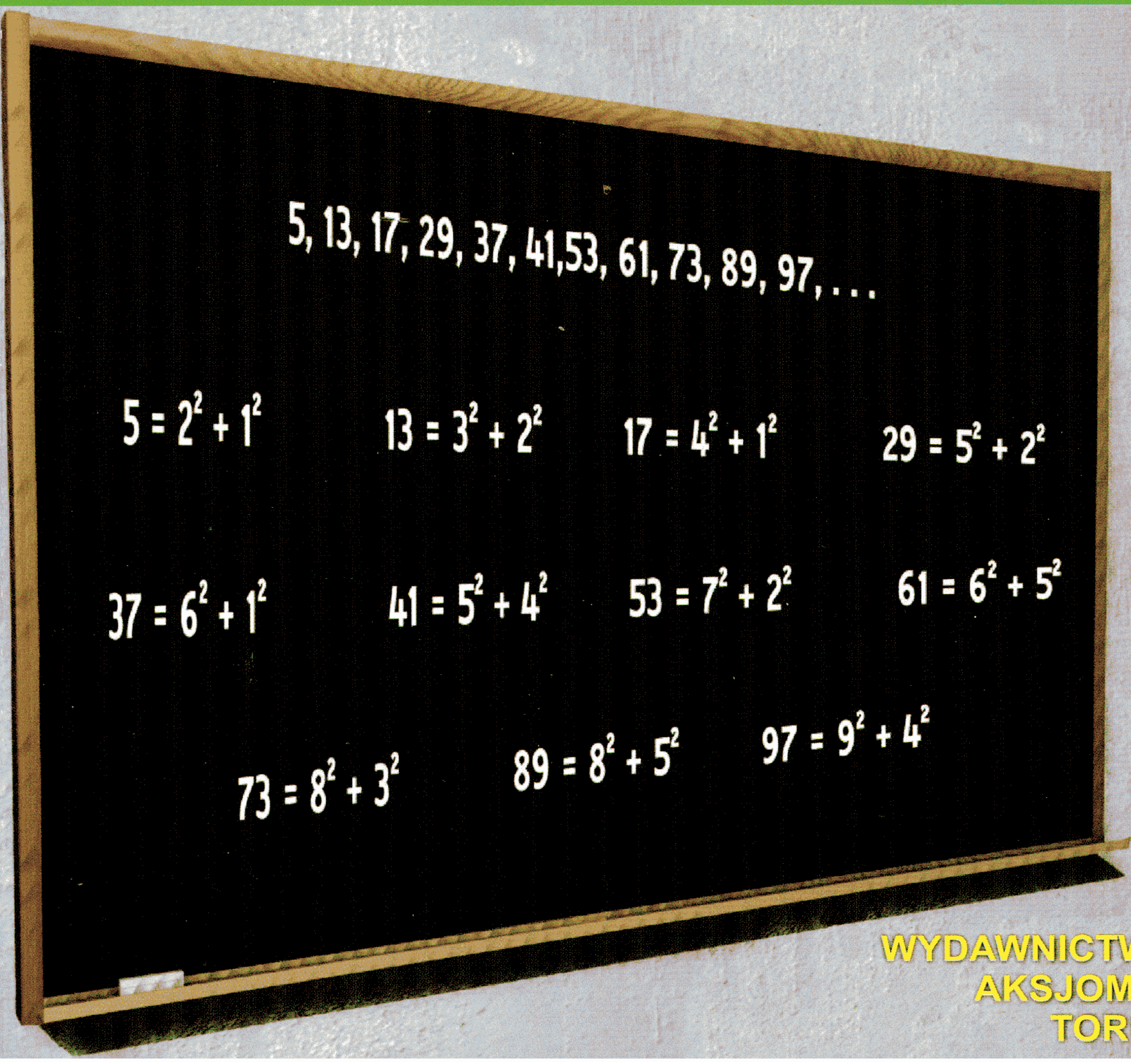
Lev Kurlyandchik

Kącik olimpijski

część II ALGEBRA



WYDAWNICTWO
AKSJOMAT
TORUŃ

Lev Kurlyandchik

Kącik olimpijski
Część II

Algebra

Wydawnictwo Aksjomat
Toruń 2007

Lev Kurlyandchik

Kącik olimpijski
Część II

Algebra

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.

Zamówienia prosimy nadsyłać na adres:

Wydawnictwo „Aksjomat", Piotr Nodzyński
ul. Wita Stwosza 1/7, 87-100 Toruń
tel. (0-56) 622-69-41, tel. i fax (0-56) 655-52-09
wydawnictwo@aksjomat.torun.pl, www.aksjomat.torun.pl

ISBN 978-83-87329-93-2

Skład: Adam Makowski
Druk: P.W. KATESO, Nakło nad Notecią
Drukarnia Świecie
86-100 Świecie, ul. Gen. Józefa Hallera 7G
tel: (0-52) 52 56 081, e-mail: drukarniakateso@wp.pl

Tę książkę dedykuję
Joachimowi Zuckowi

Spis treści

Poziom A
Przekształcenia . . . 7
Równania i układy równań . . . 8
Teoria liczb . . . 9
Logika . . . 12
Poziom B
Przekształcenia . . . 14
Równania i układy równań . . . 20
Teoria liczb . . . 22
Logika . . . 24
Poziom C
Przekształcenia . . . 26
Równania i układy równań . . . 31
Teoria liczb . . . 35
Logika . . . 38
Rozwiązania . . . 40
Teoria . . . 129
Literatura . . . 139

Przedmowa

Niniejsza książka jest drugą z serii książek pt. ***Kącik olimpijski***.

Celem tej serii jest zapoznanie ucznia z naważniejszymi pojęciami elementarnej matematyki i uczenie rozwiązywania niestandardowych zadań.

Pierwsza książka poświęcona była geometrii. Teraz zajmiemy się algebrą.

Zadania w tym zbiorze zostały podzielone na trzy części. Poziom **A** zawiera zadania przeznaczone dla uczniów klasy trzeciej gimnazjum i pierwszej liceum, poziom **B** – dla uczniów pierwszej i drugiej klasy liceum, poziom **C** – dla uczniów klasy drugiej i trzeciej liceum.

Na końcu książki przytaczamy teorię związaną z sumami kwadratów liczb naturalnych.

Autor

1 Poziom A

Przekształcenia

Zadanie 1.1. Oblicz wartość wyrażenia:

$$2\frac{1}{11}\cdot 2\frac{12}{13}+1\frac{2}{11}\cdot 2\frac{1}{13}+\frac{10}{11}\cdot 7\frac{1}{13}.$$

Zadanie 1.2. Udowodnij, że:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}+\frac{1}{2006}<\frac{2}{5}.$$

Zadanie 1.3. Udowodnij, że jeżeli a, b, c są różnymi liczbami, to:

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\neq 0.$$

Zadanie 1.4. Udowodnij, że wielomian

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1$$

dla wszystkich rzeczywistych wartości x przyjmuje wartości dodatnie.

Zadanie 1.5. Wiadomo, że $a^5-a^3+a=2$. Udowodnij, że $a^6>3$.

Równania i układy równań

Zadanie 1.6. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2006 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2007 \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 2008. \end{cases}$$

Zadanie 1.7. Wiadomo, że $a + b + c = 0$. Udowodnij, że:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Zadanie 1.8. Rozwiąż równanie:

$$x^3 - 9x^2 + 27x = 19.$$

Zadanie 1.9. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x_1x_2x_3 = 1 \\ x_2x_3x_4 = -1 \\ x_3x_4x_5 = 1 \\ \vdots \\ x_{10}x_1x_2 = -1. \end{cases}$$

Zadanie 1.10. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} a = bcd \\ a + b = cd \\ a + b + c = d \\ a + b + c + d = 1. \end{cases}$$

Zadanie 1.11. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$$

Zadanie 1.12. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie:

$$x - \left[\sqrt{x}\,\right]^2 = 2007.$$

Teoria liczb

Zadanie 1.13. Rozwiąż w liczbach pierwszych równanie:

$$x^y + 1 = z.$$

Zadanie 1.14. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie:

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$$

Zadanie 1.15. Rozwiąż w liczbach całkowitych układ równań:

$$\begin{cases} ab + cd = -1 \\ ac + bd = -1 \\ ad + bc = -1. \end{cases}$$

Zadanie 1.16. Znajdź wszystkie naturalne liczby n, dla których liczba $n^3 + 3$ jest podzielna przez $n + 3$.

Zadanie 1.17. Dane są liczby naturalne x i y takie, że liczba $6x + 11y$ jest podzielna przez 31. Udowodnij, że wówczas liczba $x + 7y$ również jest podzielna przez 31.

Zadanie 1.18. Znajdź wszystkie trzycyfrowe liczby, które przy dzieleniu przez 37 dają resztę 2, a przy dzieleniu przez 11 resztę 5.

Zadanie 1.19. Wyznacz wszystkie całkowite wartości x, dla których wyrażenie

$$\frac{7x + 1}{3x + 4}$$

jest liczbą całkowitą.

Zadanie 1.20. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba

$$n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$$

nie jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 1.21. Udowodnij, że liczba $2^{10} + 5^{12}$ jest złożona.

Zadanie 1.22. Udowodnij że liczba $2004 \cdot 2005 \cdot 2006 \cdot 2007 + 1$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 1.23. Udowodnij, że jeżeli n jest liczbą naturalną, to liczba

$$\frac{(n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (3n)}{6^n}$$

również jest naturalna.

Zadanie 1.24. Niech p i q oznaczają dwie kolejne liczby naturalne nieparzyste. Udowodnij, że liczba $p^p + q^q$ jest podzielna przez $p + q$.

Zadanie 1.25. Niech m i n oznaczają liczby naturalne, przy czym m jest liczbą nieparzystą. Udowodnij, że liczby $2^m - 1$ i $2^n + 1$ są względnie pierwsze.

Zadanie 1.26. Dwie liczby dwucyfrowe, zapisane jedna za drugą, tworzą liczbę czterocyfrową, która jest podzielna przez ich iloczyn. Jakie to liczby?

Zadanie 1.27. Liczby 2^{2007} i 5^{2007} wypisano jedna za drugą. Ile cyfr wypisano?

Zadanie 1.28. Liczby naturalne n i m spełniają warunek:

$$m^m + n^n = m^n + n^m.$$

Wykaż, że wówczas $m = n$.

Zadanie 1.29. Znajdź wartość sumy $a_1+a_2+\ldots+a_{100}$, gdzie a_n oznacza liczbę całkowitą najbliższą liczbie $\sqrt{2n}$.

Zadanie 1.30. Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych n i m, dla których zachodzi równość:

$$1!+2!+\ldots+n!=m!.$$

Zadanie 1.31. Udowodnij, że liczba 1004041 jest złożona.

Zadanie 1.32. Niech x i y oznaczają liczby naturalne. Czy obie liczby x^2+y i y^2+x mogą być jednocześnie kwadratami liczb naturalnych?

Zadanie 1.33. Czy istnieje liczba dwudziestocyfrowa, będąca kwadratem liczby naturalnej i zaczynająca się jedenastoma jedynkami?

Zadanie 1.34. Liczby naturalne $n+1$ i $2n+1$ są kwadratami liczb naturalnych. Udowodnij, że n jest podzielne przez 24.

Zadanie 1.35. Udowodnij, że liczba

$$\underbrace{11\ldots1}_{10}\underbrace{22\ldots2}_{10}$$

jest iloczynem dwóch kolejnych liczb naturalnych.

Zadanie 1.36. Sumę ułamków $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2004}$ przedstawiono w postaci ułamka nieskracalnego. Iloma zerami kończy się mianownik tego ułamka?

Zadanie 1.37. Wyznacz wszystkie naturalne liczby n, dla których liczba 4^n+65 jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 1.38. Czy suma cyfr liczby 2^n może być równa sumie cyfr liczby 2^{n+1}?

Zadanie 1.39. Wykaż, że suma cyfr sześcianu liczby naturalnej nie może być równa 2004.

Logika

Zadanie 1.40. Wiadomo, że ksiądz zawsze mówi prawdę, a złodziej zawsze kłamie. F i G – księża. A oznajmił, że B twierdzi, że C stawia na to, że D mówi, że E zapewnia, że F zaprzecza, że G jest księdzem. C twierdzi, że D jest złodziejem. Jeśli A jest złodziejem, to ilu wszystkich złodziei jest w tej grupie ludzi?

Zadanie 1.41. Na okręgu wypisano 30 liczb, z których każda równa jest bezwzględnej wartości z różnicy dwóch poprzednich liczb, zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Suma wszystkich liczb wynosi 1. Znajdź te liczby.

Zadanie 1.42. Dwóm mędrcom przekazano po jednej liczbie naturalnej, przy czym wiedzą oni, że są to kolejne liczby naturalne. Następnie zadają oni sobie, kolejno jeden drugiemu, pytanie: *Czy znasz moją liczbę?* Udowodnij, że kiedyś jeden z nich odpowie *tak!*.

Zadanie 1.43. W kwadracie o boku długości 1 danych jest 9 punktów. Udowodnij, że istnieje trójkąt z wierzchołkami w trzech z danych punktów, którego pole jest nie większe niż $\frac{1}{8}$.

Zadanie 1.44. Płaszczyzna jest pokolorowana na n kolorów. Udowodnij, że istnieje prostokąt o wierzchołkach tego samego koloru.

Zadanie 1.45. Inżynier codziennie przyjeżdża na dworzec o godzinie 8^{00}. Dokładnie o 8^{00} na dworzec przyjeżdża samochód, który dowozi inżyniera do miejsca pracy. Pewnego razu inżynier przyjechał na dworzec o godzinie 7^{00} i poszedł pieszo naprzeciw samochodowi. Gdy nadjechał samochód, wsiadł i pojechał do miejsca pracy. Wyznacz godzinę dotarcia inżyniera do samochodu, jeżeli wiadomo, że inżynier był w pracy 20 minut wcześniej niż zwykle.

Zadanie 1.46. Z punktów A i B, położonych w odległości 100 km, w jednym czasie wyjeżdżają na spotkanie dwaj rowerzyści, którzy jadą z prędkościami 20 km/h i 30 km/h. Razem z pierwszym rowerzystą z punktu A wylatuje mucha z prędkością 50 km/h i leci w kierunku punktu B na spotkanie z rowerzystą, po czym zawraca i leci na spotkanie z pierwszym rowerzystą, znowu zawraca itd. Ile kilometrów przeleci mucha w kierunku od punktu A do punktu B do momentu, gdy obaj rowerzyści spotkają się?

Zadanie 1.47. Dwaj przyjaciele w tym samym dniu zaczęli podróżować. Pierwszy wyszedł z miejsca A o 10^{30} i dotarł do miejsca B o 16^{15}. Drugi wyszedł z miejsca B o 10^{24} i dotarł do miejsca A o 15^{00}. Kiedy przyjaciele spotkali się?

Zadanie 1.48. Należy przewieźć 870 ton granitowych płyt. Udowodnij, że jeśli każda z płyt waży nie więcej niż 8 ton, to do przewozu wszystkiego wystarczy 17 platform o nośności 58 ton każda.

Zadanie 1.49. Czy można przewieźć 50 kamieni o masach

$$370\text{ kg}, 372\text{ kg}, 374\text{ kg}, \ldots, 468\text{ kg}$$

na siedmiu platformach o nośności 3 ton?

Zadanie 1.50. Na zebraniu spotkali się uczestnicy dwóch wycieczek turystycznych. Niektórzy z nich uczestniczyli w obydwu wycieczkach, a niektórzy tylko w jednej. W pierwszej wycieczce było 60% mężczyzn, a w drugiej – 75%. Udowodnij, że na spotkanie przyszło nie mniej mężczyzn niż kobiet.

2 Poziom B

Przekształcenia

Zadanie 2.1. Udowodnij, że prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \ldots \cdot \frac{100}{102} < \frac{1}{17}.$$

Zadanie 2.2. Znajdź najmniejszą wartość wyrażenia:

$$\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

dla dodatnich a i b.

Zadanie 2.3. Wiedząc, że

$$\frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{7},$$

wyznacz wartość wyrażenia:

$$\frac{x^4}{x^8 - x^4 + 1}.$$

Zadanie 2.4. Wiadomo, że

$$x - \frac{1}{x} = 1.$$

Oblicz:

$$x^5 - \frac{1}{x^5}.$$

Zadanie 2.5. Udowodnij równość:

$$\frac{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right)\left(3^4 + \frac{1}{4}\right)\left(5^4 + \frac{1}{4}\right)\left(7^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right)\left(4^4 + \frac{1}{4}\right)\left(6^4 + \frac{1}{4}\right)\left(8^4 + \frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{145}.$$

Zadanie 2.6. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c, d, których suma równa jest jeden. Udowodnij, że:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab - 2bc - 2cd - 2da \geq -\frac{1}{4}.$$

Zadanie 2.7. Liczby rzeczywiste a, b, c, d są takie, że

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - d + \frac{2}{5} = 0.$$

Znajdź te liczby.

Zadanie 2.8. Udowodnij, że dla dowolnych rzeczywistych liczb a, b, c, d prawdziwa jest nierówność:

$$(1 + ab)^2 + (1 + cd)^2 + (ac)^2 + (bd)^2 \geq 1.$$

Zadanie 2.9. Jaką najmniejszą wartość może przyjąć iloczyn dwóch dodatnich liczb a i b, jeśli wiadomo, że $ab = a + b$?

Zadanie 2.10. Dany jest skończony ciąg arytmetyczny o nieparzystej liczbie wyrazów. Suma wyrazów stojących na miejscach parzystych równa jest sumie wyrazów stojących na miejscach nieparzystych. Znajdź sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Zadanie 2.11. Niech p_1, p_2, p_3 oznaczają trójmiany kwadratowe o dodatnim współczynniku przy x^2. Udowodnij, że jeżeli każde dwa z tych trójmianów mają wspólny pierwiastek, to trójmian $p_1 + p_2 + p_3$ również posiada pierwiastek.

Zadanie 2.12. Wiadomo, że

$$abc = 1, \qquad a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Udowodnij, że wówczas co najmniej jedna z liczb a, b, c równa jest 1.

Zadanie 2.13. Liczby x, y, z spełniają równania:

$$x + y + z = a, \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}.$$

Udowodnij, że co najmniej jedna z tych liczb równa jest a.

Zadanie 2.14. Niech a i b oznaczają liczby rzeczywiste. Znajdź najmniejszą wartość funkcji:

$$f(x) = (x + a + b)(x + a - b)(x + b - a)(x - a - b).$$

Zadanie 2.15. Udowodnij, że dla dowolnych rzeczywistych liczb a, b, c, d spełniających warunki $a > c$, $b > d$ zachodzi zależność:

$$(a + b + c + d)^2 > 8(ad + bc).$$

Zadanie 2.16. Narysuj wykres funkcji

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}\right).$$

Zadanie 2.17. Udowodnij, że liczba

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{100}}\right)$$

jest mniejsza niż: a) $\frac{1}{100}$, b) $\frac{1}{1000}$.

Zadanie 2.18. Suma nieujemnych liczb a, b i c równa jest 1. Udowodnij, że

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq \frac{4}{27}.$$

Zadanie 2.19. Dany jest ciąg $\{a_n\}$ taki, że $a_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$, $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$ $(n \geq 1)$. Udowodnij, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2004} = 0$.

Zadanie 2.20. Suma pięciu nieujemnych liczb $a_1 + a_2 + \ldots + a_5$ równa jest jeden. Jaką największą wartość może mieć wyrażenie

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 5} |a_i - a_j| \, ?$$

Zadanie 2.21. Niech n oznacza liczbę naturalną. Udowodnij, że

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{4}{17} + \ldots + \frac{2^n}{2^{2^n} + 1} < 1.$$

Zadanie 2.22. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oznaczają nieujemne liczby, których suma równa jest 1. Ile wynosi największa wartość wyrażenia:

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n \, ?$$

Zadanie 2.23. Niech a, b, c oznaczają liczby dodatnie. Udowodnij, że

$$\left(a^a \cdot b^b \cdot c^c\right)^2 \geq a^{b+c} \cdot b^{c+a} \cdot c^{a+b}.$$

Zadanie 2.24. Dane są dodatnie liczby a, b, c, których suma wynosi jeden. Udowodnij, że

$$\sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-a)(1-c)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} \leq 1 + \sqrt{abc}.$$

Zadanie 2.25. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 4xy\left(2x^2 - 1\right) = 1 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Zadanie 2.26. Niech a, b, c będą liczbami rzeczywistymi takimi, że równanie $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ posiada trzy różne rzeczywiste pierwiastki. Udowodnij, że $a^2 > 3b$.

Zadanie 2.27. Udowodnij, że dla dowolnych rzeczywistych liczb x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2} \geq \sqrt{y^2+yz+z^2}.$$

Zadanie 2.28. Udowodnij równość:

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

Zadanie 2.29. Udowodnij, że jeżeli

$$x_1+\frac{1}{x_2}=x_2+\frac{1}{x_3}=\ldots=x_n+\frac{1}{x_1},$$

to $x_1=x_2=\ldots=x_n$ lub $|x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n|=1$.

Zadanie 2.30. Dla jakiej naturalnej wartości n liczba $\frac{n^2}{(1,1)^n}$ przyjmuje największą wartość?

Zadanie 2.31. Udowodnij, że jeżeli $a, b, c, d \in \langle 1, 4\rangle$, to

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \leq 25.$$

Zadanie 2.32. Dla jakich $n \geq 2$ nierówność

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \geq x_n(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})$$

jest prawdziwa dla dowolnych rzeczywistych wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$?

Zadanie 2.33. Rozpatrzmy wszystkie możliwe parabole o równaniu postaci $y=x^2+ax+b^2$, przecinające osie układu współrzędnych w trzech różnych punktach. Dla każdej z tych parabol prowadzimy, przez trzy wyznaczone punkty, okrąg. Udowodnij, że wszystkie otrzymane okręgi mają punkt wspólny.

Zadanie 2.34. Dana jest funkcja $p(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Znajdź wartość sumy

$$p\left(\frac{1}{100}\right) + p\left(\frac{2}{100}\right) + \ldots + p\left(\frac{100}{100}\right) + p\left(\frac{100}{99}\right) + \ldots + p\left(\frac{100}{1}\right).$$

Zadanie 2.35. Udowodnij, że jeżeli suma dodatnich liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ równa jest jedności, to

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\cdot\ldots\cdot(1-x_n)}{x_1 x_2 \cdot\ldots\cdot x_n} \geq (n-1)^n.$$

Równania i układy równań

Zadanie 2.36. Czy równanie $\sqrt{x + a\sqrt{x} + b} + \sqrt{x} = c$ może mieć, przy pewnych rzeczywistych wartościach a, b, c, nieskończenie wiele rozwiązań?

Zadanie 2.37. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x^2 + xz + z^2 = 21 \\ y^2 + yz + z^2 = 28. \end{cases}$$

Zadanie 2.38. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x(x+1) + 2yz = y \\ y(y+1) + 2zx = z \\ z(2z+1) + 2xy = x. \end{cases}$$

Zadanie 2.39. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x+z} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Zadanie 2.40. Udowodnij nierówność:

$$\sqrt[5]{2} + 7 < 8\sqrt[10]{2}.$$

Zadanie 2.41. Znajdź wielomian o współczynnikach całkowitych, którego rozwiązaniem jest liczba $\sqrt{6} + \sqrt{10}$.

Zadanie 2.42. Udowodnij, że dla dowolnych rzeczywistych liczb a i b przynajmniej jedno z równań:

$$x^2 + 2ax + b = 0, \quad ax^2 + 2bx + 1 = 0, \quad bx^2 + 2x + a = 0$$

posiada rozwiązanie.

Zadanie 2.43. Niech x_1 oznacza rozwiązanie równania $x^2 + px + c = 0$, x_2 – rozwiązanie równania $x^2 - px - c = 0$. Udowodnij, że równanie $x^2 + 2px + 2c = 0$ posiada rozwiązanie zawarte między x_1 i x_2.

Zadanie 2.44. Znajdź wszystkie naturalne liczby x, y, z takie, że równość $x^n + y^n = z^{n+1}$ jest prawdziwa dla każdego naturalnego n.

Zadanie 2.45. Rozwiąż w liczbach dodatnich układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 3 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 3. \end{cases}$$

Zadanie 2.46. Ile rozwiązań w liczbach całkowitych spełniających nierówności:

$$|x| < 100, \quad |y| < 100,$$

posiada równanie

$$(x - y)^2 = x + y\ ?$$

Teoria liczb

Zadanie 2.47. Znajdź wszystkie trzycyfrowe liczby n, dla których liczba $n^2 + 8n - 85$ jest podzielna przez 101.

Zadanie 2.48. Liczby 2, 3, 7, 43 wyróżniają się tą własnością, że iloczyn dowolnych trzech z nich powiększony o jeden jest podzielny przez czwartą z nich. Znajdź wszystkie czwórki liczb naturalnych posiadające taką własność.

Zadanie 2.49. Znajdź najmniejszą naturalną liczbę, którą można na trzy różne sposoby przedstawić w postaci $13a + 73b$, gdzie a i b są liczbami naturalnymi.

Zadanie 2.50. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie:

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y.$$

Zadanie 2.51. Określ wszystkie naturalne liczby n, dla których liczba $3^n - 1$ jest podzielna przez 7.

Zadanie 2.52. Dla jakich naturalnych k liczba

$$k^{k+1} + (k+1)^k$$

jest podzielna przez 3 ?

Zadanie 2.53. Udowodnij, że równanie $xy + yz + zx = 1$ posiada nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych.

Zadanie 2.54. Wartości wielomianu $f(n) = n^2 - n + 41$ są, dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots, 40$, liczbami pierwszymi. Znajdź 40 kolejnych naturalnych liczb n, dla których $f(n)$ będą liczbami złożonymi.

Zadanie 2.55. a) Trzycyfrowa liczba jest podzielna przez 37. Udowodnij, że liczba otrzymana w wyniku cyklicznego przestawiania cyfr także jest podzielna przez 37.
b) Udowodnij, że liczba $1\underbrace{00\ldots0}_{100}1\underbrace{00\ldots0}_{100}1$ jest podzielna przez 37.
c) Udowodnij, że jeżeli $3n$-cyfrowa liczba jest podzielna przez 27, to liczba powstała w wyniku cyklicznego przestawiania cyfr również jest podzielna przez 27.

