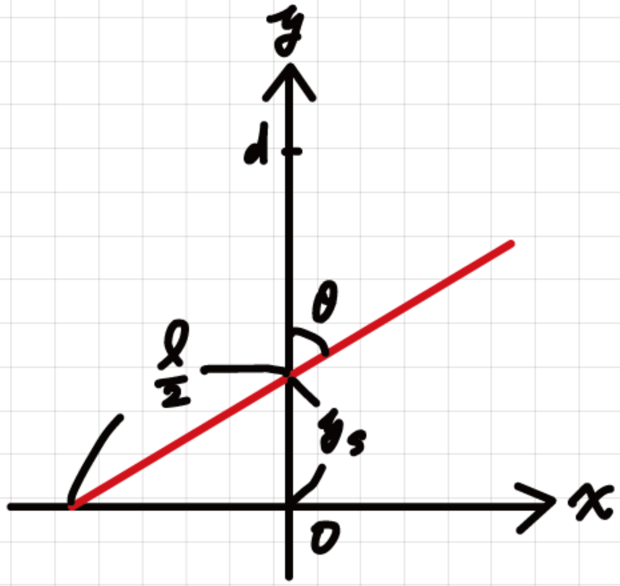
シュミレーション実習中間Report

[redacted] 森 祐二郎

第1問 Buffonの針



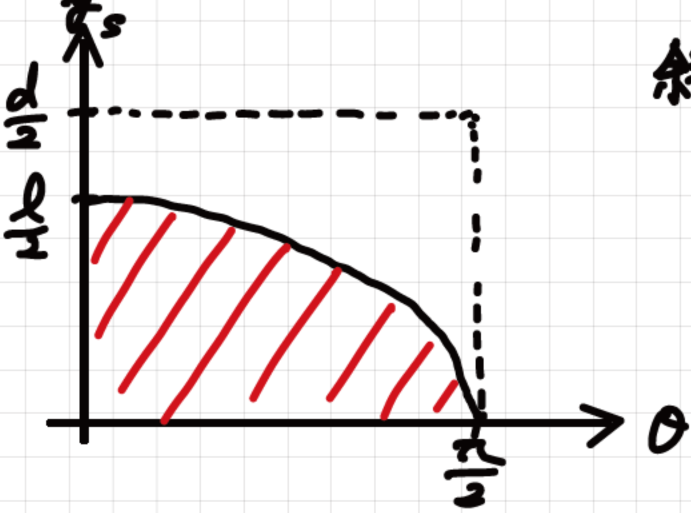
$l < d,$

$y_s \in [0, \frac{d}{2}]$

$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(1) y軸との角度がθの時、x軸と交わるのは、

$y_s \le \frac{l}{2}\cos\theta$ の時なので、交わる領域は

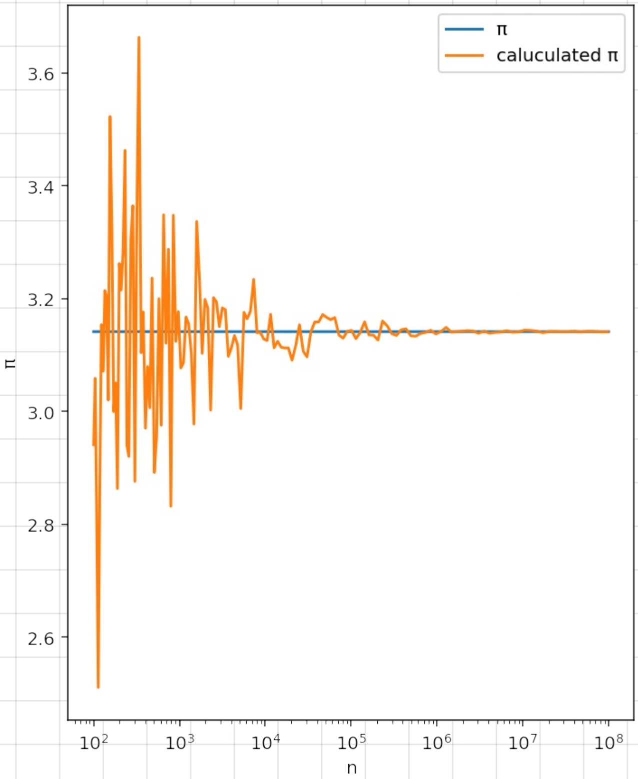


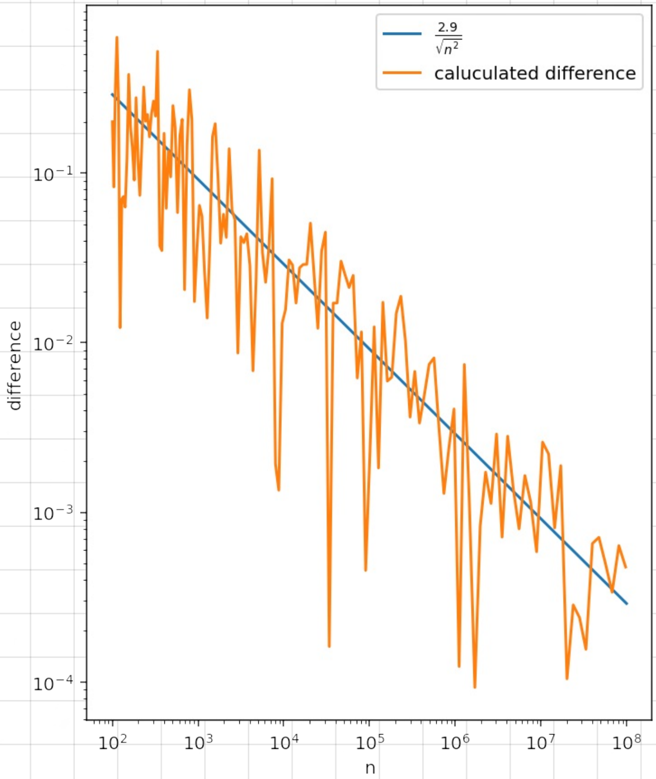
斜線部分である。

よって、棒が直線に交わる条件pは、

$$p = \frac{\int_0^{\frac{d}{2}} \frac{l}{2}\cos\theta \, d\theta}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{d}{2}} = \frac{2l}{\pi d}$$

$d = 2$, $l = 1$ として計算した。


π
caluculated π
3.6
3.4
3.2
3.0
2.8
2.6
π
10^2 10^3 10^4 10^5 10^6 10^7 10^8
n


$\frac{2.9}{\sqrt{n^2}}$
caluculated difference
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
difference
10^2 10^3 10^4 10^5 10^6 10^7 10^8
n

第2問 溶媒中におけるばねで繋がれた物体の運動

$$m\ddot{x}(t) = -\xi\dot{x}(t) - kx(t) \quad \cdots (☆)$$

(1) (☆)において、$x = Ae^{\lambda t}$ とすると.

$$m\lambda^2 + \xi\lambda + k = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_\pm = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 4km}}{2m}$$

i) $\xi^2 - 4km > 0$ の時.

$$\lambda_\pm = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 4km}}{2m} < 0$$

より. 一般解は.

$$x = C_1 \exp(\lambda_+ t) + C_2 \exp(\lambda_- t)$$

これは過減衰である.

ii) $\xi^2 - 4km < 0$ の時.

$$\lambda_\pm = \frac{-\xi \pm i\sqrt{4km - \xi^2}}{2m}$$

より. 一般解は.

