2022 年度シミュレーション実習

中間レポート

名古屋大学理学研究科 C 研
学生番号 [redacted]
成瀬元希

2022/05/03

第１問

(1)

問題の図 1 において, この時棒の下端 (x 軸側の端)(以後端点 X とする) の座標は $(-\frac{l}{2}sin\theta,$ $y_s - \frac{l}{2}cos\theta)$ と表すことができる. この端点 X がとる微小面積が $dS = \frac{l}{2}d\theta dy_s$ であるから, 全面積 S_{all} は

$$\begin{aligned} S_{all} &= \int_0^{d/2} dy_s \int_0^{\pi/2} d\theta \ \frac{l}{2} \\ &= \frac{\pi l d}{8} \end{aligned} \tag{1}$$

一方で棒が x 軸と交わる場合, $y_s - \frac{l}{2}cos\theta \leq 0$ となるので, この条件下にある端点 X がとる面積 S_{cross} は

$$\begin{aligned} S_{cross} &= \int_0^{\frac{l}{2}con\theta} dy_s \int_0^{\pi/2} d\theta \ \frac{l}{2} \\ &= \frac{l}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta \ \frac{l}{2}cos\theta \\ &= \frac{l^2}{4} \end{aligned} \tag{2}$$

これより, 求める確率 p は

$$p = \frac{S_{cross}}{S_{all}} = \frac{l^2/4}{\pi l d/8} = \frac{2l}{\pi d} \tag{3}$$

となり, 題意は示せた.

(2), (3)

以下のようにソースコード”midterm_paper_1.cpp”を作成して数値計算を行うことで円周率 π, 並びに理論値との誤差を評価した. この際, $l = 10$, $d = 100$ を代入し, 乱数の生成には Mersenne Twister の genrand_res53(), π の理論値には C++ のヘッダファイル<cmath>による M_PI を使用した.

さらにグラフのプロットには以下の”midterm1.ipynb”を作成することで行い, 小問 (2) への解答のグラフが図 1 における左側, (3) への解答のグラフはその右側に示す通りである. (3) において, C=3.16 とした. (以降, 以下に載せるソースファイルは答案用にコメントを消去したもの, 添付ファイルでは使用した原本としてコメント有りのものなっています.)

結果からは, およそ 10^5 以上繰り返すと理論値に漸近し始めている. また理論値との誤差は回数を重ねるごとに $1/\sqrt{n}$ に沿って減少していき, 回数が 10^5 回よりも大きくなると誤差が 0.05 を下

回っていくことが分かる (有効数字 2 桁を取れるようになる). どの程度の誤差を許容するかで話は変わるが, この 10^5 回は一つの指標になりそうである.

source code 1　midterm_pager_1.cpp

```
#include<iostream>
#include<iomanip>
#include<fstream>
#include<time. h>
#include<cstdio>
#include<cstdlib>
#include<cmath>
#include"MT. h"

int main(){
    int i, count=0, n=1e+8;
    double l=10., d=100.;
    double x,y,z,rad, pi, out=1.e+2;
    char fname[128];

    std::ofstream file;
    sprintf(fname, "midterm1_MT.dat");
    file.open(fname);
    init_genrand(time(NULL));

    for(i=0;i<n;i++){
        x=genrand_res53();
        y=genrand_res53();
        rad=90*y/180*M_PI;
        z=d*x-l*cos(rad);
        if(z <= 0.){
            count++;
        }
        if(i>=(int)out){
            pi=2*(l/d)*((double)i/count);
            file<< std::setprecision(16) << i << " " << pi << " " << abs(pi-M_PI) << std::endl;
            out*=1.2;
        }
    }
    file.close();
    std::cout << count << std::endl;
```

```

    return 0;

}
```

