

# Transformées de Hough denses pour la reconnaissance de formes paramétrées

Antoine Manzanera  
ENSTA-ParisTech

Cours C10-3 "Vision pour la Robotique"

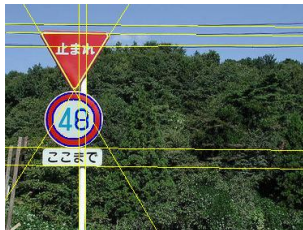
# Reconnaissance de Formes paramétrées dans les Images

## Forme analytique

- Droites, cercles, coniques,...
- Définies par une équation

## Objet

- Voiture, visage,...
- Paramètres définis par l'utilisateur
- Fondée sur Exemples / Apprentissage

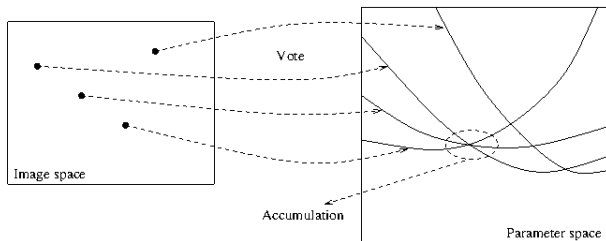


# Plan de la présentation

- 1 Introduction
  - Travaux et Outils existant
- 2 Géométrie Différentielle Multiéchelles
  - Mesures Différentielles
  - Dérivées multiéchelles
- 3 Reconnaissance de Formes Analytiques
  - Ordre 1 : Droites
  - Ordre 2 : Cercles
- 4 Reconnaissance d'objets
  - Modèles Implicites de Formes
  - Transformée de Hough Dense Généralisée
- 5 Conclusion

# Transformée de Hough : Vue globale

- L'une des applications les plus anciennes en Vision par Ordinateur (Images de chambres à bulles, fin des années 50).
- Utilisable à la fois pour des formes analytiques (courbes) et non analytiques (objets).
- Fondée sur un mécanisme d'accumulation (vote) de l'espace image (pixels) à un espace de paramètres multidimensionnel.



# Dualité des espaces Image / Paramètre

Courbe analytique paramétrée dans l'espace Image  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{C}^{\mathbf{a}_0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \phi(\mathbf{x}, \mathbf{a}_0) = 0\}, \text{ avec } \mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^m$$

Surface paramétrique duale dans l'espace des paramètres  $\mathcal{P} = \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{D}^{\mathbf{x}_0} = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m; \phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{a}) = 0\}, \text{ avec } \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

Transformée de Hough théorique d'un ensemble  $I \subset \mathbb{R}^n$

Ensembliste

$$\Gamma_I^\phi = \bigcup_{\mathbf{x} \in I} \mathcal{D}^{\mathbf{x}}$$

Fonctionnelle

$$\Gamma_I^\phi = \sum_{\mathbf{x} \in I} \mathbb{1}_{\mathcal{D}^{\mathbf{x}}}$$

# Cas des droites et des cercles

## Droites : équation polaire

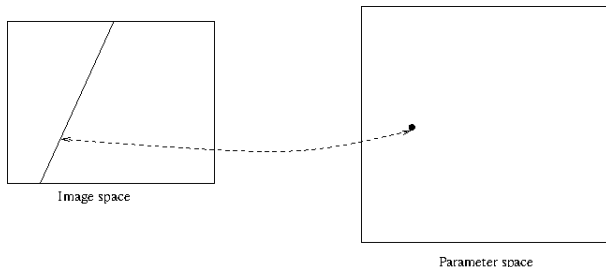
- Équation :  $\phi(x, y, \theta, \rho) = x \cos \theta + y \sin \theta - \rho = 0$
- Courbe image  $\mathcal{C}^{(\theta, \rho)}$  : droite.
- Courbe duale  $\mathcal{D}^{(x, y)}$  : sinusöïde.

## Cercles : équation cartésienne

- Équation :  $\phi(x, y, \mathbf{c}_x, \mathbf{c}_y, r) = (x - \mathbf{c}_x)^2 + (y - \mathbf{c}_y)^2 - r^2 = 0$
- Courbe image  $\mathcal{C}^{(\mathbf{c}_x, \mathbf{c}_y, r)}$  : cercle.
- Surface duale  $\mathcal{D}^{(x, y)}$  : cône.