Zadanie 2.56. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek naturalnych liczb m, n, k takich, że $m^2n^2 + m^2 + n^2 = k^2$.

Zadanie 2.57. Ciąg $\{a_n\}$ zadany jest w sposób następujący:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \qquad a_{n+3} = \frac{1 + a_{n+1}a_{n+2}}{a_n}.$$

Udowodnij, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.

Zadanie 2.58. Rozwiąż równanie w liczbach całkowitych

$$(x+1)\left(y^2 - x^2 - 4\right) = x^2.$$

Zadanie 2.59. Ciąg liczbowy u_n określony jest w sposób następujący:

$$u_1 = u_2 = 1 \quad \text{oraz} \quad u_{n+2} = u_{n+1}^2 + u_n^2, \quad (n \geq 1).$$

Czy liczba u_{2004} jest podzielna przez 7 ?

Zadanie 2.60. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem Fibonacciego, to znaczy $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $(n \geq 1)$. Wyjaśnij, czy liczba a_{2004} jest podzielna przez 7.

Zadanie 2.61. Niech m i n oznaczają liczby naturalne. Udowodnij, że:

$$\left|\sqrt{2} - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{4n^2}.$$

Logika

Zadanie 2.62. Czy istnieją funkcje f i g, określone na całym zbiorze liczb rzeczywistych, takie że dla dowolnych x i y zachodzi równość:

$$f(x) \cdot g(y) = x + y + 1\,?$$

Zadanie 2.63. Kierowca wybiera się w podróż przez pustynię. Jego samochód zużywa 1 litr benzyny na 10 km drogi. Kierowca ma 450 litrów benzyny, ale jednorazowo może zabrać ze sobą nie więcej niż 150 litrów. Jednakże może on zostawiać, tymczasowo w różnych miejscach na pustyni, część benzyny i wracać w celu ponownego tankowania. Paliwo, które zostawił na pustyni, może tankować w kolejnych przejazdach. Jakiej szerokości pustynię, co najwyżej, może przebyć kierowca?

Zadanie 2.64. Do n szklanych naczyń, dostatecznie dużej objętości, nalano jednakową ilość wody. Wodę można przelewać z dowolnego naczynia do innego, ale tylko w taki sposób, że przelewamy tyle wody, ile jest w drugim naczyniu. Dla jakich n można, w skończonej liczbie kroków, przelać wszystką wodę do jednego z naczyń?

Zadanie 2.65. 15 urzędników chciało obsadzić 20 komisji w taki sposób, aby każdy z nich zasiadał w dokładnie czterech komisjach, a każda komisja składała się z trzech członków, przy czym dwie komisje nie mogą mieć więcej niż jednego wspólnego członka. Czy mogą oni tego dokonać?

Zadanie 2.66. n rozbójników zrabowało sejf. Łup był różnorodny, ale każdy stwierdził, że dowolną jego część może podzielić na dowolną liczbę równych części. Jednak jeden drugiemu nie wierzy. Jak powinni postąpić, aby każdy z nich uznał, że otrzymał nie mniej niż $\frac{1}{n}$ całego łupu?

Zadanie 2.67. Udowodnij, że w wielokącie wypukłym o obwodzie L i polu S można zmieścić koło o promieniu $\frac{S}{L}$.

Zadanie 2.68. Na płaszczyźnie danych jest 25 punktów. Niech D oznacza największą odległość między dwoma punktami, natomiast d – najmniejszą z tych odległości. Udowodnij, że $D > 2d$.

3 Poziom C

Przekształcenia

Zadanie 3.1. Wyznacz wszystkie wartości p, dla których liczba

$$\sqrt[3]{1+p}+\sqrt[3]{1-p}$$

jest całkowita.

Zadanie 3.2. Która z liczb jest większa: $7^{\sqrt{5}}$ czy $5^{\sqrt{7}}$?

Zadanie 3.3. Niech a, b, c oznaczają liczby dodatnie. Udowodnij, że:

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+a)(b+c)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

Zadanie 3.4. Ciąg $\{a_n\}$ zadany jest w sposób następujący:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2}+\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\frac{1}{a_n}}.$$

Udowodnij, że:
a) ciąg nie jest ograniczony;
b) $a_{250} < 10$.

Zadanie 3.5. Dany jest ciąg $\{a_n\}$ taki, że:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}.$$

Udowodnij, że $a_{9000} > 30$.

Zadanie 3.6. Udowodnij, że dla dowolnej naturalnej liczby $n \geq 2$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt[4]{4\ldots\sqrt[n]{n}}}} < 2.$$

Zadanie 3.7. Danych jest n liczb dodatnich, których suma równa jest 3, a suma ich kwadratów równa jest 1. Udowodnij, że suma trzech największych z tych liczb jest nie mniejsza niż 1.

Zadanie 3.8. Dane są liczby x i y takie, że $x + y \geq 0$, $-1 \leq x - y \leq 1$. Udowodnij, że

$$(1 - 4xy)\left(1 - x^2 - y^2\right) \geq 1 - x - y.$$

Zadanie 3.9. Zbiór A, którego elementami są liczby rzeczywiste, posiada następującą własność: jeżeli x należy do zbioru A, to również liczba $2x^2 - 1$ należy do A. Czy zbiór A może składać się dokładnie ze 100 elementów?

Zadanie 3.10. Która z liczb jest większa: $\lg^2 11$ czy $\lg 12$?

Zadanie 3.11. Udowodnij, że $\cos 1°$ jest liczbą niewymierną.

Zadanie 3.12. Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność:

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Zadanie 3.13. Znajdź liczbę rozwiązań równania:

$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^x = x.$$

Zadanie 3.14. Udowodnij, że dla dowolnej naturalnej liczby n zachodzą nierówności:

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

Zadanie 3.15. Udowodnij, że liczby *arctg 2* i π są niewspółmierne.

Zadanie 3.16. Która z liczb jest większa $\cos\sin 1$ czy $\sin\cos 1$?

Zadanie 3.17. Dane są liczby rzeczywiste x, y, a takie, że

$$x + y = a - 1, \qquad xy = a^2 - 7a + 14.$$

Dla jakiej wartości a suma $x^2 + y^2$ przyjmuje największą wartość ?

Zadanie 3.18. Udowodnij, że

$$\frac{1}{\cos^2 10^\circ} + \frac{1}{\cos^2 50^\circ} + \frac{1}{\cos^2 70^\circ} = 12.$$

Zadanie 3.19. Niech a i b oznaczają dodatnie liczby takie, że $a > b$. Udowodnij, że

$$2ab \ln\frac{b}{a} > b^2 - a^2.$$

Zadanie 3.20. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c takie, że $ax^2 + bx + c$ dla dowolnej całkowitej wartości x jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnij, że istnieją takie całkowite liczby m i n, że

$$ax^2 + bx + c = (mx + n)^2.$$

Zadanie 3.21. Znajdź wszystkie rozwiązania równania

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{1}{2}$$

należące do przedziału $\langle 0, \pi \rangle$

Zadanie 3.22. Udowodnij, że dowolna styczna do wykresu krzywej

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{x - 4x^2}$$

przecina oś Oy w punkcie jednakowo odległym zarówno od punktu styczności, jak i od początku układu współrzędnych.

Zadanie 3.23. Niech a, b, c, d oznaczają liczby rzeczywiste. Wiadomo, że $ab = 4, \quad c^2 + 4d^2 = 4$. Udowodnij, że

$$(a - c)^2 + (b - d)^2 \geq 1,6 \, .$$

Zadanie 3.24. Rozwiąż równanie

$$\arcsin \frac{x^2 - 8}{8} = 2 \arcsin \frac{x}{4} - \frac{\pi}{2}.$$

Zadanie 3.25. Uprość wyrażenie:

$$\left(1 + a^2 + 2a\cos\alpha\right)\left(1 + a^4 + 2a^2\cos 2\alpha\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + a^{2^{10}} + 2a^{2^9}\cos 2^9\alpha\right).$$

Zadanie 3.26. Wylicz:

$$\sin 5^\circ + \cos 13^\circ - \cos 49^\circ - \sin 113^\circ + \sin 149^\circ.$$

Zadanie 3.27. Niech n będzie liczbą naturalną i $n \geq 4$. Znajdź najlepsze oszacowanie z dołu i z góry dla sumy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}},$$

(gdzie $x_0 = x_n, \; x_{n+1} = x_1$) dla dowolnie wybranych n rzeczywistych nieujemnych liczb $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, wśród których nie występują kolejno trzy zera.

Zadanie 3.28. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb a, b, c prawdziwa jest nierówność:

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2} \geq 3\sqrt{ab + bc + ca}.$$

Zadanie 3.29. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j} \geq 0.$$

Zadanie 3.30. Wyznacz funkcję pierwotną dla funkcji

$$f(x) = tg^2 x.$$

Zadanie 3.31. Wiadomo, że $tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2 \cdot \ldots \cdot tg\alpha_n = 1$. Znajdź największą wartość wyrażenia $sin\alpha_1 \cdot sin\alpha_2 \cdot \ldots \cdot sin\alpha_n$.

Zadanie 3.32. Trójmian kwadratowy $p(x) = ax^2 + bx + c$ posiada dokładnie dwa rozwiązania w przedziale $(-1, 1)$. Udowodnij, że wówczas funkcja $f(x) = a\cos 2x + b\cos x + c$ również posiada dokładnie dwa rozwiązania w przedziale $(0, \pi)$.

Równania i układy równań

Zadanie 3.33. Rozwiąż równanie:

$$\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x.$$

Zadanie 3.34. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x^2=y^3-2y^2+2y \\ x^4+y^4=2. \end{cases}$$

Zadanie 3.35. Rozwiąż równanie:

$$x^4-4x-1=0.$$

Zadanie 3.36. Rozwiąż równanie:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^3}.$$

Zadanie 3.37. Udowodnij, że układ równań:

$$\begin{cases} x^3=y+2y^3 \\ y^3=z+2z^3 \\ z^3=x+2x^3 \end{cases}$$

ma jedyne rozwiązanie $x=y=z=0$.

Zadanie 3.38. Rozwiąż równanie:

$$\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{x+1}.$$

Zadanie 3.39. Liczby rzeczywiste a, b, c, x, y, z spełniają układ równań:

$$\begin{cases} x = by + cz \\ y = cz + ax \\ z = ax + by, \end{cases}$$

przy czym przynjamniej jedna z liczb: x, y, z jest różna od zera.
Udowodnij, że:

$$2abc + ab + ac + bc = 1.$$

Zadanie 3.40. Liczby rzeczywiste a, b, c, x, y, z spełniają układ równań:

$$\begin{cases} a^x = bc \\ b^y = ca \\ c^z = ab, \end{cases}$$

przy czym liczby a, b, c są dodatnie i przynajmniej jedna z nich jest różna od 1. Udowodnij, że liczba

$$x + y + z - xyz$$

jest całkowita.

Zadanie 3.41. Rozwiąż równanie:

$$5x^2 + 6x + 10 = 6\sqrt{x^4 + 4}.$$

Zadanie 3.42. Rozwiąż równanie:

$$x^3 + 2\sqrt{5}x^2 + 5x + \sqrt{5} - 1 = 0.$$

Zadanie 3.43. Ile rozwiązań, w zależności od parametru a, może mieć układ równań:

$$\begin{cases} y = 1 - ax^2 \\ x = 1 - ay^2. \end{cases}$$

Zadanie 3.44. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{7}{2} \\ x^3 + y^3 + z^3 = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

Zadanie 3.45. Rozwiąż układ równań dla dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} x_1^{x_2} = x_3 \\ x_2^{x_3} = x_4 \\ \quad \vdots \\ x_n^{x_1} = x_2. \end{cases}$$

Zadanie 3.46. Wiadomo, że $a < b < c$. Udowodnij, że równanie

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

posiada dokładnie dwa rozwiązania $x_1 < x_2$, przy czym:

$$a < x_1 < b < x_2 < c.$$

Zadanie 3.47. Dla jakich całkowitych wartości parametru a równanie

$$x^4 - (a+4)x^2 + 2a + 3 = 0$$

posiada całkowite rozwiązanie?

Zadanie 3.48. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c. Udowodnij, że jeśli:
a) liczby a, b, c są jednakowego znaku, to układ równań:

$$\begin{cases} \frac{x^2 - yz}{y+z} = a \\ \frac{y^2 - xz}{x+z} = b \\ \frac{z^2 - xy}{x+y} = c \end{cases}$$

nie posiada rozwiązania;
b) trójka liczb (x, y, z) jest rozwiązaniem tego układu i $xyz \neq 0$, to:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{abc}{xyz}.$$

Zadanie 3.49. Równanie $x^4 + ax^3 + bx + c = 0$ posiada cztery różne rzeczywiste rozwiązania. Udowodnij, że $ab < 0$.

Zadanie 3.50. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + y + z = \sqrt{2} - 1 \\ xyz = 1 - \sqrt{2} \\ x^{yz} = \sqrt{2} + 1. \end{cases}$$

Zadanie 3.51. Udowodnij, że:

a) liczby $\mathrm{tg}^2 20°$, $\mathrm{tg}^2 40°$, $\mathrm{tg}^2 80°$ są rozwiązaniami równania

$$x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0;$$

b)

$$\frac{1}{\cos^2 20°} + \frac{1}{\cos^2 40°} + \frac{1}{\cos^2 60°} + \frac{1}{\cos^2 80°} = 40.$$

Zadanie 3.52. Niech $\alpha, \beta, \gamma, p, q$ oznaczają różne liczby dodatnie takie, że $\alpha+\beta+\gamma = 2p$, $\alpha\beta\gamma = 2q$. Udowodnij, że wielomian $x^3 - px^2 + q$ posiada dokładnie dwa dodatnie pierwiastki.

Teoria liczb

Zadanie 3.53. Rozwiąż w liczbach całkowitych układ równań:

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z = 2.$$

Zadanie 3.54. Dany jest ciąg $\{a_n\}$ określony w następujący sposób: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$. Udowodnij, że wszystkie wyrazy tego ciągu są parami względnie pierwsze.

Zadanie 3.55. Wszystkie liczby naturalne, zaczynając od jedynki, wypisano kolejno w szeregu.
a) Udowodnij, że do tego, aby wypisać wszystkie liczby złożone z mniej niż $n+1$ cyfr, potrzeba $\frac{(9n-1)10^n+1}{9}$ cyfr.
b) Jaka cyfra stoi na 10^{10} miejscu?

Zadanie 3.56. Niech p oznacza liczbę pierwszą większą niż 2. Udowodnij, że suma reszt z dzielenia liczb $1^p, 2^p, 3^p, \ldots, (p-1)^p$ przez p^2 równa jest $\frac{p^3-p^2}{2}$.

Zadanie 3.57. Znajdź wszystkie naturalne liczby n, dla których równanie $x^2 + y^2 = z^n$ posiada rozwiązanie w liczbach naturalnych.

Zadanie 3.58. Ciągi $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ skonstruowane są w sposób następujący:

$$x_1 = x_2 = 10, \qquad y_1 = y_2 = -10,$$

$$x_{n+2} = (x_n + 1)x_{n+1} + 1, \qquad y_{n+2} = (y_{n+1} + 1)y_n + 1,$$

dla dowolnego naturalnego n. Udowodnij, że dowolna liczba naturalna n występuje co najwyżej w jednym z tych ciągów.

Zadanie 3.59. Dany jest ściśle rosnący ciąg $\{a_n\}$ liczb naturalnych taki, że $a_2 = 2$ i dla dowolnych względnie pierwszych liczb naturalnych m i n zachodzi $a_{mn} = a_m \cdot a_n$. Udowodnij, że wówczas dla każdego naturalnego n $a_n = n$.

Zadanie 3.60. Udowodnij, że wśród liczb postaci $\frac{k(k+1)}{2}$ jest nieskończenie wiele liczb będących kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 3.61. Udowodnij, że między dziesięcioma dowolnymi kolejnymi liczbami naturalnymi istnieje liczba, która jest względnie pierwsza z pozostałymi.

Zadanie 3.62. Liczby naturalne n i k posiadają następującą własność: liczby kn i n^k zapisane są przy pomocy tych samych cyfr, ale w odwrotnej kolejności. Znajdź n i k.

Zadanie 3.63. Udowodnij, że jeżeli z nieskończonego ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie a i różnicy $d \neq 0$ można wybrać nieskończony ciąg geometryczny, to $\frac{a}{d}$ jest liczbą wymierną.

Zadanie 3.64. Niech x_1 i x_2 będą różnymi rozwiązaniami równania $x^2 - 4x + 1 = 0$. Niech $a_n = x_1^n + x_2^n$. Udowodnij, że dla dowolnego naturalnego n liczba a_n jest całkowita, a liczba $a_n a_{n+1} - 2$ jest podzielna przez 3.

Zadanie 3.65. Liczba całkowita a jest taka, że liczba $3a$ przedstawia się w postaci $x^2 + 2y^2$, gdzie x i y są liczbami całkowitymi. Udowodnij, że również liczba a przedstawia się w takiej postaci.

Zadanie 3.66. Niech

$$p(x) = x^2 + ax + b,$$

gdzie a i b są liczbami całkowitymi. Udowodnij, że istnieje taka naturalna liczba N, że wszystkie liczby:

$$p(N+1),\ p(N+2), \dots, p(N+2004)$$

są złożone.

Zadanie 3.67. Znajdź trzy kwadraty liczb naturalnych tworzące ciąg arytmetyczny.

Zadanie 3.68. Ustal najmniejszą naturalną liczbę n taką, że liczby 3^n, 3^{n+1}, 3^{n+2} zbudowane są z takiej samej ilości cyfr.

Zadanie 3.69. Zauważmy, że $641 = 5 \cdot 2^7 + 1$. Udowodnij, że liczba $2^{32} + 1$ jest podzielna przez 641.

Zadanie 3.70. Niech x i y będą względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Udowodnij, że każdy naturalny dzielnik liczby x^2+y^2 można zapisać w postaci sumy kwadratów dwóch liczb naturalnych.

Zadanie 3.71. Znajdź ostatnią cyfrę liczby:

$$\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{2004}\right].$$

Logika

Zadanie 3.72. Dana jest funkcja $y = f(x)$ określona dla wszystkich liczb rzeczywistych. Wiedząc, że dla dowolnego x prawdziwa jest równość

$$2f(x) + f(1-x) = 3x^2,$$

wyznacz $f(5)$.

Zadanie 3.73. Niech a i b oznaczają liczby niewymierne, natomiast c – liczbę wymierną. Które z poniższych liczb mogą być wymierne:

$$a+b,\ a+c,\ \sqrt{a},\ \sqrt{c},\ ab,\ ac,\ \sqrt{a+c},\ \sqrt{a+\sqrt{b}},\ \sqrt{a+\sqrt{c}},\ \sqrt{c+\sqrt{a}}\ ?$$

Zadanie 3.74. Udowodnij, że istnieją takie niewymierne liczby α i β, że liczba α^β jest wymierna.

Zadanie 3.75. Wyznacz naturalne liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takie, że:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2004$$

i ich iloczyn $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ jest największy.

Zadanie 3.76. Znajdź wszystkie pary liczb a i b, dla których układ równań

$$\begin{cases} xyz + z = a \\ xyz^2 + z = b \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie.

Zadanie 3.77. Niech a, b, c oznaczają liczby rzeczywiste. Wiadomo, że dla dowolnego x z przedziału $\langle 0, 1\rangle$, $|ax^2 + bx + c| \leq 1$. Udowodnij, że $|b| \leq 8$.

Zadanie 3.78. Znajdź sumę współczynników przy nieparzystych potęgach x w wyrażeniu:

$$\left(x^5 + x - 1\right)^{2004}.$$

Zadanie 3.79. Niech $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$. Udowodnij, że równanie $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = x$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie $x = 1$.

Zadanie 3.80. Po każdej z czterech prostych dróg (z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie) piechur idzie ze stałą prędkością. Wiadomo, że pierwszy piechur spotkał się z drugim, trzecim i czwartym, a drugi – z trzecim i czwartym. Udowodnij, że trzeci piechur spotkał się z czwartym.

Zadanie 3.81. Dany jest ciąg $\{x_n\}$. Udowodnij, że jeżeli ciągi $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n+1}\}$, $\{x_{3n}\}$ posiadają granice, to również ciąg $\{x_n\}$ ma granicę.

Zadanie 3.82. Ze zbioru n-elementowego wybrano 2^{n-1} podzbiorów, z których każde trzy mają wspólny element. Udowodnij, że wówczas wszystkie te podzbiory mają wspólny element.

Rozwiązania

1.1. Przyjmijmy oznaczenia: $a = \frac{1}{11}$, $b = \frac{1}{13}$.
Wówczas otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & 2\frac{1}{11} \cdot 2\frac{12}{13} + 1\frac{2}{11} \cdot 2\frac{1}{13} + \frac{10}{11} \cdot 7\frac{1}{13} = \\ = \ & (2+a)(3-b) + (1+2a)(2+b) + (1-a)(7+b) = \\ = \ & 6 - 2b + 3a - ab + 2 + b + 4a + 2ab + 7 + b - 7a - ab = 15. \end{aligned}$$

Odpowiedź: 15.

1.2. Mamy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005} + \frac{1}{2006} = \\ = \ & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{2005} - \frac{1}{2006}\right) < \\ < \ & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{30 - 20 + 15 - 12 + 10}{60} = \frac{23}{60} < \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

1.3. Mamy
$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = (a^2b - b^2a) + (b^2c - a^2c) + c^2(a-b) =$
$= ab(a-b) - c(a-b)(a+b) + c^2(a-b) = (a-b)(ab - ac - bc + c^2) =$
$= (a-b)(b-c)(a-c) \neq 0.$

1.4. Jeśli $x < 1$, to

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = (1-x) + x^4\left(1 - x^5\right) + x^{12} > 0.$$

Jeśli $x \geq 1$, to

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = x^9\left(x^3 - 1\right) + x\left(x^3 - 1\right) + 1 > 0.$$

1.5. Mamy

$$a^6+1=\left(a^2+1\right)\left(a^4-a^2+1\right)=\left(a^2+1\right)\cdot\frac{a^5-a^3+a}{a}=\left(a^2+1\right)\cdot\frac{2}{a}.$$

Stąd wynika, że $a>0$. Ponadto

$$a^6+1=\left(a^2+1\right)\cdot\frac{2}{a}=2\left(a+\frac{1}{a}\right)>4.$$

Stąd $a^6>3$.

1.6. Przyjmijmy oznaczenia: $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$.
Wówczas mamy: $a+b=2006$, $b+c=2007$, $c+a=2008$.
Dodając stronami powyższe równości, otrzymujemy $a+b+c=\frac{6021}{2}$.
Zatem mamy $a=\frac{2007}{2}$, $b=\frac{2005}{2}$, $c=\frac{2009}{2}$.
Odpowiedź: $x=\frac{2}{2007}$, $y=\frac{2}{2005}$, $z=\frac{2}{2009}$.

1.7. Ponieważ $a+b=-c$, zatem

$$a^3+b^3+c^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)+c^3=$$

$$=(-c)((a+b)^2-3ab)+c^3=-c\left(c^2-3ab\right)+c^3=3abc.$$

1.8. Równanie można przedstawić w postaci: $(x-3)^3=-8$.
Odpowiedź: $x=1$.

1.9. Podzielmy każde z równań przez następne, otrzymujemy:

$$x_1=-x_4=x_7=-x_{10}=x_3=-x_6=x_9=-x_2=x_5=-x_8.$$

Odpowiedź: $x_1=x_3=\ldots=x_9=-1$, $x_2=x_4=\ldots=x_{10}=1$.

1.10. Ponieważ $1 = a + b + c + d = 2d$, to $d = \frac{1}{2}$.
Zatem $\frac{1}{2} - c = a + b = \frac{1}{2}c$, to znaczy $c = \frac{1}{3}$.
Tak więc, $a = \frac{1}{6} - b = bcd = \frac{1}{6}b$.
Zatem $b = \frac{1}{7}$. Stąd $a = \frac{1}{42}$.
Odpowiedź: $a = \frac{1}{42}$, $b = \frac{1}{7}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{2}$.

1.11. Ponieważ

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad -1 \leq z \leq 1,$$

więc

$$x^3 \leq x^2, \quad y^3 \leq y^2, \quad z^3 \leq z^2.$$

Zatem

$$x^3 = x^2, \quad y^3 = y^2, \quad z^3 = z^2.$$

Odpowiedź: $(x, y, z) \in \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

1.12. Niech $[\sqrt{x}\,] = k$. Wówczas $k^2 \leq x < (k+1)^2$ i powyższe równanie można zapisać w postaci

$$x = 2007 + k^2.$$

Zatem $2007 + k^2 < (k+1)^2$. Stąd

$$k \geq 1004.$$

Odpowiedź: $x = 2004 + k^2$, $k \geq 1004$.

1.13. Jeżeli x jest liczbą nieparzystą, to z jest liczbą parzystą większą od 2, tzn. nie jest liczbą pierwszą. Tak więc $x = 2$. Jeśli y jest liczbą nieparzystą, to $x^y + 1$ dzieli się przez $x + 1$. Zatem y jest liczbą parzystą.
Odpowiedź: $x = 2$, $y = 2$, $z = 5$.

1.14. Mamy $(x + 1)(x^2 + 1) = 2^y$. Obydwa czynniki lewej strony $x + 1$

i x^2+1 są potęgami dwójki. Tak więc $x=0$ lub x jest liczbą nieparzystą. Jasne jest, że $x \geq 0$. Przypuśćmy, że $x>1$. Kwadrat liczby nieparzystej $(2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$ przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1. Stąd liczba x^2+1 jest większa od dwóch i przy dzieleniu przez 4 daje resztę 2 co oznacza, że nie może być ona potęgą dwójki.
Odpowiedź: $(x,y) \in \{(0,0),\ (1,2)\}$.

1.15. Odejmując stronami od pierwszego równania drugie, otrzymujemy

$$(a-d)(b-c)=0,$$

to znaczy

$$a=d \quad \text{lub} \quad b=c.$$

Analogicznie

$$a=c \quad \text{lub} \quad b=d.$$

Widzimy zatem, że w każdym przypadku trzy z naszych liczb są sobie równe. Przypuśćmy, że są to liczby: b,c,d. Wówczas każde z naszych równań przyjmuje postać

$$ab+b^2=-1,$$

to znaczy

$$b(a+b)=-1.$$

Zatem

$$b=1, \qquad a+b=-1$$

lub

$$b=-1, \qquad a+b=1.$$

Odpowiedź: Jedna liczb równa jest ± 2, a pozostałe ∓ 1.