source code 2 midterm1

```
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
%config InlineBackend.figure_format="retina"
plt.rcParams["text.usetex"]=True

import numpy as np
n, pi, delta=np.loadtxt("./../Desktop/M1source/learn_c/midterm1_MT.dat",
    unpack=True)

fig=plt.figure(figsize=(16, 8))
ax1= fig.add_subplot(121)
ax2= fig.add_subplot(122)

ax1.hlines(y=np.pi, xmin=0, xmax=1e+8, lw=2.5, color="k", label=r"$\pi$")
ax1.plot(n, pi, "o", markersize=5.0, color="r", label=r"$calculated \; \pi$
    ")
ax2.plot(n, delta, "o", markersize=5.0, color="b", label=r"$\delta$")
ax2.plot(n, 3.16/np.sqrt(n), lw=2.5, color="k", label=r"$3.16/\sqrt{n}$")

ax1.set_xscale("log")
ax2.set_xscale("log")
ax2.set_yscale("log")

ax1.set_xlabel(r"$n$", color="k", size=25)
ax1.set_ylabel(r"$\pi$", color="k", size=25)
ax2.set_xlabel(r"$n$", color="k", size=25)
ax2.set_ylabel(r"$\delta$", color="k", size=25)

ax1.legend(ncol=1, loc=4, borderaxespad=0, fontsize=25, frameon=True)
ax2.legend(ncol=1, loc=1, borderaxespad=0, fontsize=25, frameon=True)

ax1.set_title(r"$(2)$", fontsize=20)
ax2.set_title(r"$(3)$", fontsize=20)
ax1.tick_params(labelsize=20)
```

```
ax1.minorticks_on()
ax1.grid()
ax2.tick_params(labelsize=20)
ax2.minorticks_on()
ax2.grid()
plt.subplots_adjust(wspace=0.25)
#fig.tight_layout()

plt.savefig("./../Desktop/M1source/learn_c/midterm1graph.png")
plt.show()
```

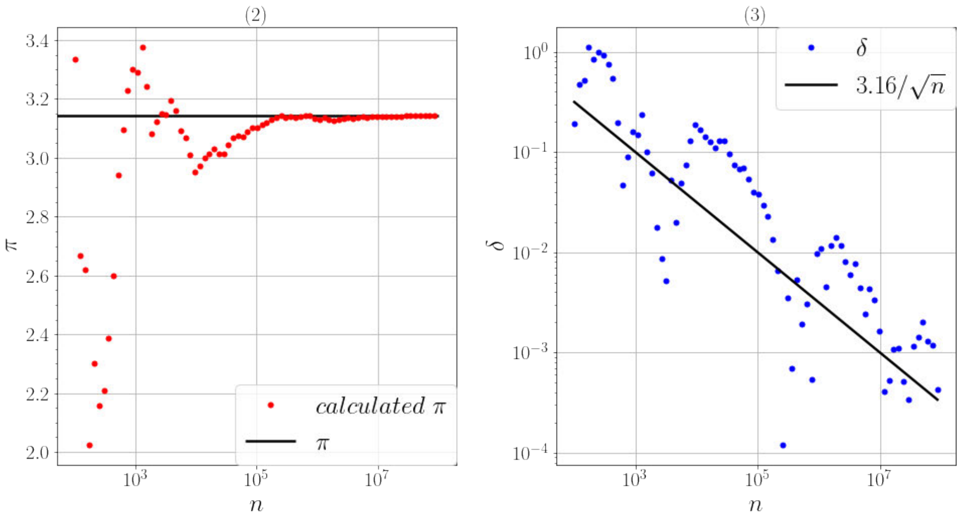

図 1　左側は (2) 円周率の変化, 右側は (3) 理論値 π との誤差である. また, 円周率の変化のグラフには理論値 π(numpy.pi) を, 誤差のグラフには C=3.16 とした $C/\sqrt{n}$ のグラフが黒の実線として同時に記してある.