# Transformée de Hough : détails (1)

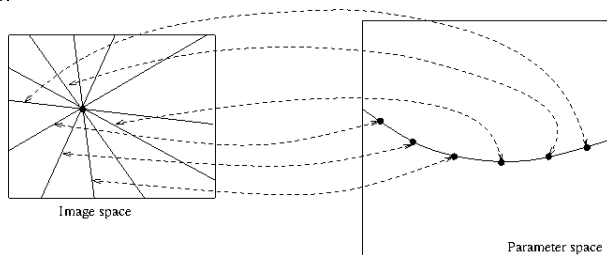
Chaque point de l'espace des paramètres (dimension = nombre de paramètres) correspond à une unique forme dans l'espace image.  
Exemple : Un point dans l'espace des coordonnées polaires  $(\theta, \rho)$  correspond à une droite.



# Transformée de Hough : détails (2)

Chaque courbe de l'espace des paramètres correspond à un unique point ou, de manière équivalente, à un faisceau de formes dans l'espace image.

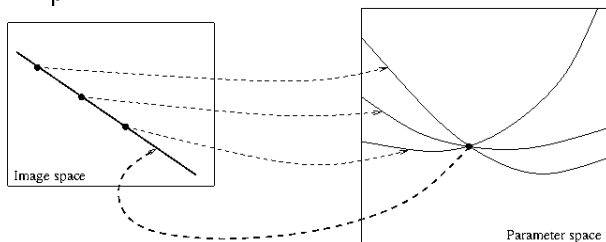
Exemple : Une sinusoïde correspond à un faisceau de droites, i.e. un point.





# Transformée de Hough : détails (3)

Réciproquement, différents points appartenant à la même forme dans l'espace image forment un faisceau de courbes dans l'espace des paramètres, qui converge vers un unique point qui définit la forme correspondante.



# Transformée de Hough : en pratique

En pratique les espaces image  $\mathcal{E}$  et paramètre  $\mathcal{P}$  sont tous deux discrétisés.

Classiquement, la transformée de Hough (i.e. le résultat de la projection de tous les points de l'espace image dans l'espace des paramètres) est calculée à partir d'un nombre limité de points : les contours.

La projection est habituellement réalisée selon l'une des deux techniques duales :

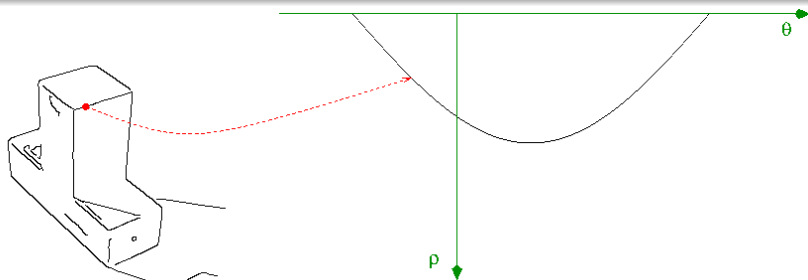
- La projection many-to-one
- La projection one-to-many

# One-to-many vs Many-to-one

## La projection **many-to-one** ou divergente

Elle est définie par  $\Gamma_I^\phi = \sum_{\mathbf{x} \in I} \mathbb{1}_{\mathcal{D}^{\mathbf{x}}}$ ,

soit l'union (somme des fonctions indicatrices) de toutes les courbes duales associées aux points du contour.