1.16. Z równości

$$n^3+3=(n^3+27)-24=(n+3)\left(n^2-3n+9\right)-24,$$

wynika, że liczba $n+3$ musi być dzielnikiem liczby 24.
Odpowiedź: $n \in \{1,3,5,9,21\}$.

1.17. Zauważmy, że $6(x+7y) = (6x+11y)+31y$. Dlatego, co wynika z treści zadania, liczba $6(x+7y)$ jest podzielna przez 31. Stąd liczba $x+7y$ jest podzielna przez 31.

1.18. Liczba A, spełniająca warunki zadania, może być zapisana w postaci

$$A = 37a + 2 = 11b + 5.$$

Zatem

$$11b = 37a - 3 = 33a + 4a - 3.$$

Oznacza to, że $4a - 3 = 11c$. Ponieważ $4A = 148a + 8 = 44b + 20$, więc $44b = 4A - 20 = 148a - 12 = 37(4a-3) + 99 == 37 \cdot 11c + 99 = 11(37c+9)$.
Tak więc

$$4b = 37c + 9 = (36c + 8) + c + 1.$$

Zatem $c + 1 = 4d$ i

$$4b = 37(c+1) - 28 = 37 \cdot 4d - 28 = 4(37d - 7).$$

Stąd

$$b = 37d - 7$$

oraz

$$A = 11b + 5 = 407d - 72.$$

Dla $d = 1$ otrzymujemy $A = 335$ i dla $d = 2$, $A = 742$.
Odpowiedź: 335, 742.

1.19. Jeżeli

$$x \leq -6 \quad \text{lub} \quad x > 7,$$

to
$$2 < \frac{7x+1}{3x+4} < 3.$$
Odpowiedź: $x \in \{-3, -1, 7\}$.

1.20. R o z w i ą z a n i e 1. Zauważmy, że:
$$\left(n^2+n\right)^2 = n^4 + 2n^3 + n^2 < n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 <$$
$$< n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = \left(n^2+n+1\right)^2.$$
R o z w i ą z a n i e 2.
$$n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = n^2\left(n^2+2n+1\right) + \left(n^2+2n+1\right) =$$
$$= \left(n^2+1\right)(n+1)^2.$$

1.21. Zauważmy, że: $2^{10} + 5^{12} = (2^5+5^6)^2 - 2 \cdot 2^5 \cdot 5^6 =$
$= (2^5+5^6)^2 - (2^3 \cdot 5^3)^2 = (2^5+5^6+1000)\,(2^5+5^6-1000) =$
$= (15657+1000)(15657-1000) = 14657 \cdot 16657.$

1.22. Oznaczmy 2004 przez n, a n^2+3n+1 przez m. Wówczas
$2004 \cdot 2005 \cdot 2006 \cdot 2007 + 1 = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 =$
$= (n^2+3n)\,(n^2+3n+2) + 1 = (m-1)(m+1) + 1 = m^2.$

1.23. Wśród $2n$ kolejnych liczb naturalnych n liczb jest parzystych. Zatem liczba $(n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (3n)$ jest podzielna przez 2^n. Mamy $(n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (3n) = \frac{(3n)!}{n!}$. Ponadto liczba $(3n)!$ jest podzielna przez 3 w stopniu $n + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{9}\right] + \ldots$, a liczba $n!$ jest podzielna przez 3 w stopniu $\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{9}\right] + \ldots$. Zatem liczba $\frac{(3n)!}{n!}$ jest podzielna przez 3^n.

1.24. Niech $p = 2n-1$, $q = 2n+1$. Ponieważ
$$(2n-1)^{2n-1} = \left(4n^2-4n+1\right)^{n-1}(2n-1),$$

$$(2n+1)^{2n+1} = \left(4n^2+4n+1\right)^n(2n+1),$$

więc liczba $(2n-1)^{2n-1}$ przy dzieleniu przez $4n$ daje resztę $2n-1$, a liczba $(2n+1)^{2n+1}$ przy dzieleniu przez $4n$ daje resztę $2n+1$. Tak więc ich suma jest podzielna przez $4n$.

1.25. Niech d oznacza największy wspólny dzielnik liczb 2^m-1 i 2^n+1. Oczywiście $d \neq 2$. Załóżmy, że $d > 2$. Niech

$$2^m - 1 = Ad, \qquad 2^n + 1 = Bd,$$

gdzie A i B są liczbami naturalnymi.
W takim przypadku

$$2^{mn} = (Ad+1)^n = (Bd-1)^m.$$

Oznacza to, że liczba 2^{mn} przy dzieleniu przez d daje jednocześnie resztę 1 i resztę $d-1$. Stąd otrzymujemy $d-1=1$, co jest niemożliwe.

1.26. Niech A i B oznaczają dane liczby dwucyfrowe. Wówczas $100A+B$ jest podzielne przez AB. Zatem liczba B jest podzielna przez A, to znaczy $B = kA$, $k \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.
Ponieważ liczba $100A+B = A(100+k)$ jest podzielna przez AB, więc $100+k$ jest podzielna przez kA. Stąd A jest dzielnikiem liczby $\frac{100}{k}+1$. Zatem otrzymujemy, że $k \in \{1, 2, 4, 5\}$.
Dla $k=1$ otrzymujemy, że A jest dzielnikiem liczby 101. Ale 101 jest liczbą pierwszą. Tak więc, w tym przypadku rozwiązanie nie istnieje.
Dla $k=2$ otrzymujemy, że A jest dzielnikiem liczby 51. Tak więc $A=17$.
Dla $k=4$ otrzymujemy, że $A=13$.
Dla $k=5$ rozwiązanie nie istnieje.
Odpowiedź: $\{(13, 52), (17, 34)\}$.

1.27. Niech k oznacza ilość cyfr w liczbie 2^{2007}, a p ilość cyfr w liczbie 5^{2007}. Wówczas

$$10^{k-1} < 2^{2007} < 10^k,$$

$$10^{p-1} < 5^{2007} < 10^p.$$

Mnożąc stronami powyższe nierówności, otrzymujemy

$$10^{k+p-2} < 10^{2007} < 10^{k+p}.$$

Tak więc $2007 = k + p - 1$. Stąd $k + p = 2008$.
Odpowiedź: 2008.

1.28. Bez straty ogólności możemy założyć, że $m > n$. W takim przypadku

$$m^{m-n} > n^{m-n}.$$

Stąd

$$m^n\left(m^{m-n} - 1\right) > n^n\left(n^{m-n} - 1\right).$$

Zatem

$$m^m - m^n > n^m - n^n.$$

Ale wówczas

$$m^m + n^n > n^m + m^n.$$

Sprzeczność.

1.29. Liczba p jest najbliżej liczby $\sqrt{2n}$, jeżeli

$$p - \frac{1}{2} < \sqrt{2n} < p + \frac{1}{2},$$

tzn.

$$\frac{p(p-1)}{2} + 1 \leq n \leq \frac{p(p+1)}{2}.$$

Zatem liczb równych p jest p. Tak więc jedna liczba równa jest jeden, dwie liczby równe są dwa, trzy liczby równe są trzy, ..., trzynaście liczb równych jest trzynaście i pozostałych dziewięć liczb równych jest czternaście. Zatem szukana suma równa jest
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 13^2 + 14 \cdot 9 = \frac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} + 14 \cdot 9 = 945.$
Odpowiedź: 945.

1.30. Dla $n \geq 2$ lewa strona jest liczbą nieparzystą, zaś prawa strona jest liczbą parzystą. Tak więc dla $n \geq 2$ rozwiązanie nie istnieje.
Odpowiedź: $n = m = 1$.

1.31. $1004041 = 10^6 + 1 + 4040 = (10^2 + 1)(10^4 - 10^2 + 1) + 40 \cdot 101 =$
$= 101 \cdot (10^4 - 10^2 + 41) = 101 \cdot 9941.$

1.32. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $x \geq y$. Wówczas
$x^2 < x^2 + y \leq x^2 + x < (x+1)^2$.
Odpowiedź: Nie mogą.

1.33. Niech dwudziestocyfrowa liczba a^2 zaczyna się jedenastoma jedynkami. Wówczas

$$a^2 = \underbrace{11\ldots1}_{11} \cdot 10^9 + b,$$

gdzie $0 \leq b < 10^9$. Zatem

$$\left(10^{10} - 1\right)^2 < 10^{20} - 10^{10} < \left(10^{11} - 1\right) \cdot 10^9 + 9b = (3a)^2 <$$

$$< \left(10^{11} - 1\right) \cdot 10^9 + 9 \cdot 10^9 < \left(10^{10} + 2\right)^2$$

Odpowiedź: Nie istnieje.

1.34. Jeśli $n \equiv 1 (\text{mod } 3)$, to $n + 1 \equiv 2 (\text{mod } 3)$, a zatem $n + 1$ nie może być kwadratem liczby naturalnej.

Jeśli $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$, to $2n+1 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$. Stąd n jest podzielne przez 3. Niech

$$2n+1 = (2k+1)^2.$$

Wówczas $n = 2k(k+1)$. Zatem liczba n jest podzielna przez 4.
Jeśli $n \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 8)$, to $n+1 \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 8)$. Jednakże kwadrat żadnej liczby naturalnej przy dzieleniu przez 8 nie daje reszty 5.
Zatem n jest podzielne przez 8, a stąd n jest podzielne przez 24.

1.35. Liczba ta jest równa $k(k+1)$, gdzie $k = \underbrace{33\ldots3}_{10}$. Rzeczywiście,
$k(k+1) = 3 \cdot \frac{10^{10}-1}{9} \cdot \left(3 \cdot \frac{10^{10}-1}{9} + 1\right) = (10^{10}+2) \cdot \frac{10^{10}-1}{9} = \underbrace{11\ldots1}_{10}\underbrace{22\ldots2}_{10}$.

1.36. Sprowadźmy sumę do wspólnego mianownika. Niech A oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność liczb $1, 2, 3, \ldots, 2004$. Mamy

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2004} = \frac{\frac{A}{2} + \frac{A}{3} + \ldots + \frac{A}{2004}}{A}.$$

Dla wszystkich ułamków oprócz:

$$\frac{1}{2^{10}}, \quad \frac{1}{5^4}, \quad \frac{1}{2 \cdot 5^4}, \quad \frac{1}{3 \cdot 5^4}$$

odpowiedni składnik $\frac{A}{i}$ jest podzielny przez 10. Ponadto

$$\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{2 \cdot 5^4} + \frac{1}{3 \cdot 5^4} = \frac{3 \cdot 5^4 + 2^{10} \cdot 3 + 2^9 \cdot 3 + 2^{10}}{2^{10} \cdot 3 \cdot 5^4}.$$

Liczba

$$3 \cdot 5^4 + 2^{10} \cdot 3 + 2^9 \cdot 3 + 2^{10}$$

nie jest podzielna przez dwa, a zatem nie kończy się cyfrą zero. Tak więc licznik naszej sumy nie dzieli się przez 10.
Odpowiedź: Czterema.

1.37. Niech
$$4^n + 65 = k^2.$$
Stąd
$$65 = (k - 2^n)(k + 2^n).$$
Tak więc
$$k - 2^n = 1, \quad k + 2^n = 65$$
lub
$$k - 2^n = 5, \quad k + 2^n = 13.$$
Zatem $2^n = 32$ lub $2^n = 4$.
Odpowiedź: $n \in \{2, 5\}$.

1.38. Liczby 2^n i 2^{n+1} dają różne reszty przy dzieleniu przez trzy.
Odpowiedź: Nie może.

1.39. Liczba 2004 jest podzielna przez 3, a nie jest podzielna przez 9.

1.40. Jeden z dwóch ludzi C lub D jest złodziejem. Z treści wynika, że liczba wszystkich złodziei jest nieparzysta. Stąd otrzymujemy, że w grupie osób B i E jest nieparzysta liczba złodziei.
Odpowiedź: 3.

1.41. Oczywiste jest, że wszystkie liczby są nieujemne. Niech a oznacza największą z tych liczb. Ponieważ jest ona różnicą dwóch liczb, więc jedna z nich musi być równa a, a druga zero. Zatem liczby na okręgu mają postać $a, a, 0, a, a, 0, \ldots, a, a, 0$.
Odpowiedź: $\frac{1}{20}, \frac{1}{20}, 0, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, 0, \ldots, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, 0$.

1.42. Jeżeli mędrzec, któremu jako pierwszemu zadano pytanie, może odpowiedzieć *tak*, to oznacza to, że liczba, o jakiej mu powiedziano, to 1. Odpowiedź: *nie* oznacza, że znana mu liczba jest większa niż jeden. W takim przypadku odpowiedź: *nie* drugiego z mędrców oznacza, że przekazano mu liczbę większą od dwóch. Nietrudno zrozumieć, że odpowiedź *nie* na n pytanie oznacza, że pytany mędrzec zna liczbę większą niż n.

1.43. Rozbijmy kwadrat na cztery mniejsze kwadraty. Wówczas w jednym z nich są co najmniej trzy punkty. Trójkąt o wierzchołkach w trzech z tych punktów jest szukanym trójkątem.

1.44. Rozważmy $n^{n+1} + 1$ prostych równoległych. Zaznaczmy na każdej prostej $n + 1$ punktów w taki sposób, by tworzyły one prostokątną siatkę. Istnieją wówczas dwie proste z jednakowym zbiorem zaznaczonych punktów. Na koniec wystarczy zauważyć, że wśród $n + 1$ punktów istnieją dwa tego samego koloru.

1.45. Skoro inżynier przybył do pracy 20 minut wcześniej niż zwykle, to samochód był w drodze 20 minut krócej niż zwykle. To znaczy, że samochód jechał 10 minut krócej w każdą ze stron. Tak więc w momencie dotarcia inżyniera do samochodu była godzina 7^{50}.
Odpowiedź: 7^{50}.

1.46. Z faktu, że rowerzyści jechali 2 godziny otrzymujemy, że mucha przeleciała łącznie 100 km i zakończyła lot 40 km od punktu A. Jeśli oznaczymy przez x liczbę kilometrów, jaką mucha przeleciała w kierunku od punktu A do B, a przez y liczbę kilometrów, jaką mucha przeleciała w kierunku od punktu B do A, to otrzymujemy, że $x+y = 100$ i $x-y = 40$. Stąd $x = 70$.
Odpowiedź: 70 km.

1.47. Pierwszy z nich szedł 345 minut, a drugi 276 minut. Zatem ich prędkości są w stosunku 4:5. Przypuśćmy, że pierwszy z nich szedł do chwili spotkania $5x$ minut. Wówczas drugi szedł do tego czasu $5x + 6$ minut. Tak więc na przebycie całej drogi potrzebował on $9x + 6$ minut. Stąd $x = 30$.
Odpowiedź: 13^{00}.

1.48. Przy załadunku płyt na platformy postępujemy w sposób następujący: ładujemy płyty na pierwszą platformę, bez wybierania, do momentu gdy ich masa przekroczy 58 ton. Następnie zdejmujemy ostatnią płytę i kładziemy obok platformy. W analogiczny sposób załadowujemy kolejnych 13 platform. Wówczas masa płyt leżących na platformach oraz przy nich będzie większa niż $58 \cdot 14 = 812$ ton. Masa pozostałych płyt jest mniejsza niż 58 ton, więc można je załadować na kolejną – piętnastą – platformę. Zostały jeszcze dwie platformy, które powinny pomieścić 14 płyt. Siedem dowolnych płyt waży nie więcej niż $7 \cdot 8 = 56$ ton, tak więc na dwie pozostałe platformy można załadować 14 płyt.

1.49. Na jednej z ciężarówek musi być co najmniej 8 kamieni, ale nawet 8 najlżejszych waży powyżej 3000 kg.
Odpowiedź: Nie można.

1.50. Jeżeli wszystkich mężczyzn było x, to w pierwszym pochodzie kobiet było nie więcej niż $\frac{2}{3}x$, a w drugim nie więcej niż $\frac{1}{3}x$.

2.1. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$x = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \ldots \cdot \frac{100}{102}, \quad y = \frac{2}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{8}{10} \cdot \ldots \cdot \frac{101}{103},$$

$$z = \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{9}{11} \cdot \ldots \cdot \frac{102}{104}.$$

Jeżeli $k > n > 0$ to
$$\frac{k}{k+2} > \frac{n}{n+2}.$$
Korzystając z powyższego faktu, otrzymujemy $x < y < z$. Stąd mamy:
$$x^3 < xyz = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 102}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 104} = \frac{2}{103 \cdot 104} < \frac{2}{100 \cdot 100} = \frac{1}{5000} < \frac{1}{17^3}.$$

2.2. Przyjmijmy podstawienie:
$$x = \frac{ab}{a^2+b^2}.$$
Wówczas oczywiście $0 < x \leq \frac{1}{2}$ oraz
$$\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{a^2+b^2}{ab} = x + \frac{1}{x}.$$
Łatwo wykazać, że funkcja $y = x + \frac{1}{x}$ jest malejąca w przedziale $\left(0, \frac{1}{2}\right\rangle$. Rzeczywiście, jeżeli $0 < x_1 < x_2 \leq \frac{1}{2}$, to
$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = (x_1 - x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = (x_2 - x_1)\left(\frac{1}{x_1 x_2} - 1\right) > 0.$$
A zatem funkcja ta przyjmuje najmniejszą wartość dla argumentu $\frac{1}{2}$, stąd najmniejsza wartość naszego wyrażenia to $\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$.
Odpowiedź: $\frac{5}{2}$.

2.3. Z tego, że
$$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x} + 1},$$
otrzymujemy
$$x + \frac{1}{x} = 6.$$

Ponadto
$$\frac{x^4}{x^8-x^4+1}=\frac{1}{x^4+\frac{1}{x^4}-1}.$$
Mamy
$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right)^2=1154.$$
Odpowiedź: $\frac{1}{1153}$.

2.4. Podnosząc równość
$$x-\frac{1}{x}=1$$
do potęgi drugiej i do trzeciej, otrzymujemy odpowiednio
$$x^2+\frac{1}{x^2}=3,\quad x^3-\frac{1}{x^3}=4.$$
Zatem
$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)=\left(x^5-\frac{1}{x^5}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)=12.$$
Stąd
$$x^5-\frac{1}{x^5}=11.$$
Odpowiedź: 11.

2.5. Na początek zauważmy dwa istotne fakty. Po pierwsze
$$4m^4+1=\left(2m^2+1\right)^2-(2m)^2=\left(2m^2-2m+1\right)\left(2m^2+2m+1\right),$$
po drugie
$$2(m+1)^2-2(m+1)+1=2m^2+2m+1.$$

Mamy

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\left(7^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\left(8^4+\frac{1}{4}\right)}=\\
=&\frac{(4\cdot 1^4+1)(4\cdot 3^4+1)(4\cdot 5^4+1)(4\cdot 7^4+1)}{(4\cdot 2^4+1)(4\cdot 4^4+1)(4\cdot 6^4+1)(4\cdot 8^4+1)}=\\
=&\frac{2\cdot 1^2-2\cdot 1+1}{2\cdot 8^2+2\cdot 8+1}=\frac{1}{145}.
\end{aligned}$$

2.6. Zapiszmy naszą nierówność w postaci

$$4\left(a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2bc-2cd-2da\right)\geq -(a+b+c+d)^2.$$

Stąd

$$5\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)-6ab-6bc-6cd-6da-2ac-2bd\geq 0.$$

Lewa część otrzymanej nierówności przedstawia się w postaci sumy kwadratów:

$$(a-b+c-d)^2+2(a-b)^2+2(b-c)^2+2(d-a)^2.$$

2.7. Rozpatrzmy to wyrażenie jako trójmian kwadratowy ze względu na zmienną a i przedstawmy go w postaci kanonicznej:

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2+c^2+d^2-bc-cd-d+\frac{2}{5}.$$

Następnie, pomijając pierwszy człon, rozpatrzmy otrzymane wyrażenie jako trójmian kwadratowy ze względu na zmienną b i przedstawmy go w postaci kanonicznej. Postępując analogicznie ze zmiennymi c i d, otrzymujemy:

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(b-\frac{2}{3}c\right)^2+\frac{2}{3}\left(c-\frac{3}{4}d\right)^2+\frac{5}{8}\left(d-\frac{4}{5}\right)^2=0.$$

Odpowiedź: $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{2}{5}$, $c=\frac{3}{5}$, $d=\frac{4}{5}$.

2.8. Zauważmy, że

$$(1+ab)^2+(1+cd)^2+(ac)^2+(bd)^2=(ab+cd+1)^2+(ac-bd)^2+1.$$

2.9. Z warunków zadania wynika, że suma liczb $\frac{1}{a}$ i $\frac{1}{b}$ równa jest jedynce. Przy otrzymanej sumie iloczyn tych liczb będzie największy, jeżeli liczby te będą równe, to znaczy wtedy, gdy $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$, a więc gdy $a=b=2$. Odpowiedź: 4.

2.10. Suma wyrazów ciągu arytmetycznego

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2k+1},$$

stojących na miejscach parzystych, równa jest

$$\frac{a_2+a_{2k}}{2}k,$$

a na miejscach nieparzystych

$$\frac{a_1+a_{2k+1}}{2}(k+1).$$

Z równości tych sum wynika, że $a_1+a_{2k+1}=0$. Zatem suma wszystkich wyrazów naszego ciągu równa jest

$$\frac{a_1+a_{2k+1}}{2}(2k+1)=0.$$

Odpowiedź: 0.

2.11. Dla każdego z rozważanych trójmianów zbiór punktów prostej rzeczywistej, dla których ów trójmian przyjmuje niedodatnie wartości, jest odcinkiem, którego końcami są rozwiązania tego trójmianu. Zgodnie z treścią zadania, każdy z dwóch takich odcinków posiada wspólny punkt. Stąd otrzymujemy, że istnieje punkt, który należy do wszystkich trzech odcinków. W punkcie tym wszystkie wielomiany: p_1, p_2, p_3, a zatem i suma: $p_1 + p_2 + p_3$, są niedodatnie. Stąd wynika, że wielomian $p_1 + p_2 + p_3$ posiada rozwiązanie.

2.12. Przemnóżmy prawą część drugiego równania przez $abc = 1$. Mamy

$$a + b + c = bc + ac + ab.$$

Stąd

$$abc - bc - ac - ab + a + b + c - 1 = 0,$$

więc

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) = 0,$$

co oznacza, że jedna z liczb a, b, c jest równa jeden.

2.13. Niech P oznacza wielomian, którego pierwiastkami są liczby x, y, z:

$$P(t) = (t - x)(t - y)(t - z).$$

Niech liczby p, q, r będą takie, że

$$(t - x)(t - y)(t - z) = t^3 + pt^2 + qt + r.$$

Wówczas

$$p = -x - y - z, \quad q = xy + yz + zx, \quad r = -xyz.$$

Z warunków zadania wynika, że

$$p = -a, \quad q = \frac{xyz}{a} = -\frac{r}{a}.$$

Zatem

$$P(t) = t^3 - at^2 - \frac{r}{a}t + r = (t-a)\left(t^2 - \frac{r}{a}\right).$$

Tak więc liczba a okazuje się pierwiastkiem wielomianu $P(t)$, a więc pokrywa się z jedną z liczb x, y, z.

2.14. Mamy

$$\begin{aligned} & (x+a+b)(x+a-b)(x+b-a)(x-a-b) = \\ = \; & \left(x^2 - (a+b)^2\right)\left(x^2 - (a-b)^2\right) = \\ = \; & \left(x^2 - a^2 - b^2 - 2ab\right)\left(x^2 - a^2 - b^2 + 2ab\right) = \\ = \; & \left(x^2 - a^2 - b^2\right)^2 - (2ab)^2 \geq -4a^2b^2. \end{aligned}$$

Na koniec wystarczy zauważyć, że

$$f\left(\sqrt{a^2+b^2}\right) = -4a^2b^2.$$

Odpowiedź: $-4a^2b^2$.

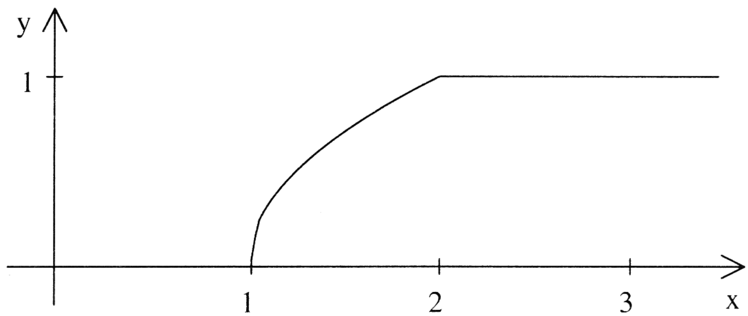
2.15. Rozpatrzmy funkcję $f(x) = 2x^2 - (a+b+c+d)x + (ad+bc)$. Nasze zadanie sprowadza się teraz do pokazania, że wyróżnik tego trójmianu jest dodatni. Aby to wykazać, wystarczy wskazać choćby jeden punkt, w którym funkcja przyjmuje wartość ujemną. Policzmy wartość tej funkcji dla argumentu a: $f(a) = (a-b)(a-c)$. Jeśli $f(a) < 0$, to mamy koniec zadania. W przeciwnym razie otrzymujemy, że $a \geq b$. Ale $f(b) = (a-b)(d-b)$, co w przypadku, gdy $a > b$ daje $f(b) < 0$. Pozostaje zatem sprawdzić przypadek, gdy $a = b$. Mamy $f(c) = (a-c)(d-c)$, $f(d) = (d-b)(d-c)$. Załóżmy, że $f(c) \geq 0$ i $f(d) \geq 0$. Stąd otrzymujemy, że $d \geq c \geq d$, tzn. $c = d$. Tak więc otrzymujemy ostatecznie, że funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe: a i c. Oznacza to, że wyróżnik tego trójmianu jest dodatni.