$$x = C_3 \exp(\lambda_+ t) + C_4 \exp(\lambda_- t)$$

x は実数より. $C_4 = C_3^*$ なので.

$C_3 = \frac{A}{2}\exp(i\alpha)$, $C_4 = \frac{A}{2}\exp(-i\alpha)$ とすると.

$$x = A\exp\left(-\frac{\xi}{2m}t\right)\cos\left(\frac{\sqrt{4km - \xi^2}}{2m}t + \alpha\right)$$

これは減衰振動である.

iii) $\xi^2 - 4km = 0$

この時. (☆)は. $\left(\frac{d}{dt} + \frac{\xi}{2m}\right)^2 x = 0$

$\left(\frac{d}{dt} + \frac{\xi}{2m}\right) x = 0$ の解として. $\exp\left(-\frac{\xi}{2m}t\right)$

$\left(\frac{d}{dt} + \frac{\xi}{2m}\right)^2 x = 0$ の解として. $t\exp\left(-\frac{\xi}{2m}t\right)$

を考えると. 一般解は.

$$x = (C_5 t + C_6)\exp\left(-\frac{\xi}{2m}t\right)$$

これは. 臨界減衰である.

(2) (☆)において. $x = a\tilde{x}$, $t = t_0\tilde{t}$, $\dot{x} = u = \frac{a}{t_0}\tilde{u}$

とすると.

$$\frac{d}{d\tilde{t}}\tilde{u} = -\frac{\xi t_0}{m}\tilde{u} - \frac{t_0^2 k}{m}\tilde{x}$$

これを離散化すると.

$$\begin{cases} \tilde{u}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \tilde{u}(\tilde{t})\left(1 - \frac{\xi t_0}{m}\Delta\tilde{t}\right) - \frac{t_0^2 k}{m}\tilde{x}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \\ \tilde{x}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{u}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t})\Delta\tilde{t} \\ \qquad = \tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{u}(\tilde{t})\left(1 - \frac{\xi t_0}{m}\Delta\tilde{t}\right)\Delta\tilde{t} - \frac{t_0^2 k}{m}\tilde{x}(\tilde{t})(\Delta\tilde{t})^2 \end{cases}$$