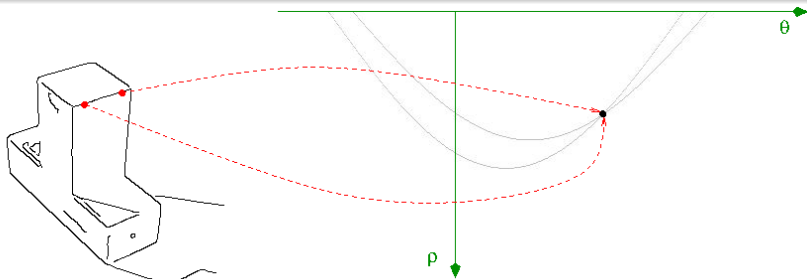


# One-to-many vs Many-to-one

## La projection **one-to-many** ou convergente

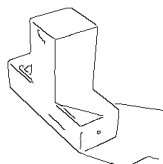
Elle est définie par  $\hat{\Gamma}_I^\phi = \sum_{S \subset I, |S|=\dim(\mathcal{P})} \mathbb{1}_{\{\mathbf{a}_S\}},$

où  $\{\mathbf{a}_S\} = \bigcap_{\mathbf{x} \in S} \mathcal{D}^{\mathbf{x}}$ , est un point unique de  $\mathcal{P}$ , qui représente la seule courbe de  $\mathcal{E}$  contenant tous les points de  $S$ .

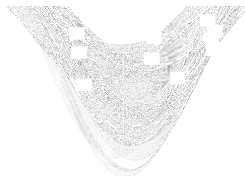


# Détection : Maxima de la Transformée de Hough

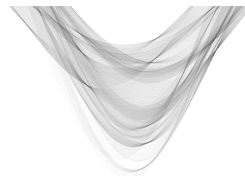
Une fois l'ensemble des points (ou des  $m$ -uplets) de  $I$  (1) projetés (2), les meilleures formes candidates sont détectées (4) en calculant les maxima de la transformée de Hough (3).



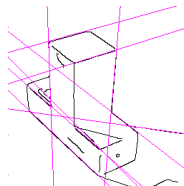
Contours



10 plus grands maxima locaux



TH one-to-many



10 meilleures lignes

# Complexité des TH classiques

- $n$  : nombre d'échantillons / dimension (image).
- $p$  : nombre de pixels du contour binaire.
- $m$  : dimension de l'espace des paramètres.
- $k$  : nombre d'échantillons / dimension (paramètres).

Type Algo	Préliminaires	Transformée	Sélec. Maxima
TH 1-to-many	Détection de contours	vote 1-to-many $\mathcal{O}(pk^{m-1})$	$\mathcal{O}(k^m)$
TH many-to-1	$\mathcal{O}(n^2) + \mathcal{O}(p)$	vote many-to-1 $\mathcal{O}\left(\binom{p}{m}\right)$	

Solutions classiques ? Sous-échantillonner les points du contour :

- TH 1-to-many : TH probabilistes (PHT).
- TH many-to-one : TH aléatoires (RHT).

# Plan de la présentation

- 1 Introduction
  - Travaux et Outils existant
- 2 Géométrie Différentielle Multiéchelles
  - Mesures Différentielles
  - Dérivées multiéchelles
- 3 Reconnaissance de Formes Analytiques
  - Ordre 1 : Droites
  - Ordre 2 : Cercles
- 4 Reconnaissance d'objets
  - Modèles Implicites de Formes
  - Transformée de Hough Dense Généralisée
- 5 Conclusion

# Le modèle différentiel

- En traitement d'images et vision par ordinateur, beaucoup d'algorithmes sont fondés sur des caractéristiques locales utilisant des dérivées partielles : Contraste, Contours, Segmentation...
- Dans le modèle différentiel, une image est assimilée à une fonction continue et différentiable.
- Le comportement local de l'image au voisinage d'un point peut être prédit grâce aux dérivées partielles (Formule de Taylor).

## Notations

$$I_x = \frac{\partial I}{\partial x}, I_y = \frac{\partial I}{\partial y}, I_{xx} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}, I_{xy} = \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y}, \text{ etc.}$$

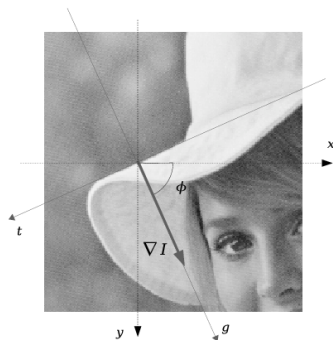


# Ordre 1 : Gradient et Isophote

A l'ordre 1, la grandeur fondamentale est le vecteur gradient :

$$\nabla I = (I_x, I_y)^T$$

- Son argument  $\Phi = \arg \nabla I$  correspond à la direction de plus forte pente.
- Son module  $\|\nabla I\|$  est une mesure de contraste.

