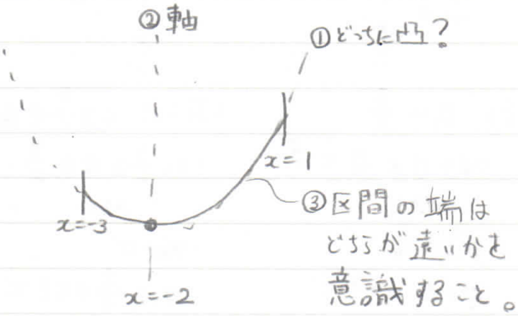
二次関数の最小・最大

Point
グラフを簡易的に書く。
- 概形を点線
- 変域に相当するところのみ実線
- 軸をかく

<ex> $y=2x^2+8x+4$ $(-3 \leqq x \leqq 1)$ のminとmaxは。

①グラフをかく!
$y=2(x+2)^2-4$ より
②グラフより…
よって min: $x=-2$で, -4
max: $x=1$で, 14

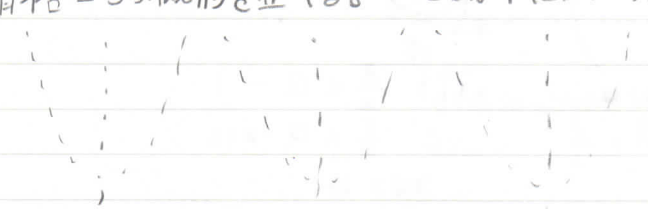


練 $y=-\frac{1}{3}x^2+2x-4$ $(0 \leqq x \leqq 4)$ のminとmaxは。
(答): min $=-4$ $(x=0)$, max $=-1$ $(x=3)$

場合分けを含む問題

↳定義域・関数のどちらかに文字を含む問題群
⇒解法は同じ!! 2パターンしかない!

Q 骨格=3つ概形を並べる。 ここでは下に凸とする。



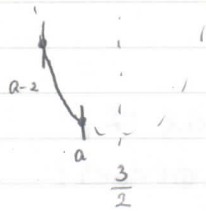
最小値を考える問題 ⇒ 頂点を含むか含まないかなので…

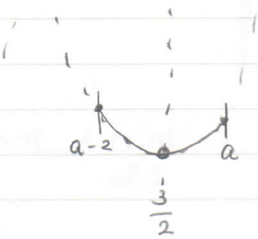
この3つ!!

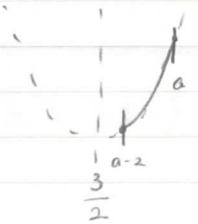
〈ex1〉 $y = x^2 - 3x \quad (a-2 \leqq x \leqq a)\ (a > 0)$ について

(1) 最小値を求める

$$y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$







(I) $a < \frac{3}{2}$
つまり $0 < a < \frac{3}{2}$ のとき
min は
$x = a$ のときで
$a^2 - 3a$

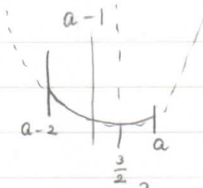
(II) $a-2 \leqq \frac{3}{2} \leqq a$
つまり $\frac{3}{2} \leqq a \leqq \frac{7}{2}$ のとき
min は
$x = \frac{3}{2}$ のときで
$-\frac{9}{4}$

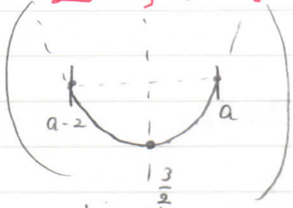
(III) $\frac{3}{2} < a - 2$
つまり $\frac{7}{2} < a$ のとき
min は
$x = a - 2$ のときで
$a^2 - 7a + 10$

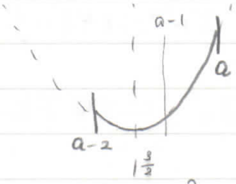
よって
$$\begin{cases} a^2 + 3a & \left(0 < a < \frac{3}{2}\right) \\ -\frac{9}{4} & \left(\frac{3}{2} \leqq a \leqq \frac{7}{2}\right) \\ a^2 - 7a + 10 & \left(\frac{7}{2} < a\right) \end{cases}$$ //

(2) max

→「どっちが軸から遠いか」が大事なので"区間の真ん中"を使う。







(I) $a - 1 \leqq \frac{3}{2}$
∴ $0 < a \leqq \frac{5}{2}$ のとき
max は
$x = a - 2$ のときで
$a^2 - 7a + 10$

