シミュレーション実習中間レポート答案

[redacted]

2022年5月14日

第 1 問（Buffon の針）

設問 (1)

対称性のためにパラメータ y_s, θ は制限された領域

$$A = \left\{ (y_s, \theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y_s \leq \frac{d}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\} \tag{1}$$

の中だけを考えればよい。ある $(y_s, \theta) \in A$ に棒が落ちたときに x 軸と交わっているための条件は

$$\frac{l}{2}\cos\theta - y_s \geq 0 \tag{2}$$

と表せる。y_s, θ は一様乱数とみなしているので、棒が x 軸と交わる確率 p を求めるには、領域 A の中で式 (2) を満たす部分の割合を計算すればよい。階段関数を H とすれば p は

$$\begin{aligned} p &= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{d}{2}} \mathrm{d}y_s H(\frac{l}{2}\cos\theta - y_s)}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{d}{2}} \mathrm{d}y_s} \\ &= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{l}{2}\cos\theta} \mathrm{d}y_s}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{d}{2}} \mathrm{d}y_s} \\ &= \frac{l/2}{\pi d/4} = \frac{2l}{\pi d} \end{aligned} \tag{3}$$

設問 (2)

円周率と理論値からのずれを「1_23.cpp」で計算した。円周率の数値計算結果は図 1 の通り。

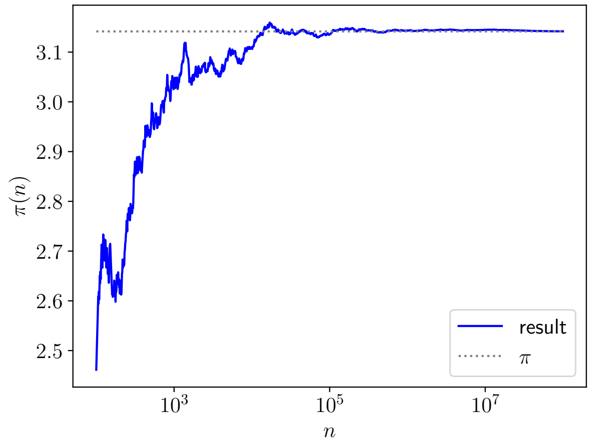

図 1　円周率の数値計算（乱数の生成にはメルセンヌツイスタを用いた）

設問 (3)

数値計算の結果と理論値のずれは図 2 の通り。

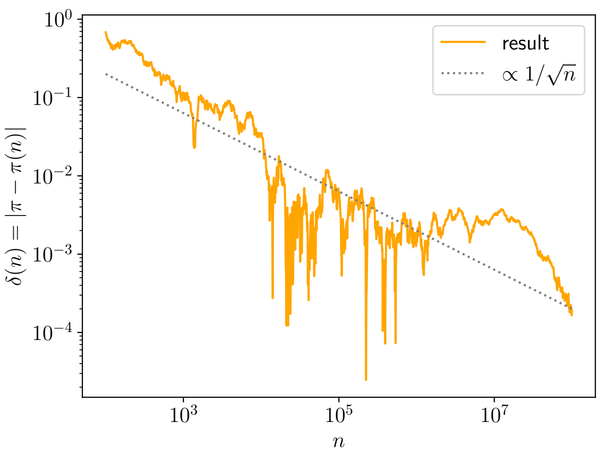

図 2　理論値とのずれ

第 2 問（溶媒中におけるばねで繋がれた物体の運動）

設問 (1)

考えている運動方程式

$$\ddot{x}(t) = -\frac{\zeta}{m}\dot{x}(t - \frac{k}{m}x(t)) \tag{4}$$

について、$x(t) = e^{\lambda t}$ とおくと

$$\lambda^2 = -\frac{\zeta}{m}\lambda - \frac{k}{m} \tag{5}$$

$$\therefore \quad \lambda = -\frac{\zeta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\zeta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \tag{6}$$

このときルート中の符号によって運動が分類される。

1. $\zeta < \sqrt{4mk}$ の場合
   A, B を定数とすると $x(t)$ は

   $$x(t) = A \exp\left(-\frac{\zeta}{2m}t\right) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\zeta^2}{4m^2}}\ t + B\right) \tag{7}$$

