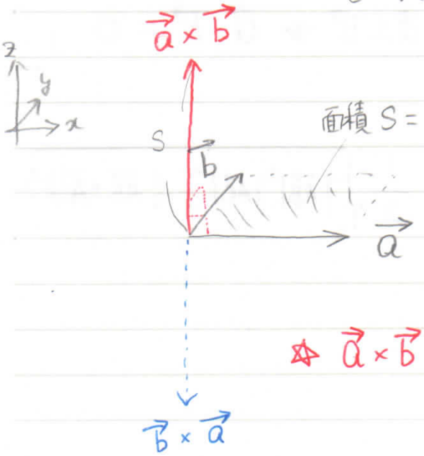
outer product

ベクトルの外積

$\vec{a} \times \vec{b}$ … $\vec{a}$と$\vec{b}$の両方に垂直なベクトル。向きは右ねじ。

その大きさは $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ である。



☆ $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

利用例
- 三角形の面積
- 平面の方程式

など

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$ のとき，

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$ である。

覚え方1 ① 下のように並べる

$$\begin{vmatrix} x & a_x & b_x \\ y & a_y & b_y \\ z & a_z & b_z \end{vmatrix}$$

② x成分は，xを中心に十字をかいてけす

$$\begin{vmatrix} \cancel{x} & \cancel{a_x} & \cancel{b_x} \\ y & a_y & b_y \\ z & a_z & b_z \end{vmatrix}$$

③ 残ったものを "クロスで引き算"

③ yも同様。⊖をつける。

$$\begin{vmatrix} x & a_x & b_x \\ \cancel{y} & \cancel{a_y} & \cancel{b_y} \\ z & a_z & b_z \end{vmatrix}$$

④ "クロスで引き算"

$-(a_x b_z - a_z b_x)$

覚え方2 並べて，クロスでかけ算

a_x b_x

a_y b_y

a_z b_z

a_x b_x ← 追加

※ 覚え方1は大学で学ぶ"行列式"という計算が背景にある。

外積の性質（vs 内積）

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$　（外積は非可換）$\longleftrightarrow$　$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$　$\longleftrightarrow$　$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

「$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$」　$\longleftrightarrow$　「$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$」

$\triangle ABC$ の面積 S

$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$　$\longleftrightarrow$　$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

練

$\boxed{1}$ $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ と $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ について

(1) $\vec{a} \times \vec{b}$ を求めよ

答 $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ -9 \\ 8 \end{bmatrix}$

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に垂直な単位ベクトルをすべて求めよ。

答 $\pm \frac{1}{\sqrt{181}} \begin{bmatrix} -6 \\ -9 \\ 8 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$ $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ 2 \end{bmatrix}$ と $\vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ x \end{bmatrix}$ について　$\vec{a} \parallel \vec{b}$ となる x を求める。

(1) $\vec{a} = k\vec{b}$　$(k \in \mathbb{R})$ なる k があることから、求めよ。

(2) $\vec{a}, \vec{b}$ を3次元ベクトル $\vec{a'} = \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$　$\vec{b'} = \begin{bmatrix} 6 \\ x \\ 0 \end{bmatrix}$ と考えて、

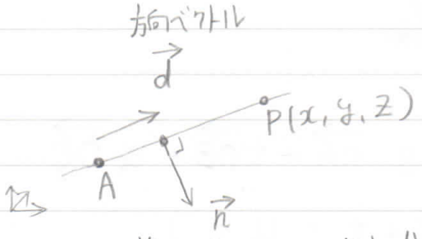
$\vec{a'} \times \vec{b'} = \vec{0}$ より求めよ。

答 $x = \pm 2\sqrt{3}$

直線・平面の方程式

直線の方程式

→ ベクトル方程式！



☆ 2次元と同じ形！

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\,\vec{d}$$

※ 法線ベクトルがわかっても直線の方向が決まらないので注意

$A(a_1, a_2, a_3)$ $B(b_1, b_2, b_3)$ を通るなら

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{bmatrix}$$

<ex>

$A(-1, 2, 3)$, $B(2, -1, 6)$ を通る直線は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\overrightarrow{OA}} + t \underbrace{\begin{bmatrix} 2-(-1) \\ -1-2 \\ 6-3 \end{bmatrix}}_{\overrightarrow{AB}\text{ が方向ベクトル！}} = \begin{bmatrix} -1+3t \\ 2-3t \\ 3+3t \end{bmatrix}$$