(3) $t_d = \dfrac{m}{\xi}$, $t_s = \sqrt{\dfrac{m}{k}}$ とすると.

$$\begin{cases} \tilde{u}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \tilde{u}(\tilde{t})\left(1-\dfrac{t_0}{t_d}\Delta\tilde{t}\right) - \dfrac{t_0^2}{t_s^2}\tilde{x}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \\ \tilde{x}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{u}(\tilde{t})\left(1-\dfrac{t_0}{t_d}\Delta\tilde{t}\right)\Delta\tilde{t} \\ \qquad\qquad - \dfrac{t_0^2}{t_s^2}\tilde{x}(\tilde{t})(\Delta\tilde{t})^2 \end{cases}$$

(4) $t_0 = t_s$ とすると.

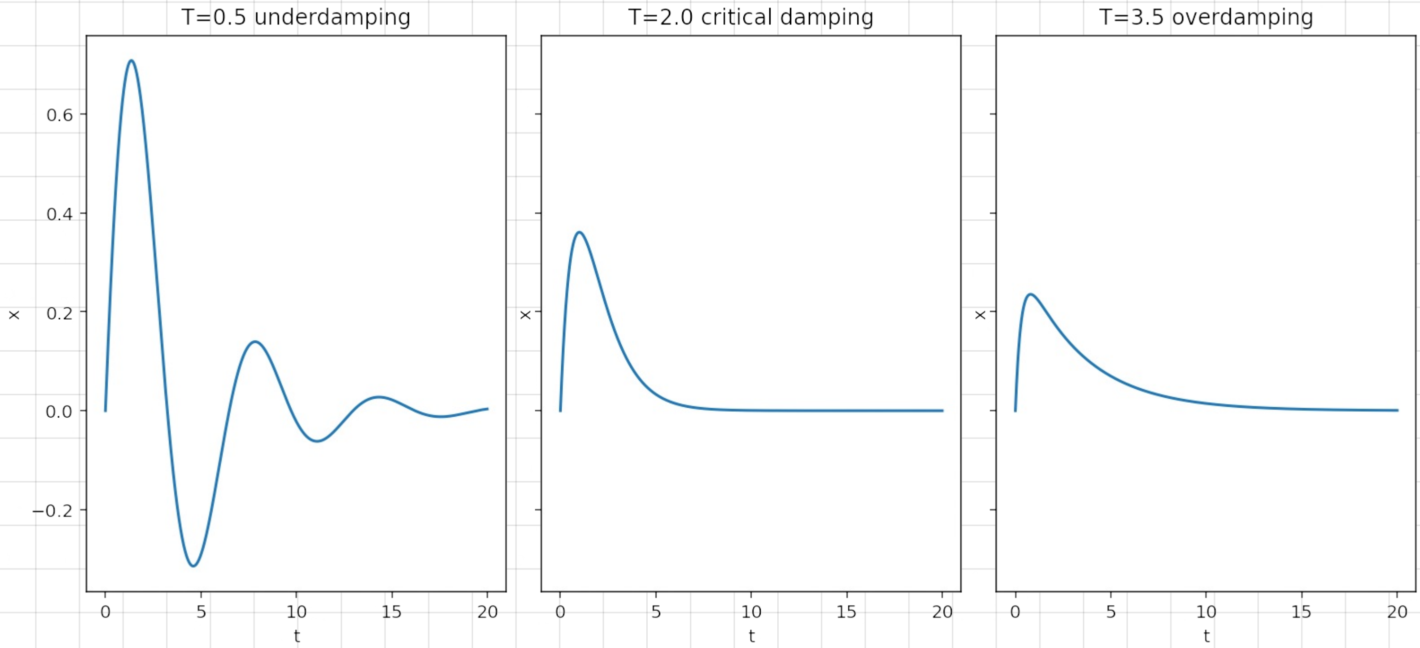
$$\begin{cases} \tilde{u}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \tilde{u}(\tilde{t})\left(1-\dfrac{t_0}{t_d}\Delta\tilde{t}\right) - \tilde{x}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \\ \tilde{x}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{u}(\tilde{t})\left(1-\dfrac{t_0}{t_d}\Delta\tilde{t}\right)\Delta\tilde{t} \\ \qquad\qquad - \tilde{x}(\tilde{t})(\Delta\tilde{t})^2 \end{cases}$$

ここで, $\xi^2 - 4km \gtreqless 0$ の条件は.

$$\frac{t_0}{t_d} = \sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\frac{\xi}{m} = \sqrt{\frac{\xi^2}{km}} \gtreqless 2$$ という.

無次元パラメーターの条件に書き換えられる.

数値計算を $\dfrac{t_0}{t_d} = T = 0.5,\ 2.0,\ 3.5$ で行った.


T=0.5 underdamping
T=2.0 critical damping
T=3.5 overdamping
x
t
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
0
5
10
15
20