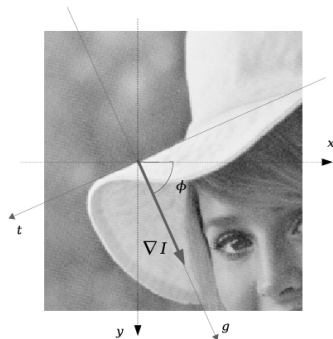


# Ordre 1 : Gradient et Isophote

Soit  $\mathbf{v}$  un vecteur unitaire. La valeur de la dérivée première selon  $\mathbf{v}$  est donnée par :

$$I_v = \mathbf{v}^T \cdot \nabla I$$

En particulier, la dérivée dans la direction orthogonale au gradient est nulle (direction de l'isophote  $\mathbf{t}$ ).

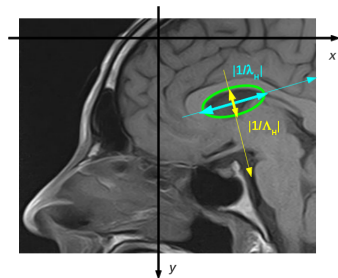


## Ordre 2: Hessienne et Courbure

A l'ordre 2, la grandeur fondamentale est la matrice hessienne :

$$H_I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{pmatrix}$$

- Ses vecteurs propres (resp. valeurs propres  $\Lambda_H$  and  $\lambda_H$ ) correspondent aux directions (resp. intensités) principales de courbures.
- Sa norme de Frobenius  $\|H_I\|_F = \sqrt{\Lambda_H^2 + \lambda_H^2}$  est une mesure de l'intensité de la courbure globale.



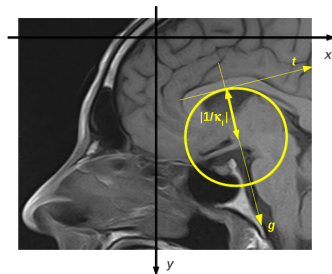
## Ordre 2: Hessienne et Courbure

Soit  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux vecteurs unitaires.  
La valeur de la dérivée seconde selon  
 $\mathbf{u}$  puis  $\mathbf{v}$  est donnée par :

$$I_{uv} = \mathbf{u}^T H_I \mathbf{v}$$

En particulier, la dérivée seconde  
dans la direction de l'isophote  $\mathbf{t}$   
fournit la courbure de l'isophote, i.e.  
l'inverse du rayon du cercle osculateur  
au contour, par la formule :

$$\kappa_I = - \frac{I_{tt}}{\|\nabla I\|} = - \frac{I_{xx} I_y^2 - 2 I_{xy} I_x I_y + I_{yy} I_x^2}{\|\nabla I\|^3}$$



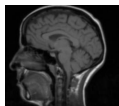
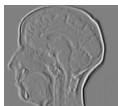
# Dérivées multiéchelles

Selon la théorie des espaces d'échelles, une dérivée dans une image discrète n'a de sens qu'à un paramètre d'échelle près. La dérivée est estimée à l'échelle  $\sigma$  par une convolution avec la dérivée correspondante de la fonction gaussienne :

$$I_{x^i y^j}^\sigma = I \star \frac{\partial^{i+j} G_\sigma}{\partial x^i \partial y^j}$$

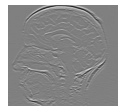
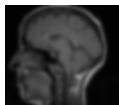
- $G_\sigma$  est la fonction gaussienne 2d de variance  $\sigma^2$ .
- $\sigma$  est l'échelle d'estimation.
- $i + j$  est l'ordre de dérivation.