第 2 問

(1)

問題中の式 (1) を変形する.

$$\begin{aligned}
\text{式 (1)} &\Leftrightarrow \ddot{x}(t) = -\frac{\zeta}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}x(t) \qquad (4)\\
&\Leftrightarrow \ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \qquad \left(\frac{\zeta}{2m} = \gamma,\ \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0\right) \qquad (5)
\end{aligned}$$

$x(t) = A\,e^{\lambda t}$ (A は任意定数) とすると, 式 (5) に代入すれば,

$$\begin{aligned}
\text{式 (5)} &\Leftrightarrow A\,(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2)\,e^{\lambda t} = 0\\
&\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0\\
&\Leftrightarrow \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \qquad (6)
\end{aligned}$$

式 (6) において,

I. 粘性抵抗力が弱い場合 ($\gamma < \omega_0 \Leftrightarrow \zeta^2 < 4mk$),

$$\text{式 (6)} \Leftrightarrow \lambda = -\gamma \pm i\alpha \qquad \left(\alpha = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right) \qquad (7)$$

となり,

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-\gamma t}\left(Be^{-i\alpha t} + Ce^{i\alpha t}\right)\\
&= De^{-\gamma t}cos(\alpha t + \phi) \qquad (B, C, D \text{ は任意定数}) \qquad (8)
\end{aligned}$$

と一般解は導かれ, この時は減衰振動となる.

II. 粘性抵抗力が強い場合 ($\gamma > \omega_0 \Leftrightarrow \zeta^2 > 4mk$),

$$\text{式 (6)} \Leftrightarrow \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\ <\ 0 \qquad (9)$$

となって λ は負の値となる. $r_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ とすると,

$$x(t) = Be^{r_+ t} + Ce^{r_- t} \qquad (B, C \text{ は任意定数}) \qquad (10)$$

と一般解は導かれるが, 第 1 項も第 2 項も 0 に向かって単調に減少していく. つまり, 振動せずに止まる, 過減衰となる.

III. $\gamma = \omega_0$ ($\Leftrightarrow \zeta^2 = 4mk$) のとき,

式 (6) は $\lambda = -\gamma$ の重解を持つ．しかしこのままでは (任意定数が 1 つ不足しており) 一般解は作れないので, もう 1 つ独立な解を考える．定数変化法を用いて一般解が $x(t) = u(t)e^{-\gamma t}$ とすれば, これを式 (5) に代入することで, 最終的に $d^2u(t)/dt^2 = 0$ を得る．

従って, $u(t) = Bt + C$ と任意定数 B, C を用いて表せば,

$$x(t) = (At + B)\, e^{-\gamma t} \tag{11}$$

の一般解を得る．これも単調に減少していき, 減衰振動と過減衰の境目の状態となる, 臨界減衰を表す.

以上より, 求めるべき条件をまとめると,

1. 減衰振動: $\zeta^2 < 4mk$
2. 過減衰: $\zeta^2 > 4mk$
3. 臨界減衰: $\zeta^2 = 4mk$

(2)

小問 (1) で用いていた $\gamma\ (= \zeta/2m)$, $\omega_0\ \left(= \sqrt{k/m}\right)$ を使用する．問題中の運動方程式 (1) を無次元化することは, 式 (5) を無次元化することであり, まずこの式 (5) を速度 $v(t)$ を使って陽に表すと,

$$\frac{dv(t)}{dt} + 2\gamma v(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \tag{12}$$

これを (今回は減衰型の微分方程式なので)Euler 法を使って

$$\begin{aligned} &\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} + 2\gamma v(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & v(t+\Delta t) = v(t) - 2\gamma v(t)\Delta t - \omega_0^2 x(t)\Delta t \end{aligned} \tag{13}$$

と変形できる.

これを問題中で与えられた無次元量を用いて無次元化していくと, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} &\frac{a}{t_0}\tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{v}) = \frac{a}{t_0}\tilde{v}(\tilde{t}) - 2\gamma\frac{a}{t_0}\tilde{v}(\tilde{t})t_0\Delta\tilde{t} - \omega_0^2 a\tilde{x}(\tilde{t})t_0\Delta\tilde{t} \\ \Leftrightarrow\ & \tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = (1 - 2\gamma t_0\Delta\tilde{t})\ \tilde{v}(\tilde{t}) - \omega_0^2 t_0^2\Delta\tilde{t}\ \tilde{x}(\tilde{t}) \end{aligned} \tag{14}$$

すると, 位置に関しては陰解法を用いて,

$$\tilde{x}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t})\Delta\tilde{t} \tag{15}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{x}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = (1 - \omega_0^2 t_0^2(\Delta\tilde{t})^2)\ \tilde{x}(\tilde{t}) + (1 - 2\gamma t_0\Delta\tilde{t})\ \tilde{v}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \tag{16}$$

従って, 求める 2 項間連立漸化式は式 (14) と式 (16) となる.