   なので、減衰振動となる。
2. $\zeta > \sqrt{4mk}$ の場合
   このときの $x(t)$ は

   $$x(t) = \exp\left(-\frac{\zeta}{2m}t\right)\left[A \exp\left(\sqrt{\frac{\zeta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\ t\right) + B \exp\left(-\sqrt{\frac{\zeta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\ t\right)\right] \tag{8}$$

   となり、過減衰を表す。
3. $\zeta = \sqrt{4mk}$ の場合
   $a(t)$ を任意関数として $x(t) = a(t)e^{-\zeta t/2m}$ を元の式 (4) に代入すると

   $$\ddot{a}(t) = 0 \ \Rightarrow \ a(t) = At + B \tag{9}$$

   を得るので、$x(t)$ は

   $$x(t) = (At + B) \exp\left(-\frac{\zeta}{2m}t\right) \tag{10}$$

   となる。これは 1 と 2 の境目となる臨界減衰である。

設問 (2)

運動方程式 (4) を無次元変数 $\tilde{x}, \tilde{v}$ で書き直すと

$$\dot{\tilde{v}}(t) = -\frac{\zeta t_0}{m}\tilde{v}(t) - \frac{kt_0^2}{m}\tilde{x}(t) \tag{11}$$

また x, v の関係は

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{v}(t) \tag{12}$$

これら半陰 Euler 法で離散化すると

$$\tilde{v}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \left(1 - \frac{\zeta t_0}{m}\Delta\tilde{t}\right)\tilde{v}(\tilde{t}) - \frac{kt_0^2}{m}\tilde{x}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) &= \tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{v}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t})\Delta\tilde{t} \\ &= \left(1 - \frac{kt_0^2}{m}(\Delta\tilde{t})^2\right)\tilde{x}(\tilde{t}) + \left(1 - \frac{\zeta t_0}{m}\Delta\tilde{t}\right)\tilde{v}(\tilde{t})\Delta\tilde{t}\end{aligned} \tag{14}$$

が得られる。

設問 (3)

全問で得た式 (13),(14) を、$t_d = m/\zeta$ と $t_s = \sqrt{m/k}$ を用いて書き直すと

$$\tilde{v}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \left(1 - \frac{t_0}{t_d}\Delta\tilde{t}\right)\tilde{v}(\tilde{t}) - \frac{t_0^2}{t_s^2}\tilde{x}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \tag{15}$$

$$\tilde{x}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \left(1 - \frac{t_0^2}{t_s^2}(\Delta\tilde{t})^2\right)\tilde{x}(\tilde{t}) + \left(1 - \frac{t_0}{t_d}\Delta\tilde{t}\right)\tilde{v}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \tag{16}$$

設問 (4)

$t_0 = t_s$ とすると運動は $r \equiv t_0/t_d$ の値によって次のように分類される。

1. 減衰振動　$0 < r < 1$
2. 臨界減衰　$r = 2$
3. 過減衰　　$r > 2$

漸化式 (15),(16) を「2_4.cpp」で数値計算した。適当な r を選んだ結果は図 3 の通り。

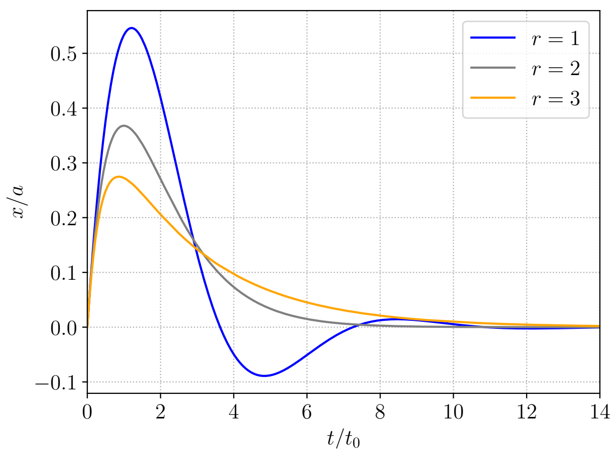

図 3　パラメータ r による運動の変化