2.2.2 Twierdzenie Sylvestera

Które liczby dadzą się przedstawić w postaci $ax + by$ z nieujemnymi x, y? Częściowej odpowiedzi udzielił Sylvester.

Załóżmy, że a, b są danymi liczbami naturalnymi. Liczbę $n \in \mathbb{Z}$ nazwiemy (a, b)-*osiągalną*, gdy istnieją takie liczby $x, y \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, że $n = ax + by$. Liczba 0 jest, oczywiście, osiągalna, a liczby ujemne są, oczywiście, (a, b)-*nieosiągalne*.

TWIERDZENIE 2.13 (***Twierdzenie Sylvestera***) *Niech* $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$. *Wówczas:*

(1) *moc zbioru liczb (a, b)-nieosiągalnych jest równa* $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$;

(2) *największą liczbą (a, b)-nieosiągalną jest liczba* $ab - a - b$.

DOWÓD. Załóżmy, że $a < b$ i ustawmy wszystkie liczby całkowite nieujemne w tablicy

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & a-1 \\ a & a+1 & a+2 & \ldots & a+k & \ldots & 2a-1 \\ 2a & 2a+1 & 2a+2 & \ldots & 2a+k & \ldots & 3a-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \tag{2.14}$$

(1) Każda kolumna tej tablicy jest ciągiem arytmetycznym o różnicy a. Rozważmy liczby

$$0 \cdot b, \quad 1 \cdot b, \quad 2 \cdot b, \quad \ldots, \quad (a-1) \cdot b. \tag{2.15}$$

Wszystkie te liczby są, oczywiście, osiągalne i każda stoi w innej kolumnie tablicy (2.14). Gdyby bowiem sb i tb, przy pewnych $0 \leqslant s < t \leqslant a-1$, stały w tej samej kolumnie, to liczba $tb - sb$ byłaby wielokrotnością a, co, wobec nierówności $t - s \leqslant a - 1$, jest niemożliwe. To dowodzi, że w każdej kolumnie tablicy (2.14) stoi dokładnie jedna z liczb (2.15). Oznaczmy przez $y_k b$ liczbę z ciągu (2.15) stojącą w kolumnie o nagłówku k.

Jasne, że wszystkie liczby stojące pod liczbą $y_k b$ w k-tej kolumnie są osiągalne. Natomiast, wszystkie liczby k-tej kolumny stojące nad liczbą $y_k b$ są *nieosiągalne*. Aby to zobaczyć wystarczy (dlaczego?) udowodnić, że liczba stojąca tuż nad $y_k b$, czyli liczba $y_k b - a$, jest nieosiągalna. Załóżmy, nie wprost, że $y_k b - a$ jest osiągalna, czyli że $y_k b - a = ax + by$ dla pewnych $x, y \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Wtedy $b(y_k - y) = a(x+1)$, co, dzięki ZTA i nieujemności x, daje $y_k - y = at > 0$. To jednakże jest niemożliwe, bo $y \geqslant 0$, a $y_k \leqslant a - 1$. Wobec tego liczba liczb nieosiągalnych w k-tej kolumnie jest równa

$$\left\lfloor \frac{y_k b}{a} \right\rfloor = \frac{y_k b - k}{a}.$$

Ostatecznie, moc zbioru liczb nieosiągalnych wynosi

$$\sum_{k=0}^{a-1} \frac{y_k b - k}{a} = \frac{b}{a} \sum_{k=0}^{a-1} y_k - \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{a-1} k = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

(2) Największa nieosiągalna liczba stoi w pewnej kolumnie tablicy (2.14) tuż nad liczbą $(a-1)b$. Jest to więc liczba $(a-1)b - a$. ■

W poniższym zadaniu pokażemy pewien rodzaj *wzajemności* uzupełniający naszą wiedzę na temat liczb osiągalnych (i nieosiągalnych):