

シミュレーション実習中間レポート

262201241 佐藤宏季

2022 年 5 月 13 日

1 第 1 問 (Buffon の針)

- (1) 棒の下半分が直線と交わる場合を考えると、棒の下端から棒の中点までの y 軸方向の距離は $l/2 \cos \theta$ となる。図 1 より、針が直線と交わるためには関係式

$$y_s \leq \frac{l}{2} \cos \theta \quad (1)$$

が満たされる必要がある。今、 y_s と θ はそれぞれ $[0, d/2]$, $[0, \pi/2]$ の範囲を分布する一様乱数だとみなしており、これが示す領域は $y_s - \theta$ 平面では長方形になる。この長方形の面積に対する、条件 (1) が示す領域の面積の割合が、求める確率である。従って、求める確率は

$$p = \int_0^{\pi/2} \frac{l}{2} \cos \theta \frac{1}{\pi d} d\theta = \frac{2l}{\pi d} \quad (2)$$

- (2) 直線の間隔を $d = 2$ 、棒の長さを $l = 1$ としたとき、棒が直線と交わる確率と円周率の関係は $\pi = 1/p$ となるので、この関係式を用いて円周率を数値的に求めることができる。確率 p の計算では、 y_s が $[0, 1]$ 、 θ が $[0, \pi/2]$ の範囲を分布する一様乱数とみなした。計算は python を用いて行った。その結果が図 2 左である。
- (3) さらに、理論値 π との誤差 $\delta(n) = |\pi(n) - \pi|$ をプロットしたのが図 2 右である。

2 第 2 問 (溶媒中におけるばねで繋がれた物体の運動)

- (1) 与えられた運動方程式を書き換えると、

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad \text{where } \gamma = \frac{\zeta}{2m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

となる。特性方程式 $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$ を解くと、 $\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \lambda_{\pm}$ を得るので、一般解は

$$x(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} \quad (4)$$

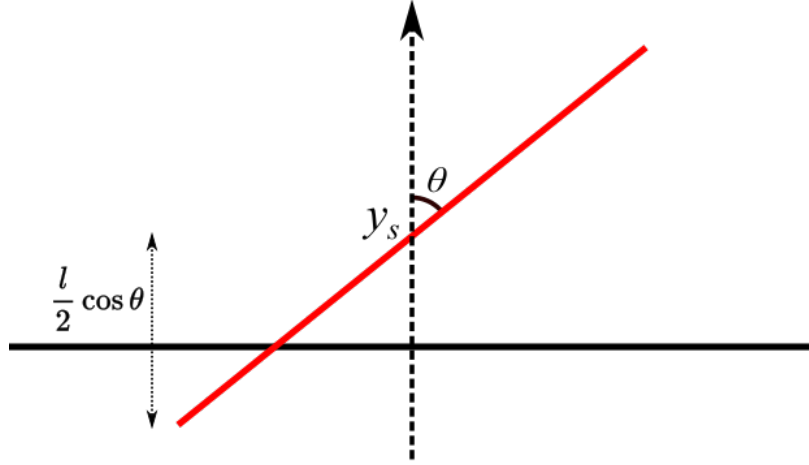


図 1: 設定図

となる.

$\gamma < \omega_0$ のときは, $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \equiv i\omega_1$ と書き換えることにより,

$$x(t) = e^{-\gamma t}(Ae^{i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_1 t}) = Ce^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \delta) \quad (5)$$

と一般解を書き換えることができる. この解は, 減衰する部分と振動する部分の積で表されており, **減衰振動**である.

$\gamma = \omega_0$ のときは, $\lambda = -\gamma$ と重解になるので, 定数変化法を用いて他の解を求めればよい. よって

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t} \quad (6)$$

となり, 振動する項は含まれていないことが分かる. この場合を**臨界減衰**と呼ぶ.

