1 题目

设 $f:\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,n\}$ 为双射，证明：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{f(k)}}{a_k}\geq n$$

其中 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 均为实数。

2 解答

解：根据康托罗维奇不等式，我们有：

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{f(k)}}{\sqrt{a_k}}\cdot\sqrt{a_k}\right)^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_{f(k)}}{\sqrt{a_k}}\right)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$$

化简上述不等式，得到：

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{f(k)}}{\sqrt{a_k}}\cdot\sqrt{a_k}\right)^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{f(k)}^2}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$$

由于 f 是双射，我们可以对右侧的两个求和符号进行重新排列。

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{f(k)}}{\sqrt{a_k}}\cdot\sqrt{a_k}\right)^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$$

继续化简，我们得到：

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{f(k)}}{\sqrt{a_k}}\cdot\sqrt{a_k}\right)^2\leq n\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$$

因为 a_k 是实数，所以根据不等式平方的性质，我们可以得到：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{f(k)}}{\sqrt{a_k}}\cdot\sqrt{a_k}\geq\sqrt{n\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)}$$

最后，我们对不等式两边同时平方，得到：

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{f(k)}}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\geq n\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$$

这进一步简化为：

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{f(k)}}{a_k} \geq n$$

附录

康托罗维奇不等式的证明

康托罗维奇不等式是数学中一条重要的不等式，它可以用来证明许多其他的数学结果。下面我们给出康托罗维奇不等式的证明：

设有 n 个实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 以及 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 为 n 个实数的任意排列，即 $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ 是 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 的一个重排列。

我们考虑两个向量 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$。它们的内积定义为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$。

根据柯西-施瓦茨不等式,我们有 $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$。

取到 b_k 为 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的一个重排列，我们可以得到：

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

由于 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的一个重排列，那么 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 也可以看作是 $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ 的一个重排列，其中 $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ 是一个双射。即存在一个双射 f，使得 $b_k = a_{f(k)}$。

将上述等式改写为：

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k a_{f(k)}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_{f(k)}^2\right)$$

进一步展开，我们得到：

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k a_{f(k)}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_{f(k)}^2\right)$$

因为 f 是双射，我们可以对右边的两个求和符号进行重新排列：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k a_{f(k)} \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_{f(k)}^2\right)}$$

继续化简，我们得到：

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_{f(k)}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}} \geq 1$$

由于 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是实数，所以我们可以将其写成绝对值的形式：

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{f(k)}}{\sqrt{a_k^2}}\right| \geq 1$$

进一步化简，我们得到康托罗维奇不等式：

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{f(k)}}{a_k}\right| \geq 1$$

其中 $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ 是一个双射。
这就完成了康托罗维奇不等式的证明。