

シミュレーション実習中間レポート



第1問

(1) $l < d$ より、棒が直線と交わる条件は

$$0 < y_s < \frac{l}{2} \cos \theta$$

であり、 y_s は $[0, d/2]$ 、 θ は $[0, \pi/2]$ の範囲を一様に分布することから、

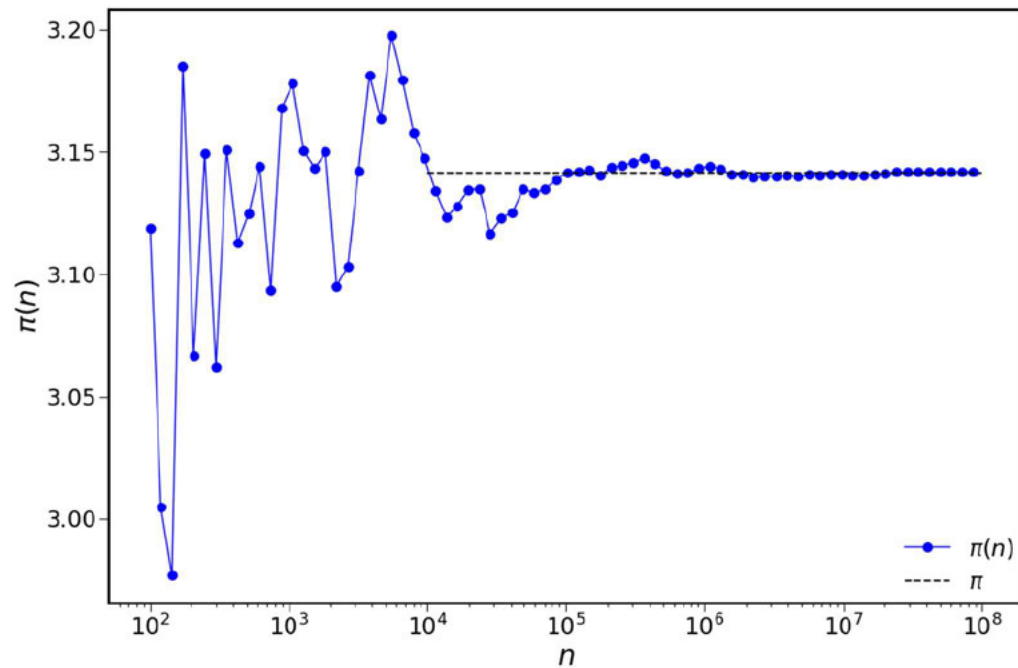
$$p = \frac{\int_0^{\pi/2} d\theta \frac{l}{2} \cos \theta}{\frac{d}{2} \times \frac{\pi}{2}} = \frac{2l}{\pi d} \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta = \frac{2l}{\pi d}$$