(3)

小問 (2) において, γ と ω_0 を t_d, t_s を用いて表すと,

$$\gamma = \frac{1}{2t_d}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{t_s} \tag{17}$$

となる. これより $\tilde{v}(\tilde{t})$ の漸化式 (14) は,

$$\tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = (1 - \frac{t_0}{t_d}\Delta\tilde{t})\ \tilde{v}(\tilde{t}) - \frac{t_0^2}{t_s^2}\Delta\tilde{t}\ \tilde{x}(\tilde{t}) \tag{18}$$

同様に, $\tilde{x}(\tilde{t})$ の漸化式 (16) は,

$$\tilde{x}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = (1 - \frac{t_0^2}{t_s^2}\ (\Delta\tilde{t})^2)\ \tilde{x}(\tilde{t}) + (1 - \frac{t_0}{t_d}\ \Delta\tilde{t})\Delta\tilde{t}\ \tilde{v}(\tilde{t}) \tag{19}$$

と書き換えられる.

(4)

題意に沿って, パラメータ $T^* =\ t_0(= t_s)/t_d$ をとり, 漸化式 (18), (19) を整えると,

$$\begin{cases} \tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = (1 - T^*\Delta\tilde{t})\ \tilde{v}(\tilde{t}) - \Delta\tilde{t}\ \tilde{x}(\tilde{t}) \\ \tilde{x}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = (1 - (\Delta\tilde{t})^2)\ \tilde{x}(\tilde{t}) + (1 - T^*\Delta\tilde{t})\Delta\tilde{t}\ \tilde{v}(\tilde{t}) \end{cases} \tag{20}$$

となる.

また, 小問 (1) で求めた条件から T^* について, 例えば減衰振動の場合,

$$\zeta^2 < 4mk \Leftrightarrow \gamma < \omega_0 \Leftrightarrow t_s = t_0 < 2t_d \Leftrightarrow T^* < 2 \tag{21}$$

となり, 同様にすれば,

1. 減衰振動: $T^* < 2$
2. 過減衰: $T^* > 2$
3. 臨界減衰: $T^* = 2$

と書く状態でのパラメータの条件がわかる. また, 無次元量の初期状態は $\tilde{x}(0) = 0$, $\tilde{v}(0) = (t_0/a)v(0) = 1$ とわかる.

以上のことから, ソースコード"midterm_paper_2.cpp"を作成して数値計算を行い, 各状態を再現した. この際, パラメータは

1. 減衰振動: $T^* = 1.0$
2. 過減衰: $T^* = 3.0$

3. 臨界減衰: $T^{*}=2.0$

とし, 時間分解能は 10^{-4} ～ 10^{-2} までのデータをとっている． グラフのプロットはコード”midterm2.ipynb”を作成して行い, 時間分解能 10^{-4} のデータを使用した． 図 2 の左側が (4) への解答である求める時間に対する位置 $\tilde{x}(\tilde{t})$ のグラフであり, 右側がついでに作成した時間に対する速度 $\tilde{v}(\tilde{t})$ のグラフである．

source code 3　midterm_paper_2. cpp

```
#include<iostream>
#include<fstream>
#include<iomanip>
#include<cmath>
#include<cstdio>
#include<cstdlib>
#include<cfloat>

int damped_vibration(double T, double dt){
    char fname[128];
    sprintf(fname, "dampingdata_%.2f_%.4f.dat", T, dt);
    std::ofstream file;
    file.open(fname);

    int i=0;
    double x0=0., v0=1., x1, v1, out=1.;
    while(abs(v0) > DBL_EPSILON){
        v1=(1-T*dt)*v0 - dt*x0;
        x1=(1-dt*dt)*x0 + (1-T*dt)*dt*v0;
        i++;
        if((double)i >= out){
            file << (double)i*dt << " " << x1 << " " << v1 << std::endl;
            out*=1.2;
        }
        v0=v1;
        x0=x1;
    }

    file.close();
    return 0;
}

int main(){
```

```
    double dt, T;
    for(T=1.;T<=3.;T++){
        for(dt=1.e-4;dt<=1.e-2;dt*=10.)
        damped_vibration(T, dt);
    }
    return 0;
}
```

