物性理論特論 II 第 11 回
運動量空間くりこみ群 (1)

ϕ^4 模型における **Gauss** 固定点と **Wilson-Fisher** 固定点

川﨑猛史

大阪大学 D3 センター/ 大学院理学研究科物理学専攻

Last update：July 1, 2025

第 11 回講義資料目次

第 11 回講義資料目次

1. 講義のスケジュール

1. 4/15：第 1 回
2. 4/22：第 2 回
3. 5/07：第 3 回
4. 5/13：第 4 回
5. 5/20：第 5 回
6. 5/27：第 6 回
7. 6/03：第 7 回
8. 6/10：第 8 回
9. 6/17：第 9 回
10. 6/24：第 10 回
11. 7/01：第 11 回
12. 7/08：第 12 回
13. 7/15：第 13 回 7/22 は休講
14. 7/29：第 14 回

第 11 回講義資料目次

2. ϕ^4 模型のくりこみ群

実空間くりこみ群は、平均場では記述できない一次元や二次元の Ising 模型など、低次元系の解析において有効であった。しかし、この種の近似手法は、三次元などの高次元においては精度が低下する傾向がある。
そこで本節では、Ginzburg – Landau 理論に立ち返り、平均場近似が有効とされる四次元近傍の相挙動を解析する。さらに、摂動論的手法を用いて三次元系の臨界指数を求めることを目的とする。とりわけ Ginzburg – Landau（GL）理論の場の理論的形式である ϕ^4 模型に対して、摂動論的くりこみ群（RG）解析を行う。

2.1. ϕ^4 模型における Gauss 固定点

♣ ϕ^4 模型における Gauss 固定点

- ϕ^4 模型は、臨界現象を記述する最も基本的な場の理論の一つである。
- 特に、空間次元 $d = 4 - \varepsilon$ における ε 展開を通じて、三次元系の臨界指数を摂動的に求めることが可能である。
- この模型の自由エネルギーは、Ginzburg-Landau 理論と同様に、以下のように表される：

$$\beta F = \int \mathrm{d}\mathbf{r} \left\{ (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + t\phi^2 + u\phi^4 - h\phi \right\} \tag{1}$$

- この自由エネルギーに対して、くりこみ群解析を適用する。
- まず解析が容易な極限として、平均場近似が有効な領域を考える。
- このとき、結合定数 u は微小とし、$u^* = 0$ を固定点とする。この自由理論を **Gauss 模型 (Gauss 理論)** と呼ぶ。
- また、温度偏差 t や外場 h も臨界点付近で微小となり、それぞれ $t^* = 0,\ h^* = 0$ を固定点とする。

2.1. ϕ^4 模型における Gauss 固定点 (2)

- これら 3 つの変数によって特徴づけられる固定点を **Gauss** 固定点と呼び、Wilson のアイデアに基づいて場の変数に対するくりこみ変換を考える。

2.1. ϕ^4 模型における Gauss 固定点 (3)

♣ モード分離と Wilson のアイデア

- 第 6 回で扱ったように、秩序変数場は以下のようにモード分解できる：

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{|\mathbf{q}|<\Lambda} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tilde{\phi}(\mathbf{q}) \tag{2}$$

  ここで、波数には上限があり、連続体近似が成り立つ範囲に限定するため、波長は高々粒子（格子）サイズであり $\Lambda \sim \frac{2\pi}{\ell}$（$\ell$ は格子サイズ）とする。この上限のカットオフがなければ紫外発散を誘発する。

- 上記のように秩序変数場は独立なモードに分解できるため、Wilson のくりこみ群では、以下のように低波数と高波数（紫外）モードに分離する（スケール因子 $b > 1$）：

$$\begin{aligned} \phi_<(\mathbf{r}) &= \int_{|\mathbf{q}|<\Lambda/b} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tilde{\phi}(\mathbf{q}) \\ \phi_>(\mathbf{r}) &= \int_{\Lambda/b<|\mathbf{q}|<\Lambda} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tilde{\phi}(\mathbf{q}) \end{aligned} \tag{3}$$

2.1. ϕ^4 模型における Gauss 固定点 (4)

- したがって、場の変数は以下のように分解できる：

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_<(\mathbf{r}) + \phi_>(\mathbf{r}) \tag{4}$$

  - $\phi_<$：長波長を記述する低エネルギーモード
  - $\phi_>$：短波長（紫外）を記述する高エネルギーモード
- Wilson は、分配関数を計算する際に高波数モード $\phi_>$ を積分消去（部分和）することで、高波数の自由度の効果が結合定数などのパラメータに繰り込まれることを見出した。
- この理論体系は場の理論におけるくりこみ群に当たる。

2.1. ϕ^4 模型における Gauss 固定点 (5)