高さが等しいときは
$$\underbrace{\frac{(a-2)+a}{2}}_{= a-1} = \frac{3}{2}$$

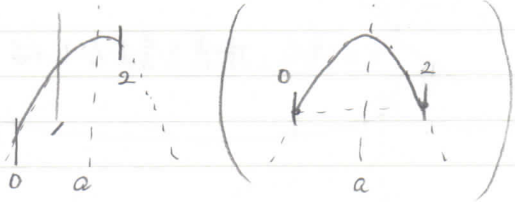
(II) $\frac{3}{2} < a - 1$
∴ $\frac{5}{2} < a$ のとき
max は
$x = a$ のときで
$a^2 - 3a$

よって
$$\begin{cases} a^2 - 7a + 10 & \left(0 < a \leqq \frac{5}{2}\right) \\ a^2 - 3a & \left(\frac{5}{2} < a\right) \end{cases}$$ //

<ex2> $y = -x^2 + 2ax \quad (0 \leqq x \leqq 2)$ について

(1) min

$$y = -(x-a)^2 + a^2 \quad (\Rightarrow 軸は\ x = a)$$



<ex1> の max と同じ考え方

(Ⅰ) $1 \leqq a$ のとき

min は

$x = 0$ のときで、

0

(Ⅱ) $a < 1$ のとき

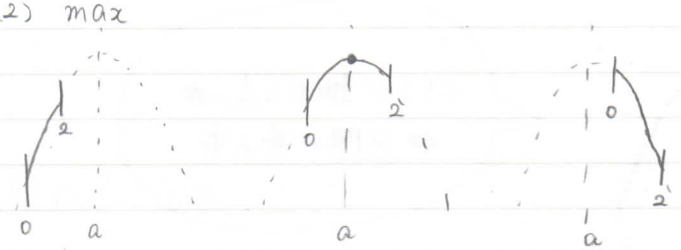
min は

$x = 2$ のときで、

$-4 + 4a$

$$\begin{cases} 0 & (1 \leqq a) \\ 4a - 4 & (a < 1) \end{cases}$$ //

(2) max



<ex1> の min と同じ考え方

(Ⅰ) $2 < a$ のとき

max は $x = 2$ で、

$4a - 4$

(Ⅱ) $0 \leqq a \leqq 2$ のとき

max は $x = a$ で

a^2

(Ⅲ) $a < 0$ のとき

max は $x = 0$ で

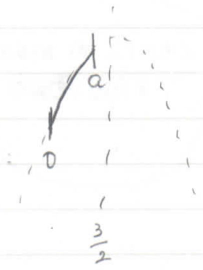
0

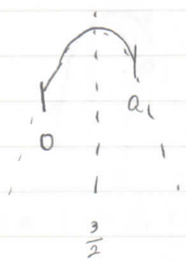
$$\begin{cases} 4a - 4 & (2 < a) \\ a^2 & (0 \leqq a \leqq 2) \\ 0 & (a < 0) \end{cases}$$ //

特殊パターン

<ex3> $y = -x^2 + 3x \quad (0 \leqq x \leqq a)$ (ただし $a > 0$) の最大値は。

$$y = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$





この場合，頂点を含むかによる

(i) $a \leqq \frac{3}{2}$

max は
$x = a$ で
$-a^2 + 3a$

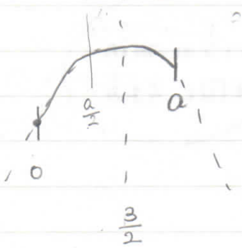
(ii) $\frac{3}{2} < a$

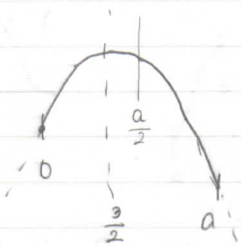
max は
$x = \frac{3}{2}$ で
$\frac{9}{4}$

$$\max \begin{cases} -a^2 + 3a & \left(0 < a \leqq \frac{3}{2}\right) \\ \frac{9}{4} & \left(\frac{3}{2} < a\right) \end{cases}$$

//

同様に最小値は。





どちらが軸から遠いか
⇨ 区間の真ん中

(i) $\frac{a}{2} \leqq \frac{3}{2}$

$\therefore\ 0 < a \leqq 3$ のとき

min は $x = 0$ で
0

(ii) $3 < a$ のとき

min は $x = a$ で
$-a^2 + 3a$

$$\min \begin{cases} 0 & (0 < a \leqq 3) \\ -a^2 + 3a & (3 < a) \end{cases}$$

//