※ $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ となるので、t を消去して

$$x + 1 = -y + 2 = z - 3$$

としても良いが、使い勝手が悪い。

練

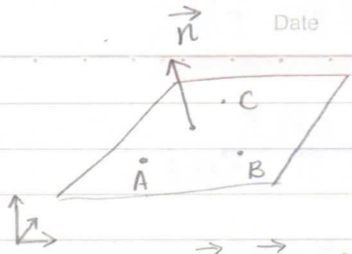
(1) $A(2, -1, 1)$ $B(-1, 3, 1)$ を通る直線

A. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

(2) (1)の直線で、x座標が 0 になる点を求めよ。

A. $(0, \frac{2}{3}, 1)$

空間の方程式



(Ⅰ) ベクトル

$$\overrightarrow{OP} = s\,\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OB} + u\,\overrightarrow{OC}$$

$$,\ s + t + u = 1$$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + s\,\overrightarrow{CA} + t\,\overrightarrow{CB}$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{OP} = s\,\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OB} + (1-s-t)\,\overrightarrow{OC}$$

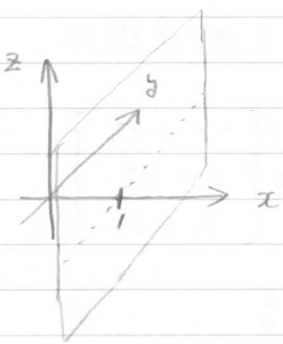
☆ $\vec{n}\cdot(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = 0$ もよい！(むしろ超大事)

(Ⅱ) 座標

$ax + by + cz = d$ は平面を表す

例えば

$x = 1$



yとzに関係なく $x=1$ という点の集合

⇓

yz平面に平行な,$(1,0,0)$を通る平面

$A(1,1,2)$ $B(0,-2,1)$ $C(3,-1,0)$ を通る平面は？

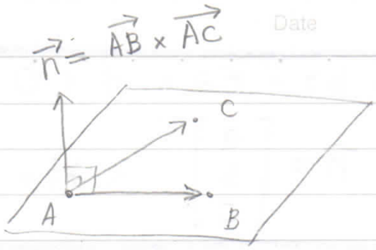
ア) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + (1-s-t)\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x = -2s - 3t + 3 \\ y = 2s - t - 1 \\ z = 2s + t \end{cases} \xrightarrow[s,t\text{消去}]{} x - y + 2z - 4 = 0$$

イ) $ax + by + cz + d = 0$ に代入して

$$\begin{cases} a + b + 2c + d = 0 \\ -2b + c + d = 0 \\ 3a - b + d = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4}d \\ b = \frac{1}{4}d \\ c = -\frac{1}{2}d \end{cases} \Longrightarrow x - y + 2z - 4 = 0$$

ウ) 法線ベクトルから攻める!



$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0-1 \\ -2-1 \\ 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 3-1 \\ -1-1 \\ 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-2 \\ -\{2-(-2)\} \\ 2-(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

よって $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \iff \vec{n} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = 0$ より

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-2 \end{bmatrix} = 0 \iff 4(x-1) - 4(y-1) + 8(z-2) = 0$$

$$\iff (x-1) - (y-1) + 2(z-2) = 0$$

$$\iff x - y + 2z - 4 = 0 \quad //$$

<ex 2>

直線 l と <ex1> の平面との交点を求めよ。

$$l : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+3t \\ 2-3t \\ 3+3t \end{bmatrix}$$

☆ t で表した (x, y, z) を代入 → t を求めて戻す!

$$(-1+3t) - (2-3t) + 2(3+3t) - 4 = 0$$

$$12t = 1$$

$$t = \frac{1}{12}$$

∴ 交点は $\left(-1+\frac{1}{4},\ 2-\frac{1}{4},\ 3+\frac{1}{4}\right)$ つまり $\left(-\frac{3}{4},\ \frac{7}{4},\ \frac{13}{4}\right)$ //

(補足)

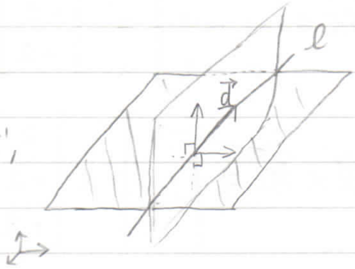
$ax+by+cz+d=0$ の平面の法線ベクトルの1つ $\vec{n}$ は

$$\vec{n}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$ である。

<ex>

$3x-2y+6z-6=0$ …① と $3x+4y-3z+12=0$ …②

の2つの平面の交線 l を求める。



l の方向ベクトルは①と②の法線ベクトル2本に垂直なので、
l の方向ベクトル $\vec{d}$ は

$$\vec{d}=\begin{bmatrix}3\\-2\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\4\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6-24\\-(-9-18)\\12+6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-18\\27\\18\end{bmatrix}=9\begin{bmatrix}-2\\3\\2\end{bmatrix}$$ となる。