2.16. Zauważmy, że

$$x + 2\sqrt{x-1} = \left(\sqrt{x-1} + 1\right)^2,$$

$$x - 2\sqrt{x-1} = \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2.$$

Zatem



$$y = \frac{1}{2}\left(\left|\sqrt{x-1}+1\right| - \left|\sqrt{x-1}-1\right|\right) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & \text{gdy} \quad 1 \le x \le 2 \\ 1, & \text{gdy} \quad x > 2. \end{cases}$$

2.17. Przemnóżmy liczbę

$$a = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{100}}\right)$$

przez

$$b = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right),$$

$$ab = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} = \frac{1}{100}.$$

Ponieważ $b > 1$, więc $a < \frac{1}{100}$.
Aby wykazać punkt b), wystarczy wykazać, że $b > 10$. Mamy

$$\begin{aligned} b &= \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{100}}\right) > \\ &> 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}} > 100\cdot\frac{1}{\sqrt{100}} = 10. \end{aligned}$$

2.18. Bez straty ogólności możemy założyć, że a jest największą z liczb a, b, c. Zamieńmy trójkę liczb a, b, c na liczby

$$a+\frac{c}{2}, \quad b+\frac{c}{2}, \quad 0.$$

Lewa część nierówności przy takiej zamianie zwiększyła się, bo

$$\begin{aligned} &\left(a+\frac{c}{2}\right)^2\left(b+\frac{c}{2}\right) - \left(a^2b+b^2c+c^2a\right) = \\ &= \frac{c}{8}\left(4a(a-c)+8b(a-b)+2bc+c^2\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Dlatego wystarczy wykazać nierówność dla przypadku, gdy $c = 0$.
Wówczas mamy

$$\begin{aligned} a^2b+b^2c+c^2a &= a^2b = a^2(1-a) = 4\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot(1-a) \leq \\ &\leq 4\cdot\left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+1-a}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}. \end{aligned}$$

2.19. Niech $a_1 = a$. Wówczas

$$a_2 = \frac{1+a}{1-a}, \quad a_3 = -\frac{1}{a}, \quad a_4 = \frac{a-1}{a+1}, \quad a_5 = a = a_1.$$

Zatem

$$a_6 = a_2, \quad a_7 = a_3, \quad a_8 = a_4, \quad a_9 = a_1,$$

i tak dalej. Stąd

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2004} = 501(a_1 + a_2 + a_3 + a_4).$$

Pozostaje wykazać, że

$$a + \frac{1+a}{1-a} - \frac{1}{a} + \frac{a-1}{a+1} = 0.$$

Ponieważ

$$a + \frac{1+a}{1-a} - \frac{1}{a} + \frac{a-1}{a+1} = \frac{a^4 - 4a^2 + 1}{a\,(1-a^2)}$$

oraz

$$a^2 = 2 - \sqrt{3},$$

więc

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0.$$

2.20. Jeżeli cztery liczby równe są zero, a jedna jeden, to rozpatrywana suma równa jest cztery. Niech c oznacza sumę wartości bezwzględnych z różnic par pięciu rozpatrywanych liczb. Niech a oznacza najmniejszą z danych liczb, a b – największą, przy czym $a \neq b$. Zamieniając parę liczb a, b na parę $0, b + a$, zwiększamy sumę c, nie zmieniając sumy pięciu wyjściowych liczb. Takim sposobem dochodzimy do wyboru liczb $0, 0, 0, 0, 1$. Odpowiedź: 4.

2.21. Skorzystamy z tożsamości:

$$\frac{2^k}{2^{2^k} + 1} = \frac{2^k}{2^{2^k} - 1} - \frac{2^{2^{k+1}}}{2^{2^{k+1}} - 1}.$$

Zatem

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{4}{17} + \ldots + \frac{2^n}{2^{2^n} + 1} =$$

$$= \left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{4}{15}-\frac{8}{255}\right)+\ldots+\left(\frac{2^n}{2^{2^n}-1}-\frac{2^{n+1}}{2^{2^{n+1}}-1}\right)=$$
$$= 1-\frac{2^{n+1}}{2^{2^{n+1}}-1}<1.$$

2.22. Przyjmijmy oznaczenia:

$$x_1+x_3+x_5+\ldots=a, \quad x_2+x_4+x_6+\ldots=b.$$

Wówczas

$$a+b=1.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} & x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n \leq \\ \leq\ & (x_1+x_3+x_5+\ldots)(x_2+x_4+x_6+\ldots)= \\ =\ & ab=a(1-a)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-a\right)^2\leq\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Jeżeli przyjmiemy

$$x_1=x_2=\frac{1}{2}, \quad x_3=x_4=\ldots=x_n=0,$$

to wówczas

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{1}{4}.$$

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$.

2.23. Oczywiste jest, że dla dowolnych dodatnich liczb x, y zachodzi nierówność

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y}\geq 1.$$

Zatem

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^{c-a}\geq 1.$$

Stąd

$$a^{2a-b-c} \cdot b^{2b-c-a} \cdot c^{2c-a-b} \geq 1.$$

Tak więc

$$\left(a^a \cdot b^b \cdot c^c\right)^2 \geq a^{b+c} \cdot b^{c+a} \cdot c^{a+b}.$$

2.24. Ponieważ liczby a, b, c są dodatnie i mniejsze niż jeden, więc możemy przyjąć podstawienie:

$$a = \sin^2\alpha, \quad b = \sin^2\beta, \quad c = \sin^2\gamma,$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. W takim przypadku

$$\begin{aligned} & \sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-a)(1-c)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} - \sqrt{abc} = \\ = \; & \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \\ = \; & \sin\alpha\cos(\beta+\gamma) + \cos\alpha\sin(\beta+\gamma) = \sin(\alpha+\beta+\gamma) \leq 1. \end{aligned}$$

2.25. Przyjmijmy podstawienia:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t,$$

gdzie $t \in \langle 0, 2\pi)$. Pierwsze równanie przyjmuje postać

$$\sin 4t = 1.$$

Stąd

$$t = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Odpowiedź: $\left\{\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right),\right.$
$\left.\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)\right\}.$

2.26. Oznaczmy rozwiązania równania

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

przez $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Wówczas

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) =$$

$$= x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Zatem

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -a, \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = b.$$

Ponieważ

$$a^2 - 3b = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 3(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left((\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)^2 + (\alpha_3 - \alpha_1)^2\right),$$

więc $a^2 > 3b$.

2.27. Rozpatrzmy następujące trzy punkty w prostokątnym układzie współrzędnych:

$$A(x, 0), \quad B\left(-\frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y\right), \quad C\left(-\frac{z}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}z\right).$$

Wówczas

$$|AB|^2 = x^2 + xy + y^2, \quad |AC|^2 = x^2 + xz + z^2, \quad |BC|^2 = y^2 + yz + z^2.$$

Zatem szukana nierówność równoważna jest nierówności

$$|AB| + |AC| \geq |BC|.$$

2.28. Przyjmijmy oznaczenie

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=a.$$

Podnosząc obie części tego równania do potęgi trzeciej i korzystając z zależności

$$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y),$$

otrzymujemy

$$a^3=40+3\sqrt[3]{20^2-14^2\cdot 2}a,$$

tzn.

$$a^3+6a-40=0.$$

Ponieważ

$$a^3+6a-40=(a-4)\left(a^2+4a+10\right),$$

więc $a=4$.

2.29. Z założenia mamy, że

$$x_1-x_2=\frac{x_2-x_3}{x_2x_3},\quad x_2-x_3=\frac{x_3-x_4}{x_3x_4},\ldots,\quad x_n-x_1=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}.$$

Jeśli $x_1=x_2$, to $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n$.
Jeśli natomiast $x_1\neq x_2$, to $x_2\neq x_3,\ldots,x_n\neq x_1$. Stąd mnożąc przez siebie wszystkie wypisane powyżej równości i skracając przez

$$(x_1-x_2)(x_2-x_3)\ldots(x_n-x_1),$$

otrzymujemy, że $(x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n)^2=1$.

2.30. Niech n będzie liczbą naturalną, dla której $\frac{n^2}{(1,1)^n}$ przyjmuje największą wartość. Wówczas

$$\frac{n^2}{(1,1)^n}\geq\frac{(n-1)^2}{(1,1)^{n-1}}\quad\text{i}\quad\frac{n^2}{(1,1)^n}\geq\frac{(n+1)^2}{(1,1)^{n+1}}.$$

Stąd

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^2 \geq 1,1 \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

Tym samym

$$\frac{1}{\sqrt{1,1}-1}+1 \geq n \geq \frac{1}{\sqrt{1,1}-1}.$$

Zatem $22 > n > 20$.
Odpowiedź: $n = 21$.

2.31. Popatrzmy jak zachowuje się suma

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

przy zbliżaniu dodatnich liczb x i y z zachowaniem sumy $x+y$. Ponieważ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy},$$

a iloczyn xy przy zbliżaniu liczb x i y wzrasta

$$(x+\varepsilon)(y-\varepsilon) = xy + \varepsilon(y-x-\varepsilon) > xy,$$

więc wartość sumy

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

maleje. Nas interesuje największa wartość funkcji

$$P = (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).$$

Zatem nie będziemy zbliżali liczb, a oddalali je. Jeżeli między liczbami a, b, c, d są dwie, należące do przedziału $(1,4)$, to zmniejszmy mniejszą z nich, a większą powiększmy o tyle samo w taki sposób, aby choć jedna z nich znalazła się na krańcu przedziału $\langle 1,4\rangle$. Wówczas wartość funkcji

P zwiększy się. Postępujemy w ten sposób dopóty, dopóki chociażby dwie z tych liczb leżą wewnątrz przedziału $\langle 1,4\rangle$. Ostatecznie dojdziemy do sytuacji, gdy wszystkie liczby a, b, c, d, z wykluczeniem być może jednej, równe są 1 lub 4. W ten sposób lewą część nierówności można rozpatrywać jako funkcję jednej zmiennej, określoną w przedziale $\langle 1,4\rangle$. Funkcja ta przyjmuje największą wartość na jednym z końców tego przedziału. Niech k liczb równych będzie 1, a $4-k$ liczb równych 4 ($k = 0,1,2,3,4$). Wówczas

$$\begin{aligned} P &= (k+4(4-k))\left(k+\frac{4-k}{4}\right) = \frac{1}{4}(16-3k)(4+3k) = \\ &= \frac{1}{4}\left(100-(3k-6)^2\right) \leq \frac{1}{4}\cdot 100 = 25. \end{aligned}$$

2.32. Zapiszmy nierówność w następującej postaci:

$$\left(x_1-\frac{x_n}{2}\right)^2+\left(x_2-\frac{x_n}{2}\right)^2+\ldots+\left(x_{n-1}-\frac{x_n}{2}\right)^2+\frac{5-n}{4}x_n^2 \geq 0.$$

Jasne jest, że dla $n \leq 5$ nierówność jest prawdziwa dla dowolnych wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Jeśli natomiast $n \geq 6$, to wówczas dla

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 1, \quad x_n = 2$$

nierówność nie jest spełniona.
Odpowiedź: $n \in \{2,3,4,5\}$.

2.33. Oznaczmy przez x_1, x_2 rozwiązania równania

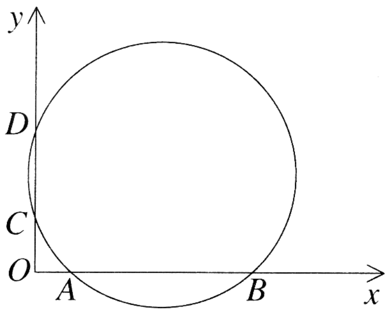
$$x^2+ax+b^2 = 0.$$

Parabola

$$y = x^2+ax+b^2$$

przecina osie układu współrzędnych w punktach

$$A(x_1, 0), \quad B(x_2, 0), \quad C(0, b^2).$$



Niech D oznacza drugi punkt przecięcia okręgu, przechodzącego przez punkty A, B, C, z osią Oy (D pokrywa się z punktem C w przypadku styczności okręgu z osią Oy).
Wówczas

$$|OA| \cdot |OB| = |OD| \cdot |OC|,$$

$$|OA| \cdot |OB| = |x_1 \cdot x_2| = b^2 = |OC|.$$

Zauważmy, że z treści zadania wynika, że $b \neq 0$, więc $|OD| = 1$.
Zatem wszystkie okręgi przechodzą przez punkt $D(0, 1)$.

2.34. Ponieważ

$$p(x) = \frac{x^2}{1 + x^2},$$

to

$$p(x) + p\left(\frac{1}{x}\right) = 1, \quad p\left(\frac{k}{100}\right) + p\left(\frac{100}{k}\right) = 1, \quad (k = 1, 2, \ldots, 99).$$

Odpowiedź: $99\frac{1}{2}$.

2.35. Zbadajmy zachowanie ułamka

$$\frac{(1-a)(1-b)}{ab}$$

dla dodatnich, mniejszych od 1, liczb a i b, których wartości zbliżają się do siebie, ale zachowana jest suma $a+b$. Ponieważ

$$\frac{(1-a)(1-b)}{ab} = \frac{1-(a+b)}{ab} + 1$$

oraz wartość wyrażenia ab zwiększa się, więc ten ułamek zmniejsza się. Jeśli między liczbami $x_1, x_2, \ldots, x_n$ występują różne wartości, to najmniejsza z nich jest mniejsza niż $\frac{1}{n}$, a największa większa niż $\frac{1}{n}$. Niech $x_1 < \frac{1}{n}$, $x_2 > \frac{1}{n}$. Zamieńmy x_1 na $\frac{1}{n}$, a x_2 na $x_1 + x_2 - \frac{1}{n}$. Wówczas x_1 i x_2 zbliżają się z zachowaniem sumy i dlatego lewa część nierówności zmniejszy się. Jeśli w nowym zestawie występują różne liczby, to ponownie wykonujemy analogiczną operację. Postępujemy w ten sposób do momentu uzyskania równych wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dla których lewa część nierówności równa jest prawej. Tym samym nierówność została wykazana.

2.36. Z treści zadania otrzymujemy, że $x + a\sqrt{x} + b = c^2 - 2c\sqrt{x} + x$.
Połóżmy $b = c^2$, $a = -2c$. Niech $c = 1$. Wówczas $b = 1$, $a = -2$.
Dla $0 \le x \le 1$ mamy $\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} + \sqrt{x} = |\sqrt{x} - 1| + \sqrt{x} = 1$.
Odpowiedź: Może.

2.37. Przemnóżmy pierwsze równanie przez $x - y$, drugie przez $z - x$, trzecie przez $y - z$ i dodajmy stronami. Otrzymujemy:

$$7(x-y) + 21(z-x) + 28(y-z) = 0.$$

Stąd

$$z = 3y - 2x.$$

Podstawiając za z otrzymane wyrażenie do drugiego i trzeciego równania, otrzymujemy, że $y = 0$ lub $y = 2x$.
Odpowiedź: $(x, y, z) \in \left\{\left(\sqrt{7}, 0, -2\sqrt{7}\right),\ \left(-\sqrt{7}, 0, 2\sqrt{7}\right),\ (1, 2, 4),\ (-1, -2, -4)\right\}$.

2.38. Dodając stronami wszystkie te równania, otrzymujemy:

$$(x + y + z)^2 + z^2 = 0.$$

Stąd $z = 0$ i $y = -x$. Wstawiając te wartości do układu równań, otrzymujemy, że $x = 0$.
Odpowiedź: $\{(0, 0, 0)\}$.

2.39. Zapiszmy układ równań w postaci:

$$\begin{cases} xy + xz = 2(x + y + z) \\ xy + yz = 3(x + y + z) \\ xz + yz = 4(x + y + z). \end{cases}$$

Stąd

$$xy + yz + zx = \frac{9}{2}(x + y + z).$$

Zatem

$$\begin{cases} xy = \frac{1}{2}(x + y + z) \\ yz = \frac{5}{2}(x + y + z) \\ xz = \frac{3}{2}(x + y + z). \end{cases}$$

Ponieważ $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, więc $x + y + z \neq 0$. W takim razie

$$\frac{y}{x} = \frac{yz}{xz} = \frac{\frac{5}{2}(x + y + z)}{\frac{3}{2}(x + y + z)} = \frac{5}{3},$$

$$\frac{z}{x} = \frac{yz}{xy} = \frac{\frac{5}{2}(x + y + z)}{\frac{1}{2}(x + y + z)} = 5.$$

Stąd
$$y=\frac{5}{3}x, \qquad z=5x.$$
Podstawiając tak wyznaczone x i y do pierwszego z równań wyjściowego układu, uzyskujemy:
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{5}{3}x+5x}=\frac{1}{2}.$$
Stąd
$$\frac{1}{x}\left(1+\frac{3}{20}\right)=\frac{1}{2}.$$
Zatem
$$x=\frac{23}{10}.$$
A stąd
$$y=\frac{23}{6}, \qquad z=\frac{23}{2}.$$
Odpowiedź: $x=\frac{23}{10}, y=\frac{23}{6}, z=\frac{23}{2}$.

2.40. Przyjmijmy oznaczenie $\sqrt[10]{2}=a$. Potrzebujemy wykazać, że $a^2-8a+7<0$. Tak właśnie jest, ponieważ $1<a<7$.

2.41. $x=\sqrt{6}+\sqrt{10} \implies \left(x-\sqrt{6}\right)^2=10 \implies x^2-4=2x\sqrt{6} \implies$ $\left(x^2-4\right)^2=24x^2 \implies x^4-32x^2+16=0$.
Odpowiedź: $x^4-32x^2+16=0$.

2.42. Przypadek, gdy $ab=0$ jest oczywisty. Przyjmijmy więc, że $a\neq 0$ i $b\neq 0$. Załóżmy, że żadne z tych równań kwadratowych nie posiada rozwiązania. Zatem $a^2-b<0$, $b^2-a<0$, $1-ab<0$. Tak więc $a>b^2$, $b>a^2$ i $ab>1$. Stąd $ab>a^2b^2$. Zatem $ab<1$. Otrzymana sprzeczność wskazuje na błędne założenie.

2.43. Jeżeli $c=0$, to udowodnienie zadania jest oczywiste.

Niech $c \neq 0$. Mamy $px_1 + c = -x_1^2$, $px_2 + c = x_2^2$. Aby dowieść prawdziwości zadania, wystarczy wykazać, że wielomian $x^2 + 2px + 2c$ przyjmuje w punktach x_1 i x_2 wartości różnych znaków. Tak właśnie jest, ponieważ $(x_1^2 + 2px_1 + 2c)(x_2^2 + 2px_2 + 2c) = -x_1^2 \cdot 3x_2^2 < 0$.

2.44. Zauważmy, że
$$\left(\frac{x}{z}\right)^n + \left(\frac{y}{z}\right)^n = z.$$
Stąd obydwie liczby x i y nie mogą być jednocześnie ani większe od z, ani mniejsze od z. Ponadto, jeżeli któraś z liczb x lub y, niech będzie to x, jest większa od z, to wyrażenie
$$\left(\frac{x}{z}\right)^n$$
rośnie do nieskończoności wraz ze wzrostem n. Tak więc pozostaje rozpatrzyć przypadek, gdy $x = y = z$.
Odpowiedź: $x = y = z = 2$.

2.45. Dodajmy nasze równania stronami:
$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \ldots + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = 6.$$
Zauważmy, że dla $x > 0$
$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$
przy czym równość zachodzi tylko dla $x = 1$. Zatem $n \leq 3$. Oczywiście jeżeli $n = 3$, to $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Pozostaje rozpatrzyć przypadki, gdy $n = 2$ oraz $n = 1$.
Odpowiedź: Dla $n \geq 4$ lub $n = 1$ rozwiązanie nie istnieje; jeżeli $n = 3$, to $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; jeżeli $n = 2$, to $x_1 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}$.

2.46. Niech $x - y = n$. Wówczas
$$x + y = n^2,$$

zatem

$$x = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad y = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Są to liczby całkowite dla dowolnego n. Otrzymujemy zatem, że rozwiązania naszego równania są postaci:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right).$$

Nierówności:

$$|x| < 100, \qquad |y| < 100,$$

spełnione są dla $|n| \leq 13$.
Odpowiedź: 27.

2.47. Zauważmy, że

$$n^2 + 8n - 85 = (n+4)^2 - 101.$$

Ponadto liczba 101 jest liczbą pierwszą, więc $n + 4$ powinno być podzielne przez 101.
Odpowiedź: $n = 101 \cdot k - 4$, gdzie $k = 2, 3, \ldots, 9$.

2.48. Niech $a \leq b \leq c \leq d$ – szukana czwórka liczb. Zaznaczmy na początek, że dowolne dwie z szukanych liczb są względnie pierwsze. Z założenia całkowite są liczby:

$$\frac{bcd+1}{a}, \quad \frac{acd+1}{b}, \quad \frac{abd+1}{c}, \quad \frac{abc+1}{d}.$$

Tak więc ich iloczyn również jest liczbą całkowitą. Przemnóżmy przez siebie te liczby. Po skróceniu otrzymujemy, że całkowita jest liczba

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{abcd}.$$

Nasze rozważania podzielimy na pięć przypadków: k liczb jest równych jeden ($k = 4, 3, 2, 1, 0$).

Pierwsze trzy przypadki prowadzą do wyboru liczb $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 2)$, $(1, 1, 2, 3)$ odpowiednio. Przypuśćmy teraz, że między liczbami a, b, c, d jest tylko jedna jedynka. Oznacza to, że $a = 1 < b < c < d$. Tak więc całkowitą okazuje się liczba

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{bcd}.$$

Jeżeli $b \geq 3$, to

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{bcd} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{60} < 1.$$

Jeżeli $b = 2$ i $c \geq 4$, to

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{bcd} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{40} < 1.$$

Dla $b = 2$ i $c = 3$ otrzymujemy

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{6d} = \frac{1}{6}.$$

Stąd $d = 7$.

Niech teraz $a \neq 1$. Jeżeli $a \geq 3$, to

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{abcd} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{360} < 1.$$

Tak więc $a = 2$. Jeżeli teraz $b \geq 5$, to $c \geq 7$, $d \geq 9$, a stąd

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{abcd} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{630} < 1.$$

Ponieważ $b \neq 4$, to $b = 3$. W takim przypadku c nie może być równe 4, 6, 8, 9, 10 i 12. Jeśli więc $c \geq 13$, to $d \geq 17$, a stąd

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{abcd} < 1.$$

Dla $c = 11$ otrzymujemy, że $2 \cdot 3 \cdot 11 + 1$ jest podzielne przez d. Zatem $d = 67$. Jednakże $2 \cdot 11 \cdot 67 + 1$ nie jest podzielne przez 3. Dla $c = 5$ otrzymujemy, że $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$ jest podzielne przez d. Stąd $d = 31$. Jednakże $2 \cdot 5 \cdot 31 + 1$ nie jest podzielne przez 3. Ostatecznie $c = 7$. Tak więc $2 \cdot 3 \cdot 7 + 1$ dzieli się przez d. Zatem $d = 43$.
Odpowiedź: $\{(1,1,1,1),\ (1,1,1,2),\ (1,1,2,3),\ (1,2,3,7),\ (2,3,7,43)\}$.

2.49. Niech szukana liczba przedstawia się na trzy różne sposoby w postaci:

$$13a_1 + 73b_1 = 13a_2 + 73b_2 = 13a_3 + 73b_3.$$

Niech $a_1 < a_2 < a_3$. Mamy $13(a_2 - a_1) = 73(b_1 - b_2)$.
Wówczas $a_2 - a_1 = 73k$. Zatem $b_1 - b_2 = 13k$.
Analogicznie $a_3 - a_2 = 73p$, $b_2 - b_3 = 13p$.
Tak więc

$$a_3 = a_1 + 73(k + p), \qquad b_1 = b_3 + 13(k + p).$$

Stąd

$$a_3 \geq 1 + 73(1 + 1) = 147, \quad a_2 \geq 74, \quad a_1 \geq 1,$$
$$b_3 \geq 1, \quad b_2 \geq 14, \quad b_1 \geq 27.$$

Zatem najmniejsza liczba wyrażająca się na trzy różne sposoby w żądanej postaci to

$$1984 = 13 \cdot 1 + 73 \cdot 27 = 13 \cdot 74 + 73 \cdot 14 = 13 \cdot 147 + 73 \cdot 1.$$

Odpowiedź: 1984.

2.50. Z warunków zadania wynika, że

$$(2x + 1)^2 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1.$$

Ale dla $y < -1$ lub $y > 2$ prawdziwe są nierówności

$$\left(2y^2 + y\right)^2 < 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 < \left(2y^2 + y + 1\right)^2,$$

a zatem liczba

$$4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1$$

nie może być pełnym kwadratem liczby całkowitej. Pozostaje rozpatrzyć przypadki, gdy $y \in \{-1, 0, 1, 2\}$.
Odpowiedź: $\{(-6, 2), (-1, -1), (-1, 0), (0, -1), (0, 0), (5, 2)\}$.

2.51. Wypiszmy kilka początkowych reszt z dzielenia przez 7 potęg trójki: 3, 2, 6, 4, 5, 1. Tak więc dla $n \leq 6$ reszta z dzielenia 3^n przez 7 równa jest 1 tylko dla $n = 6$. Niech

$$n = 6k + r, \qquad 0 \leq r \leq 5.$$

Ponieważ

$$3^n = \left(3^6\right)^k \cdot 3^r,$$

więc reszta wynosi jeden wtedy i tylko wtedy, gdy $r = 0$.
Odpowiedź: $n = 6k$, gdzie k – liczba naturalna.

2.52. Oczywiste, że ani liczba k, ani liczba $k+1$ nie są podzielne przez 3. Zatem $k = 3b + 1$. W takim przypadku liczba k^{k+1} daje resztę jeden przy dzieleniu przez 3, a liczba $(k+1)^k = (3b+2)^{3b+1}$ resztę 2. Zatem liczba $2^{3b+1} = 2 \cdot 8^b$ przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2. Oznacza to, że 2^b daje resztę 1. Stąd b jest liczbą parzystą: $b = 2a$.
Odpowiedź: $k = 6a + 1$, gdzie a oznacza nieujemną liczbę całkowitą.

2.53. Zapiszmy nasze równanie w postaci $z(x + y) = 1 - xy$ i połóżmy $x + y = 1$. Wówczas $z = 1 - xy$. Zatem mamy nieskończenie wiele rozwiązań $(x, 1 - x, x^2 - x + 1)$.

2.54. Niech $A = f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(40)$ i niech k będzie liczbą naturalną z przedziału od 1 do 40. W takim przypadku liczba

$$f(A + k) = (A + k)^2 - (A + k) + 41 = A^2 + 2kA - A + k^2 - k + 41$$

jest podzielna przez $f(k)$, a ponadto większa niż $f(k)$, a więc jest złożona.

