Σ の計算問題

少し複雑なΣの問題の対処法。

☆ Telescoping method （望遠鏡法？）

和を"差の和"にして考える手法・発想のこと。

(ex) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n}\left\{ g(k+1) - g(k) \right\}$ と変形！

Telescoping sum （望遠鏡和）

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{k+1} - a_k\right) = \left(\cancel{a_2} - a_1\right) + \left(\cancel{a_3} - \cancel{a_2}\right) + \cdots + \left(a_{n+1} - \cancel{a_n}\right)$$

階差の形

$$= a_{n+1} - a_1$$

打ち消しあって，最初と最後しか残らない。

(Ⅰ) 部分分数分解の利用

消える項と残る項は対称

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \,/\!/$$

とりあえず引いてから，$\frac{1}{2}$で帳尻合わせ！

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right\}$$

$$= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)} \,/\!/$$

No.
Date

(ii) 根号があるパターン → 有理化せよ！

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right)$$

$$=\left(\sqrt{3}-\cancel{\sqrt{2}}\right)+\left(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\sqrt{n+2}-\cancel{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$=\sqrt{n+2}-\sqrt{2}$$

(iii) 連続整数の和

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\overbrace{\left\{\underset{\text{次}}{(k+3)}-\underset{\text{前}}{(k-1)}\right\}\times\frac{1}{4}}^{=1}$$

帳尻合わせ

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left\{\underbrace{k(k+1)(k+2)(k+3)}_{a_k}-\underbrace{(k-1)k(k+1)(k+2)}_{a_{k-1}}\right\}$$

の形！

$$=\frac{1}{4}\left\{n(n+1)(n+2)(n+3)-0\right\}$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$ //

別

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)$$

$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)+n(n+1)$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)\left\{n(n+1)+2(2n+1)+4\right\}$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+5n+6)$$

(iv) 奥義

$f(k)$ を自分で設定 ⇒ telescoping sum にする。

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot 3^{k-1}$ を求める。

Σ の中身に応じて設定。
うまくいかない時は次数を上げる。

$f(k)=(ak+b)\cdot 3^{k}$ とおく。

$f(k+1)=(ak+a+b)\cdot 3^{k+1}$ より

$f(k+1)-f(k)=\{(3ak+3a+3b)-(ak+b)\}\cdot 3^{k}$

$\| \\ (2k-1)\cdot 3^{k-1}$ になる a, b を求める。

$=(2ak+3a+2b)\cdot 3^{k}$

$3(2b+1)=-1$
$2b+1=-1/3$
$2b=-4/3$
$b=-2/3$

これが $(2k-1)\cdot 3^{k-1}$ と恒等的に等しくなるには

$$\begin{cases} 3\cdot 2a=2 \\ 3(3a+2b)=-1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a=1/3 \\ b=-2/3 \end{cases}$$

である。このとき $f(k)=(k-2)\cdot 3^{k-1}$。

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot 3^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\{f(k+1)-f(k)\}$$

$$=f(n+1)-f(1)$$

$$=(n-1)\cdot 3^{n}-(-1)=(n-1)\cdot 3^{n}+1 \quad //$$

※ 本問は $S-rS$ 法の解が有名。

$S=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot 3^{k-1}$ とする。

$$\begin{array}{rcl} S &=& 1\cdot 3^{0}+3\cdot 3^{1}+5\cdot 3^{2}+\cdots+(2n-3)\cdot 3^{n-2}+(2n-1)\cdot 3^{n-1} \\ -)\ 3S &=& \quad 1\cdot 3^{1}+3\cdot 3^{2}+\cdots+(2n-5)\cdot 3^{n-2}+(2n-3)\cdot 3^{n-1}+(2n-1)\cdot 3^{n} \\ \hline -2S &=& 1\cdot 3^{0}+2\cdot 3^{1}+2\cdot 3^{2}+\cdots+2\cdot 3^{n-2}+2\cdot 3^{n-1}-(2n-1)\cdot 3^{n} \end{array}$$

$$-2S=1-(2n-1)\cdot 3^{n}+2(3+3^{2}+\cdots+3^{n-1})$$

$$-2S=1-(2n-1)\cdot 3^{n}+2\cdot\frac{1-3^{n-1}}{1-3}$$ より $S=(n-1)\cdot 3^{n}+1$ //

☆は定期試験レベルでの難問
＊は大学入試 国立＋難関私大レベル

No.
Date

演習

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

☆(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

＊(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$ （まずは有理化？）

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

☆(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)$

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)\cdot 2^{k-1}$

＊(8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2\cdot 2^{k-1}$ （ $f(k)=(ak^2+bk+c)\cdot 2^{k-1}$ とおいて…？）

＊(9) ア) $(k+1)^4k^4-k^4(k-1)^4$ を計算せよ。

イ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^7+k^5)$ を求めよ。 ［横浜市立，2008 改］

＊(10) 数列 a_n を，$a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ で定義する。

ア) $\displaystyle\frac{1}{a_n a_{n+2}}=\frac{1}{a_n a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}$ $(n\geqq 1)$ を示せ。

イ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+2}}<1$ を示せ。