シミュレーション実習中間レポート

[redacted]

2022 年 5 月 13 日

1　第 1 問（Buffon の針）

(1) 棒の下半分が直線と交わる場合を考えるとき，棒の下端から棒の中点までの y 軸方向の距離は $l/2\cos\theta$ となる．図 1 より，針が直線と交わるためには関係式

$$y_s \leq \frac{l}{2}\cos\theta \tag{1}$$

が満たされる必要がある．今，y_s と θ はそれぞれ $[0, d/2]$，$[0, \pi/2]$ の範囲を分布する一様乱数だとみなしており，これが示す領域は $y_s-\theta$ 平面では長方形になる．この長方形の面積に対する，条件 (1) が示す領域の面積の割合が，求める確率である．従って，求める確率は

$$p = \int_0^{\pi/2} \frac{l}{2}\cos\theta \Bigg/ \frac{\pi d}{4} = \frac{2l}{\pi d} \tag{2}$$

(2) 直線の間隔を $d=2$，棒の長さを $l=1$ としたとき，棒が直線と交わる確率と円周率の関係は $\pi = 1/p$ となるので，この関係式を用いて円周率を数値的に求めることができる．確率 p の計算では，y_s が $[0,1]$，θ が $[0,\pi/2]$ の範囲を分布する一様乱数とみなした．計算は python を用いて行った．その結果が図 2 左である．

(3) さらに，理論値 π との誤差 $\delta(n) = |\pi(n) - \pi|$ をプロットしたのが図 2 右である．

2　第 2 問（溶媒中におけるばねで繋がれた物体の運動）

(1) 与えられた運動方程式を書き換えると，

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad \text{where} \quad \gamma = \frac{\zeta}{2m},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3}$$

となる．特性方程式 $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$ を解くと，$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \lambda_\pm$ を得るので，一般解は

$$x(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} \tag{4}$$

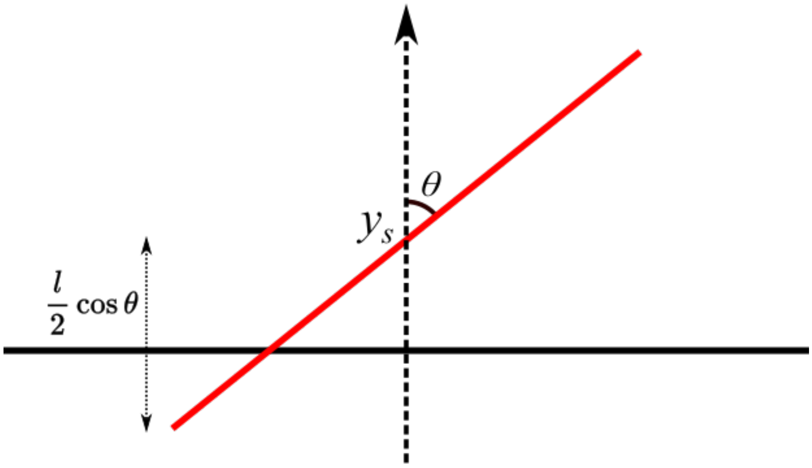

図 1: 設定図

となる．

$\gamma < \omega_0$ のときは，$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \equiv i\omega_1$ と書き換えることにより，

$$x(t) = e^{-\gamma t}(Ae^{i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_1 t}) = Ce^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \delta) \tag{5}$$

と一般解を書き換えることができる．この解は，減衰する部分と振動する部分の積で表されており，**減衰振動**である．

$\gamma = \omega_0$ のときは，$\lambda = -\gamma$ と重解になるので，定数変化法を用いて他の解を求めればよい．よって

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t} \tag{6}$$

となり，振動する項は含まれていないことが分かる．この場合を**臨界減衰**と呼ぶ．

$\gamma > \omega_0$ のときは，

$$x(t) = Ae^{\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t} + Be^{\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t} \tag{7}$$