2.55. **a)** Niech liczba $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ będzie podzielna przez 37. Wykażemy, że liczba $\overline{bca} = 100b + 10c + a$ również jest podzielna przez 37. W tym celu pokażemy, że różnica tych liczb:

$$\overline{abc} - \overline{bca} = 99a - 90b - 9c = 9(11a - 10b - c)$$

jest podzielna przez 37. Ponieważ liczba $111a$ jest podzielna przez 37, więc i liczba

$$111a - \overline{abc} = 11a - 10b - c$$

jest podzielna przez 37.

b) $1\underbrace{00\ldots0}_{100}1\underbrace{00\ldots0}_{100}1 = 10^{202} + 10^{101} + 1.$

Reszta z dzielenia liczby $1000 = 10^3$ przez 37 równa jest 1, stąd reszta z dzielenia liczby $10^{202} = 10 \cdot \left(10^3\right)^{67}$ przez 37 równa jest 10. Ponadto reszta z dzielenia liczby $10^{101} = 100 \cdot \left(10^3\right)^{33}$ przez 37 jest taka jak reszta z dzielenia liczby 100 przez 37. Zatem liczba $10^{202} + 10^{101} + 1$ przy dzieleniu przez 37 daje taką samą resztę jak liczba $100 + 10 + 1 = 111$, a więc jest podzielna przez 37.

c) Niech liczba $a = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{3n}}$ będzie podzielna przez 27. Wykażemy, że liczba $b = \overline{a_2 a_3 \ldots a_{3n} a_1}$ również jest podzielna przez 27. W tym celu wystarczy pokazać, że liczba

$$10a - b = a_1\left(10^{3n} - 1\right)$$

dzieli się przez 27. Pozostaje zauważyć, że liczba

$$10^{3n} - 1 = \left(10^3\right)^n - 1$$

jest podzielna przez liczbę $10^3 - 1 = 999 = 27 \cdot 37$.

2.56. Zapiszmy nasze równanie w postaci

$$\left(m^2 + 1\right)\left(n^2 + 1\right) = k^2 + 1.$$

Prawdziwa jest tożsamość

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2,$$

tzn. iloczyn sumy dwóch kwadratów jest sumą kwadratów. Korzystając z powyższej formuły otrzymujemy

$$\left(m^2+1\right)\left(n^2+1\right)=(mn+1)^2+(m-n)^2.$$

Pozostaje teraz wybrać m i n w taki sposób, aby $m-n=1$. W takim przypadku

$$\left((n+1)^2+1\right)\left(n^2+1\right)=\left(n^2+n+1\right)^2+1.$$

2.57. Ponieważ

$$a_{n+3}a_n-a_{n+2}a_{n+1}=1,\qquad a_{n+4}a_{n+1}-a_{n+2}a_{n+3}=1,$$

więc

$$a_{n+3}a_n+a_{n+2}a_{n+3}=a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+4}a_{n+1}.$$

Stąd

$$\frac{a_{n+4}+a_{n+2}}{a_{n+3}}=\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}}.$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}}=b_n.$$

Z faktu, że

$$b_{n+2}=b_n,$$

otrzymujemy

$$b_{2k}=b_2=3,\qquad b_{2k+1}=b_1=2.$$

Tak więc

$$a_{2n+2}=3a_{2n+1}-a_{2n},\qquad a_{2n+1}=2a_{2n}-a_{2n-1}.$$

Stąd wynika, że wszystkie liczby ciągu a_n są całkowite.

2.58. Ponieważ liczba $x+1$ jest względnie pierwsza z liczbą x^2, więc x^2 może być podzielna przez $x+1$ tylko w przypadku, gdy $x+1=1$ lub $x+1=-1$. Stąd $x=0$ lub $x=-2$.
Odpowiedź: $\{(0,2),(0,-2),(-2,2),(-2,-2)\}$.

2.59. Niech v_n oznacza resztę z dzielenia liczby u_n przez 7. Łatwo wyliczyć kilka początkowych wyrazów ciągu $\{v_n\}$: $v_1=1$, $v_2=1$, $v_3=2$, $v_4=5$, $v_5=1$, $v_6=5$, $v_7=5$, $v_8=1$. Z faktu, że para (v_4,v_5) pokrywa się z parą (v_7,v_8), otrzymujemy, że ciąg $\{v_n\}$, poczynając od czwartego wyrazu, jest okresowy z cyklem długości 3, tzn. $v_{n+3}=v_n$ dla $n\geq 4$. Zatem żaden z wyrazów ciągu $\{v_n\}$ nie jest równy zeru, co jest jednoznaczne z tym, że żaden z wyrazów ciągu $\{u_n\}$ nie jest podzielny przez 7.
Odpowiedź: Nie jest podzielna.

2.60. Niech b_n oznacza resztę z dzielenia liczby a_n przez 7. Nietrudno wypisać kilka początkowych wyrazów ciągu b_n:
1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0, 1, 1. Stąd $b_{17}=b_1$, $b_{18}=b_2$. Zatem $b_n=b_{n+16}$. Tak więc, $b_{2004}=b_4=3$.
Odpowiedź: Nie jest podzielna.

2.61. $\left|\sqrt{2}-\frac{m}{n}\right|=\frac{|2n^2-m^2|}{n\left(\sqrt{2}n+m\right)}\geq\frac{1}{n\left(\sqrt{2}n+m\right)}$. Tak więc wystarczy wykazać, że

$$\frac{1}{n\left(\sqrt{2}n+m\right)}>\frac{1}{4n^2}.$$

Nierówność ta jest równoważna nierówności

$$\frac{m}{n}<4-\sqrt{2}.$$

Jeśli byłoby

$$\frac{m}{n}\geq 4-\sqrt{2},$$

to

$$\left|\sqrt{2} - \frac{m}{n}\right| = \frac{m}{n} - \sqrt{2} \geq 4 - 2\sqrt{2} > \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4n^2}.$$

2.62. Ponieważ $f(0) \cdot g(0) = 1$, więc $f(0) \neq 0$.
Ponieważ $f(1) \cdot g(-1) = 1$, więc $g(-1) \neq 0$.
Przeczy to temu, że $f(0) \cdot g(-1) = 0$.
Odpowiedź: Nie istnieją.

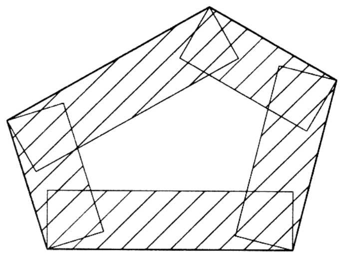
2.63. Przeanalizujmy dowolną z dróg kierowcy. Cofnijmy się o 1500 km. Zauważmy, że w tym punkcie kierowca musiał mieć co najmniej 150 l benzyny. Oznacza to, że każdy odcinek drogi do tego miejsca kierowca musiał przejechać co najmniej trzy razy. Cofnijmy się jeszcze o 500 km i zauważmy, że w tym miejscu kierowca musiał posiadać co najmniej 300 l benzyny. Zatem każdy odcinek drogi do tego miejsca kierowca musiał przejechać co najmniej 5 razy. Cofnijmy się jeszcze o 300 km. Na przejechanie tego odcinka kierowca potrzebuje co najmniej 150 l benzyny. Oznacza to, że więcej niż 2300 km kierowca przejechać nie może. Pokażemy teraz, że kierowca może przejechać 2300 km.
Kierowca tankuje 150 l benzyny i jedzie 300 km. Zostawia 90 l benzyny, wraca i ponownie tankuje 150 l i znów jedzie 300 km. Zostawia kolejne 90 l benzyny i ponownie wraca do bazy, gdzie tankuje pozostałe 150 l, i kolejny raz przejeżdża 300 km. W ten sposób 300 km od początku pustynie mamy 300 l benzyny. Kierowca tankuje teraz 150 litrów i jedzie 500 km, tam zostawia 50 l i wraca po resztę benzyny, po czym ponownie pokonuje 500 km. Tam tankuje pozostawione wcześniej 50 l i w związku z tym jedzie jeszcze 1500 km. A zatem kierowca ostatecznie oddalił się od początku pustyni o $300 + 500 + 1500 = 2300$.
Odpowiedź: 2300 km.

2.64. Rozpatrzmy sytuację odwrotną: z naczynia można przelać do drugiego naczynia połowę ilości wody. Oznaczmy ilość wszystkiej wody przez jeden. Tak więc w ostatnim momencie mamy w naczyniach następujące ilości wody: $1, 0, 0, \ldots, 0$. Oznacza to, że w poprzednim kroku było: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0$. Łatwo zauważyć, że zawsze we wszystkich naczyniach ilość wody będzie wyrażała się liczbą $\frac{k}{2^m}$. Zatem $\frac{1}{n} = \frac{k}{2^m}$. Stąd liczba n jest dzielnikiem potęgi dwójki, a zatem samo n jest potęgą dwójki.
Odpowiedź: n-potęga dwójki.

2.65. Nietrudno jest wymyślić odpowiedni przykład. Ponumerujmy urzędników liczbami od 1 do 15. Oto 20 komisji spełniających warunki zadania: (1,2,4), (2,3,5), (3,4,6), ..., (12,13,15), (13,14,1), (14,15,2), (15,1,3) i jeszcze 5 komisji (1,6,11), (2,7,12), (3,8,13), (4,9,14), (5,10,15).
Odpowiedź: Mogą.

2.66. Dowód przeprowadzimy przez indukcję ze względu na liczbę rozbójników. Dwaj rozbójnicy mogą postąpić w sposób następujący: jeden z nich dzieli łup na dwie, według niego równe części, a drugi wybiera tę część, która wydaje mu się większa. Załóżmy teraz, że k rozbójników może podzielić łup zgodnie z warunkami zadania, a wszystkich rozbójników jest $k+1$. Wówczas k rozbójników dzieli łup między sobą, a następnie $k+1$ rozbójnik dzieli część każdego z nich na $k+1$ równych części według swojego uznania. Po czym każdy z rozbójników oddaje ze swojej doli najmniejszą, według swojego uznania, część $k+1$ rozbójnikowi.

2.67. Należy wykazać, że wewnątrz wielokąta istnieje punkt, odległy od jego brzegu o więcej niż $\frac{S}{L}$. Zbudujmy na każdym z boków wielokąta prostokąt o wysokości $\frac{S}{L}$.



Pole zakreskowanej figury jest mniejsze niż suma pól prostokątów, to znaczy mniejsze niż $\frac{S}{L} \cdot L = S$. Tak więc w wielokącie pozostają niezakreskowane punkty, co należało wykazać.

2.68. Narysujmy okrąg o środku w dowolnym z danych punktów i promieniu $D + \frac{d}{2}$. Okrąg ten zawiera 25 okręgów o promieniu $\frac{d}{2}$ ze środkami w danych punktach. Zatem

$$\pi\left(D + \frac{d}{2}\right)^2 > 25\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Stąd

$$D + \frac{d}{2} > 5 \cdot \frac{d}{2},$$

tzn. $D > 2d$.

3.1. Niech

$$\sqrt[3]{1+p} + \sqrt[3]{1-p} = k.$$

Jeśli $p = 0$, to $k = 2$. Niech $p \neq 0$.
Podnosząc obie strony tego równania do trzeciej potęgi, otrzymujemy

$$k^3 = 2 + 3k\sqrt[3]{1-p^2}.$$

Ponieważ $k \neq 0$, więc

$$p^2 = 1 - \left(\frac{k^3-2}{3k}\right)^3.$$

Zatem
$$\frac{k^3-2}{3k} \leq 1,$$
to znaczy
$$\frac{(k+1)^2(k-2)}{3k} \leq 0.$$
Stąd $k \in \{-1, 1, 2\}$.
Odpowiedź: $\{0, \frac{2\sqrt{21}}{9}, -\frac{2\sqrt{21}}{9}\}$.

3.2. $\left(7^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}} = 7^5 = 16807 > 15625 = 5^6 > \left(5^{\sqrt{7}}\right)^{\sqrt{5}}$.
Odpowiedź: $7^{\sqrt{5}} > 5^{\sqrt{7}}$.

3.3. Zauważmy, że:
$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+a)(b+c)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}$$
$$\Updownarrow$$
$$4\left(a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)\right) \geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$$
$$\Updownarrow$$
$$a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b \geq 6abc.$$
Ostatnia nierówność prawdziwa jest na mocy nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią geometryczną:
$$a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b \geq 6\sqrt[6]{a^2b \cdot a^2ccdotb^2c \cdot b^2a \cdot c^2a \cdot c^2b} = 6abc.$$

3.4.
a) Oczywiste jest, że ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący. Załóżmy, że jest on ograniczony, a więc zbieżny. Oznaczmy jego granicę przez a. W takim przypadku
$$a = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{1}{a}} > a.$$

Sprzeczność.

b) Z treści zadania mamy:

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^3 &= \frac{a_n^3}{8}+\frac{3a_n^2}{4}\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\frac{1}{a_n}}+\frac{3a_n}{2}\left(\frac{a_n^2}{4}+\frac{1}{a_n}\right)+\left(\frac{a_n^2}{4}+\frac{1}{a_n}\right)\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\frac{1}{a_n}}<\\
&< \frac{a_n^3}{8}+\frac{3a_n^2}{4}\left(\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n^2}\right)+\frac{3a_n^3}{8}+\frac{3}{2}+\left(\frac{a_n^2}{4}+\frac{1}{a_n}\right)\left(\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n^2}\right)=\\
&= a_n^3+3+\frac{1}{a_n^3}\le a_n^3+4.
\end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$a_{n+1}^3<a_n^3+4<a_{n-1}^3+8<\ldots<a_1^3+4n=1+4n.$$

Zatem

$$a_{250}^3<1000=10^3.$$

3.5. Z założenia mamy

$$a_{n+1}^3=a_n^3+3+\frac{3}{a_n^3}+\frac{1}{a_n^6}>a_n^3+3.$$

Zatem

$$a_{9000}^3>a_{8999}^3+3>a_{8998}^3+6>\ldots>a_2^3+3\cdot 8998>27000.$$

Stąd

$$a_{9000}>30.$$

3.6. R o z w i ą z a n i e 1. Wykażemy silniejsze twierdzenie, a mianowicie, że dla dowolnych naturalnych liczb $n\ge m\ge 2$ prawdziwa jest nierówność:

$$\sqrt[m]{m\sqrt[m+1]{(m+1)\ldots\sqrt[n]{n}}}<2.$$

Wykażemy ten fakt przy pomocy „indukcji odwrotnej”, tzn. zaczynając od $m = n$, a zatem w dół do $m = 2$. Oczywiste jest, że

$$\sqrt[n]{n} < 2.$$

Załóżmy, że dla $m < n$ mamy:

$$\sqrt[m+1]{(m+1)\ldots\sqrt[n]{n}} < 2.$$

Wówczas

$$\sqrt[m]{m\sqrt[m+1]{(m+1)\ldots\sqrt[n]{n}}} < \sqrt[m]{m\cdot 2} \leq 2.$$

Potrzebne ograniczenie otrzymujemy, kładąc $m = 2$.

R o z w i ą z a n i e 2. Oznaczmy lewą część nierówności przez p, wówczas:

$$\ln p = \frac{\ln 2}{2!} + \frac{\ln 3}{3!} + \ldots + \frac{\ln n}{n!}.$$

Ponieważ $\frac{\ln x}{x}$ maleje dla $x \geq 3$, więc

$$\ln p < \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3}\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right) < \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3}(e-2).$$

Stąd

$$p < \sqrt{2}\cdot 3^{\frac{e-2}{3}} \approx 1,8397 < 2.$$

3.7. Niech

$$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0,$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 3,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Wykażemy, że

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1.$$

Załóżmy, nie wprost, że
$$x_1 + x_2 + x_3 < 1.$$
Wówczas
$$x_1 + x_2 + x_3 - (x_1 - x_3)(1 - x_1) - (x_2 - x_3)(1 - x_2) < 1.$$
Zatem
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3(3 - x_1 - x_2) < 1.$$
Stąd
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3(x_3 + x_4 + \ldots + x_n) < 1.$$
Tak więc otrzymujemy
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < 1,$$
co przeczy założeniu.

3.8. Ponieważ
$$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 = \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{2},$$
więc
$$(1 - 4xy)\left(1 - x^2 - y^2\right) - (1 - x - y) =$$
$$= \left(1 - (x+y)^2 + (x-y)^2\right)\left(1 - \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{2}\right) - (1 - x - y) =$$
$$= \left(1 - (x+y)^2 + (x-y)^2\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\left(1 - (x+y)^2\right) + \left(1 - (x-y)^2\right)\right) - (1 - x - y).$$
Przyjmijmy oznaczenia:
$$1 - (x+y) = a, \quad 1 + x + y = b, \quad (x-y)^2 = c.$$

Wówczas otrzymane wyrażenie otrzymuje postać:

$$\begin{aligned}(ab+c)\cdot\frac{1}{2}(ab+1-c)-a &= \frac{1}{2}a^2b^2+\left(\frac{1}{2}ab-a\right)+\frac{1}{2}c(1-c)= \\ &= \frac{1}{2}\left(a^2b^2+ab-2a\right)+\frac{1}{2}c(1-c).\end{aligned}$$

Ponieważ $b=2-a$, więc

$$\begin{aligned}a^2b^2+ab-2a &= a^2(2-a)^2+a(2-a)-2a=\left(2a-a^2\right)^2-a^2= \\ &= \left(a^2-3a\right)\left(a^2-a\right)=a^2(a-3)(a-1)\geq 0.\end{aligned}$$

Pozostaje zauważyć, że $c(1-c)\geq 0$, ponieważ $0\leq c\leq 1$.

3.9. Niech zbiór A składa się z liczb

$$x_k=\cos\frac{2^k\pi}{2^{100}-1},$$

$k=1,2,\ldots,100$. Nietrudno zauważyć, że wszystkie te liczby są różne. Ponadto

$$x_{k+1}=2x_k^2-1$$

dla $k=1,2,\ldots,99$, a ponieważ

$$\frac{2^{101}\pi}{2^{100}-1}=2\pi+\frac{2\pi}{2^{100}-1},$$

więc

$$x_1=2x_{100}^2-1.$$

Zatem zbiór A posiada własność opisaną w zadaniu.
Odpowiedź: Tak, może.

3.10. Mamy $\lg^2 11=(1+\lg 1,1)^2>1+2\lg 1,1=1+\lg 1,21=$
$=\lg 12,1>\lg 12$.

3.11. Załóżmy, że $\cos 1^\circ$ jest liczbą wymierną.
Wówczas mamy, że $\cos 2^\circ = 2\cos^2 1^\circ - 1$ również jest liczbą wymierną. W takim przypadku z równości $\cos(n+2)^\circ = 2\cos(n+1)^\circ \cos 1^\circ - \cos n^\circ$ otrzymujemy, że $\cos n^\circ$ jest liczbą wymierną dla dowolnego naturalnego n. Jednakże $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ – liczba niewymierna.

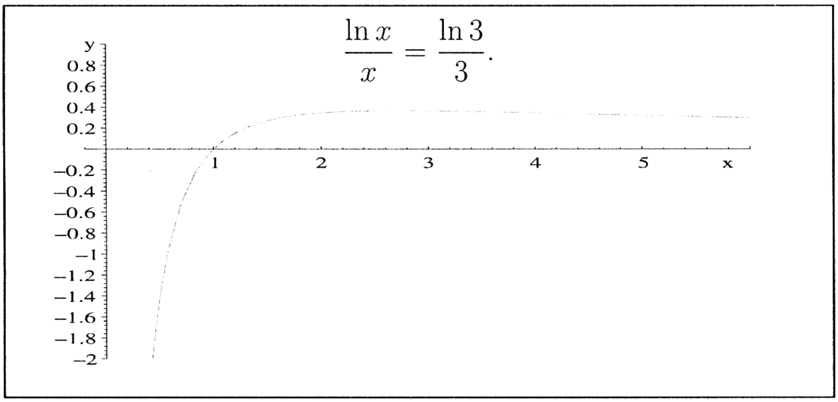
3.12. Na mocy nierówności między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną otrzymujemy:

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2\sqrt{2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}} = 2^{\frac{\sin x + \cos x}{2} + 1} =$$

$$= 2^{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \geq 2^{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

3.13. Logarytmując obydwie strony tego równania, uzyskujemy:

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 3}{3}.$$



Z faktu

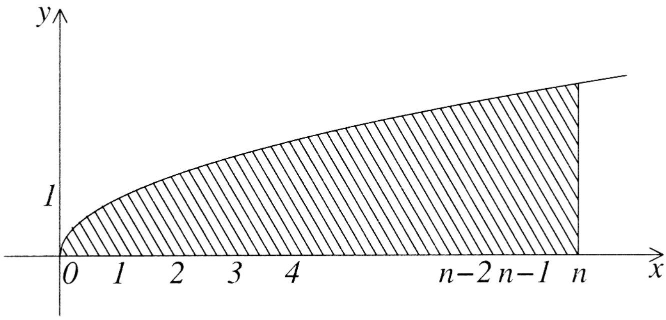
$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

wynika, że funkcja

$$\frac{\ln x}{x}$$

jest rosnąca w przedziale $(0, e\rangle$ oraz malejąca w przedziale $\langle e, \infty)$. Odpowiedź: 2.

3.14. Rozpatrzmy wykres funkcji $y = \sqrt{x}$ na odcinku $\langle 0, n\rangle$. Niech S oznacza pole płaszczyzny ograniczonej wykresem funkcji $y = \sqrt{x}$, osią Ox i prostą $x = n$ (rys. a).



rys. a

Wówczas

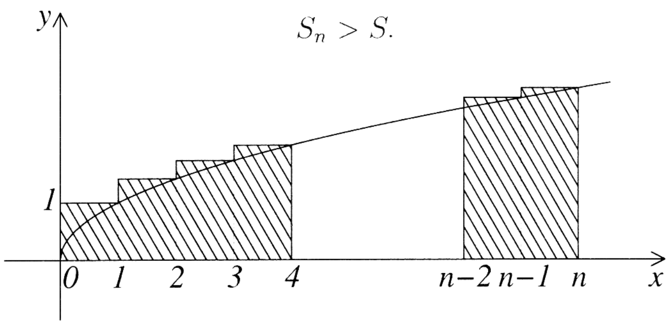
$$S = \int_0^n \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}n\sqrt{n}.$$

Ponadto niech

$$S_n = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}.$$

Jasne jest, że S_n równe jest polu figury zaznaczonej na rysunku b. Stąd

$$S_n > S.$$



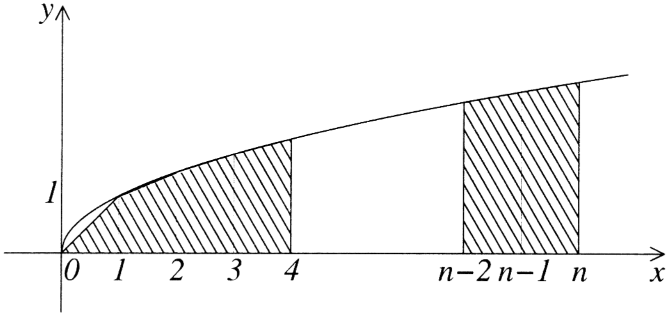
rys. b

Z drugiej strony pole figury zaznaczonej na rysunku c wynosi

$$\frac{\sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}}{2} + \ldots + \frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}{2} =$$

$$= \left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}\right) - \frac{\sqrt{n}}{2} = S_n - \frac{\sqrt{n}}{2},$$

oraz jest mniejsze niż S.



rys. c

W związku z powyższym otrzymujemy

$$S_n > S > S_n - \frac{\sqrt{n}}{2},$$

tzn. naszą nierówność.

3.15. Oznaczmy arctg2 przez α. Załóżmy, że liczby α i π są współmierne, tzn.

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{m}{n},$$

gdzie m, n – względnie pierwsze liczby naturalne. Stąd otrzymujemy $n\alpha = m\pi$, a zatem tg $n\alpha = 0$.

Rozważmy ciąg u_n taki, że $u_1 = 2$ i $u_{n+1} = \frac{u_n+2}{1-2u_n}$. Jasne jest, że $u_n = \operatorname{tg} n\alpha$.

Udowodnimy, że żaden wyraz w tym ciągu nie jest równy zeru.
Zauważmy, że pierwszy wyraz można przedstawić w postaci
$u_1 = 2 = \dfrac{5a_1+2}{5b_1+1}$ i dalej $u_2 = \dfrac{5a_2+4}{5b_2+4}$, $u_3 = \dfrac{5a_3+3}{5b_3+4}$, $u_4 = \dfrac{5a_4+1}{5b_4+3}$, $u_5 = \dfrac{5a_5+2}{5b_5+1}$, gdzie a_i, b_i są liczbami całkowitymi ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).
Zauważmy, że u_1 i u_5 mają tę samą postać. Zatem u_2 i u_6 również mają tę samą postać, i tak dalej. Tym samym żaden z liczników liczb u_n nie jest podzielny przez 5, a stąd żaden z wyrazów u_n nie jest równy zeru.

3.16. Ponieważ

$$\sin 1 + \cos 1 = \sqrt{2} \sin\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{2} < \frac{\pi}{2},$$

więc

$$\cos\sin 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin 1\right) > \sin\cos 1.$$

Odpowiedź: $\cos\sin 1$.

3.17. Wyrażenie

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (a-1)^2 - 2(a^2 - 7a + 14) = -a^2 + 12a - 27$$

jako funkcja zmiennej a wyraża się w postaci trójmianu kwadratowego określonego dla tych a, dla których istnieją rzeczywiste wartości x i y spełniające warunki zadania. Wartości te określa układ równań

$$\begin{cases} x + y = a - 1 \\ xy = a^2 - 7a + 14, \end{cases}$$

tzn. x i y spełniają równanie kwadratowe

$$t^2 - (a-1)t + a^2 - 7a + 14 = 0,$$

którego wyróżnik równy jest

$$-3a^2 + 26a - 55.$$

Wyróżnik ten jest nieujemny dla

$$\frac{11}{3} \leq a \leq 5.$$

Tak więc rzeczywiste wartości x i y istnieją tylko dla a określonych powyżej. Nasze zadanie polega teraz na tym, aby w przedziale $\langle \frac{11}{3}, 5\rangle$ znaleźć takie a, dla którego trójmian

$$-a^2 + 12a - 27$$

przyjmuje największą wartość. Wierzchołek paraboli

$$b = -a^2 + 12a - 27$$

ma odciętą $a = 6$, tzn. leży na prawo od przedziału $\langle \frac{11}{3}, 5\rangle$. Tak więc największą wartość rozważany trójmian osiąga na prawym końcu przedziału $\langle \frac{11}{3}, 5\rangle$.
Odpowiedź: $a = 5$.