$\gamma > \omega_0$ のときは,

$$x(t) = Ae^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + Be^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \quad (7)$$

となり, 同様に振動しない. この場合を**過減衰**と呼ぶ.

以上をパラメータ (m, ζ, k) を用いてまとめると

$$\begin{cases} \zeta^2 < 4mk & \text{減衰振動} \\ \zeta^2 = 4mk & \text{臨界減衰} \\ \zeta^2 > 4mk & \text{過減衰} \end{cases} \quad (8)$$

(2) 物体の運動方程式 $m\ddot{x}(t) = -\zeta\dot{x}(t) - kx(t)$ を離散化すると

$$v(t + \Delta t) = v(t) - \frac{\zeta}{m} \Delta t v(t) - \frac{k}{m} \Delta t x(t) \quad (9)$$

となる. さらに無次元化すると

$$\tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \left(1 - \frac{\zeta t_0}{m} \Delta\tilde{t}\right) \tilde{v}(\tilde{t}) - \frac{kt_0^2}{m} \Delta\tilde{t} \tilde{x}(\tilde{t}) \quad (10)$$

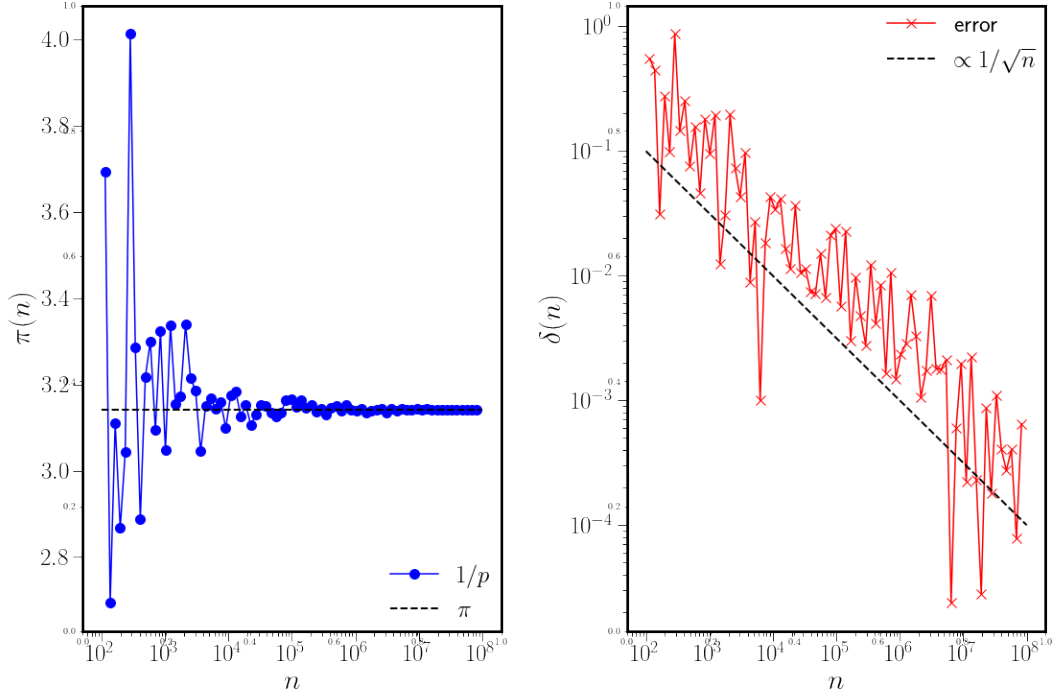


図 2: 棒をばら撒く回数 n と、円周率 $\pi(n)$ との関係 (左), 理論値との誤差 $\delta(n)$ との関係 (右). 右図を見ると, 誤差は $1/\sqrt{n}$ に比例して減少していくことが分かる.