source code 4　midterm2

```
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.cm as cm
%matplotlib inline
%config InlineBackend.figure_format="retina"
plt.rcParams["text.usetex"]=True

import numpy as np
fig=plt.figure(figsize=(18, 8))

T=[1.00, 2.00, 3.00]
symbol=["-o", "D-", "x-"]
vibration=["damping", "critical", "overdamping"]

#時間分解能は 0.0001を使ってく
#x(t), v(t)の 2つのグラフを作る
for j in range(1, 3):
    ax1=fig.add_subplot("12{}".format(j))

    for i in range(0,3):
        time, x, v = np.loadtxt("./../Desktop/M1source/learn_c/dampingdata_{:.2f}_0.0001.dat".format(T[i]), unpack=True)
        plt.hlines(y = 0.0, xmin=0, xmax=90, linestyles="dashed", lw=2.5, color="k" )
        if(j == 1):
            plt.plot(time, x, "{}".format(symbol[i]), markersize=5, color=cm.jet(i/2), label=r"${}$".format(vibration[i]))
        else:
            plt.plot(time, v, "{}".format(symbol[i]), markersize=5, color=cm.jet(i/2), label=r"${}$".format(vibration[i]))


```

```
    plt.xlabel(r"$t/t_0(=\tilde{t})$", color="k", size=25)
    if(j == 1):
        plt.ylabel(r"$x(t)/a(=\tilde{x}(t))$", color="k", size=25)
    else:
        plt.ylabel(r"$v(t)t_0/a(=\tilde{v}(t))$", color="k", size=25)

    plt.xticks(color="k", size=25)
    plt.yticks(color="k", size=25)

    plt.legend(ncol=1, loc=1, borderaxespad=0, fontsize=20, frameon=False)

#fig.tight_layout()
plt.subplots_adjust(wspace=0.25)
plt.savefig("./../Desktop/M1source/learn_c/midterm2graph.png")
plt.show()
```

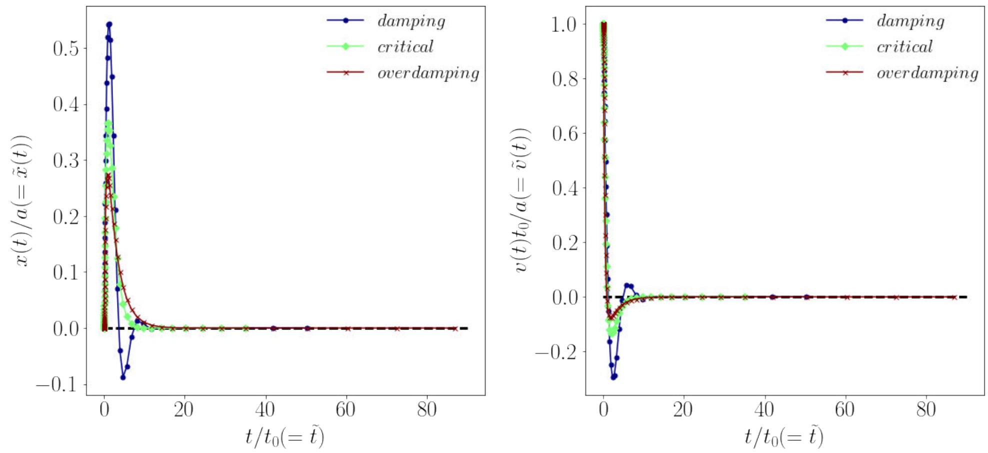

図 2　左側が (4) の位置のグラフ, 右側が速度のグラフ．青が減衰振動, 緑が臨界減衰, 赤が過減衰を表している．また, y=0 のドット線を引いてある

減衰振動では振動していること, 過減衰・臨界減衰は振動せずに単調に減少していること, また臨界減衰が減衰振動と過減衰の間に存在していることがきちんと再現できている．