# Dérivées gaussiennes multiéchelles


 $I^{1,0}$ 

 $I_x^{1,0}$ 

 $I_y^{1,0}$ 

 $I_{xx}^{1,0}$ 

 $I_{xy}^{1,0}$ 

 $I_{yy}^{1,0}$ 

 $I^{4,0}$ 

 $I_x^{4,0}$ 

 $I_y^{4,0}$ 

 $I_{xx}^{4,0}$ 

 $I_{xy}^{4,0}$ 

 $I_{yy}^{4,0}$ 

 $I^{10,0}$ 

 $I_x^{10,0}$ 

 $I_y^{10,0}$ 

 $I_{xx}^{10,0}$ 

 $I_{xy}^{10,0}$ 

 $I_{yy}^{10,0}$

# Plan de la présentation

- 1 Introduction
  - Travaux et Outils existant
- 2 Géométrie Différentielle Multiéchelles
  - Mesures Différentielles
  - Dérivées multiéchelles
- 3 Reconnaissance de Formes Analytiques
  - Ordre 1 : Droites
  - Ordre 2 : Cercles
- 4 Reconnaissance d'objets
  - Modèles Implicites de Formes
  - Transformée de Hough Dense Généralisée
- 5 Conclusion

# Dérivées partielles et Transformées de Hough 1-to-1

## Approches Classiques

- éparées : Seuls quelques points (contours, points d'intérêt) votent.
- 1-to-many : Chaque point de l'espace image vote uniformément sur une surface de dimension  $n$  dans l'espace des paramètres.
- many-to-1 : Chaque  $n$ -uplet de points de l'espace image vote pour un unique point de l'espace des paramètres.



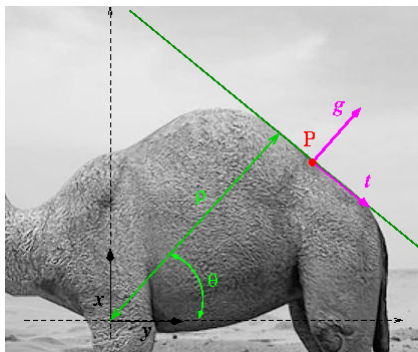
# Dérivées partielles et Transformées de Hough 1-to-1

## Transformées de Hough fondées sur les dérivées partielles

- denses : Tous les points votent...
- censitaires : ...mais leurs votes n'ont pas le même poids !
- 1-to-1 : Chaque point de l'espace image vote pour un unique point de l'espace des paramètres.

# Transformée 1-to-1 : ordre 1

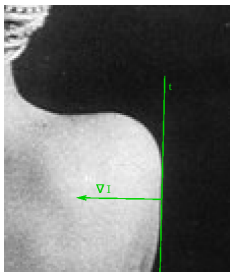
A l'ordre 1, le gradient  $g = \nabla I$  définit la direction de l'isophote  $t$ , et donc la direction de la droite candidate.



- $\theta(P) = \arg \nabla I(P)$
- $\rho(P) = \frac{|P \cdot \nabla I|}{\|\nabla I\|}$

# Transformée 1-to-1 : ordre 1

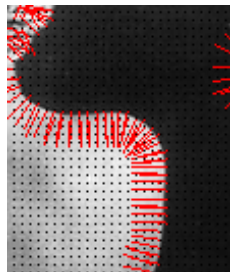
Le poids du vote doit être proportionnel à la fiabilité des mesures locales, qui à l'ordre 1 dépend de la norme du gradient.



Gradient et droite

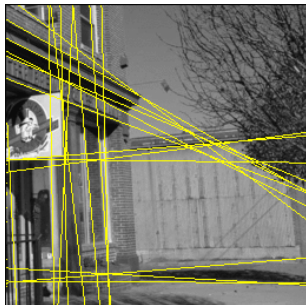


Poids du vote

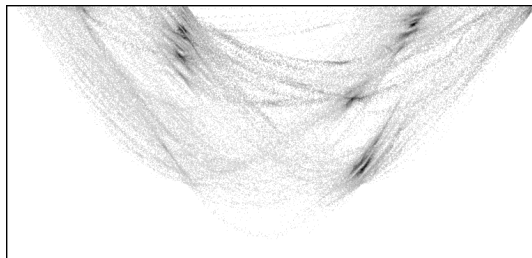


Principaux votes

# Transformée 1-to-1 : ordre 1



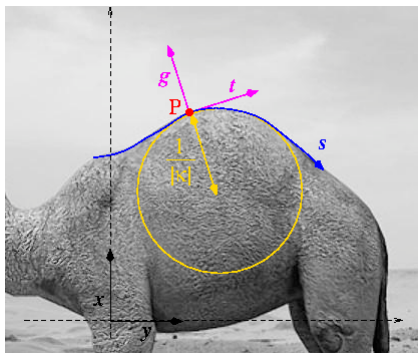
20 meilleures droites



transformée 1-to-1 ( $\rho, \theta$ )