3.18. Przyjmijmy oznaczenia

$$\sin^2 20° = x, \quad \sin^2 40° = y, \quad \sin^2 80° = z.$$

Wówczas

$$\frac{1}{\cos^2 10°} + \frac{1}{\cos^2 50°} + \frac{1}{\cos^2 70°} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz}.$$

Wykażemy, że

$$xyz = \frac{3}{64}, \quad x + y + z = \frac{3}{2}, \quad (1 - x)(1 - y)(1 - z) = \frac{1}{64}.$$

Stąd otrzymujemy

$$xy + yz + zx = \frac{9}{16}.$$

Mamy

$$\begin{aligned}\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ &= \frac{1}{2}\sin 80^\circ\,(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) = \\ &= \frac{1}{4}\,(\sin 100^\circ + \sin 60^\circ - \sin 100^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{8},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 80^\circ &= \frac{1-\cos 40^\circ}{2} + \frac{1-\cos 80^\circ}{2} + \frac{1-\cos 160^\circ}{2} = \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,(2\cos 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 20^\circ) = \frac{3}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ &= \frac{8\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ} = \\ &= \frac{4\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ} = \\ &= \frac{2\sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

3.19. Podzielmy obie części nierówności przez a^2 oraz oznaczmy liczbę $\frac{b}{a}$ przez t. Otrzymujemy nierówność

$$2t\ln t > t^2 - 1.$$

Rozpatrzmy funkcję f zadaną w przedziale $(0, 1\rangle$, określoną wzorem

$$f(t) = 2t\ln t - t^2 + 1.$$

Ponieważ

$$f''(t) = \frac{2}{t} - 2,$$

więc w przedziale $(0, 1)$ funkcja f'' jest dodatnia i dlatego funkcja f' jest rosnąca. Ponieważ

$$f'(1) = 0,$$

więc w przedziale $(0, 1)$ funkcja f' jest ujemna, a zatem funkcja f jest malejąca, przy czym $f(1) = 0$. Tak więc w przedziale $(0, 1)$ funkcja f jest dodatnia, co należało wykazać.

3.20. Oznaczmy $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$. W takim przypadku mamy, że

$$\lim_{x\to\infty} (f(x+1) - f(x)) = \sqrt{a}.$$

Ponieważ dla dowolnych naturalnych x liczba

$$f(x+1) - f(x)$$

jest całkowita, więc $\sqrt{a}$ jest również liczbą całkowitą. Ponadto otrzymujemy stąd, że istnieje taka naturalna liczba c, że dla dowolnej naturalnej liczby $x \geq c$

$$f(x+1) - f(x) = \sqrt{a}.$$

Oznaczmy $\sqrt{a} = m$. Zatem dla dowolnej naturalnej liczby t

$$f(c+t) = f(c) + tm = (c+t)m + (f(c) - cm).$$

Oznaczmy $f(c) - cm = n$. Rozpatrzmy wielomian

$$P(x) = f^2(x) - (mx+n)^2.$$

Pierwiastkami tego wielomianu, w myśl tego, co zostało wykazane, są wszystkie naturalne liczby, większe od c. Dlatego $P(x) = 0$. Zatem

$$ax^2 + bx + c = (mx+n)^2.$$

3.21. Przyjmijmy

$$\cos x + \sin x = 2\sin y$$

gdzie $y \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \rangle$. Wówczas

$$\cos^3 x + \sin^3 x = 2\sin y\left(1 - \frac{(2\sin y)^2 - 1}{2}\right) = 3\sin y - 4\sin^3 y = \sin 3y.$$

Tak więc

$$\sin 3y = \frac{1}{2}.$$

Ponieważ dla $x \in \langle 0, \pi \rangle$ funkcja

$$\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

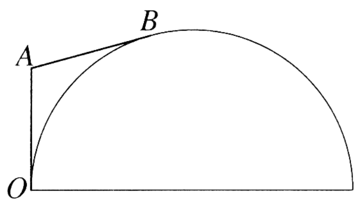
przyjmuje wartości z przedziału $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$, więc możemy przewidzieć, że $y \in \left\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right\rangle$, tzn. $3y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi \right\rangle$. Zatem $3y = \frac{\pi}{6}$. Stąd $y = \frac{\pi}{18}$. Tak więc $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{18}$, przy czym

$$\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{18} < \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Odpowiedź: $\left\{\frac{3}{4}\pi - \arcsin\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{18}\right\}$.

3.22. Zapiszmy równanie danej krzywej w postaci

$$y = \sqrt{\frac{1}{64} - \left(\frac{1}{8} - x\right)^2}.$$

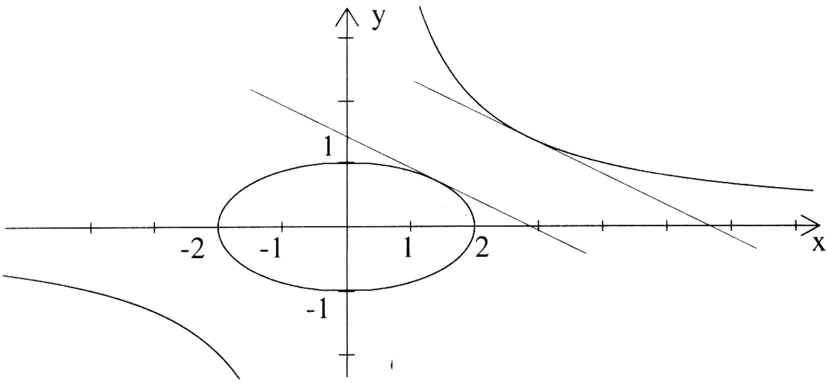


Zatem

$$\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{64},$$

przy czym $y \geq 0$. Tak więc nasza krzywa jest górnym półokręgiem o środku w punkcie $\left(\frac{1}{8}, 0\right)$ i promieniu $\frac{1}{8}$. Stąd wynika nasze twierdzenie.

3.23. Rozważmy dwa punkty w układzie współrzędnych: $A(a, b)$, $B(c, d)$. Potrzebujemy wykazać, że $|AB|^2 \geq 1,6$. Punkt A leży na hiperboli $xy = 4$, a punkt B na elipsie $x^2 + 4y^2 = 4$.



Styczna do hiperboli poprowadzona przez punkt $\left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ jest równoległa do stycznej do elipsy przechodzącej przez punkt $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Odległość między tymi stycznymi jest równa $\frac{4}{\sqrt{10}}$.

3.24. Po pierwsze, $|x| \leq 4$. Ponadto, ponieważ

$$0 \leq \arcsin \frac{x^2 - 8}{8} + \frac{\pi}{2} \leq \pi,$$

więc

$$0 \leq \arcsin \frac{x}{4} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Stąd $0 \leq x \leq 4$. Wyliczmy kosinusy obydwu części:

$$\cos\left(\arcsin \frac{x^2 - 8}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \arcsin \frac{x^2 - 8}{8} = \frac{8 - x^2}{8},$$

$$\cos 2 \arcsin \frac{x}{4} = 1 - 2\sin^2 \arcsin \frac{x}{4} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{8 - x^2}{8}.$$

Odpowiedź: $x \in \langle 0, 4 \rangle$.

3.25. Przemnóżmy dane równanie przez $1 + a^2 - 2a\cos\alpha$. Ponieważ $1 + a^2 - 2a\cos\alpha = (1 - a\cos\alpha)^2 + (a\sin\alpha)^2$, więc $1 + a^2 - 2a\cos\alpha = 0$ dla $a = 1$, $\alpha = 2n\pi$ oraz $a = -1$, $\alpha = (2n+1)\pi$, $(n \in \mathbb{Z})$.
Mamy

$$\begin{aligned} & \left(1 + a^2 - 2a\cos\alpha\right)\left(1 + a^2 + 2a\cos\alpha\right) = \left(1 + a^2\right)^2 - 4a^2\cos^2\alpha = \\ = \ & 1 + a^4 + 2a^2\left(1 - 2\cos^2\alpha\right) = 1 + a^4 - 2a^2\cos 2\alpha. \end{aligned}$$

I dalej

$$\begin{aligned} & \left(1 + a^4 - 2a^2\cos 2\alpha\right)\left(1 + a^4 + 2a^2\cos 2\alpha\right) = \\ = \ & \left(1 + a^4\right)^2 - 4a^4\cos^2 2\alpha = 1 + a^8 + 2a^4\left(1 - 2\cos^2 2\alpha\right) = \\ = \ & 1 + a^8 - 2a^4\cos 4\alpha. \end{aligned}$$

I tak dalej.
Odpowiedź: Dla $a = 1$, $\alpha = 2n\pi$ lub $a = -1$, $\alpha = (2n+1)\pi$, $(n \in \mathbb{Z})$, wyrażenie jest równe 4^{10}. Dla pozostałych a i α wyrażenie jest równe: $\dfrac{1 + a^{2^{11}} - 2a^{2^{11}}\cos 2^{10}\alpha}{1 + a^2 - 2a\cos\alpha}$.

3.26. Zauważmy na początek, że

$$\sin 5^\circ + \cos 13^\circ - \cos 49^\circ - \sin 113^\circ + \sin 149^\circ =$$

$$= \sin 5^\circ + \sin 77^\circ + \sin 149^\circ + \sin 221^\circ + \sin 293^\circ.$$

Liczby

$$\sin 5^\circ, \sin 77^\circ, \sin 149^\circ, \sin 221^\circ, \sin 293^\circ$$

są rzędnymi wierzchołków pięciokąta foremnego, wpisanego w okrąg jednostkowy. A ponieważ suma wektorów (środek okręgu, wierzchołek) dla

dowolnego wpisanego n-kąta foremnego równa jest zeru, więc suma tych liczb również równa jest zeru.
Odpowiedź: 0.

3.27. Wykażemy, że:

$$1 < \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}} \leq \left[\frac{n}{2}\right],$$

przy czym granice te są najlepsze. Niech S oznacza daną sumę oraz niech

$$T = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Wówczas

$$S > \frac{x_1}{T} + \frac{x_2}{T} + \ldots + \frac{x_n}{T} = 1.$$

Aby wykazać, że 1 jest najlepszym oszacowaniem z dołu przyjmijmy $x_i = \varepsilon^{i-1}$, gdzie $0 < \varepsilon < 1$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\varepsilon^{n-1} + 1 + \varepsilon} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\varepsilon^{i-1}}{\varepsilon^{i-2} + \varepsilon^{i-1} + \varepsilon^{i}} + \frac{\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-2} + \varepsilon^{n-1} + 1} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{n-1} + 1 + \varepsilon} + \frac{(n-2)\varepsilon}{1 + \varepsilon + \varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-2} + \varepsilon^{n-1} + 1} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 1. \end{aligned}$$

Pokażemy teraz, że najlepsze oszacowanie z góry równe jest m dla $n = 2m$ i $n = 2m + 1$.
Niech $n = 2m$. Zauważmy, że

$$\frac{x_1}{x_{2m} + x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} \leq \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2} = 1$$

(gdzie, rzecz jasna, spełniona jest zależność $x_1 + x_2 > 0$, natomiast przypadek $x_1 = x_2 = 0$ jest oczywisty). Analogiczne nierówności zachodzą dla wszystkich kolejnych par ułamków. W takim razie otrzymujemy oszacowanie z góry równe m, które osiągalne jest dla $x_2 = x_4 = \ldots = x_{2m} = 0$ lub $x_1 = x_3 = \ldots = x_{2m-1} = 0$.

Niech $n = 2m + 1$. Bez straty ogólności możemy założyć, że najmniejszy mianownik to $x_1 + x_2 + x_3$. Wówczas

$$\frac{x_1}{x_{2m} + x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{x_3}{x_2 + x_3 + x_4} \leq 1.$$

Teraz ponownie wystarczy skorzystać z tego, że suma dwóch kolejnych ułamków jest nie większa niż 1. Górna granica m jest osiągalna, gdy $x_2 = x_4 = \ldots = x_{2m} = 0$ lub $x_1 = x_3 = \ldots = x_{2m-1} = 0$.

3.28. R o z w i ą z a n i e 1. Zauważmy na początek, że

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b).$$

Rzeczywiście, podnosząc obie strony nierówności do kwadratu i przenosząc wszystko na lewą stronę, otrzymujemy:

$$(a - b)^2 \geq 0.$$

Analogicznie

$$\sqrt{b^2 + bc + c^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(b + c)$$

oraz

$$\sqrt{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(c + a).$$

Dodając stronami powyższe nierówności, otrzymujemy:

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2} \geq \sqrt{3}(a + b + c).$$

Pozostaje wykazać, że

$$\sqrt{3}(a + b + c) \geq 3\sqrt{ab + bc + ca}.$$

Podnosząc do kwadratu obie części nierówności, skracając przez 3, a następnie przemnażając przez 2 i przenosząc wszystko na lewą stronę, otrzymujemy

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0.$$

R o z w i ą z a n i e 2. Pokażemy, że

$$(\star) \qquad \prod\left(a^2+ab+b^2\right) \geq (ab+bc+ca)^3.$$

Z nierówności tej, na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną, otrzymujemy:

$$\left(\frac{1}{3}\sum\sqrt{a^2+ab+b^2}\right)^3 \geq \prod\sqrt{a^2+ab+b^2} \geq \left(\sqrt{ab+bc+ca}\right)^3.$$

Rozpisując nawiasy w nierówności $(\star)$, otrzymujemy:

$$\sum a^4bc+\sum a^4b^2+2\sum a^3b^2c+\sum a^3b^3+3a^2b^2c^2 \geq$$

$$\geq \sum a^3b^3+3\sum a^3b^2c+6a^2b^2c^2,$$

$$\sum a^4bc+\sum a^4b^2 \geq \sum a^3b^2c+3a^2b^2c^2.$$

Korzystając jeszcze raz z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną, otrzymujemy:

$$\sum a^4bc \geq 3\sqrt{a^6b^6c^6} = 3a^2b^2c^2.$$

Tym samym pozostaje wykazać, że

$$\sum a^4b^2 \geq \sum a^3b^2c.$$

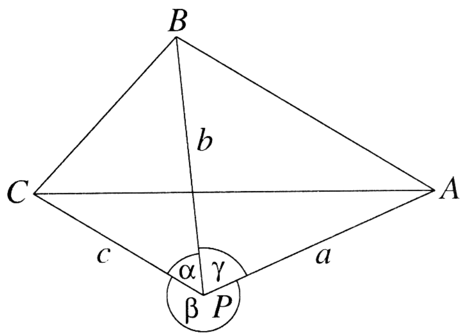
Ale

$$2\left(\sum a^4b^2-\sum a^3b^2c\right) = \sum\left(a^2b-b^2c\right)^2 \geq 0.$$

R o z w i ą z a n i e 3. Wykażemy o wiele ogólniejszą nierówność. Jeżeli $\alpha, \beta, \gamma > 0$ i $\alpha+\beta+\gamma = 2\pi$, to

$$(\star\star) \qquad \sum \sqrt{a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2} \geq \sqrt{6\sqrt{3}\,|\sum ab\sin\gamma|}.$$

Niech P będzie dowolnym punktem na płaszczyźnie. Rozpatrzmy trójkąt ABC, którego wierzchołki są położone w odległościach a, b, c od punktu P, a kąty między odcinkami PA, PB, PC mają miary α, β, γ – tak jak pokazano na rysunku.



Wówczas

$$|AB| = \sqrt{a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2},$$

i tak dalej. Wiadomo, że spośród wszystkich trójkątów o zadanym obwodzie największe pole ma trójkąt równoboczny. Zatem

$$(\star\star\star) \qquad L \geq 2\sqrt{3\sqrt{3}S},$$

gdzie L oznacza obwód, a S – pole trójkąta ABC. Ponieważ

$$S = \frac{1}{2}\left|\sum ab\sin\gamma\right|,$$

więc nierówność $(\star\star)$ wynika z nierówności $(\star\star\star)$.

3.29. Rozpatrzmy wielomian

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j x^{i+j-1}.$$

Wówczas

$$xp(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j x^{i+j} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x^j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i\right)^2 \geq 0$$

dla dowolnych rzeczywistych wartości x. W szczególności $p(x) \geq 0$ dla $0 \leq x \leq 1$. Zatem

$$0 \leq \int_0^1 p(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j} x^{i+j-1}\Big|_0^1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j}.$$

Nierówność jest ostra poza przypadkiem, gdy $xp(x) \equiv 0$, to znaczy gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

3.30. Skorzystajmy z równości

$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Widać teraz, że funkcja $\mathrm{tg} x - x$ jest funkcją pierwotną dla funkcji $\mathrm{tg}^2 x$.

3.31. Bezpośrednio z treści zadania otrzymujemy:

$$\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin\alpha_n = \cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \cos\alpha_n.$$

Stąd

$$2^n \cdot (\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin\alpha_n)^2 = \sin 2\alpha_1 \cdot \sin 2\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin 2\alpha_n \leq 1.$$

Jeśli

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{\pi}{4},$$

to

$$\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin\alpha_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Odpowiedź: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

3.32. Niech $\cos x = t$. Wówczas

$$f(x) = 2at^2 + bt + c - a = q(t).$$

Ponadto

$$p(1) = a + b + c = q(1), \quad p(-1) = a - b + c = q(-1).$$

Będziemy zakładać, że $a > 0$. Przypadek, gdy $a < 0$ rozpatruje się analogicznie. Ponieważ wielomian $p(x)$ posiada dwa rozwiązania w przedziale $(-1, 1)$, więc liczby $p(1)$ i $p(-1)$ są dodatnie. Ponadto

$$q(t) = p(t) + a\left(t^2 - 1\right) \leq p(t)$$

dla $-1 \leq t \leq 1$. Zatem wielomian $q(t)$ także posiada dokładnie dwa rozwiązania w przedziale $(-1, 1)$. Zatem funkcja $f(x)$ posiada dokładnie dwa rozwiązania w przedziale $(0, \pi)$.

3.33. Niech x będzie rozwiązaniem naszego równania.
Wówczas $\sqrt{a+x} = x$. Rzeczywiście,
jeżeli $\sqrt{a+x} > x$, to $\sqrt{a + \sqrt{a+x}} > \sqrt{a+x} > x$,
a jeśli $\sqrt{a+x} < x$, to $\sqrt{a + \sqrt{a+x}} < \sqrt{a+x} < x$.
Jasne jest, że $x \geq 0$ i $x^2 - x - a = 0$. Stąd otrzymujemy, że dla $a < -\frac{1}{4}$ rozwiązanie nie istnieje, a dla $a \geq -\frac{1}{4}$ otrzymujemy $x = \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$.

3.34. Z pierwszego równania otrzymujemy, że $y \geq 0$. Ponieważ

$$x^2 - 1 = y^3 - 2y^2 + 2y - 1 = (y-1)\left(y^2 - y + 1\right),$$

więc dla $0 \leq y < 1$, mamy $x^2 < 1$.
Stąd $y^4 < 1$, $\quad x^4 < 1$, tzn. $x^4 + y^4 < 2$.

Jeśli $y > 1$, to $x^2 > 1$, a stąd $x^4 + y^4 > 2$.
Odpowiedź: $\{(1,1),\ (-1,1)\}$.

3.35. Lewą część równania przedstawiamy w postaci

$$x^4 - 4x - 1 = \left(x^2+1\right)^2 - 2\left(x+1\right)^2 =$$

$$= \left(x^2+1-\sqrt{2}(x+1)\right)\left(x^2+1+\sqrt{2}(x+1)\right).$$

Odpowiedź: $\left\{\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right\}$.

3.36. Zauważmy na początek, że $x \geq 1$. Zapiszmy dane równanie w postaci

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}} + \sqrt{x-\frac{1}{x}} = x.$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}} = a, \quad \sqrt{x-\frac{1}{x}} = b.$$

Wówczas

$$a + b = x, \quad b^2 - a^2 = x - 1.$$

Zatem

$$b - a = \frac{b^2-a^2}{b+a} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Stąd

$$b = \frac{x+1-\frac{1}{x}}{2} = \frac{b^2+1}{2}.$$

Więc $b = 1$.
Odpowiedź: $\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

3.37. Z pierwszego równania układu otrzymujemy, że

$$|x|^3 = |y|\left(1+2y^2\right) \geq |y|^3.$$

Zatem

$$|x| \geq |y|,$$

przy czym równość zachodzi tylko wówczas, gdy $y = 0$. Analogicznie

$$|y| \geq |z|, \qquad |z| \geq |x|.$$

Tak więc we wszystkich trzech przypadkach ma miejsce równość. Zatem

$$x = y = z = 0.$$

3.38. Zapiszmy nasze równanie w postaci

$$1 = \sqrt[4]{1+\frac{1}{x}} - \sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}.$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$u = \sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}, \quad v = \sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}.$$

Wówczas mamy układ równań

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ u^4 + v^4 = 2. \end{cases}$$

Wyznaczmy z równania pierwszego zmienną u i podstawmy do drugiego z równań. Mamy

$$v^4 + (v+1)^4 = 2.$$

Stąd
$$2v^4 + 4v^3 + 6v^2 + 4v = 1.$$
Oznacza to, że
$$v\left(2v^3 + 4v^2 + 6v + 4\right) = 1.$$
Ponieważ wielomian
$$2v^3 + 4v^2 + 6v + 4$$
posiada rozwiązanie $v = -1$, więc można wyłączyć z tego wielomianu $v+1$. Otrzymujemy
$$2v^3 + 4v^2 + 6v + 4 = (v+1)\left(2v^2 + 2v + 4\right).$$
A zatem $(v^2 + v)(2v^2 + 2v + 4) = 1$.
Oznaczmy $v^2 + v = t$. Mamy wówczas $t(2t + 4) = 1$. Przy czym, ponieważ $v \geq 0$, to $t \geq 0$. Zatem
$$t = \frac{\sqrt{6} - 2}{2}.$$
Stąd
$$v = \frac{\sqrt{\sqrt{24} - 3} - 1}{2}.$$
Odpowiedź: $x = \frac{2}{(\sqrt{6}-1)\sqrt{2\sqrt{6}-3}}$.

3.39. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x \neq 0$. Mamy
$$x = by + c(ax + by), \qquad y = c(ax + by) + ax.$$
Stąd
$$x(1 - ac) = y(b + bc), \qquad x(a + ac) = y(1 - bc).$$
Zatem
$$x(a + ac)(b + bc) = x(1 - ac)(1 - bc).$$

Ponieważ $x \neq 0$, uzyskujemy

$$(a + ac)(b + bc) = (1 - ac)(1 - bc),$$

to znaczy $2abc + ab + bc + ca = 1$.

3.40. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a \neq 1$. Mamy

$$\begin{aligned} a^{xyz} &= (a^x)^{yz} = (bc)^{yz} = (b^y)^z \cdot (c^z)^y = (ca)^z \cdot (ab)^y = a^{z+y} \cdot b^y \cdot c^z = \\ &= a^{z+y} \cdot ca \cdot ab = a^{z+y+2} \cdot bc = a^{x+y+z+2}. \end{aligned}$$

Zatem $xyz - x - y - z = 2$.

3.41. Zauważmy na początek, że

$$x^4 + 4 = \left(x^2 + 2\right)^2 - (2x)^2 = \left(x^2 + 2x + 2\right)\left(x^2 - 2x + 2\right).$$

Ponadto przyjmijmy oznaczenia:

$$a = \sqrt{x^2 + 2x + 2}, \quad b = \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

Uwzględniając fakt, że $5x^2 + 6x + 10 = 4a^2 + b^2$, równanie nasze przyjmuje postać $4a^2 - 6ab + b^2 = 0$.
Stąd $\frac{a}{b} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$.
Odpowiedź: $\frac{15+3\sqrt{5} \pm \sqrt{178+78\sqrt{5}}}{3\sqrt{5}-1}$.

3.42. Oznaczmy $\sqrt{5}$ przez a. Wówczas nasze równanie przyjmuje postać:

$$xa^2 + \left(2x^2 + 1\right)a + x^3 - 1 = 0.$$

Będziemy rozwiązywali to równanie jako równanie kwadratowe ze względu na zmienną a. Wyznaczmy wyróżnik tego trójmianu:

$$\Delta = \left(2x^2 + 1\right)^2 - 4x\left(x^3 - 1\right) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2.$$

Stąd
$$a = \frac{-\left(2x^2+1\right) \pm (2x+1)}{2x}.$$
Tak więc
$$\sqrt{5} = -x+1 \quad \text{lub} \quad \sqrt{5} = -\frac{x^2+x+1}{x}.$$
Odpowiedź: $x \in \left\{1-\sqrt{5},\ \frac{-\left(\sqrt{5}+1\right)\pm\sqrt{2\sqrt{5}+2}}{2}\right\}$.

3.43. Dla $a < -\frac{1}{4}$ rozwiązań nie ma, dla $a = -\frac{1}{4}$ – jest jedno rozwiązanie, dla $-\frac{1}{4} < a < 0$ – dwa rozwiązania, dla $a = 0$ – jedno rozwiązanie, dla $0 < a \leq \frac{3}{4}$ – dwa rozwiązania, dla $\frac{3}{4} < a$ – cztery rozwiązania. Wykluczając y z układu równań, otrzymujemy równanie
$$x = P(x),$$
gdzie
$$P(x) = 1 - a\left(1-ax^2\right)^2.$$
Ponieważ rozwiązania równania $x = 1 - ax^2$ są jednocześnie rozwiązaniami równania $x = P(x)$, więc wielomian $P(x) - x$ dzieli się przez $ax^2 + x - 1$. Stąd łatwo otrzymać równość
$$x - P(x) = a\left(1-ax^2\right)^2 - 1 + x = \left(ax^2+x-1\right)\left(a^2x^2 - ax - a + 1\right).$$

3.44. Rozważmy wielomian o pierwiastkach x, y, z:
$$P(t) = (t-x)(t-y)(t-z).$$
Niech $P(t) = t^3 + at^2 + bt + c$. Wtedy
$$P(x) + P(y) + P(z) = 0.$$

Oznacza to, że

$$(\star) \qquad \left(x^3+y^3+z^3\right)+a\left(x^2+y^2+z^2\right)+b(x+y+z)+3c=0.$$

Ponieważ $x+y+z=-a$, $xy+yz+zx=b$, więc

$$a=-3, \quad b=\frac{1}{2}\left((x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)=\frac{11}{4}.$$

Z równości $(\star)$ otrzymujemy, że

$$c=-\frac{3}{4}.$$

Tak więc x, y, z są rozwiązaniami wielomianu

$$t^3-3t^2+\frac{11}{4}t-\frac{3}{4}=(t-1)\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{3}{2}\right).$$

Odpowiedź: Liczby x, y, z są permutacją trójki liczb $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$.