次に l 上の点を1点求める。簡単のため $z=0$ の点を求める。①,②で $z=0$ として

$$\begin{cases}3x-2y=6\\3x+4y=-12\end{cases}\Rightarrow (x,y)=(0,-3)$$

よって l 上の1点は $(0,-3,0)$

したがって l は

$$l:\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-3\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2\\3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2t\\-3+3t\\2t\end{bmatrix}$$

方向ベクトルの定数倍は無視してもよい。

外積の利用例

<ex>

A(1, 1, 0)　B(2, 4, −1)　C(4, 4, 2)

について

(1) △ABC の面積を求めよ。

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$ より

$$|\triangle ABC| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{bmatrix} 6+3 \\ -(2+3) \\ 3-9 \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{bmatrix} 9 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{81+25+36} = \frac{1}{2}\sqrt{142}$$

(2) 点D(−1, 2, d) が平面ABC上にある。d を求めよ。

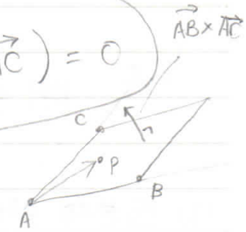
ア) 教科書

$$\overrightarrow{OD} = s\,\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OB} + (1-s-t)\,\overrightarrow{OC} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$ より

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ d \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} + (1-s-t)\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

⇒ s, t, d を求める。

$$\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = 0$$



イ) 裏技

平面ABC は

$$9(x-1) - 5(y-1) - 6(z-0) = 0$$

$$9x - 5y - 6z - 14 = 0$$

であるから

$$9(-1) - 5 \cdot 2 - 6d - 14 = 0$$

$$-6d = 33$$

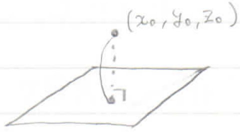
$$\therefore d = -\frac{33}{6}$$

体積と平面，外積

点と平面の距離公式

平面 $ax+by+cz+d=0$ と点 (x_0, y_0, z_0) の距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ である。



<ex>

A$(1,0,0)$　B$(3,1,-1)$　C$(0,3,0)$　D$(2,1,2)$

について

(1) $\triangle ABC$ の面積 S

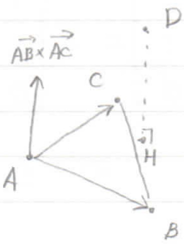
$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\3\\0\end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{bmatrix}3\\1\\7\end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{9+1+49} = \frac{\sqrt{59}}{2}$$

(2) Dから平面ABCへ降ろした垂線の足Hについて DHは。

平面ABCは、$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix}3\\1\\7\end{bmatrix}$ より

$$+3(x-1)+1(y-0)+7(z-0)=0$$

$$\therefore\ 3x+y+7z-3=0$$



よって $$DH = \frac{|3\cdot 2+1+7\cdot 2-3|}{\sqrt{59}} = \frac{18}{\sqrt{59}}$$

$6-1+14-3$

(3) 四面体ABCDの体積は。

$$S\times DH\times\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{59}}{2}\times\frac{18}{\sqrt{59}}\times\frac{1}{3} = 3$$

上記の議論より 四面体ABCDの体積 $V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\right|$

ここで、$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$ とおく。

このとき、$\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \underbrace{\det \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}}_{\text{行列式}}$

$= d_1 b_2 c_3 + d_2 b_3 c_1 + d_3 b_1 c_2$
$- c_1 b_2 d_3 - c_2 b_3 d_1 - c_3 b_1 d_2$ となる。

$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ のようなものを行列という。 Aの行列式は $\det A$, $|A|$ とかかれる。 この場合 $\det A = ad - cb$

サラスの公式

$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ の行列式は

$\det A = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + a_2 b_3 c_1$
$- c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - c_2 b_3 a_1$

$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ でできる平行六面体の体積Vは

$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right|$ とかける。

これの $\frac{1}{6}$ 倍が三角錐の体積。

<ex> $\overrightarrow{OA}=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{OB}=\begin{bmatrix}-1\\3\\0\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{OC}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ がはる三角錐の体積は.

$$\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\left(12+1+0-(-3)-0-(-2)\right)\right|$$

$$= \frac{1}{6}|18| = \underline{3}$$

また，次式も等価である。

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ がなす四面体の体積 V は

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{\det P}, \quad P = \begin{bmatrix}|\vec{a}|^2 & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{a} & |\vec{b}|^2 & \vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & |\vec{c}|^2\end{bmatrix}$$

である。 ※証明は手を動かせば可。線形代数やると簡単に示せる。

こっちだと，成分表示が不用なので，問題によっては瞬殺できる。