シミュレーション実習中間レポート

262201117　大橋陸人

第 1 問

(1)$l < d$より、棒が直線と交わる条件は

$$0 < y_s < \frac{l}{2}\cos\theta$$

であり、y_sは$[0, d/2]$、θは$[0, \pi/2]$の範囲を一様に分布することから、

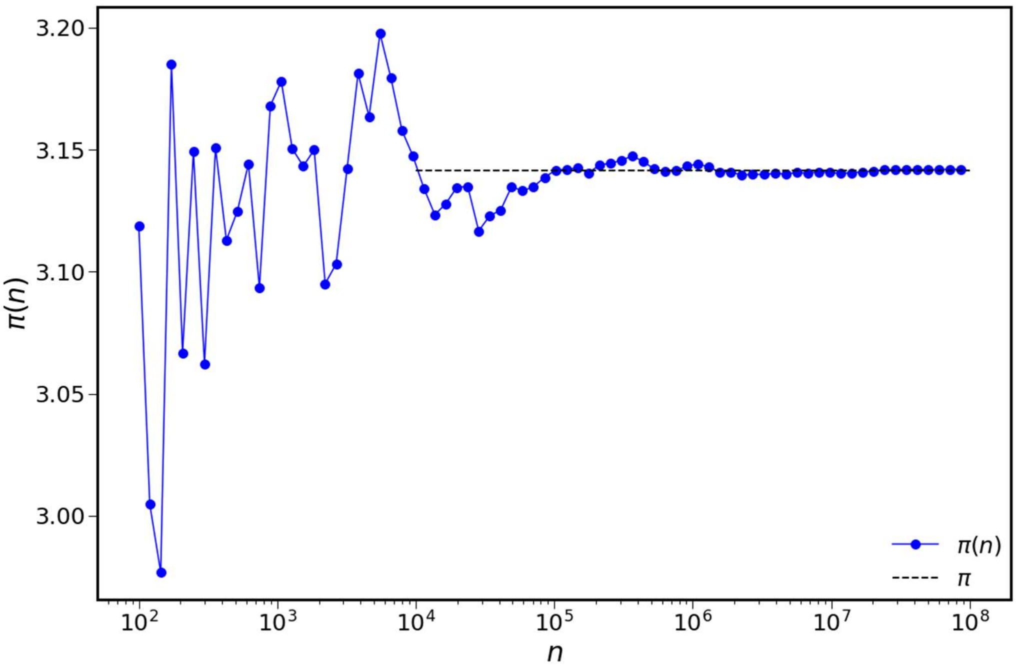
$$p = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{l}{2}\cos\theta}{\frac{d}{2}\times\frac{\pi}{2}} = \frac{2l}{\pi d}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\cos\theta = \frac{2l}{\pi d}$$