となり，同様に振動しない．この場合を**過減衰**と呼ぶ．

以上をパラメータ (m, ζ, k) を用いてまとめると

$$\begin{cases} \zeta^2 < 4mk & \text{減衰振動} \\ \zeta^2 = 4mk & \text{臨界減衰} \\ \zeta^2 > 4mk & \text{過減衰} \end{cases} \tag{8}$$

(2) 物体の運動方程式 $m\ddot{x}(t) = -\zeta\dot{x}(t) - kx(t)$ を離散化すると

$$v(t + \mathit{\Delta} t) = v(t) - \frac{\zeta}{m}\mathit{\Delta} t v(t) - \frac{k}{m}\mathit{\Delta} t x(t) \tag{9}$$

となる．さらに無次元化すると

$$\tilde{v}(\tilde{t} + \mathit{\Delta}\tilde{t}) = \left(1 - \frac{\zeta t_0}{m}\mathit{\Delta}\tilde{t}\right)\tilde{v}(\tilde{t}) - \frac{kt_0^2}{m}\mathit{\Delta}\tilde{t}\tilde{x}(\tilde{t}) \tag{10}$$

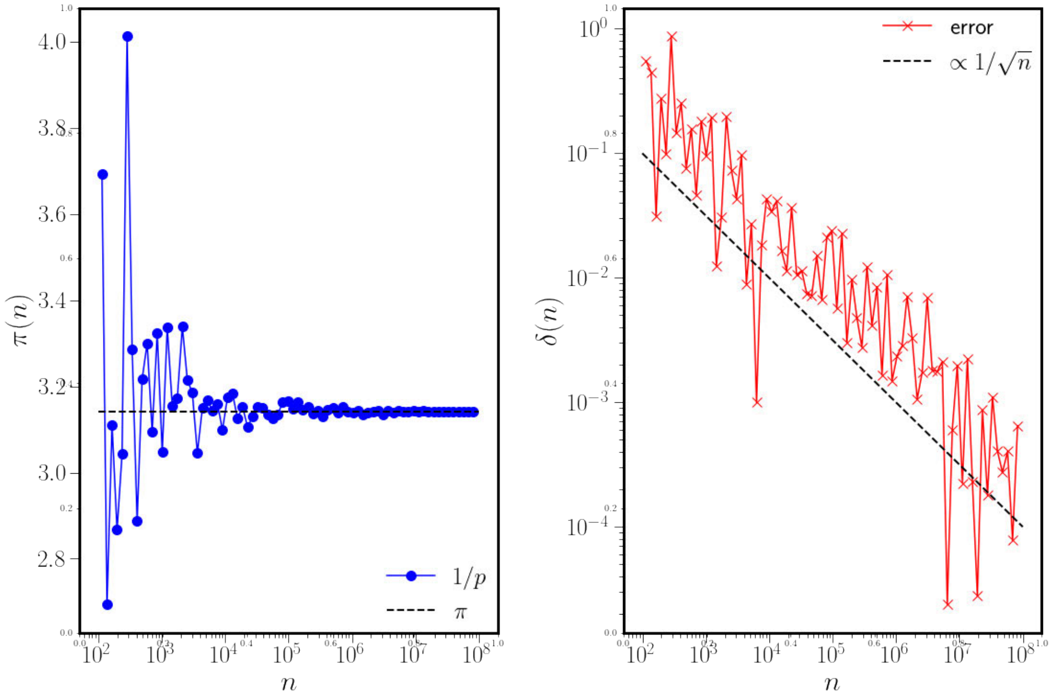

図 2: 棒をばら撒く回数 n と，円周率 $\pi(n)$ との関係（左），理論値との誤差 $\delta(n)$ との関係（右）．右図を見ると，誤差は $1/\sqrt{n}$ に比例して減少していくことが分かる．

となり，速度に関する漸化式が得られる．次に，位置に関しても離散化して

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}(\tilde{t}+\mathit{\Delta}\tilde{t}) &= \tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{v}(\tilde{t}+\mathit{\Delta}\tilde{t})\mathit{\Delta}\tilde{t} \\
&= \left(1-\frac{\zeta t_0}{m}\mathit{\Delta}\tilde{t}\right)\mathit{\Delta}\tilde{t}\tilde{v}(\tilde{t}) + \left(1-\frac{kt_0^2}{m}\mathit{\Delta}\tilde{t}^2\right)\tilde{x}(\tilde{t})
\end{aligned}
\tag{11}
$$

