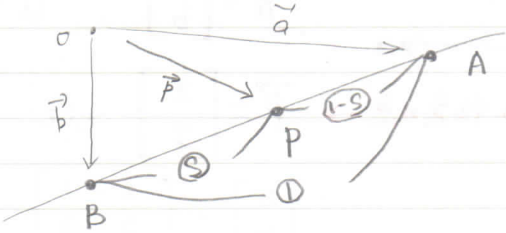
ベクトル方程式 … 点Pの条件式で図形を表現する。

点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) について，点 P($\vec{p}$) が線分 AB 上ならば

$$\vec{p} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b}, \quad 0 \leqq s \leqq 1 \quad \text{である。}$$



$s < 0$ とか，$s > 1$ のときどうなるだろう？

⇒ 外分点みたいになる。

$\vec{p} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b}$ で，点Pは直線AB上にある。つまり"直線AB"の表現！

直線のベクトル方程式

(I) 2点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) を通る

$$\vec{p} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b}, \quad s \in \mathbb{R}$$

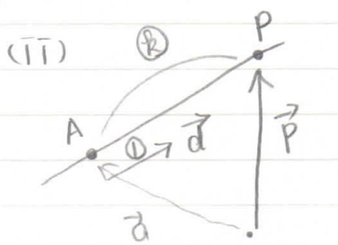
(II) 1点 A($\vec{a}$) を通り，$\vec{d}$ に平行　　$\vec{d}$：方向ベクトル directional vector

$$\vec{p} = \vec{a} + s\vec{d}, \quad s \in \mathbb{R}$$

(III) 1点 A($\vec{a}$) を通り，$\vec{n}$ に垂直　　$\vec{n}$：法線ベクトル normal vector

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$$

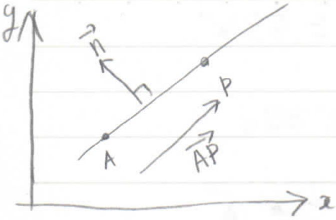
(II)



$$\vec{p} = \vec{a} + k\vec{d}$$

$\vec{p}$ は $\vec{a}$ を通って，$\vec{d}$ を何倍かにした場所

(III) 法線ベクトル = "直線に対して垂直なベクトル"



$\vec{n} \cdot \vec{AP} = 0$ となる。

$\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ としてみる。

Pは直線上の任意の点 → $\vec{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ として

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix} = 0$$

$$a(x-1) + b(y-2) = 0$$

$$ax + by \underbrace{- a - 2b}_{\text{定数}} = 0$$

重要

$\boxed{ax + by + c = 0 \text{ の法線ベクトルは } \vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ である。}}$

#媒介変数表示

~ 図形を x と y の式ではなく，別の変数を用意して表現する ~

<ex>

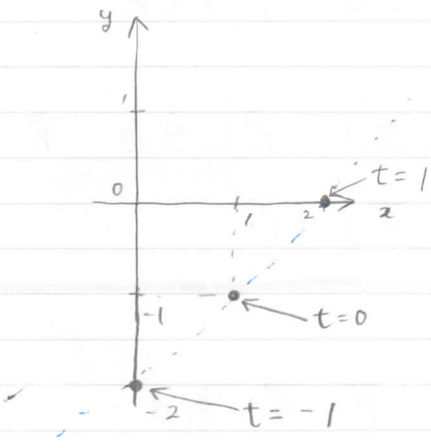
$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

$t = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$

$t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

⋮



直線がかけそう？

実際，$x - y - 2 = 0$ がかける。

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = t-1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$ から $x - y - 2 = 0$ を導く。

Point

媒介変数を消去する

$t = x - 1$ より $y = (x-1) - 1$

$\therefore \; x - y - 2 = 0$

< ex >

点 A(−3, 2), B(2, −4) を通る直線を媒介変数 t で表せ。さらにその方程式を求めよ。

Step 1. ベクトル方程式を作る。

$$(\vec{p} =) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + (1-t) \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

2点を通るとき
$\vec{p} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b}$

※ $\vec{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ としておく。

Step 2. 各成分で整理

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3t + 2(1-t) \\ 2t - 4(1-t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5t + 2 \\ 6t - 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = -5t + 2 \\ y = 6t - 4 \end{cases}$$

