三角関数 公式の導出法

sin , cos の加法定理
2倍角は覚えよう

半角の公式

cos の 2倍角からスタート

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$ 基本式

$$= 2\cos^2\theta - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2\theta$$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

より

$$\cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

より

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

積和公式 … 加法定理の和

sin と cos どっちの加法定理を足しあわせたらでてくるか？を考える

$\sin\alpha\cos\beta \rightarrow$ sin の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right\}$$

$\sin\alpha\sin\beta \rightarrow$ cos の加法定理

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right\}$$

$\cos\alpha\cos\beta \rightarrow$ cos の加法定理

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right\}$$

和積の公式 … $\boxed{\text{加法定理の和 + おきかえ}}$

$\sin A + \sin B$ の場合

とりあえず $\underbrace{\sin(\alpha+\beta)}_{}$ + $\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$$\underbrace{\alpha+\beta}_{= A} \qquad \underbrace{\alpha-\beta}_{= B}$$

(おきかえ)

このとき $\begin{cases}\alpha+\beta = A \\ \alpha-\beta = B\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha = \frac{A+B}{2} \\ \beta = \frac{A-B}{2}\end{cases}$ なので

$$\therefore \sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$\cos A - \cos B$ の場合

とりあえず $\cos(\underbrace{\alpha+\beta}_{= A}) - \cos(\underbrace{\alpha-\beta}_{= B}) = 2\sin\alpha\sin\beta$

$$\therefore \cos A - \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

三角関数の合成 … $\boxed{\text{加法定理の逆!!}}$

$$a\sin x + b\cos x = \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{コレでくくる!}}\left(\boxed{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}\sin x + \boxed{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\cos x\right)$$

$$\sin(x+\alpha) = \cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x$$

この対応の α を見つける。

<ex>

$$\sin x + \cos x = \sqrt{1^2+1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$

$\sin(x+\alpha) = \cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x$ なので, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$ だ!!

$$= \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \quad //$$