となり, 速度に関する漸化式が得られる. 次に, 位置に関しても離散化して

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) &= \tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t})\Delta\tilde{t} \\ &= \left(1 - \frac{\zeta t_0}{m}\Delta\tilde{t}\right)\Delta\tilde{t}\tilde{v}(\tilde{t}) + \left(1 - \frac{kt_0^2}{m}\Delta\tilde{t}^2\right)\tilde{x}(\tilde{t})\end{aligned}\quad (11)$$

となる. 式 (10), (11) が \tilde{v} , \tilde{x} に関する 2 項間漸化式である.

(3) 漸化式 (10), (11) に t_d , t_s の値を代入すればよく, 行列の形でまとめれば

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) \\ \tilde{x}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t_0}{t_d}\Delta\tilde{t} & -\frac{t_0^2}{t_d^2}\Delta\tilde{t} \\ \left(1 - \frac{t_0}{t_d}\Delta\tilde{t}\right)\Delta\tilde{t} & 1 - \frac{t_0^2}{t_d^2}\Delta\tilde{t}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}(\tilde{t}) \\ \tilde{x}(\tilde{t}) \end{pmatrix}\quad (12)$$

となる.

(4) $t_0 = t_s$ のとき, 制御パラメータは

$$T \equiv \frac{t_0}{t_d} = \frac{\sqrt{m/k}}{m/\zeta} = \sqrt{\frac{\zeta^2}{mk}}\quad (13)$$

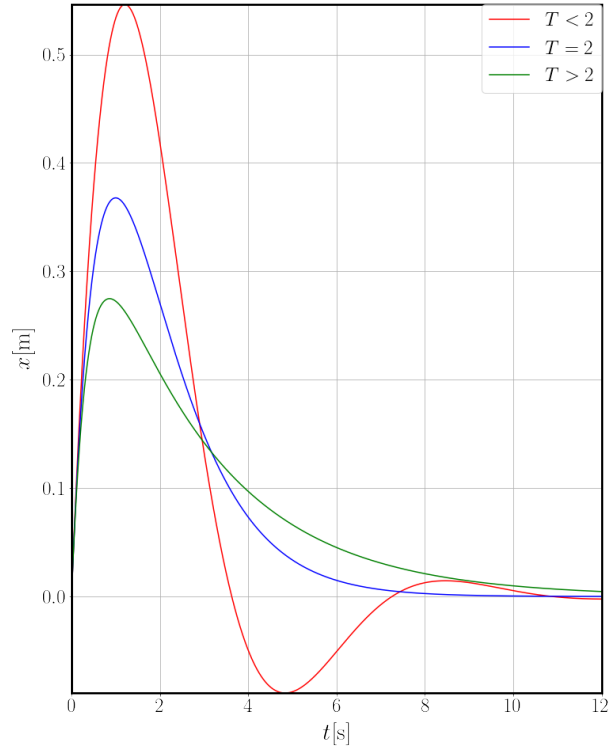


図 3: 物体の運動の様子. 赤色の $T < 2$ のグラフが減衰振動, 青色の $T = 2$ のグラフが臨界減衰, 緑色の $T > 2$ のグラフが過減衰である. 数値計算において, パラメータ T の値は順に, 1, 2, 3 とし, 初速度は $\dot{x}(0) = 1$ とした.

と書ける. さらに, 式 (12) は

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) \\ \tilde{x}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - T\Delta\tilde{t} & -\Delta\tilde{t} \\ (1 - T\Delta\tilde{t})\Delta\tilde{t} & 1 - \Delta\tilde{t}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}(\tilde{t}) \\ \tilde{x}(\tilde{t}) \end{pmatrix} \quad (14)$$

となる. パラメータ T の値によって運動が特徴付けられ, 問題 (1) において見積もった条件から

$$\begin{cases} T < 2 & \text{減衰振動} \\ T = 2 & \text{臨界減衰} \\ T > 2 & \text{過減衰} \end{cases} \quad (15)$$

が分かる. 漸化式 (14) を数値的に解いて, $x(t)$ をグラフにプロットしたのが図 3 である. 計算は python を用いて行った