# Transformée 1-to-1 : ordre 2

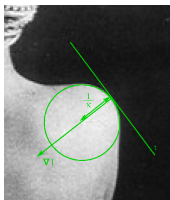
A l'ordre 2 :  $\arg g$ , la direction du gradient et  $\kappa$ , la courbure de l'isophote définissent le rayon et le centre du cercle osculateur à la courbe isophote, et donc l'équation du cercle candidat.



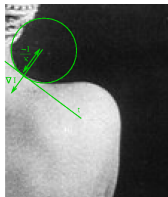
- $r(P) = \frac{1}{|\kappa(P)|}$
- $C(P) = P - \frac{\nabla I}{\kappa \|\nabla I\|}$

# Transformée 1-to-1 : ordre 2

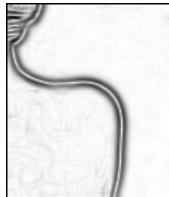
Le poids du vote, qui quantifie la fiabilité des mesures locales, est à l'ordre 2 la norme de Frobenius de la matrice hessienne.



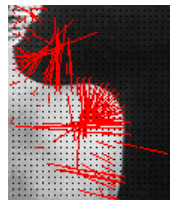
Courbure positive



Courbure négative



Poids du vote

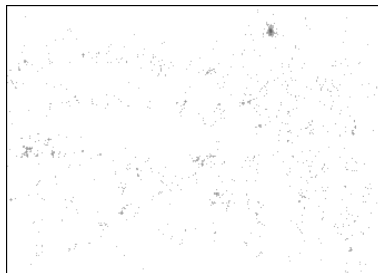


Principaux votes

# Transformée 1-to-1 : ordre 2



10 meilleurs cercles



Transformée 1-to-1 ( $\rho, x, y$ ) (plan  $\rho = 19$ )

# Bilan de complexité global

- $n$  : nombre d'échantillons / dimension (image).
- $p$  : nombre de pixels du contour binaire.
- $m$  : dimension de l'espace des paramètres.
- $k$  : nombre d'échantillons / dimension (paramètres).
- $s$  : nombre d'échelles utilisées dans la THD.

Type Algo	Préliminaires	Transformée	Sélec. Maxima
TH 1-to-many	Détection de contours	vote 1-to-many $\mathcal{O}(pk^{m-1})$	$\mathcal{O}(k^m)$
TH many-to-1	$\mathcal{O}(n^2) + \mathcal{O}(p)$	vote many-to-1 $\mathcal{O}(\binom{p}{m})$	
THD 1-to-1	Calcul des dérivées + vote 1-to-1 $\mathcal{O}(sn^2)$		



# Plan de la présentation

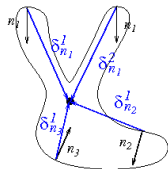
- 1 Introduction
  - Travaux et Outils existant
- 2 Géométrie Différentielle Multiéchelles
  - Mesures Différentielles
  - Dérivées multiéchelles
- 3 Reconnaissance de Formes Analytiques
  - Ordre 1 : Droites
  - Ordre 2 : Cercles
- 4 Reconnaissance d'objets
  - Modèles Implicites de Formes
  - Transformée de Hough Dense Généralisée
- 5 Conclusion

# Représentation d'un objet par une R-Table

Les transformées de Hough généralisées classiques sont *éparses* : elles sont calculées à partir d'un nombre réduit de points caractéristiques :

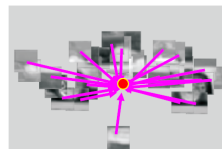
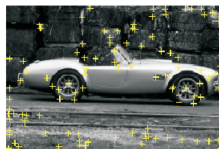
contours [Ballard 81], ou points d'intérêt [Leibe 04].