と求まる。

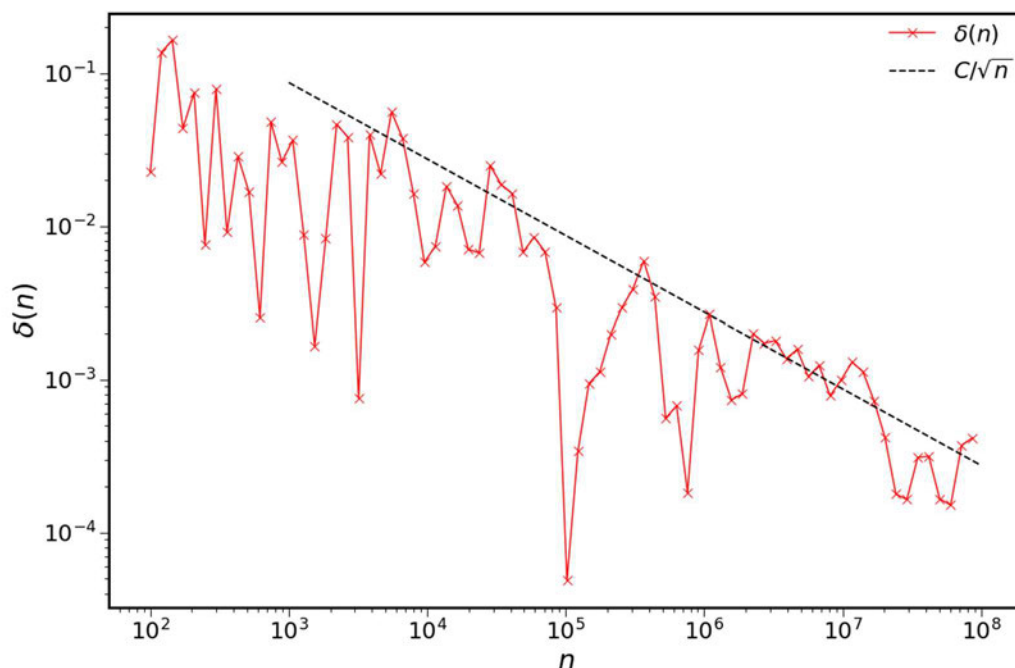
(2) (1) から、円周率は

$$\pi(n) = \frac{2l}{dp}$$

と計算できる。これを数値計算し、プロットしたのが下のグラフである。ただし、 $l = 1, d = 1.125$ として計算を行った。



(3)誤差 $\delta(n) = |\pi(n) - \pi|$ をプロットしたのが下のグラフである。ただし、 $C = 2.75$ とした。



確かに誤差は $1/\sqrt{n}$ に比例していることが分かる。

第2問

(1)解を $x = e^{i\omega t}$ と置いて、(1)式に代入すると、

$$-m\omega^2 = -i\zeta\omega - k$$

$$\omega = \frac{i\zeta \pm \sqrt{-\zeta^2 + 4mk}}{2m}$$

となる。よって、 $4mk - \zeta^2 > 0$ のとき減衰振動、 $4mk - \zeta^2 < 0$ のとき過減衰となり、 $4mk - \zeta^2 = 0$ のとき臨界減衰となる。

(2) $x = a\tilde{x}$, $t = t_0\tilde{t}$, $\dot{x} = (a/t_0)\tilde{v}$ を(1)に代入して、

$$m \frac{a}{t_0^2} \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = -\zeta \frac{a}{t_0} \tilde{v} - ka\tilde{x}$$

$$\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = -\frac{\zeta}{m} t_0 \tilde{v} - kt_0^2 \tilde{x}$$

よって、

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = -\frac{\zeta}{m} t_0 \tilde{v} - \frac{k}{m} t_0^2 \tilde{x} \\ \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \tilde{v} \end{cases}$$

となる。半陰的 Euler 法で離散化すると、

$$\begin{cases} \tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \left(1 - \frac{\zeta}{m} t_0 \Delta\tilde{t}\right) \tilde{v}(\tilde{t}) - \frac{k}{m} t_0^2 \tilde{x}(\tilde{t}) \Delta\tilde{t} \\ \tilde{x}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) \Delta\tilde{t} \end{cases}$$

となる。

(3) $t_d = m/\zeta$, $t_s = \sqrt{m/k}$ を (2) で得られた $\tilde{v}(\tilde{t})$ に関する漸化式に用いると、

$$\begin{cases} \tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \left(1 - \frac{t_0}{t_d} \Delta\tilde{t}\right) \tilde{v}(\tilde{t}) - \frac{t_0^2}{t_s^2} \tilde{x}(\tilde{t}) \Delta\tilde{t} \\ \tilde{x}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) \Delta\tilde{t} \end{cases}$$

となる。

(4) $\zeta = m/t_d$, $k = m/t_0^2$ から、

$$4mk - \zeta^2 = \frac{4m^2}{t_0^2} - \frac{m^2}{t_d^2} = \frac{m^2}{t_0^2} \left(4 - \frac{t_0^2}{t_d^2}\right)$$

よって、 $0 < t_0/t_d < 2$ のとき減衰振動、 $t_0/t_d > 2$ のとき過減衰、 $t_0/t_d = 2$ のとき臨界減衰となる。

初期条件は $\tilde{x}(0) = 0$, $\tilde{v}(0) = 1$ である。

$\Delta\tilde{t} = 0.0001$, $t_0/t_s = 1$, $t_0/t_d = 1, 2, 4$ として $0 < \tilde{t} < 20$ の範囲で (3) を数値計算したのが以下のグラフである。

