

シミュレーション実習中間レポート

1 Buffon の針

- (1) y_s, θ パラメータ平面上で棒が直線に交わる条件（領域）を考えることで、棒が直線に交わる確率 p が $\frac{2l}{\pi d}$ となることを解析的に示せ

以下のような分布関数 $P(y_s, \theta)$ を考える.

$$\int_0^{\frac{d}{2}} dy_s \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta P(y_s, \theta) = 1 \quad (1)$$

y_s, θ はそれぞれ $[0, \frac{d}{2}]$, $[0, \frac{\pi}{2}]$ の範囲で一様分布なので, $P(y_s, \theta) = P = \frac{4}{\pi d}$ となる.

また, 棒が直線と交わる条件は,

$$\frac{l}{2} \cos \theta > y_s \quad (2)$$

であるから, 棒が直線と交わった場合のみを数え上げることでその確率 p を求めることができる.

ここで $H(x)$ は階段関数である.

$$\begin{aligned} p &= \int_0^{\frac{d}{2}} dy_s \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta H\left(\frac{l}{2} \cos \theta - y_s\right) P(y_s, \theta) \\ &= \frac{4}{\pi d} \int_0^{\frac{d}{2}} dy_s \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta H\left(\frac{l}{2} \cos \theta - y_s\right) \\ &= \frac{4}{\pi d} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{l}{2} \cos \theta} dy_s \\ &= \frac{4}{\pi d} \left[\frac{l}{2} \sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2l}{\pi d} \end{aligned} \quad (3)$$

- (2) 実際に数値実験を行い, 棒が直線に交わる確率 p を実測し, (1) の答えと比較することで円周率を見積もることができる. 棒をばら撒く回数 n を $[10^2, 10^8]$ の範囲を系統的に変化させた際, 数値計算により見積もられる円周率が n に対してどのように変化するかプロットせよ.
- (3) 問題 (2) の数値計算の結果と理論値 π の誤差の関係を n に対してプロットし, $C\sqrt{n}$ と比較せよ (C には適当な定数を入れよ)

buffon を c++ によって計算した結果と, 理論値 π との差を図 1 に示す. ここで, 計算には添付の sugino_buffon.cpp を用い, 描画には plot_buffon.py を用いた.

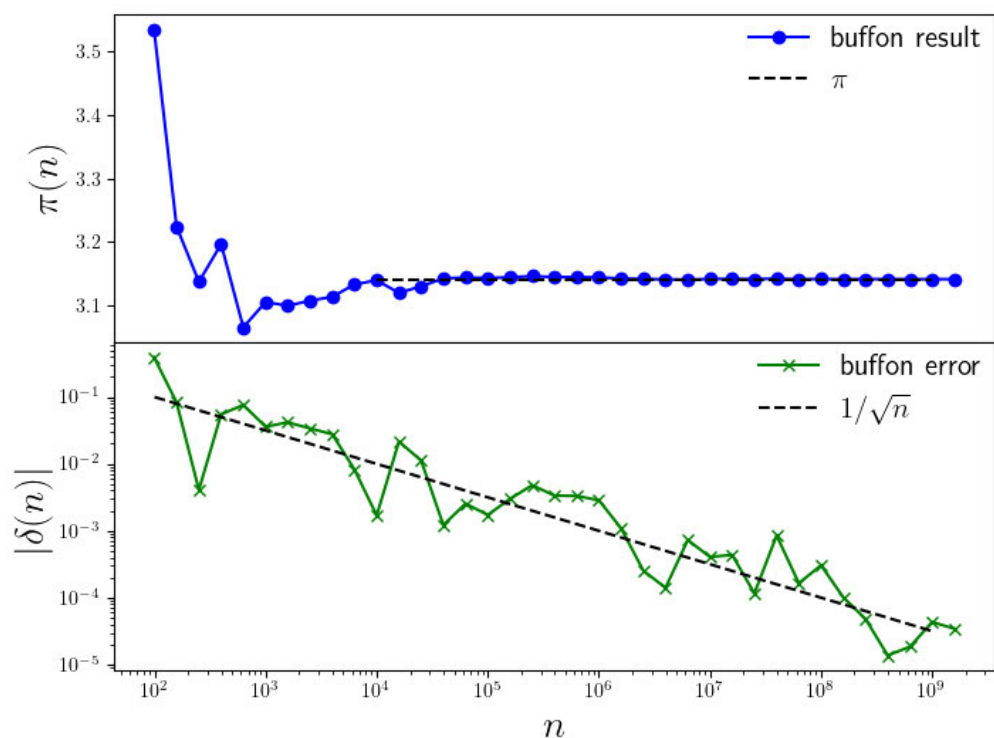


図 1. 試行回数と π との誤差

図 1 より, buffon の針の数値計算結果と理論値との誤差の絶対値 $|\delta(n)|$ は, 試行回数 n に対して $1/\sqrt{n}$ で小さくなることわかる.