$$\text{R-Table} : \{i, \{\vec{\delta}_i^j\}_j\}_i$$



Contour

$$\begin{aligned} n_1 : & \{ \delta_{n_1}^1, \delta_{n_1}^2, \dots \}, \\ n_2 : & \{ \delta_{n_2}^1, \dots \}, \\ n_3 : & \{ \delta_{n_3}^1, \dots \}, \\ & \dots \} \end{aligned}$$



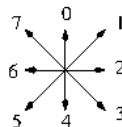
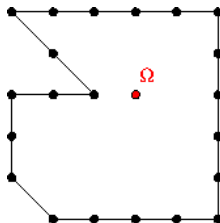
Points d'intérêt

# Construction de la R-Table

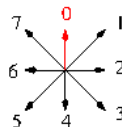
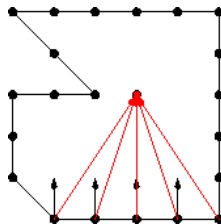
La R-table est un modèle de forme, construit à partir d'un prototype. Soit  $\Omega$  le centre (arbitraire) du prototype. Chaque point  $M$  du prototype est indexé par une caractéristique géométrique  $i$ , correspondant aux indices de ligne de la R-table.

La R-table est construite en ajoutant le vecteur déplacement  $\overrightarrow{M\Omega}$  dans la ligne index  $i$ .

Par exemple considérons les points du contour suivant comme prototype, indexé par la direction de la normale au contour, quantifiée sur 8 valeurs :

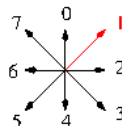
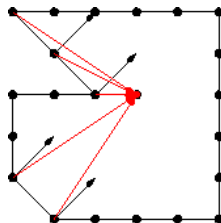


# Construction de la R-Table



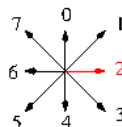
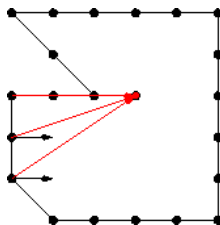
Index	Liste de vecteurs					
0	$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	end

# Construction de la R-Table



Index	Liste de vecteurs					
0	$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	end
1	$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	end

# Construction de la R-Table

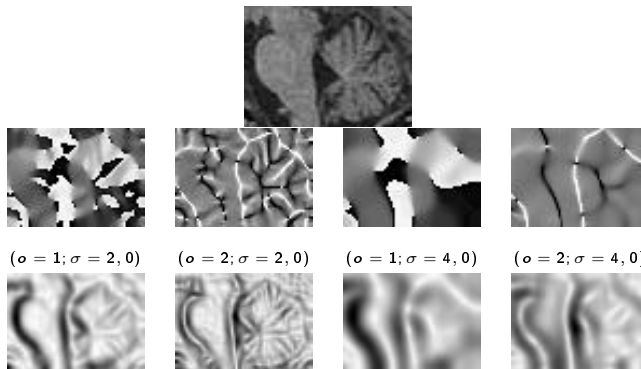


Index	Liste de vecteurs					
0	$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	end
1	$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	end
2	$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	end		

et ainsi de suite...

# R-Tables denses indexées par les dérivées

Dans l'approche *dense*, les indices  $i$  de la R-table sont les valeurs quantifiées des dérivées multiéchelles, qui sont disponibles partout.



