シミュレーション実習 中間課題

[redacted]

2022 年 5 月 13 日提出期限

第１問

(1)

題意より、棒の下半分が直線と交わるためには y と θ の間に次の関係が成り立っていればよい。

$$y \leq \frac{l}{2}\cos\theta \tag{1}$$

この時、y と θ はそれぞれ $[0, l/2], [0, \pi/2]$ の範囲を動くので、これらがなすパラメータ空間上の面積 $\pi l/4$ の領域に対する $y \leq l/2\cos\theta$ の面積の比が求める確率である。
したがって $y = l/2\cos\theta$ を θ で積分し、確率を求めると、

$$\frac{\frac{l}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta\cos\theta}{\frac{\pi d}{4}} = \frac{2l}{\pi d}$$

(2)(3)

$d = 2, l = 1$ と取れば、求める確率すなわち面積比は $1/\pi$ になる。この条件下でシミュレーションを行った結果が次の図 1 である。

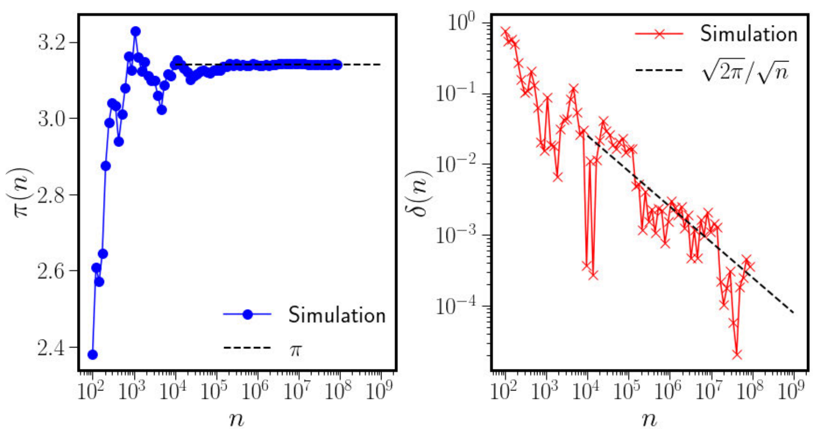

図 1

$\pi(n)$ は n 回針を投げたときの円周率、$\delta(n)$ はその時の真の円周率との差である。誤差の比例定数は $\sqrt{2\pi}$ とおいた。

第２問

(1)

解の形を $x = e^{pt}$ と仮定して運動方程式に代入すると、

$$(mp^2 + \zeta p + k)e^{pt} = 0 \tag{2}$$

したがって、解の振る舞いを決定するのは次の方程式である。

$$p^2 + \frac{\zeta}{m}p + \frac{k}{m} = 0 \tag{3}$$

これは 2 次方程式なので、判別式の正負によって場合分けをする。それぞれに対応する現象とその条件は以下の通りである。

減衰振動

判別式 D が $D = \left(\frac{\zeta}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} < 0$ の条件を満たすとき。

過減衰

判別式 D が $D = \left(\frac{\zeta}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} > 0$ の条件を満たすとき。

臨界減衰

判別式 D が $D = \left(\frac{\zeta}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} = 0$ の条件を満たすとき。

(2)

与えられた条件と、それから導ける事実をまとめる。

- $x = a\tilde{x}$
- $t = t_0\tilde{t}$
- $\dot{x} = (a/t_0)\tilde{v}$
- $\ddot{x} = \dot{v} = (a/t_0^2)\dot{\tilde{v}}$

これを運動方程式に代入すると、

$$m\frac{a}{t_0^2}\dot{\tilde{v}} = -\frac{\zeta a}{t_0}\tilde{v} - ka\tilde{x}$$
$$\therefore \dot{\tilde{v}} = -\frac{\zeta t_0}{m}\tilde{v} - \frac{kt_0^2}{m}\tilde{x}$$

さらに、$\dot{\tilde{v}}$ を離散化すると、

$$\frac{\tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) - \tilde{v}(\tilde{t})}{\Delta\tilde{t}} = -\frac{\zeta t_0}{m}\tilde{v}(\tilde{t}) - \frac{kt_0^2}{m}\tilde{x}(\tilde{t})$$
$$\therefore \tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \tilde{v}(\tilde{t}) - \frac{\zeta t_0}{m}\tilde{v}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} - \frac{kt_0^2}{m}\tilde{x}(\tilde{t})\Delta\tilde{t}$$