3.45. Niech n będzie liczbą nieparzystą. Jeśli którakolwiek z liczb x_i równa jest jeden, to od razu otrzymujemy, że wszystkie liczby równe są jeden. Jeżeli żadna z nich nie jest równa jeden, to wszystkie są jednocześnie mniejsze lub jednocześnie większe od jedynki. W takim przypadku otrzymujemy

$$x_1=x_{n-1}^{x_n}>x_{n-1}=x_{n-3}^{x_{n-2}}>x_{n-3}=x_{n-5}^{x_{n-4}}>\ldots>x_1.$$

Niech teraz n oznacza liczbę parzystą. Po pierwsze z założenia wynika, że

$$x_1^{x_2x_4\cdot\ldots\cdot x_n}=x_1,$$

$$x_2^{x_1x_3\cdot\ldots\cdot x_{n-1}}=x_2.$$

Jeżeli $x_1=1$, to

$$x_3=x_5=\ldots=x_{n-1}=1.$$

Zatem
$$x_2 = x_4 = \ldots = x_n.$$
Jeśli natomiast $x_2 = 1$, to
$$x_4 = x_6 = \ldots = x_n = 1 \quad \text{i} \quad x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1}.$$
Pozostaje rozpatrzyć przypadek, gdy $x_1 \neq 1$, $x_2 \neq 1$. Wówczas
$$x_1 x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} = 1, \qquad x_2 x_4 \cdot \ldots \cdot x_n = 1.$$
Jeśli ponadto $x_1 < 1$, to $x_3 < 1$ i tak dalej aż do $x_{n-1} < 1$. A zatem
$$x_1 x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} < 1.$$
Również do sprzeczności prowadzi założenie, że $x_1 > 1$.
Odpowiedź: Dla n nieparzystych $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.
Dla n parzystych $x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = 1$, $x_2 = x_4 = \ldots = x_n > 0$ lub $x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1} > 0$, $x_2 = x_4 = \ldots = x_n = 1$.

3.46. Zapiszmy nasze równanie w postaci:
$$f(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b) = 0.$$
Z warunków zadania wynika, że
$$f(a) = (a-b)(a-c) > 0,$$
$$f(b) = (b-a)(b-c) < 0,$$
$$f(c) = (c-a)(c-b) > 0.$$
Tak więc na odcinkach (a, b) i (b, c) mamy po jednym rozwiązaniu równania $f(x) = 0$. Ponadto, ponieważ $f(x)$ jest trójmianem kwadratowym, więc nie mogą istnieć więcej niż dwa rozwiązania.

3.47. Wyróżnik danego równania jest równy a^2+4 i może być kwadratem liczby całkowitej tylko dla $a=0$. W takim przypadku równanie posiada dwa całkowite rozwiązania: 1 i 3.

3.48. a) Przemnóżmy obie strony pierwszego równania przez $y(y+z)$, drugiego przez $z(x+z)$ i trzeciego przez $x(x+y)$ i dodajmy stronami. Otrzymujemy

$$ay(y+z)+bz(x+z)+cx(x+y)=0.$$

W analogiczny sposób otrzymujemy, że

$$az(y+z)+bx(x+z)+cy(x+y)=0.$$

Dodając stronami otrzymane powyżej obydwa równania, mamy

$$a(y+z)^2+b(x+z)^2+c(x+y)^2=0,$$

co jest niemożliwe, jeśli liczby a, b, c mają jednakowy znak.
b) Zapiszmy dany układ równań w następującej postaci:

$$\begin{cases} \dfrac{1-\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{x}}{\frac{y}{x}+\frac{z}{x}}=\dfrac{a}{x} \\[2ex] \dfrac{1-\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{y}}{\frac{x}{y}+\frac{z}{y}}=\dfrac{b}{y} \\[2ex] \dfrac{1-\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z}}{\frac{x}{z}+\frac{y}{z}}=\dfrac{c}{z}. \end{cases}$$

Niech

$$\frac{x}{y}=\operatorname{tg}\alpha,\quad \frac{y}{z}=\operatorname{tg}\beta,\quad \frac{z}{x}=\operatorname{tg}\gamma.$$

Wówczas układ równań przyjmuje postać:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\alpha - \gamma) = \frac{a}{x} \\ \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{b}{y} \\ \operatorname{tg}(\gamma - \beta) = \frac{c}{z}. \end{cases}$$

Ponieważ

$$(\alpha - \gamma) + (\beta - \alpha) + (\gamma - \beta) = 0,$$

więc

$$\operatorname{tg}(\alpha - \gamma) + \operatorname{tg}(\beta - \alpha) + \operatorname{tg}(\gamma - \beta) = \operatorname{tg}(\alpha - \gamma) \cdot \operatorname{tg}(\beta - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(\gamma - \beta).$$

Powyższa równość oznacza, że

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{abc}{xyz}.$$

3.49. Ponieważ funkcja

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$$

posiada cztery różne rzeczywiste pierwiastki, to pochodna

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + b$$

posiada trzy różne miejsca zerowe. Stąd bezpośrednio wynika, że $ab \neq 0$. Druga pochodna

$$f''(x) = 12x^2 + 6ax$$

posiada dwa miejsca zerowe 0 i $-\frac{a}{2}$, a funkcja f' w tych punktach przyjmuje wartości różnych znaków. Zatem

$$f'(0) \cdot f'\left(-\frac{a}{2}\right) < 0,$$

to znaczy

$$b\left(b+\frac{1}{4}a^3\right)=b^2+\frac{1}{4}a^2\cdot ab<0.$$

Stąd wynika, że $ab<0$.

3.50. Z tego, że $x>0$, mamy $yz<0$. Stąd $0<x<1$. Dzieląc równanie

$$yz\cdot\log_{1+\sqrt{2}}x=1$$

przez drugie z równań, otrzymujemy

$$\frac{\log_{1+\sqrt{2}}x}{x}=-\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Stąd

$$x^{\frac{1}{x}}=\left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}.$$

Aby wykazać, że stąd wynika $x=\sqrt{2}-1$, wystarczy wykazać, że funkcja

$$f(x)=x^{\frac{1}{x}}$$

jest ściśle monotoniczna w przedziale $(0,1)$. Z faktu, że

$$\ln f(x)=\frac{\ln x}{x}\quad i\quad\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

otrzymujemy, że funkcja f jest ściśle monotoniczna w przedziale $(0,1)$.
Odpowiedź: $\left\{\left(\sqrt{2}-1,1,-1\right);\ \left(\sqrt{2}-1,-1,1\right)\right\}$.

3.51.
a) Ponieważ

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha},$$

więc dla $\alpha \in \{20°, 40°, 80°\}$

$$\frac{\mathrm{tg}^2\alpha\,(3-\mathrm{tg}^2\alpha)^2}{(1-3\mathrm{tg}^2\alpha)^2} = 3.$$

Przyjmując oznaczenie

$$\mathrm{tg}^2\alpha = u,$$

otrzymujemy

$$u(3-u)^2 = 3(1-3u)^2.$$

Stąd

$$u^3 - 33u^2 + 27u - 3 = 0.$$

b) Niech

$$\mathrm{tg}^2 20° = u_1, \quad \mathrm{tg}^2 40° = u_2, \quad \mathrm{tg}^2 80° = u_3.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} & u^3 - 33u^2 + 27u - 3 = (u-u_1)(u-u_2)(u-u_3) = \\ = \; & u^3 - (u_1+u_2+u_3)u^2 + (u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1)u - u_1u_2u_3. \end{aligned}$$

Zatem

$$u_1 + u_2 + u_3 = 33.$$

Tak więc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\cos^2 20°} + \frac{1}{\cos^2 40°} + \frac{1}{\cos^2 60°} + \frac{1}{\cos^2 80°} = \\ = \; & \mathrm{tg}^2 20° + \mathrm{tg}^2 40° + \mathrm{tg}^2 60° + \mathrm{tg}^2 80° + 4 = 33 + 3 + 4 = 40. \end{aligned}$$

I **3.52.** Niech $A(x) = x^3 - px^2 + q$. Ponieważ $A(0) > 0$, więc wielomian $A(x)$ posiada ujemne rozwiązanie. Policzmy $A(\alpha)$, $A(\beta)$, $A(\gamma)$.

$$2A(\alpha) = \alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma), \quad 2A(\beta) = \beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma),$$

$$2A(\gamma) = \gamma(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta).$$

Oczywiście dwie z tych liczb są dodatnie, a jedna ujemna. Zatem wielomian $A(x)$ posiada dokładnie dwa rozwiązania dodatnie.

3.53. Z warunków zadania mamy

$$x^3 + y^3 + (2 - x - y)^3 = 2.$$

Przekształcając lewą stronę równania, otrzymujemy

$$2 = (x + y)\left(xy - 2(x + y) + 4\right).$$

Pozostaje rozważyć przypadki: $x+y = 1$, $x+y = 2$, $x+y = -1$, $x+y = -2$. Odpowiedź: $\{(1, 1, 0),\ (1, 0, 1),\ (0, 1, 1)\}$.

3.54. Aby uzasadnić, że wszystkie wyrazy ciągu a_n są parami względnie pierwsze, wykażemy, że jeżeli liczba d dzieli liczbę a_n, to liczba d nie jest dzielnikiem liczby a_m dla $m > n$. Zamieńmy każdy wyraz ciągu a_n (dla $m \geq n$) na resztę z dzielenia tego wyrazu przez d. Oznaczmy otrzymany ciąg przez b_n. Spójrzmy na kilka początkowych wyrazów ciągu b_n: $b_n = 0$, $b_{n+1} = d - 2$, $b_{n+2} = b_{n+3} = \ldots = 2$.

3.55.

a) Aby zapisać wszystkie liczby jednocyfrowe, potrzebujemy 9 cyfr, dwucyfrowe – $2 \cdot 9 \cdot 10$, trzycyfrowe – $3 \cdot 9 \cdot 10^2$. Aby zapisać wszystkie liczby n-cyfrowe, potrzebujemy $n \cdot 9 \cdot 10^{n-1}$ cyfr. Pozostaje wykazać, że

$$9 + 2 \cdot 9 \cdot 10 + 3 \cdot 9 \cdot 10^2 + \ldots + n \cdot 9 \cdot 10^{n-1} = \frac{(9n - 1)10^n + 1}{9}.$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$9 + 2 \cdot 9 \cdot 10 + 3 \cdot 9 \cdot 10^2 + \ldots + n \cdot 9 \cdot 10^{n-1} = S_n.$$

Wówczas

$$9 \cdot 10 + 2 \cdot 9 \cdot 10^2 + 3 \cdot 9 \cdot 10^3 + \ldots + (n-1) \cdot 9 \cdot 10^{n-1} + n \cdot 9 \cdot 10^n = 10S_n.$$

Wyłączając z drugiego równania pierwsze, otrzymujemy

$$9S_n = n \cdot 9 \cdot 10^n - \left(9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 9 \cdot 10 + 9\right) =$$

$$= n \cdot 9 \cdot 10^n - 9\frac{10^n - 1}{9} = n \cdot 9 \cdot 10^n - 10^n + 1 = 10^n(9n-1) + 1.$$

Ostatecznie otrzymujemy równość

$$S_n = \frac{(9n-1)10^n + 1}{9}.$$

b) Na 10^{10} miejscu stoi cyfra 1.

Ponieważ $S_9 < 10^{10} < S_{10}$, więc 10^{10} cyfra znajduje się w liczbie dziesięciocyfrowej. Ponadto

$$10^{10} - S_9 = \frac{10^{10} - 1}{9} = \underbrace{11\ldots1}_{10} = \underbrace{11\ldots1}_{9} \cdot 10 + 1.$$

Tak więc 10^{10} cyfra jest pierwszą cyfrą liczby $\underbrace{11\ldots1}_{10}$.

3.56. Ponieważ

$$(p-k)^p = p^p - p \cdot p^{p-1} \cdot k + \ldots + p \cdot p \cdot k^{p-1} - k^p,$$

$k = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$, więc liczba

$$k^p + (p-k)^p$$

jest podzielna przez p^2. Zatem suma reszt z dzielenia przez p^2 liczb

$$1^p \quad \text{i} \quad (p-1)^p, \quad 2^p \quad \text{i} \quad (p-2)^p, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^p \quad \text{i} \quad \left(\frac{p+1}{2}\right)^p,$$

równa jest p^2, a takich par jest $\frac{p-1}{2}$.

3.57. Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, $n = 2k + 1$, to

$$\left(2^k\right)^2 + \left(2^k\right)^2 = 2^{2k+1}.$$

Jeśli n jest liczbą parzystą, $n = 2k$, to

$$\left(4 \cdot 5^{k-1}\right)^2 + \left(3 \cdot 5^{k-1}\right)^2 = 5^{2k}.$$

Odpowiedź: n jest dowolną liczbą naturalną.

3.58. Łatwo sprawdzić, że jeżeli liczby x_n i x_{n+1} przy dzieleniu przez 101 dają resztę 10, to liczba $x_{n+2} = (x_n + 1)x_{n+1} + 1$ przy dzieleniu przez 101 również daje resztę 10. Wynika stąd, że wszystkie liczby x_n dają przy dzieleniu przez 101 resztę 10. Analogicznie wszystkie liczby y_n dają przy dzieleniu przez 101 resztę 91. Tak więc żadna liczba naturalna nie może występować jednocześnie w obydwu ciągach.

3.59. Z dwóch oczywistych nierówności

$$a_3 \cdot a_5 = a_{15} < a_{18} = a_2 \cdot a_9 = 2a_9, \quad a_9 < a_{10} = a_2 \cdot a_5 = 2a_5$$

otrzymujemy, że $a_3 a_5 < 4a_5$. Stąd $a_3 = 3$, tzn. $a_6 = 6$.
Jeśli $a_{2k} = 2k$, to $a_{4k-2} = a_2 \cdot a_{2k-1} = 4k - 2$.
Zatem $a_{10} = 10$, $a_{18} = 18$ itd.

3.60. Przyjmijmy oznaczenie

$$p_k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Wówczas, jeżeli p_k jest kwadratem liczby naturalnej, to

$$p_{4k^2+4k} = 4p_k(2k+1)^2$$

jest kwadratem liczby naturalnej. Stąd $p_1, p_8, p_{288}, \ldots$ są kwadratami liczb naturalnych.

3.61. Między dziesięcioma kolejnymi liczbami naturalnymi istnieje pięć liczb nieparzystych. Pośród pięciu kolejnych liczb nieparzystych istnieją trzy, które nie są podzielne przez 3. Między tymi trzema liczbami istnieją dwie niepodzielne przez 5, a między tymi dwoma istnieje liczba, która nie dzieli się przez siedem. Tak więc spośród dziesięciu kolejnych liczb możemy wybrać liczbę, która nie dzieli się ani przez dwa, ani przez trzy, ani przez pięć, ani przez siedem. To właśnie jest szukana liczba.

3.62. Załóżmy na początek, że $k \geq 4$, $n \geq 4$. Wówczas

$$\frac{n^k}{kn} = \frac{n^{k-1}}{k} \geq \frac{4^{k-1}}{k} > 10,$$

a zatem liczby kn i n^k nie mogą składać się z takiej samej liczby cyfr.
Jeżeli $k = 3$, to ponieważ

$$\frac{n^3}{3n} < 10,$$

więc $n \leq 5$.
Jeśli natomiast $n = 3$, to $k \leq 4$, ponieważ

$$\frac{3^{k-1}}{k} < 10.$$

Przypadki, gdy $k = 1$ lub $n = 1$ są oczywiste. Dla $k = 2$ jasne jest, że $n < 10$, a dla $n = 2$ jasne jest, że $k \leq 6$.
Odpowiedź: $k = 1$, n – symetryczna liczba naturalna; $k = 2$, $n = 2$; $k = 2$, $n = 9$.

3.63. Niech

$$a + k_1 d,\ a + k_2 d, \ldots, a + k_n d, \ldots$$

oznacza ciąg geometryczny. Wówczas

$$(a + k_2 d)^2 = (a + k_1 d)(a + k_3 d).$$

Stąd otrzymujemy

$$a(2k_2 - k_1 - k_3) = (k_1 k_3 - k_2^2)d.$$

Załóżmy, że

$$2k_2 - k_1 - k_3 = 0.$$

Wówczas

$$k_1 k_3 - k_2^2 = 0,$$

a zatem

$$4k_1 k_3 = 4k_2^2 = (k_1 + k_3)^2.$$

Stąd

$$(k_1 - k_3)^2 = 0,$$

a to oznacza, że

$$k_1 = k_3,$$

co nie jest prawdą. Tak więc

$$2k_2 - k_1 - k_3 \neq 0.$$

Zatem

$$\frac{a}{d} = \frac{k_1 k_3 - k_2^2}{2k_2 - k_1 - k_3}$$

jest więc liczbą wymierną.

3.64. Na początek mamy, że

$$x_1 + x_2 = 4, \quad x_1 x_2 = 1, \quad a_1 = 4,$$

$$a_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 14.$$

Wykażemy, że

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n.$$

Rzeczywiście,

$$a_{n+2} = x_1^{n+2} + x_2^{n+2} =$$

$$= \left(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}\right)(x_1 + x_2) - x_1x_2\left(x_1^n + x_2^n\right) = 4a_{n+1} - a_n.$$

Stąd bezpośrednio wynika, że wszystkie liczby a_n są całkowite. Oznaczmy przez b_n resztę z dzielenia liczby a_n przez trzy. Policzmy kilka początkowych wyrazów ciągu b_n:

$$b_1 = 2, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 2, \quad b_4 = 1.$$

Oznacza to, że

$$b_{2k} = 2, \quad b_{2k+1} = 1.$$

Zatem liczba

$$a_n a_{n+1} - 2$$

jest podzielna przez trzy.

3.65. Jasne jest, że obydwie liczby x i y jednocześnie dzielą się przez trzy albo jednocześnie się nie dzielą. Jeśli obydwie liczby dają takie same reszty z dzielenia przez trzy, to szukane przedstawienie liczby a jest następujące:

$$a = \frac{x^2 + 2y^2}{3} = \left(\frac{x + 2y}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x - y}{3}\right)^2.$$

Jeżeli liczby x i y przy dzieleniu przez trzy dają różne reszty, to szukane przedstawienie liczby a jest następujące:

$$a = \left(\frac{x - 2y}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x + y}{3}\right)^2.$$

3.66. Jeżeli równanie $x^2 + ax + b = 0$ nie posiada rozwiązania, to weźmy liczbę naturalną m większą od liczby $-\frac{a}{2}$, a jeśli to równanie posiada rozwiązanie, to weźmy liczbę naturalną m większą od większego z rozwiązań równania $p(x) = 0$ i połóżmy:

$$N = p(m+1)p(m+2) \cdot \ldots \cdot p(m+2004) + m.$$

Ponieważ $p(c) - p(d)$ jest podzielne przez $c - d$, więc różnica

$$p(N+n) - p(m+n)$$

jest podzielna przez

$$N - m,$$

a jeśli $1 \leq n \leq 2004$, to $p(N+n)$ jest podzielne przez $p(m+n)$. Ponadto $p(N+n) > p(m+n)$, ponieważ $p(x)$ rośnie dla $x > m$. Stąd liczba $p(N+n)$ jest złożona.

3.67. Niech liczby $a^2 < b^2 < c^2$ tworzą ciąg arytmetyczny. Wówczas

$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2.$$

Stąd otrzymujemy, że

$$\frac{c-b}{b-a} = \frac{b+a}{c+b}.$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$\frac{c-b}{b-a} = \frac{b+a}{c+b} = k.$$

Oczywiście k jest liczbą wymierną, przy czym $0 < k < 1$. Ponadto mamy

$$a + (1-k)b - kc = 0, \quad ka - (k+1)b + c = 0.$$

Stąd

$$b = \frac{k^2+1}{k^2+2k-1}a, \quad c = \frac{1+2k-k^2}{k^2+2k-1}a.$$

Niech
$$k^2 + 2k - 1 > 0,$$
więc
$$k > \sqrt{2} - 1.$$
Oczywiście za k możemy przyjąć dowolną wartość z przedziału $\left(\sqrt{2} - 1, 1\right)$. Weźmy $k = \frac{1}{2}$, wówczas $b = 5a$, $c = 7a$. Dla $a = 1$ otrzymujemy trójkę kwadratów $1^2, 5^2, 7^2$. Ale na przykład dla $k = \frac{2}{3}$ mamy $b = \frac{13}{7}a$, $c = \frac{17}{7}a$. Kładąc $a = 7$, otrzymujemy jeszcze jedną trójkę kwadratów: $7^2, 13^2, 17^2$. Wynika stąd, że istnieje nieskończenie wiele takich trójek.

3.68. Niech
$$10^{k-1} < 3^n < 3^{n+1} < 3^{n+2} < 10^k.$$
Stąd
$$(n+2)\lg 3 < k < n \lg 3 + 1.$$
Ponieważ
$$\lg 3 = 0,477121254\ldots,$$
więc potrzebujemy znaleźć najmniejsze n, dla którego część ułamkowa liczby $n \lg 3$ jest mniejsza od $1 - 2\lg 3 = 0,045757492\ldots$.
Jest to, jak nietrudno policzyć, liczba 21.
Odpowiedź: $n = 21$.

3.69. Ponieważ
$$\begin{aligned} 2^{32} + 1 &= 15 \cdot 2^{28} + 2^{28} + 1 = 15 \cdot \left(2^7\right)^4 + \left(5^3 + 3\right) \cdot \left(2^7\right)^3 + 1 = \\ &= 3 \cdot \left(2^7\right)^3 \cdot \left(5 \cdot 2^7 + 1\right) + \left(5 \cdot 2^7\right)^3 + 1, \end{aligned}$$
to liczba $2^{32} + 1$ jest podzielna przez liczbę $5 \cdot 2^7 + 1$.

3.70. Niech t będzie dzielnikiem pierwszym liczby $x^2 + y^2$. Przyjmijmy oznaczenie: $a = \left[\sqrt{t}\,\right] + 1$. Rozważmy zbiory

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, a\}, \qquad B = \{px + qy;\ p \in A,\ q \in A\}.$$

Zauważmy, że w zbiorze B jest a^2 elementów.
Ponieważ $a^2 > t$, więc istnieją liczby p_1, q_1, p_2, q_2, ze zbioru A takie, że

$$p_1x + q_1y \equiv p_2x + q_2y (\mathrm{mod}\ t).$$

Stąd

$$(p_1 - p_2)x + (q_1 - q_2)y \equiv 0 (\mathrm{mod}\ t).$$

Jasne jest, że $p_1 \neq p_2$, $q_1 \neq q_2$, $p_1 - p_2 \neq q_1 - q_2$.
Mamy

$$(p_1 - p_2)^2x^2 - (q_1 - q_2)^2y^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ t).$$

Zatem

$$(p_1 - p_2)^2x^2 - (q_1 - q_2)^2y^2 + (q_1 - q_2)^2\left(x^2 + y^2\right) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ t).$$

Tym samym

$$\left((p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2\right)x^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ t).$$

Stąd

$$(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ t).$$

Ponieważ $|p_1 - p_2| \leq a - 1$, $|q_1 - q_2| \leq a - 1$, więc

$$(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 \leq 2(a - 1)^2 < 2t.$$

A zatem $(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 = t$.
Pozostaje zauważyć, że iloczyn dwóch liczb, które można zapisać w postaci sumy dwóch kwadratów, można zapisać w tej postaci. Rzeczywiście: $\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$. Przy czym, jeśli $ac = bd$ i $ad = bc$, to $a = b$, $c = d$.

3.71. Oznaczmy przez α i β liczby $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}-\sqrt{2}$. Wówczas liczby

$$a = \alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}, \quad b = \beta^2 = 5 - 2\sqrt{6}$$

są rozwiązaniami równania

$$x^2 - 10x + 1 = 0,$$

a ciąg o wyrazie ogólnym

$$S_n = a^n + b^n$$

można przedstawić w postaci rekurencyjnej

$$S_n - 10S_{n-1} + S_{n-2} = 0.$$

Zatem dla dowolnej liczby naturalnej n liczba S_n jest całkowita, a ponadto liczby S_n i $-S_{n-2}$ dają takie same reszty przy dzieleniu przez 10. Wynika stąd, że liczba S_{1002} przy dzieleniu przez 10 daje taką samą resztę co liczba $S_2 = 98$.
Ponieważ $0 < \beta < 1$, więc

$$\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{2004}\right] = \left[\alpha^{2004}\right] = \left[a^{1002}\right] = \left[S_{1002} - \beta^{2004}\right] = S_{1002} - 1,$$

a stąd otrzymujemy, że dana liczba kończy się siódemką.
Odpowiedź: 7.

3.72. Podstawiając zamiast x wyrażenie $1-x$, nasze równanie otrzymuje postać:

$$2f(1-x) + f(x) = 3(1-x)^2.$$

Ponieważ $2f(x) + f(1-x) = 3x^2$, więc otrzymujemy, że

$$f(x) = x^2 + 2x - 1.$$

3.73. Na początek pokażemy przykłady takich liczb, dla których powyższe wyrażenia przyjmują wartości wymierne.

a) $a = \sqrt{2}, \quad b = -\sqrt{2}, \quad a + b = 0;$
b) $c = 0, \quad \sqrt{c} = 0;$
c) $a = \sqrt{2}, \quad b = \sqrt{2}, \quad ab = 2;$
d) $a = \sqrt{2}, \quad c = 0, \quad ac = 0;$
e) $a = -\sqrt[4]{2}, \quad b = \sqrt{2}, \quad \sqrt{a + \sqrt{b}} = 0;$
f) $a = -\sqrt{2}, \quad c = 2, \quad \sqrt{a + \sqrt{c}} = 0.$

Dalej wykażemy, że w pozostałych przypadkach nie można uzyskać liczby wymiernej. Załóżmy, że p jest liczbą wymierną.

g) $a + c = p,$ wówczas, $a = p - c;$
h) $\sqrt{a} = p,$ wówczas, $a = p^2;$
i) $\sqrt{a + c} = p,$ wówczas, $a = p^2 - c;$
j) $\sqrt{c + \sqrt{a}} = p,$ wówczas, $a = \left(p^2 - c\right)^2.$

Odpowiedź: $a + b$, $\sqrt{c}$, ab, ac, $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, $\sqrt{a + \sqrt{c}}$.