2 溶媒中におけるばねで繋がれた物体の運動

$$m\ddot{x}(t) = -\zeta\dot{x}(t) - kx(t) \quad (4)$$

(1) 小球の運動が減衰振動（不足減衰）、過減衰、臨界減衰を示す条件をそれぞれ、 m, ζ, k を用いて解析的に表せ
 $x = \exp(\gamma t)$ として γ を求める。

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + \zeta\dot{x}(t) + kx(t) &= 0 \\ m\gamma^2 + \zeta\gamma + k &= 0 \\ \gamma &= \frac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 4mk}}{2m} \end{aligned} \quad (5)$$

γ が負の実数解を持つとき過減衰であり、複素数解を持つときには減衰振動をするので、条件は

$$\begin{aligned} \text{減衰振動} \quad \zeta^2 &< 4mk \\ \text{過減衰} \quad \zeta^2 &> 4mk \\ \text{臨海振動} \quad \zeta^2 &= 4mk \end{aligned} \quad (6)$$

(2) \tilde{x}, \tilde{t} を長さと時間に関する無次元の変数であるとし、問題に与えた実際の物理量との関係は $x = a\tilde{x}$, $t = t_0\tilde{t}$, $\dot{x} = v = \frac{a}{t_0}\tilde{v}$ であるとする。ここで $a[\text{m}]$, $t_0[\text{s}]$ は適当に定めた長さや時間である。この時、運動方程式 (4) を無次元化し、さらに時間刻み $\Delta\tilde{t}$ に関する半陰的 Euler 法 (Semi-implicit Euler method) で離散化した際に得られる 2 項間漸化式を、 $\tilde{v}(\tilde{t})$, $\tilde{x}(\tilde{t})$ に対してそれぞれ立てよ。

方程式 (4) を無次元化する。

$$\begin{aligned} m \left(\frac{d}{dt_0\tilde{t}} \right)^2 a\tilde{x} &= -\zeta \frac{d}{dt_0\tilde{t}} a\tilde{x} - ka\tilde{x} \\ \frac{ma}{t_0^2} \frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^2} &= -\frac{\zeta a}{t_0} \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} - ka\tilde{x} \\ \dot{\tilde{v}} &= -\frac{\zeta t_0}{m} \tilde{v} - \frac{kt_0^2}{m} \tilde{x} \end{aligned} \quad (7)$$

離散化すると、

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) - \tilde{v}(\tilde{t})}{\Delta\tilde{t}} &= -\frac{\zeta t_0}{m} \tilde{v}(\tilde{t}) - \frac{kt_0^2}{m} \tilde{x}(\tilde{t}) \\ \tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) &= \left(1 - \frac{\zeta t_0 \Delta\tilde{t}}{m} \right) \tilde{v}(\tilde{t}) - \frac{kt_0^2}{m} \tilde{x}(\tilde{t}) \Delta\tilde{t} \end{aligned} \quad (8)$$

また、陰解法で \tilde{x} についての差分方程式を求めると、

$$\tilde{x}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) \Delta\tilde{t} \quad (9)$$

式 (8)(9) が半陰的 Euler 法の 2 項漸化式となる。

- (3) 運動方程式 (4) で与えた物理量を組み合わせていくつかの物理的に意味のある時間スケールを抽出することができる。ここでは、減衰運動の時間スケール $t_d = \frac{m}{\zeta}$, ばねの振動を特徴付ける時間スケール $t_s = \sqrt{\frac{m}{k}}$ が挙げられる。いまこれらを用いて問題 (2) において求めた $\tilde{v}(\tilde{t})$ に関する漸化式から正值パラメータ (m, ζ, k) を消去し t_0, t_d, t_s を用いたものを書き換えよ。

式 (8) から,

$$\begin{aligned}\tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) &= \left(1 - \frac{\zeta t_0 \Delta\tilde{t}}{m}\right) \tilde{v}(\tilde{t}) - \frac{k t_0^2}{m} \tilde{x}(\tilde{t}) \Delta\tilde{t} \\ &= \left(1 - \frac{t_0}{t_d} \Delta\tilde{t}\right) \tilde{v}(\tilde{t}) - \left(\frac{t_0}{t_s}\right)^2 \tilde{x}(\tilde{t}) \Delta\tilde{t}\end{aligned}\tag{10}$$

- (4) いま、時間の単位を $t_0 = t_s$ と定めれば、問題 (3) で求めた漸化式における係数が1つ落ち、 $\frac{t_0}{t_d}$ がここでの運動の特徴を制御する唯一のパラメータ1になることがわかる。そこで、問題 (1) において見積もった条件から、 $\frac{t_0}{t_d}$ に適当な値を入れることで、減衰振動（不足減衰）、過減衰、臨界減衰を、問題 (3) までは議論した漸化式を数値的に解くことで再現し、 $x(t)$ のグラフにプロットせよ。なお、初期条件は $x(0) = 0, \dot{x}(0) = \frac{a}{t_0}$ と与えよ。計算する時間は $t > 0$ で、運動の特徴が見られる範囲で適当に定めてよい。時間刻み $\Delta\tilde{t}$ の大きさについても数値解が収束する範囲で適当に定めてよいことにする。