R-Table pondérées :  $\{i, \{\vec{\delta}_i^j, \omega_i^j\}_j\}_i$

# Transformée de Hough Généralisée : Détection d'Objet

**Initial:**  $H(\mathbf{x}) = 0$  partout.

**Pour tout** point  $\mathbf{x}$  de l'image,  
soit  $\lambda(\mathbf{x})$  la dérivée quantifiée.

**Pour toute** occurrence  $j$   
de la R-Table associée à  
 $\lambda(\mathbf{x})$ , faire :

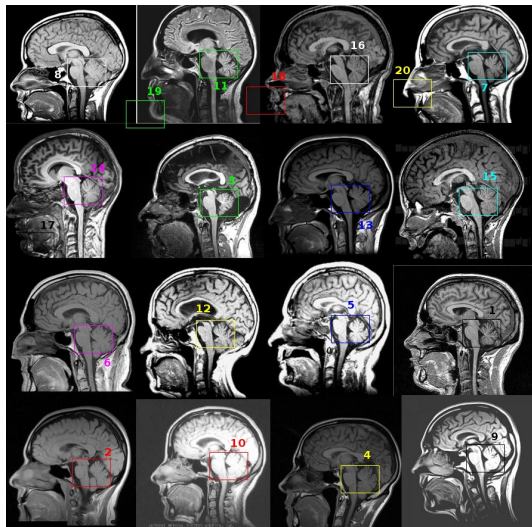
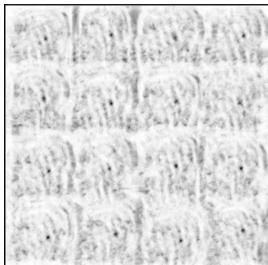
$$H(\mathbf{x} + \delta_{\lambda(\mathbf{x})}^j) += \omega_{\lambda(\mathbf{x})}^j$$

Les meilleurs objets candidats sont  
localisés sur les maxima de  $H$ .

Transparent suivant : Transformée de  
Hough (à gauche, réduite de 50%),  
et mosaïque d'images sagittales MRI  
avec les 20 meilleurs candidats  
«cervelet» (à droite).



# Transformée de Hough Généralisée : Détection d'Objet



# Plan de la présentation

- 1 Introduction
  - Travaux et Outils existant
- 2 Géométrie Différentielle Multiéchelles
  - Mesures Différentielles
  - Dérivées multiéchelles
- 3 Reconnaissance de Formes Analytiques
  - Ordre 1 : Droites
  - Ordre 2 : Cercles
- 4 Reconnaissance d'objets
  - Modèles Implicites de Formes
  - Transformée de Hough Dense Généralisée
- 5 Conclusion

# Conclusions : Avantages des TH denses

- **Combinaison** des approches cumulatives de Hough et des dérivées multiéchelles.
- **Rapidité** du calcul (plus de segmentation, contours, ou points d'intérêt).
- **Fiabilité** du vote : plus de points votants, localisation plus précises des votes.

# Bibliographie (Pour en savoir plus)



## [Manzanera 11] A. MANZANERA

Local Jet Feature Space Framework for Image Processing and Representation

Int. Conf. on Signal Image Technology and Internet Based Systems  
261-268 (2011)



## [Manzanera 15] A.MANZANERA, T.P. NGUYEN, and X. XU.

Evaluation of the one-to-one dense Hough transforms for line and circle detection.

Article soumis, à paraître.

# Bibliographie (Espaces d'Echelles)



**[Lindeberg 98]** T. LINDBERG

Feature detection with automatic scale selection

International Journal of Computer Vision 30(2), 77-116. (1998)



**[Koenderink 87]** J.J. KOENDERINK and A.J. VAN DOORN

Representation of Local Geometry in the Visual System

Biological Cybernetics 55, 367-375. (1987)



**[Frangi 98]** R.F. FRANGI, W.J. NIESSEN, K.L. VINCKEN and  
M.A. VIERGEVER

Multiscale vessel enhancement filtering

MICCAI'98, LNCS vol. 1496, 130-137. (1998)

# Bibliographie (Transformées de Hough 1)



## [Hough 59] P. HOUGH

Machine analysis of bubble chamber pictures.

In: Int. Conf. High Energy Accelerators and Instrumentation. (1959)



## [Ballard 81] D.H. BALLARD

Generalizing the Hough transform to detect arbitrary shapes.

Pattern Recognition **13** (1981) 111–122

# Bibliographie (Transformées de Hough 2)



**[O'Gorman 76]** F. O'GORMAN AND B. CLOWES

Finding picture edges through collinearity of feature points  
IEEE Trans. on Computers C-25 449-456 (1976)



**[Leibe 04]** B. LEIBE, A. LEONARDIS and B. SCHIELE

Combined object categorization and segmentation with an implicit shape model  
ECCV Workshop on Statistical Learning in Computer Vision (2004)



**[Valenti 08]** R. VALENTI and T. GEVERS

Accurate eye center location and tracking using isophote curvature  
Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (2008)