3.74. Jeżeli $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną, to wszystko zostało wykazane. Jeżeli natomiast $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną, to wystarczy zauważyć, że
$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2.$$

3.75. Jeśli między liczbami $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest liczba $a \geq 4$, to zamieniamy ją na dwie liczby: $a - 2$ i 2. Nie zmienia to sumy liczb i nie zmniejsza ich iloczynu. Jeśli między liczbami występuje jedynka, to zamieniamy parę liczb: $1, a$ na liczbę $a + 1$. W ten sposób między naszymi liczbami występują jedynie dwójki i trójki. Jeżeli liczba dwójek jest większa od dwóch, to każde trzy dwójki zamieniamy na dwie trójki.
Odpowiedź: $(a_1, a_2, \ldots, a_{668}) = (3, 3, 3, \ldots, 3)$.

3.76. Jasne jest, że jeśli trójka liczb (x, y, z) jest rozwiązaniem, to również trójka $(-x, -y, z)$ jest rozwiązaniem. Zatem $x = y = 0$. Tak więc $a = b = z$, $z^2 = 4$. Stąd $a = b = 2$ lub $a = b = -2$. Pozostaje rozwiązać dwa układy równań:

$$\begin{cases} xyz + z = 2 \\ xyz^2 + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} xyz + z = -2 \\ xyz^2 + z = -2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

Odejmując, w każdym z układów, stronami od drugiego równania pierwsze, otrzymujemy $xyz(z-1) = 0$. Przypadek $x = 0$ lub $y = 0$ w każdym z układów prowadzi do rozwiązań odpowiednio $(0, 0, 2)$ i $(0, 0, -2)$. Dla $z = 1$ pierwszy układ posiada rozwiązanie, a drugi nie.
Odpowiedź: $a = b = -2$.

3.77. Ponieważ

$$b = 4f\left(\frac{1}{2}\right) - 3f(0) - f(1),$$

więc

$$|b| \leq 4\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| + 3|f(0)| + |f(1)| \leq 8.$$

Funkcja

$$f(x) = 8x^2 - 8x + 1$$

pokazuje, że tego oszacowania nie można poprawić.

3.78. Rozpatrzmy wyrażenie

$$\frac{P(x) - P(-x)}{2},$$

gdzie

$$P(x) = \left(x^5 + x - 1\right)^{2004}.$$

Zauważmy, że w wyrażeniu tym występują jedynie nieparzyste potęgi x, a zatem suma współczynników przy nieparzystych potęgach wynosi

$$\frac{P(1) - P(-1)}{2}.$$

Odpowiedź: $\frac{1-3^{2004}}{2}$.

3.79. Jasne, że dla $x > 1$ mamy

$$x > f(x) > 1,$$

a dla $x < 1$ jest

$$x < f(x) < 1.$$

Stąd dla $x > 1$

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right) < f\left(f(x)\right) < f(x) < x.$$

Jeśli natomiast $x < 1$, to

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right) > f\left(f(x)\right) > f(x) > x.$$

3.80. Oznaczmy płaszczyznę zawierającą proste przez α i rozpatrzmy prostą l, prostopadłą do tej płaszczyzny. Jeśliby na prostej l odmierzać czas, to ruch piechura po prostej, leżącej w płaszczyźnie α, wyraża się wykresem, który oczywiście również będzie prostą (leżącą, oczywiście, w przestrzeni). Fakt, że pierwszy piechur spotkał się z drugim oznacza, że wykresy Γ_1 i Γ_2, przedstawiające ruch tych piechurów, przecinają się. Proste Γ_3 i Γ_4 leżą w płaszczyźnie wyznaczonej przez proste Γ_1 i Γ_2. Jeżeli proste Γ_3 i Γ_4 byłyby równoległe, to ich rzuty na płaszczyznę α również byłyby równoległe, co przeczy treści zadania. Tak więc proste Γ_3 i Γ_4 przecinają się, co oznacza, że trzeci piechur spotkał się z czwartym.

3.81. Oznaczmy granicę ciągu $\{x_{2n}\}$ przez a. Wystarczy wykazać, że granica ciągu $\{x_{2n+1}\}$ również wynosi a. Z powyższego mamy, że granica ciągu $\{x_{6n}\}$ wynosi a, a stąd otrzymujemy, że również ciąg $\{x_{3n}\}$ ma granicę równą a. To natomiast daje, że granica ciągu $\{x_{6n+3}\}$ wynosi a. Zatem i granica ciągu $\{x_{2n+1}\}$ równa jest a.

3.82. Niech $\mathcal{A}$ oznacza rodzinę wybranych podzbiorów. Jeżeli zbiór A należy do $\mathcal{A}$, to dopełnienie tego zbioru nie należy do naszej rodziny. Wszystkich podzbiorów jest 2^n. Jeżeli zbiory A i B należą do $\mathcal{A}$, to ich przekrój również należy do $\mathcal{A}$. Rzeczywiście, rozważmy dopełnienie przekroju zbiorów A i B. Nie może ono należeć do wybranej rodziny, ponieważ jego przekrój ze zbiorami A i B jest pusty. Zatem przekrój wszystkich zbiorów z $\mathcal{A}$ należy do $\mathcal{A}$. Ponieważ wśród wybranych podzbiorów nie ma zbioru pustego, więc przekrój wszystkich wybranych podzbiorów jest niepusty.

Teoria

1. Sumy kwadratów

Rozważmy kilka liczb pierwszych postaci $4k+1$:

$$5,\ 13,\ 17,\ 29,\ 37,\ 41,\ 53,\ 61,\ 73,\ 89,\ 97,\ldots.$$

Zauważmy, że

$$\begin{array}{llll} 5=2^2+1^2, & 13=3^2+2^2, & 17=4^2+1^2, & 29=5^2+2^2,\\ 37=6^2+1^2, & 41=5^2+4^2, & 53=7^2+2^2, & 61=6^2+5^2,\\ 73=8^2+3^2, & 89=8^2+5^2, & 97=9^2+4^2. & \end{array}$$

Okazuje się, że każda liczba pierwsza postaci $4k+1$ może być zapisana jako suma kwadratów dwóch liczb naturalnych, przy czym istnieje tylko jedno takie przedstawienie.
Jest oczywiste, że liczby postaci $4k+3$ nie mogą być zapisane jako suma kwadratów dwóch liczb naturalnych.
Ponieważ

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2,$$

to każda liczba, której dzielniki pierwsze mają postać $4k+1$, może być zapisana jako suma kwadratów.
Udowodnimy, że suma kwadratów dwóch liczb naturalnych nie może mieć dzielników postaci $4k+3$.
Przypuśćmy, że a^2+b^2 posiada taki dzielnik. W takim razie ta liczba posiada dzielnik pierwszy takiej postaci.
Niech $p=4k+3$ jest dzielnikiem pierwszym liczby a^2+b^2, przy czym żadna z liczb a, b nie jest podzielna przez p.
Mamy

$$a^2\equiv -b^2 \pmod p.$$

Zatem
$$\left(a^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(-b^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p.$$
Stąd
$$a^{p-1} \equiv -b^{p-1} \pmod p.$$
Jednakże na mocy małego twierdzenia Fermata
$$a^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Mamy sprzeczność.
Udowodnimy, że jeśli liczba na dwa różne sposoby może być zapisana jako suma dwóch kwadratów, to ta liczba jest złożona.
Niech $N = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, gdzie a, b, c, d są liczbami naturalnymi, przy czym liczby a, b są różnej parzystości, c i d też są różnej parzystości.
Przypuśćmy, że a, c są różnej parzystości, podobnie b, d.
Niech $a > c$. Mamy

$$\frac{a-c}{d-b} = \frac{d+b}{a+c} = \frac{m}{n}, \qquad \text{gdzie } m, n \text{ są liczbami naturalnymi, } (m,n) = 1.$$

Zatem
$$\begin{cases} n(a-c) = m(d-b) \\ n(d+b) = m(a+c). \end{cases}$$
Stąd
$$a = \frac{m^2+n^2}{2mn}d + \frac{n^2-m^2}{2mn}b.$$
Mamy
$$N = a^2 + b^2 = \left(\frac{m^2+n^2}{2mn}d + \frac{n^2-m^2}{2mn}b\right)^2 + b^2 =$$
$$= \left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^2 d^2 + \left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^2 b^2 + 2\cdot\frac{(m^2+n^2)(n^2-m^2)}{(2mn)^2}bd =$$
$$= \frac{m^2+n^2}{4}\cdot\left(\frac{m^2+n^2}{m^2n^2}\left(b^2+d^2\right) + 2\cdot\frac{n^2-m^2}{n^2m^2}bd\right) = \frac{m^2+n^2}{2}\cdot\frac{\left(\frac{d-b}{n}\right)^2 + \left(\frac{b+d}{m}\right)^2}{2}.$$

Ponieważ liczby
$$m, \quad n, \quad \frac{d-b}{n}, \quad \frac{b+d}{m}$$
są liczbami nieparzystymi, to liczby
$$\frac{m^2+n^2}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{\left(\frac{d-b}{n}\right)^2+\left(\frac{b+d}{m}\right)^2}{2}$$
są liczbami całkowitymi.
Teraz udowodnimy, że każdy dzielnik sumy kwadratów może być zapisany jako suma kwadratów.
Niech t jest dzielnikiem pierwszym liczby a^2+b^2. Oznaczmy
$$A=\left\{1,2,\ldots,\left[\sqrt{t}\right]+1\right\}.$$
Rozważmy liczby postaci $ka+lb$, gdzie $k,l \in A$. Takich liczb jest $\left([\sqrt{t}]+1\right)^2 > t$. Zatem istnieją liczby $k_1, l_1, k_2, l_2 \in A$ takie, że
$$k_1a+l_1b \equiv k_2a+l_2b \ (\mathrm{mod}\ t), \quad k_1 \neq k_2, \quad l_1 \neq l_2.$$
Stąd
$$(k_1-k_2)a+(l_1-l_2)b \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ t).$$
W takim razie
$$(k_1-k_2)^2a^2-(l_1-l_2)^2b^2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ t).$$
A zatem
$$(k_1-k_2)^2a^2-(l_1-l_2)^2b^2+(l_1-l_2)^2(a^2+b^2) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ t).$$
Czyli
$$a^2\left((k_1-k_2)^2+(l_1-l_2)^2\right) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ t).$$
Stąd
$$(k_1-k_2)^2+(l_1-l_2)^2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ t).$$

Zauważmy, że

$$|k_1 - k_2| \leq [\sqrt{t}], \qquad |l_1 - l_2| \leq [\sqrt{t}].$$

W takim razie

$$(k_1 - k_2)^2 + (l_1 - l_2)^2 < 2t.$$

Stąd wynika, że

$$t = (k_1 - k_2)^2 + (l_1 - l_2)^2,$$

co należało udowodnić.
A zatem każdy dzielnik liczby $a^2 + b^2$ może być zaisany jako suma kwadratów liczb naturalnych.

2. Fermat, Euler, Lagrange

W jednym ze swoich listów Pierre Fermat w 1658 r. podał, że otrzymał „z całą pewnością" dowód tego, że dowolna liczba pierwsza postaci $4k + 1$ wyraża się jako suma dwóch kwadratów, a dowolna liczba naturalna wyraża się jako suma co najwyżej czterech kwadratów. Żadnych zapisków tych dowodów Fermat nie zostawił. Minęło prawie sto lat i twierdzeniami tymi zainteresował się Leonard Euler. Pierwsze z nich udowodnił on w 1747 r. Drugie twierdzenie zostało udowodnione dopiero w 1770 r. przez Lagrange'a, po czym Euler znacznie uprościł ten dowód.

Później pojawiały się jeszcze inne interesujące dowody twierdzenia o przedstawieniu liczb pierwszych $p = 4k + 1$ w postaci sumy dwóch kwadratów. Ale każdy z nich, podobnie jak dowód Eulera, nie był w pełni elementarny. I dopiero niedawno udowodniono to twierdzenie w sposób zupełnie przystępny.[1]

Centralnym punktem w tym dowodzie jest proste, ale ważne pojęcie inwolucji. Niech M oznacza pewien zbiór. Przekształcenie $\sigma : M \to M$ nazywamy inwolucją, jeżeli $\sigma(\sigma(m)) = m$ dla dowolnego elementu m ze zbioru M. Przykładem inwolucji może być dowolna symetria. Inwolucja pozwala rozbić punkty (elementy zbioru M) na pary $\{m, \sigma(m)\}$ symetrycznych punktów. Dla elementu $\sigma(m)$ otrzymujemy tę samą parę co dla elementu m, ponieważ $\sigma(\sigma(m)) = m$. Pary elementów nie otrzymujemy tylko w przypadku, gdy $\sigma(m) = m$ (takie punkty nazywamy punktami stałymi). Zatem, jeżeli na skończonym zbiorze M zadana jest inwolucja, to parzystość liczby elementów M pokrywa się z parzystością liczby punktów stałych inwolucji (pozostałe elementy dzielą się na pary, dlatego też ich ilość jest parzysta).

Schemat dowodu jest następujący. Rozpatrzmy zbiór wszystkich roz-

[1] D. Zagier, *A one-sentence proof that every prime* $p \equiv 1 (mod\ 4)$ *is a sum of two squares*, *Amer. Math. Monthly*, 1990, **97** (2), 114.

wiązań równania $x^2+4yz = p$ w liczbach naturalnych. Wystarczy wykazać, że jeśli $p = 4k + 1$, to równanie to posiada rozwiązanie, dla którego $y = z$. W istocie, wówczas $p = x^2 + (2y)^2$. Rozwiązanie, dla którego $y = z$, to punkt stały inwolucji $\sigma(x, y, z) = (x, z, y)$. Dlatego wystarczy wykazać, że liczba wszystkich rozwiązań jest nieparzysta. W tym celu konstruuje się zupełnie inną inwolucję τ, mającą dokładnie jeden punkt stały. Oto ta inwolucja:

$$\tau(x, y, z) = \begin{cases} (x + 2z, z, y - x - z) & x < y - z \qquad (1) \\ (2y - x, y, x - y + z) & y - z < x < 2y \qquad (2) \\ (x - 2y, x - y + z, y) & 2y < x. \qquad (3) \end{cases}$$

Zauważmy na początek, że $x \neq 2y$ i $x \neq y - z$, ponieważ w przeciwnym wypadku $p = x^2 + 4yz = 4(y^2 + yz)$ lub $p = (y - z)^2 + 4yz = (y + z)^2$. Zauważmy dalej, że dowolne rozwiązanie równania $x^2 + 4yz = p$ inwolucja τ rzeczywiście przekształca w rozwiązanie. Wynika to z tożsamości:

$$\begin{cases} (x + 2z)^2 + 4z(y - x - z) = x^2 + 4yz, \\ (x - 2y)^2 + 4y(x - y + z) = x^2 + 4yz. \end{cases}$$

Niech $\tau(x, y, z) = (x', y', z')$.
Jeśli $x < y - z$, to $x' = x + 2z > 2z = 2y'$, tzn. punkt typu (1) przechodzi na punkt typu (3). Analogicznie okazuje się, że punkt typu (3) przechodzi na punkt typu (1), a punkt typu (2) – na punkt typu (2). Teraz już łatwo pokazać, że τ jest inwolucją.

Punkt typu (1) nie może być punktem stałym, ponieważ $x' = x + 2z > x$; dla punktu typu (3) $x' = x - 2y < x$. Dlatego punktem stałym może być tylko punkt typu (2), przy czym musi być dla niego spełniony warunek $z = z' = x - y + z$, tzn. $x - y$. W takim przypadku $p = x^2 + 4yz = x(x + 4z)$, co oznacza, że $x = y = 1$ (wykorzystaliśmy tu fakt, że liczba p jest pierwsza). Jeśli $p = 4k + 1$, to $(1, 1, k)$ jest punktem stałym (wykorzystaliśmy tu to, że liczba p ma postać $4k + 1$), co kończy dowód.

3. Równania diofantyczne

A teraz zajmiemy się rozwiązaniami w liczbach całkowitych następujących równań:

1. $x^2 + 36 = y^5$	2. $x^2 + 9 = y^3$	3. $x^2 + 81 = y^5$
4. $x^2 + 4 = y^5$	5. $x^2 + 5 = y^3$	6. $x^2 - 71 = y^7$
7. $x^2 + 37 = y^{11}$	8. $x^3 + 7 = y^2$	9. $x^3 - 9 = y^2$.

1. $x^2 + 36 = y^5$.
Niech x jest liczbą parzystą: $x = 2k$. Wtedy y też jest liczbą parzystą, jednak $x^2 + 36 \equiv 4, 8 \pmod{16}$, $y^5 \equiv 0 \pmod{16}$. Zatem x jest liczbą nieparzystą.
W takim razie
$$x^2 + 36 \equiv 1 \pmod 4.$$
Zatem $y^5 \equiv 1 \pmod 4$. Z tego wynika, że $y \equiv 1 \pmod 4$.
Niech $y = 4m + 1$.
Ponieważ
$$x^2 + 4 = y^5 - 2^5,$$
więc liczba $x^2 + 4$ jest podzielna przez $y - 2 = 4m - 1$.
Ale $x^2 + 4$ jest sumą kwadratów i nie może mieć dzielnika $4m - 1$.

2. $x^2 + 9 = y^3$.
Niech x jest liczbą nieparzystą. Wtedy y jest liczbą parzystą. Ale w takim razie $x^2 + 9 \equiv 2 \pmod 4$, $y^3 \equiv 0 \pmod 4$.
Niech x jest liczbą parzystą. Wtedy $x^2 + 9 \equiv 1 \pmod 4$. Zatem $y \equiv 1 \pmod 4$. Ale w takim razie $x^2+1 = y^3-8$ jest podzielna przez $y-2$, czyli suma kwadratów x^2+1 ma dzielnik postaci $4k-1$, co jest niemożliwe.

3. $x^2 + 81 = y^5$.
Jeżeli x jest liczbą nieparzystą, to y musi być liczbą parzystą. Jednak

w takim razie

$$x^2 + 81 \equiv 2 \pmod 4), \qquad y^5 \equiv 0 \pmod 4.$$

Jeżeli x jest liczbą parzystą, to $x^2 + 81 \equiv 1 \pmod 4$. W takim razie $y^5 \equiv 1 \pmod 4$. Stąd $y \equiv 1 \pmod 4$.
Ponieważ

$$x^2 + 49 = y^5 - 2^5,$$

to suma kwadratów $x^2 + 7^2$ jest podzielna przez $y - 2$, co nie jest możliwe.

4. $x^2 + 4 = y^5$.
Jeżeli x jest liczbą parzystą, to y też jest liczbą parzystą. Ale

$$x^2 + 4 \equiv 4, 8 \pmod{16}, \qquad y^5 \equiv 0 \pmod{16}.$$

Niech x jest liczbą nieparzystą, wtedy

$$x^2 + 4 \equiv 1 \pmod 4.$$

Stąd $y \equiv 1 \pmod 4$.
Ale w takim razie $x^2 + 6^2 = y^5 + 2^5$ jest podzielna przez $y + 2$, co jest niemożliwe.

5. $x^2 + 5 = y^3$.
Jeżeli x jest nieparzystą liczbą, to y jest liczbą parzystą. Jednak

$$x^2 + 5 \equiv 2 \pmod 4, \qquad y^3 \equiv 0 \pmod 4.$$

Niech x jest liczbą parzystą. W takim razie $y^3 \equiv 1 \pmod 4$.
Stąd $y \equiv 1 \pmod 4$.
Mamy

$$x^2 + 4 = y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1).$$

Zatem liczba $y^2 + y + 1$ jest dzielnikiem sumy kwadratów $x^2 + 2^2$, ale to nie jest możliwe, ponieważ liczba $y^2 + y + 1 \equiv 3 \pmod 4$.

6. $x^2 - 71 = y^7$.
Jeżeli x jest liczbą nieparzystą, to y jest liczbą parzystą. Jednak

$$x^2 - 71 \equiv 2 \pmod 4, \qquad y^7 \equiv 0 \pmod 4.$$

Niech x jest liczbą parzystą. Wtedy $y^7 \equiv 1 \pmod 4$,
czyli $y \equiv 1 \pmod 4$.
Ponieważ

$$x^2 + 46^2 = y^7 + 3^7,$$

to suma kwadratów $x^2 + 46^2$ ma dzielnik

$$y^6 - 3y^5 + 9y^4 - 27y^3 + 81y^2 - 243y + 729,$$

który jest postaci $4k + 3$.

7. $x^2 + 37 = y^{11}$.
Jeśli x jest liczbą nieparzystą, to y jest liczbą parzystą, przy czym

$$x^2 + 37 \equiv 2 \pmod 4, \qquad y^{11} \equiv 0 \pmod 4.$$

Niech x jest liczbą parzystą. Wówczas $y \equiv 1 \pmod 4$.
Ponieważ $x^2 + 6^2 = y^{11} - 1$, to liczba

$$y^{10} + y^9 + y^8 + y^7 + y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$$

jest dzielnikiem sumy kwadratów, a jednak ta liczba jest postaci $4k + 3$.

8. $x^3 + 7 = y^2$.
Jeżeli x jest parzyste, to y – nieparzyste. Wtedy $y^2 \equiv 1 \pmod 8$. Stąd $x^3 \equiv 2 \pmod 8$, co nie jest możliwe.

Jeżeli x jest liczbą nieparzystą, to y – parzystą. Wtedy $y^2 \equiv 0 \pmod{4}$. Stąd $x^3 \equiv 1 \pmod{4}$. Zatem $x \equiv 1 \pmod{4}$.
Ponieważ

$$x^3 + 8 = y^2 + 1,$$

to suma kwadratów y^2+1 posiada dzielnik $x+2$, który jest postaci $4k+3$, co nie jest możliwe.

9. $x^3 - 9 = y^2$.

Jeżeli x jest liczbą parzystą, to y – nieparzystą. Wtedy $y^2 \equiv 1 \pmod{8}$. Zatem $x^3 \equiv 2 \pmod{8}$, co nie jest możliwe.
Niech x jest liczbą nieparzystą. Wtedy y jest liczbą parzystą, czyli $y^2 \equiv 0 \pmod{4}$. Stąd $x^3 \equiv 1 \pmod{4}$. Zatem $x \equiv 1 \pmod{4}$.
Ponieważ

$$x^3 - 8 = y^2 + 1,$$

to suma kwadratów y^2+1 posiada dzielnik $x-2$, który jest postaci $4k+3$, co nie jest możliwe.

Literatura

1. N. Agachanov, L. Kupcov, Yu. Nesterenko, S. Rezničenko, A. Slinko, *Matematičeskie olimpiady školnikov*, Prosveščenie, Moskva 1997.

2. S. Berlov, S. Ivanov, K. Kochaś, *Zadači Sankt-Peterburgskoj Gorodskoj Olimpiady po matematike*, Sankt-Peterburg 1996.

3. A. Fomin, G. Kuznecova, *Mieždunarodnye Matematičeskie olimpiady*, Droga, Moskva 1998.

4. D. Fomin, *Sankt-Peterburgskie matematičeskie olimpiady*, Sankt--Peterburg 1994.

5. G. Galperin, A. Tolpygo, *Moskovskie matematičeskie olimpiady*, Prosveščenie, Moskva 1986.

6. G. Jakovlev, Ł. Kupcov, S. Rezniczenko, P. Gusjatnikov, *Vsierosyjskije matematičeskie olimpiady školnikov*, Prosveščenie, Moskva 1992.

7. I. Kjurszak, D. Nejkomm, D. Chajot, L. Szurani, *Vengerskie matematičeskie olimpiady*, Mir, Moskva 1976.

8. S. Koniagin, G. Tonojan, I. Szarygin i in., *Zarubežnye matematičeskie olimpiady*, Nauka, Moskva 1987.

9. A. Leman, *Sbornik zadač moskovskich matematičeskich olimpiad*, Prosveščenie, Moskva 1965.

10. E. Morozova, I. Petrakov, *Meždunarodnye Matematičeskie olimpiady*, Prosveščenie, Moskva 1971.

11. V. Prosolov, *Rasskazy o čislah, mnogočlenah i figurah*, Fazis, Moskva 1997.

12. J. Sergeev, *Zarubežnye matematičeskie olimpiady*, Nauka, Moskva 1987.

13. D. Šklarskij, N. Čencov, I. Jaglom, *Izbrannye zadači i teoremy elementarnoj matematiki*, Nauka, Moskva 1977.

14. N. Vasiliev, V. Gutenmacher, Ż. Rabbot, A. Toomm, *Zaočnye matematičeskie olimpiady*, Nauka, Moskva 1981.

15. N. Vasiliev, A. Jegorov, *Zadači vsesojuznych matematičeskich olimpiad*, Nauka, Moskva 1998.

16. The American Mathematical Monthly, AmaricanMathematical Society, USA.

17. Crux Matematicorum, Canadian Mathematical Society, The University of Toronto, Canada.

18. Kvant, Naučno-populiarnyj fiziko-matematičeskij žurnal, Nauka, Moskva.

19. Matematika w škole, Naučno-metodičeskij žurnal, Pedagogika, Moskva.

Niniejsza książka jest drugą z serii książek pod tytułem *Kącik olimpijski*. Celem serii jest zapoznanie ucznia z najważniejszymi pojęciami elementarnej matematyki i uczenie rozwiązywania niestandardowych zadań. Pierwsza książka poświęcona była geometrii. Niniejsza pozycja poświęcona jest algebrze. Zadania w tym zbiorze zostały podzielone na trzy części. Poziom A zawiera zadania przeznaczone dla uczniów klasy trzeciej gimnazjum i pierwszej liceum, poziom B – dla uczniów pierwszej i drugiej klasy liceum, poziom C – dla uczniów drugiej i trzeciej liceum. Na końcu książki przytaczamy kilka bardzo ważnych i interesujących twierdzeń z teorii liczb.

Wydawnictwo AKSJOMAT Piotr Nodzyński
ul. Wita Stwosza 1/7
87 - 100 Torun
tel (0-56) 62-269-41
tel/fax (0-56) 655-52-09
e- mail: wydawnictwo@aksjomat.torun.pl
www.aksjomat.torun.pl

ISBN 978-83-87329-93-2
9 788387 329932