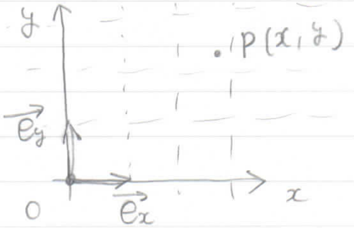
(媒介変数表示)

x, y の式は上式から t を消去することで得られる。

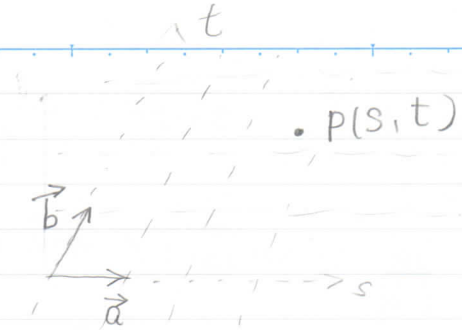
$t = -\dfrac{x-2}{5}$ より $y = -\dfrac{6}{5}(x-2) - 4$

$$\therefore \; y = -\frac{6}{5}x - \frac{8}{5}$$

斜交座標系（理）



⇒ 一般化



$\overrightarrow{OP} = x\,\underline{\underline{\vec{e_x}}} + y\,\underline{\underline{\vec{e_y}}}$

〈直交 座標〉

$\overrightarrow{OP} = s\,\underline{\underline{\vec{a}}} + t\,\underline{\underline{\vec{b}}}$

〈斜交 座標〉

（＝のベクトルを基底と呼ぶ）

<ex>

$\overrightarrow{OP} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y}$

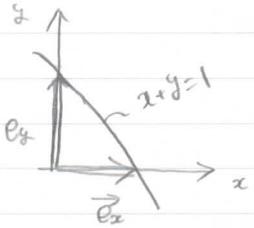
$(x+y=1)$ は Pが

直線 $x+y=1$ 上である。

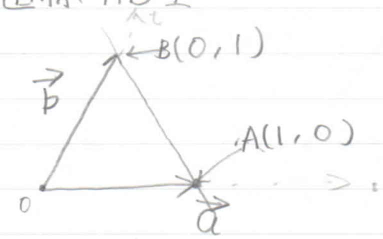
$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$

$(s+t=1)$ は Pが

直線 AB 上



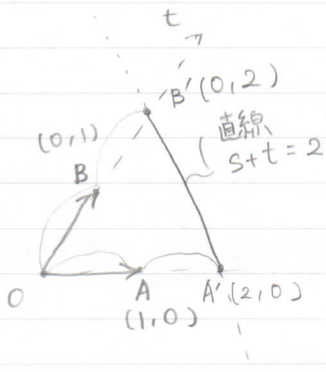
⟷ 対応



つまり… $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ の P の"場所"は斜交座標で考えると、直交座標のように考えられる。

<ex2>

$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$, $s+t=2$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$



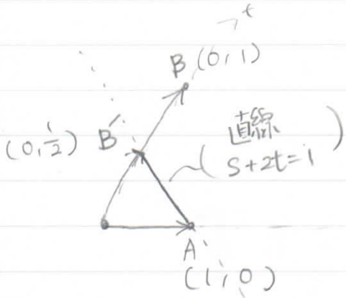
直線 $(s+t=2)$ かつ $\begin{pmatrix} s \geqq 0 \\ t \geqq 0 \end{pmatrix}$ だから実線部。 ＝ 線分 A'B'

NO.

DATE

<ex3>

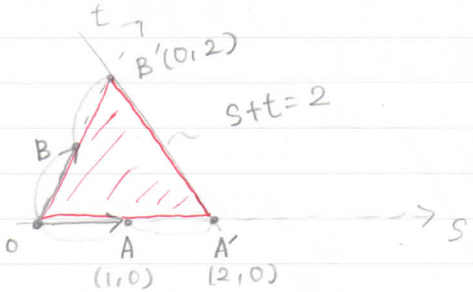
$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$, $s+2t=1$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$

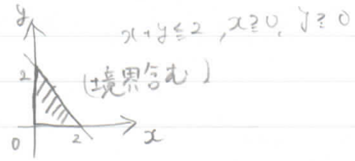


) かつ $\begin{pmatrix} s \geqq 0 \\ t \geqq 0 \end{pmatrix}$ より 線分 AB'

<ex4>

$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$, $s+t \leqq 2$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$



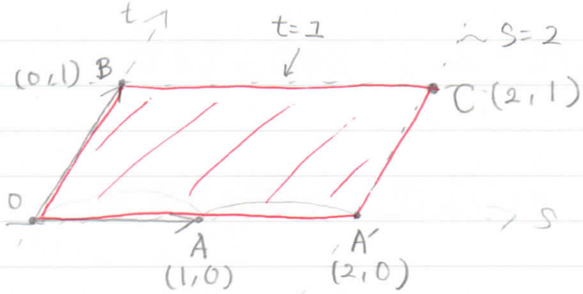


答え: Pは △OAB の 内部または 周上 に存在する。

境界含む

<ex5>

$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$, $0 \leqq s \leqq 2$, $0 \leqq t \leqq 1$



Pは 平行四辺形OA'CBの 内部または 周上 に存在する。