ。(ただし t は実数)

Ans. $y = x^2 - x$ $(x \geqq 2)$

<ex3> 円 $(x-2)^2+y^2=4$ 上の点 $O(0,0)$ と $A(4,0)$ がある。
点 Q が円上を動くとき，$\triangle OAQ$ の重心 P の軌跡を求めよ。



Step 1.

$Q(s,t)$，$P(x,y)$ とする。

Step 2

P は $\triangle OAQ$ の重心だから

$$\begin{cases} x = \dfrac{0+s+4}{3} = \dfrac{s+4}{3} \\[2ex] y = \dfrac{0+t+0}{3} = \dfrac{t}{3} \end{cases}$$

$\begin{cases} s = ● \\ t = ● \end{cases}$ にして

代入

Q は円 $(x-2)^2+y^2=4$ 上の点だから
$(s-2)^2+t^2=4$ を満たす。

$$\begin{cases} s = 3x-4 \\ t = 3y \end{cases}$$

ここで，$t=0$ のときは $\triangle OAQ$ ができないので $t \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$

代入して

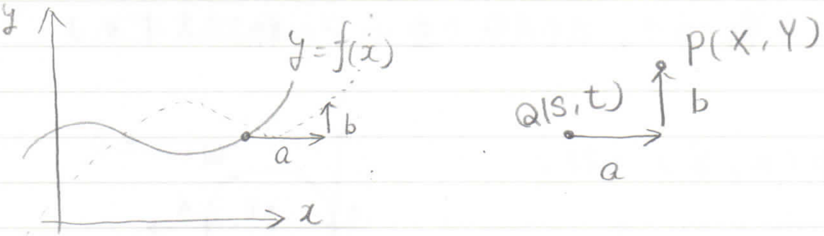
$$\{(3x-4)-2\}^2+(3y)^2=4$$
$$(3x-6)^2+9y^2=4$$
$$(x-2)^2+y^2=\frac{4}{9}$$

$y \neq 0$ だから，$(x-2)^2 \neq \dfrac{4}{9}$　$x \neq \cancel{2 \pm} \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{3}, \dfrac{4}{3}$

したがって

円 $(x-2)^2+y^2=\dfrac{4}{9}$ ただし $\left(\dfrac{4}{3},0\right)\left(\dfrac{8}{3},0\right)$ 除く。

関数のグラフと軌跡



$y=f(x)$ を x軸方向に a, y軸方向に b
移動させたグラフを考える。

これは <ex 3> のパターンとして考えられる。

$y=f(x)$ 上の点 Q (s, t)
Qが移動した先の点を P (X, Y) としよう。

$$\begin{cases} X = s + a \\ Y = t + b \end{cases}$$

また、Qは $y=f(x)$ 上だから $t=f(s)$

$$\begin{cases} s = X - a \\ t = Y - b \end{cases}$$

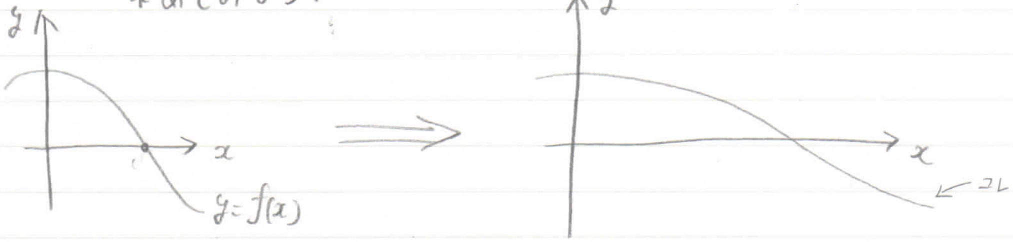
だから $Y-b = f(X-a)$

この (X, Y) を (x, y) へ変えたものが求めるグラフで

$$y = f(x-a)+b$$

を得る。

同様にして $y=f(x)$ のグラフについて、x軸方向を a倍に拡大したグラフを求めてみよう。



Ans. $y=f\left(\frac{x}{a}\right)$