と求まる。

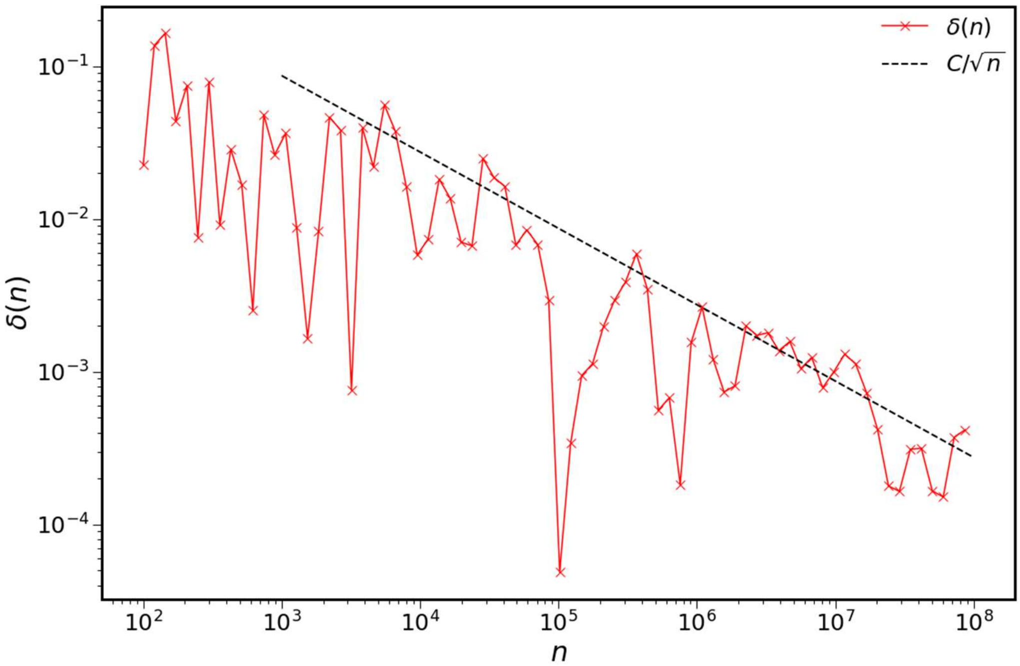
(2)(1)から、円周率は

$$\pi(n) = \frac{2l}{dp}$$

と計算できる。これを数値計算し、プロットしたのが下のグラフである。ただし、$l = 1, d = 1.125$として計算を行った。



(3)誤差$\delta(n) = |\pi(n) - \pi|$をプロットしたのが下のグラフである。ただし、$C = 2.75$とした。



確かに誤差は$1/\sqrt{n}$に比例していることが分かる。

第 2 問

(1)解を$x = e^{i\omega t}$と置いて、(1)式に代入すると、

$$-m\omega^2 = -i\zeta\omega - k$$

$$\omega = \frac{i\zeta \pm \sqrt{-\zeta^2 + 4mk}}{2m}$$

となる。よって、$4mk - \zeta^2 > 0$のとき減衰振動、$4mk - \zeta^2 < 0$のとき過減衰となり、$4mk - \zeta^2 = 0$のとき臨界減衰となる。

(2)$x = a\tilde{x},\ t = t_0\tilde{t},\ \dot{x} = (a/t_0)\tilde{v}$を(1)に代入して、

$$m\frac{a}{t_0^2}\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = -\zeta\frac{a}{t_0}\tilde{v} - ka\tilde{x}$$

$$\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = -\frac{\zeta}{m}t_0\tilde{v} - kt_0^2\tilde{x}$$

よって、

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = -\dfrac{\zeta}{m}t_0\tilde{v} - \dfrac{k}{m}t_0^2\tilde{x} \\ \dfrac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \tilde{v} \end{cases}$$

となる。半陰的 Euler 法で離散化すると、

$$\begin{cases} \tilde{v}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \left(1-\dfrac{\zeta}{m}t_0\Delta\tilde{t}\right)\tilde{v}(\tilde{t}) - \dfrac{k}{m}t_0^2\tilde{x}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \\ \tilde{x}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{v}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t})\Delta\tilde{t} \end{cases}$$

となる。

(3)$t_d = m/\zeta, t_s = \sqrt{m/k}$を(2)で得られた$\tilde{v}(\tilde{t})$に関する漸化式に用いると、

$$\begin{cases} \tilde{v}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \left(1-\dfrac{t_0}{t_d}\Delta\tilde{t}\right)\tilde{v}(\tilde{t}) - \dfrac{t_0^2}{t_s^2}\tilde{x}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \\ \tilde{x}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{v}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t})\Delta\tilde{t} \end{cases}$$

となる。

(4)$\zeta = m/t_d,\ k = m/t_0^2$から、

$$4mk - \zeta^2 = \frac{4m^2}{t_0^2} - \frac{m^2}{t_d^2} = \frac{m^2}{t_0^2}\left(4 - \frac{t_0^2}{t_d^2}\right)$$

よって、$0 < t_0/t_d < 2$のとき減衰振動、$t_0/t_d > 2$のとき過減衰、$t_0/t_d = 2$のとき臨界減衰となる。
初期条件は$\tilde{x}(0) = 0, \tilde{v}(0) = 1$である。
$\Delta\tilde{t} = 0.0001,\ t_0/t_s = 1,\ t_0/t_d = 1,2,4$として$0 < \tilde{t} < 20$の範囲で(3)を数値計算したのが以下のグラフである。