Date

群数列

相互変換

「第何群の何番目」 $\longleftrightarrow$ 「第何項」

これだけができたらマスター！

<ex>

$1 \mid 1, 2 \mid 1, 2, 3 \mid \cdots$ のような群数列を考える。

Point

第k群の項数を確認して、第n群末項までの項数を計算する

$$\overset{①}{1} \mid \overset{②}{1, 2} \mid \cdots \quad \mid \overset{ⓝ}{1, 2, \cdots, n} \mid \overset{(n+1)}{1, 2, \cdots}$$

第n群末項は

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ より

全体では第 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 項である。

(1) 第n群初項は全体の第何項か。

$$1 \mid 1, 2 \mid \cdots \mid \overset{(n-1)}{1, 2, \cdots, n-1} \mid \overset{ⓝ}{1}$$

↑ ココ

第(n−1)群末項の次の項だから

$$\frac{1}{2}(n-1)((n-1)+1) + 1 = \frac{1}{2}n(n-1) + 1$$

$$= \frac{1}{2}(n^2 - n + 2) \text{ 項}$$

(2) 3が登場するのが100回目になるのは全体の第何項か。(13などは数えない)

$$\overset{①}{1} \mid \overset{②}{1, 2} \mid \overset{③}{1, 2, 3} \mid \overset{④}{1, 2, 3, 4} \mid \cdots \mid \overset{(102)}{1, 2, 3, 4, \cdots} \mid$$

↑ 1回目　↑ 2回目　↑ 100回目

100回目の「3」は第102群第3項。

ここで、(1)より第102群初項は $\frac{1}{2} 102 \cdot 101 + 1 = 5150$ 項目なので

第5153項

<ex2>

$1 \mid 3, 5 \mid 7, 9, 11 \mid \cdots$ のような群数列を考える。

Point

$\boxed{\text{まず第 } n \text{ 群末項}}$

$\overset{①}{1} \mid \overset{②}{3, 5} \mid \overset{③}{7, 9, 11} \mid \cdots \mid \overset{ⓝ}{? \cdots ?} \mid$

第k群には kコの項があるので

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \text{ 項目}$$

(1) 第20群10項は何？

全体の何項かを考える！

第19群末項 + 10項 が全体の第何項か。

$\frac{1}{2} \cdot 19 \cdot 20 + 10 = 200$ より 第200項。

元の数列は奇数の列で，$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$ なので，

$$2 \times 200 - 1 = \underline{399}$$ //

(2) 819 は第何群何項？

(i) 全体の第k項とすると

$2k - 1 = 819$ より

$k = 410$

819が第m群に属しているとすると

$$\underbrace{\frac{1}{2}(m-1)m}_{\text{第}(m-1)\text{群末項}} < 410 \leqq \underbrace{\frac{1}{2}m(m+1)}_{\text{第}m\text{群末項}}$$

$m = 29$ と求まる。

(ii) 第n群の初項は

$$2 \cdot \{ \underbrace{\tfrac{1}{2}(n-1)n}_{(n-1)\text{末項}} + 1 \} - 1$$

$= (n-1)n + 1 = n^2 - n + 1$

819が第m群に属しているとすると

$$\underbrace{m^2 - m + 1}_{m\text{群初項}} \leqq 819 < \underbrace{(m+1)^2 - (m+1) + 1}_{(m+1)\text{群初項}}$$

$$m(m-1) \leqq 818 < m(m+1)$$