となる．式 (10)，(11) が $\tilde{v}$, $\tilde{x}$ に関する 2 項間漸化式である．

(3) 漸化式 (10)，(11) に t_d, t_s の値を代入すればよく，行列の形でまとめれば

$$
\begin{pmatrix} \tilde{v}(\tilde{t}+\mathit{\Delta}\tilde{t}) \\ \tilde{x}(\tilde{t}+\mathit{\Delta}\tilde{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{t_0}{t_d}\mathit{\Delta}\tilde{t} & -\frac{t_0^2}{t_s^2}\mathit{\Delta}\tilde{t} \\ \left(1-\frac{t_0}{t_d}\mathit{\Delta}\tilde{t}\right)\mathit{\Delta}\tilde{t} & 1-\frac{t_0^2}{t_s^2}\mathit{\Delta}\tilde{t}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}(\tilde{t}) \\ \tilde{x}(\tilde{t}) \end{pmatrix}
\tag{12}
$$

となる．

(4) $t_0 = t_s$ のとき，制御パラメータは

$$
T \equiv \frac{t_0}{t_d} = \frac{\sqrt{m/k}}{m/\zeta} = \sqrt{\frac{\zeta^2}{mk}}
\tag{13}
$$

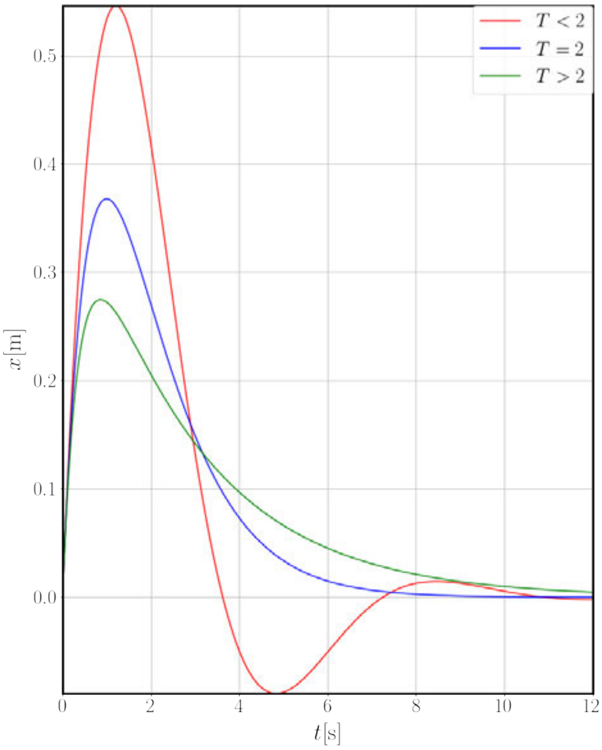

図 3: 物体の運動の様子．赤色の $T < 2$ のグラフが**減衰振動**，青色の $T = 2$ のグラフが**臨界減衰**，緑色の $T > 2$ のグラフが**過減衰**である．数値計算において，パラメータ T の値は順に，1，2，3 とし，初速度は $\dot{x}(0) = 1$ とした．

と書ける．さらに，式 (12) は

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) \\ \tilde{x}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - T\Delta\tilde{t} & -\Delta\tilde{t} \\ (1 - T\Delta\tilde{t})\Delta\tilde{t} & 1 - \Delta\tilde{t}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}(\tilde{t}) \\ \tilde{x}(\tilde{t}) \end{pmatrix} \tag{14}$$

となる．パラメータ T の値によって運動が特徴付けられ，問題 (1) において見積もった条件から

$$\begin{cases} T < 2 & \text{減衰振動} \\ T = 2 & \text{臨界減衰} \\ T > 2 & \text{過減衰} \end{cases} \tag{15}$$

が分かる．漸化式 (14) を数値的に解いて，$x(t)$ をグラフにプロットしたのが図 3 である．計算は python を用いて行った