これと半陰的オイラー法の位置に関する関係式を合わせると、

- $\tilde{v}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \tilde{v}(\tilde{t}) - \dfrac{\zeta t_0}{m}\tilde{v}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} - \dfrac{kt_0^2}{m}\tilde{x}(\tilde{t})\Delta\tilde{t}$
- $\tilde{x}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{v}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t})\tilde{\Delta}t$

(3)

与えられたパラメータを使って上式を書き直すと、

$$\tilde{v}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \tilde{v}(\tilde{t}) - \frac{t_0}{t_d}\tilde{v}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} - \left(\frac{t_0}{t_s}\right)^2\tilde{x}(\tilde{t})\Delta\tilde{t}$$

(4)

パラメータを $t_0 = t_s$ と取ると、

$$\tilde{v}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \tilde{v}(\tilde{t}) - \frac{t_0}{t_d}\tilde{v}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} - \tilde{x}(\tilde{t})\Delta\tilde{t}$$

これを数値的に解けばよい。参考として、方程式を解析的に解いた結果は次の通りである。
(以下、$T = t_0/t_d$ とする。)

過減衰 $(T > 2)$

$$x(t) = \frac{a}{\sqrt{T^2-4}}\exp\left(-T\frac{t}{2t_0}\right)\sinh\left(\frac{t}{t_0}\sqrt{T^2-4}\right)$$

減衰振動 $(0 < T < 2)$

$$x(t) = \frac{a}{\sqrt{-T^2+4}}\exp\left(-T\frac{t}{2t_0}\right)\sin\left(\frac{t}{t_0}\sqrt{-T^2+4}\right)$$

臨界減衰 $(T = 2)$

$$x(t) = a\frac{t}{t_0}\exp\left(-T\frac{t}{2t_0}\right)$$

これらを見てもわかるように、$T = t_0/t_d$ が 2 を超えるかどうかによって解の振る舞いが異なってくる。よってこれをパラメータとして数値計算の違いを確認する。(今回は $\tilde{\dot{x}} = \tilde{v} = 1$ とした。)

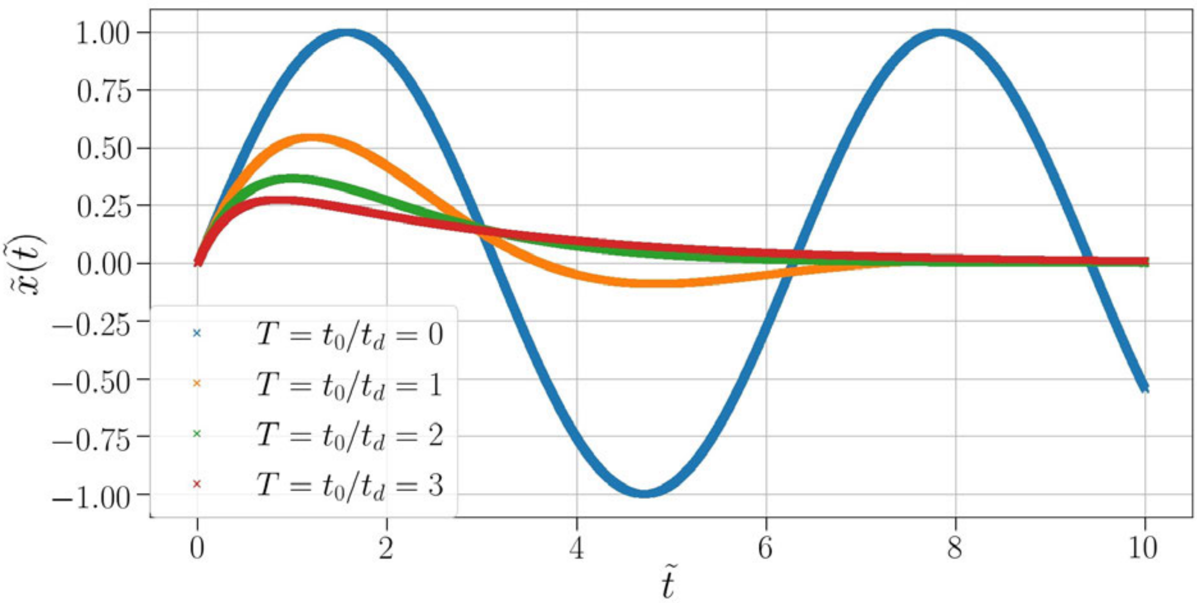

図 2

実際の計算結果は図 2 のようになる。これより、$T = 0$ のときは単振動、$T = 2$ で臨界減衰となっている様子が確認できる。