$t_0 = t_s$ とすると、以下のようなになる。

$$\tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \left(1 - \frac{t_s}{t_d} \Delta\tilde{t}\right) \tilde{v}(\tilde{t}) - \tilde{x}(\tilde{t}) \Delta\tilde{t}\tag{11}$$

また、式 (6) から、臨海振動となる条件は、

$$\begin{aligned}\zeta^2 &= 4mk \\ \frac{m}{k} &= 4\frac{m^2}{\zeta^2} \\ t_s^2 &= 4t_d^2 \\ \frac{t_s}{t_d} &= 2\end{aligned}\tag{12}$$

よって、 $\frac{t_s}{t_d} > 2, \frac{t_s}{t_d} = 2, \frac{t_s}{t_d} < 2$ の条件で計算を行う。計算の結果を以下に示す。ここで、 $v_0 = 1(a = t_0)$, $\Delta\tilde{t} = 1e-3$, 計算した点の数は $3e4$ とした。添付の `sugino_damped_vibration.cpp` により計算を行い、`plot_damped_vibration.py` によって描画を行った。

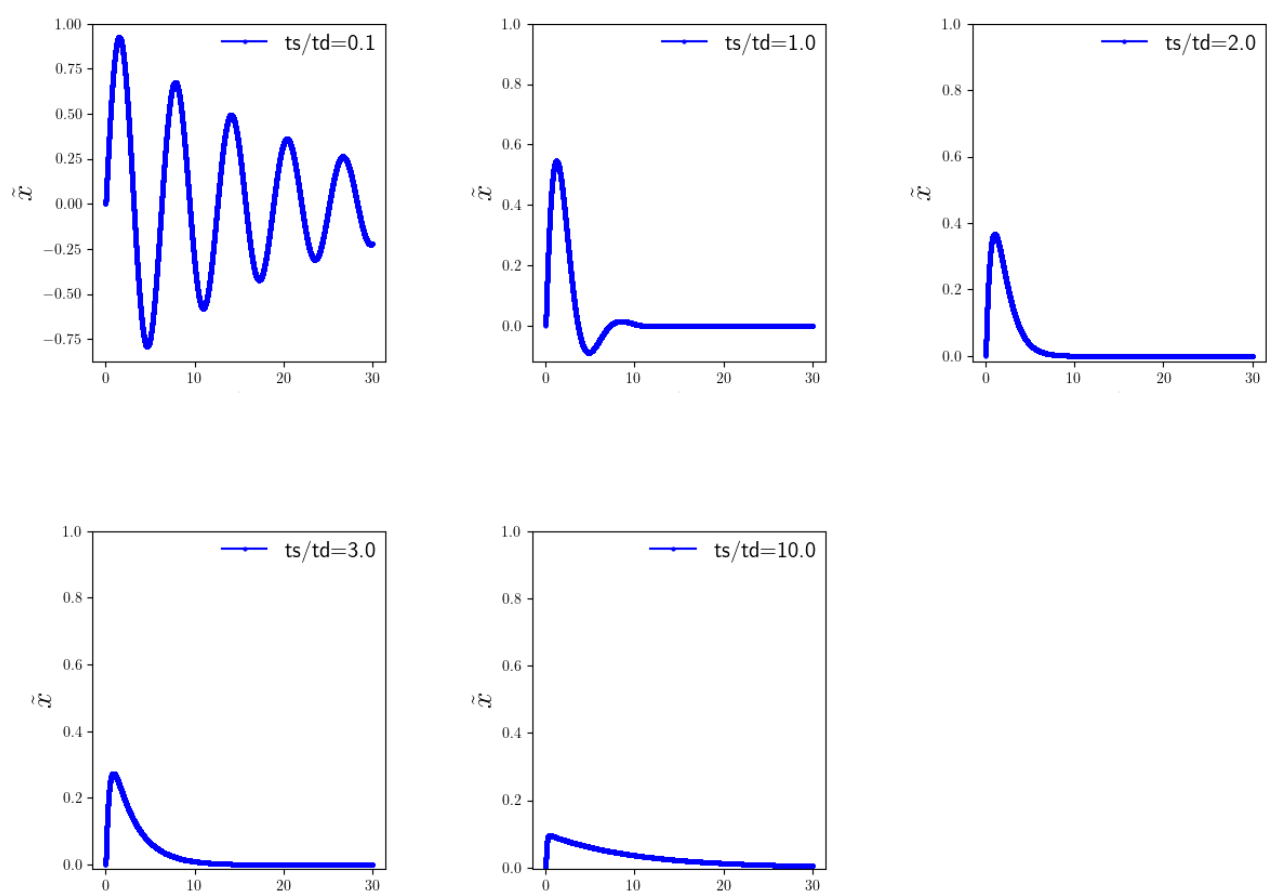


図 2. $\frac{t_s}{t_d}$ と振動の関係

図 2 より, $\frac{t_s}{t_d} = 2$ を境にして減衰振動と過減衰に運動が分かれており, 解析的な結果を数値計算による結果で再現できていることがわかる.