シミュレーション実習中間レポート問題

名古屋大学大学院理学研究科　川﨑猛史　出題

2022 年 5 月 1 日

[注意事項] 以下の問題（第１問・第２問）を期限までに解き **NUCT** 課題の当該箇所から答案および数値計算に使用した任意のプログラミング言語を用いたコードを提出せよ．なお，答案は **pdf** ファイル，コードはテキストファイル (拡張子 **cpp** や **py**)，**python** ノートブック (拡張子**.ipynb**) などとせよ．

第１問（**Buffon** の針）

水平面上に間隔 d の直線を等間隔かつ平行に引く．この時，断面の大きさが無視できる長さ $\ell(\ell < d)$ の棒を平面に対して一様にばら撒く際，棒が直線と交わる確率を考える．この問題では空間の対称性から棒が着地した近接の直線上に x 軸，棒の中点を通る x 軸と直交する y 軸を定義し，それらの原点は当該直線上に定める．また，棒と y 軸とのなす角度を図１のように θ と定める．この問題を考える際，空間の対称性から棒の中点座標を $(0, y_s)$，$y_s \in [0, \frac{d}{2}]$ とし**棒の下半分が直線 (x 軸) と交わる場合について考えれば十分**である．そして，棒は空間に対して一様にばら撒くため，y_s は $[0, d/2]$，θ は $[0, \pi/2]$ の範囲をそれぞれ分布する一様乱数とみなすことができるとしよう．この時，以下の各問に答えよ．

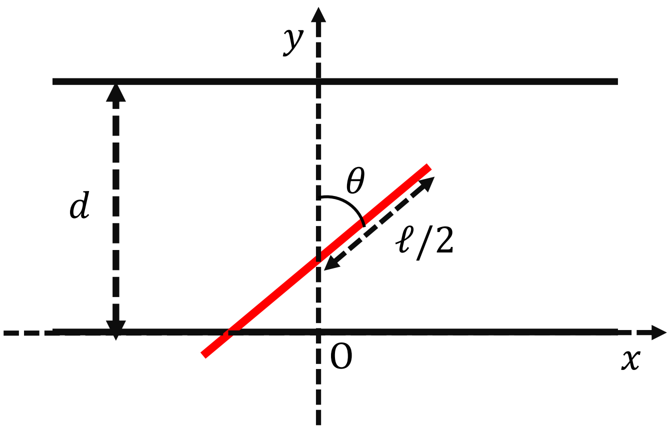

図 1: 第１問設定図

[設問]

(1) y_s, θ パラメータ平面上で棒が直線に交わる条件（領域）を考えることで，棒が直線に交わる確率 p が $\frac{2\ell}{\pi d}$ となることを解析的に示せ．(5 点)

(2) 実際に数値実験を行い，棒が直線に交わる確率 p を実測し,(1) の答えと比較することで円周率を見積もることができる．棒をばら撒く回数 n を $[10^2, 10^8]$ の範囲を系統的に変化させた際，数値計算により見積もられる円周率が n に対してどのように変化するかプロットせよ．(10 点)

(3) 問題 **(2)** の数値計算の結果と理論値 π の誤差の関係を n に対してプロットし，$\frac{C}{\sqrt{n}}$ と比較せよ (C には適当な定数を入れよ)．(5 点)

第2問（溶媒中におけるばねで繋がれた物体の運動）

一端を固定した，ばね定数 k のばねに，質点とみなせる質量 m の小球をつけ，滑らかな水平面上を1次元運動させる．小球にはさらに，速度と反対方向を向く，粘性抵抗係数を ζ とする粘性抵抗力が働くものとする．また，小球に働く熱揺動力は無視できるものとする．この時，適当な座標系を敷き，時刻 t における小球の位置を $x(t)$ とすれば，物体の運動方程式は，

$$m\ddot{x}(t) = -\zeta\dot{x}(t) - kx(t) \tag{1}$$

と表される．いま正値パラメータ $(m,\ \zeta,\ k)$ を広く変化させ，これらの大小関係により，質点の運動が大きく変化する様子を考察する．$x(t)$ は実数値変数であることに注意し，以下の各問に答えよ．

[設問]

(1) 小球の運動が減衰振動（不足減衰），過減衰，臨界減衰を示す条件をそれぞれ，m，ζ，k を用いて解析的に表せ．　(3点)

(2) $\tilde{x}$，$\tilde{t}$ を長さと時間に関する無次元の変数であるとし，問題にで与えた実際の物理量との関係は $x = a\tilde{x}$，$t = t_0\tilde{t}$，$\dot{x} = v = (a/t_0)\tilde{v}$ であるとする．ここで a[m]，t_0[s] は適当に定めた長さと時間である．この時，運動方程式 (1) を無次元化し，さらに時間刻み $\Delta\tilde{t}$ に関する半陰的 Euler 法 (Semi-implicit Euler method) で離散化した際に得られる2項間漸化式を，$\tilde{v}(\tilde{t})$，$\tilde{x}(\tilde{t})$ に対してそれぞれ立てよ．　(4点)

(3) 運動方程式 (1) で与えた物理量を組み合わせていくつかの物理的に意味のある時間スケールを抽出することができる．ここでは，減衰運動の時間スケール $t_d = \frac{m}{\zeta}$，ばねの振動を特徴付ける時間スケール $t_s = \sqrt{m/k}$ が挙げられる．いまこれらを用いて問題 **(2)** において求めた $\tilde{v}(\tilde{t})$ に関する漸化式から正値パラメータ $(m,\ \zeta,\ k)$ を消去し t_0, t_d, t_s を用いたものに書き換えよ．　(3点)

(4) いま，時間の単位を $t_0 = t_s$ と定めれば，問題 **(3)** で求めた漸化式における係数が1つ落ち，$\boxed{t_0/t_d}$ がここでの運動の特徴を制御する唯一のパラメータ[1]になることがわかる．そこで，問題 **(1)** において見積もった条件から，$\boxed{t_0/t_d}$ に適当な値を入れることで，減衰振動（不足減衰），過減衰，臨界減衰を，問題 **(3)** までに議論した漸化式を数値的に解くことで再現し，$x(t)$ のグラフにプロットせよ．なお，初期条件は $x(0) = 0$，$\dot{x}(0) = a/t_0$ と与えよ．計算する時間は $t > 0$ で，運動の特徴が見られる範囲で適当に定めてよい．時間刻み $\Delta\tilde{t}$ の大きさについても数値解が収束する範囲で適当に定めてよいことにする．（10点）

[1]減衰と振動の時間スケールの比に対応