♣ Gauss 固定点まわりの有効自由エネルギー

- Gauss 固定点近傍では $u \sim 0$ と見なし、自由エネルギーは以下のように近似される：

$$
\begin{aligned}
F[\phi] &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{q}\ (t + q^2)\ |\tilde{\phi}(\mathbf{q})|^2 \\
&= \int_{|\mathbf{q}|<\Lambda/b} \cdots d\mathbf{q} + \int_{\Lambda/b<|\mathbf{q}|<\Lambda} \cdots d\mathbf{q} \\
&= F[\phi_<] + F[\phi_>] \qquad (5)
\end{aligned}
$$

- これは u を非有意変数として扱っていることに対応する。
- 本当にそのようになっているかはあとで確認するとして，まずは u を上記のように振る舞うとみなし解析を進める。
- 第 6 回で扱ったように分配関数は粗視化ハミルトニアンおよび波数空間における「経路積分」により次のように定義される：

$$
Z = \int \mathcal{D}\phi\ e^{-\beta F[\phi]} \qquad (6)
$$

2.1. ϕ^4 模型における Gauss 固定点 (6)

- ここでの経路積分の測度は：

$$\mathcal{D}\phi := \prod_{|\mathbf{q}|<\Lambda} d\tilde{\phi}(\mathbf{q}) \tag{7}$$

である。

- 高波数モードに関してのみ積分（部分和に相当）を先に実行することで：

$$Z = \left(\int \mathcal{D}\phi_> \, e^{-\beta F[\phi_>]} \right) \left(\int \mathcal{D}\phi_< \, e^{-\beta F[\phi_<]} \right) \tag{8}$$

- 高波数モードの寄与を定数 $A_>$ とすれば：

$$Z = A_> \int \mathcal{D}\phi_< \, e^{-\beta F[\phi_<]} := Z' \tag{9}$$

- これに対してスケーリング $\mathbf{r}' = \mathbf{r}/b$（すなわち $\mathbf{q}' = b\mathbf{q}$）を行えば，$\phi_<$ の定義域を Λ に復元することができる。
- これにより、再スケーリングされた自由エネルギー $F' = -k_B T \log Z'$ も元の形式を保つため、くりこみ変換が閉じている。

2.1. ϕ^4 模型における Gauss 固定点 (7)

- この操作は 運動量空間くりこみ群（momentum shell RG）と呼ばれる。
- 以上をもとに、Gauss 固定点におけるスケーリング則を導出する。

2.1. ϕ^4 模型における Gauss 固定点 (8)

以下，Gauss 固定点におけるスケーリング則を考える。

- まず結合定数等のスケーリング則を

$$t' = b^{y_t} t, \quad u' = b^{y_u} u, \quad h' = b^{y_h} h \tag{10}$$

とおく。

- また、空間座標と秩序変数のスケーリング：

$$\mathbf{r}' = b^{-1}\mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\nabla}' = b\boldsymbol{\nabla}, \quad \phi' = b^{d-y_h}\phi \tag{11}$$

を考える。ここで秩序変数 ϕ のスケーリングは $u \sim 0$ の非有意変数として扱った時の磁化のスケーリング [$m(t,h) = b^{y_h - d} m(b^{y_t} t, b^{y_h} h)$] から求まる関係である。

2.1. ϕ^4 模型における Gauss 固定点 (9)

- また、各々自由エネルギーに代入して不変性 $F' = F$ を課すと：

$$\begin{aligned} F' &= \int \mathrm{d}\mathbf{r}' \left\{ (\boldsymbol{\nabla}'\phi')^2 + t'\phi'^2 + u'\phi'^4 - h'\phi' \right\} \\ &= \int \mathrm{d}\mathbf{r}\, b^{-d} \Big\{ (b\boldsymbol{\nabla} \cdot b^{d-y_h}\phi)^2 + b^{y_t} t \cdot b^{2d-2y_h}\phi^2 \\ &\quad + b^{y_u} u \cdot b^{4(d-y_h)}\phi^4 - b^{y_h} h \cdot b^{d-y_h}\phi \Big\} \\ &= F \end{aligned} \tag{12}$$

- $F = \int \mathrm{d}\mathbf{r} \left\{ (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + t\phi^2 + u\phi^4 - h\phi \right\}$ であるので各項の係数が b^0 となるため、次を得る：

$$\begin{aligned} \text{1st term:} \quad & -d + 2 - 2d + 2y_h = 0 \\ \text{2nd term:} \quad & -d + y_t + 2d - 2y_h = 0 \\ \text{3rd term:} \quad & -d + y_u + 4d - 4y_h = 0 \\ \text{4th term:} \quad & -d + y_h + d - y_h = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

2.1. ϕ^4 模型における Gauss 固定点 (10)

- よってスケーリング次元は：

$$y_h = \frac{d+2}{2} \tag{14}$$

$$y_t = 2y_h - d = 2 \tag{15}$$

$$y_u = -3d + 4y_h = -d + 4 \tag{16}$$

- スケーリング則の結論：

$$t' = b^2 t, \quad u' = b^{4-d} u, \quad h' = b^{\frac{d}{2}+1} h \tag{17}$$

- 結果の解釈：
  - t, h は任意の d において 有意
  - u は $d \geq 4$ では 有意ではない
- よって、$d \geq 4$ においては $u = 0$ とした Gauss 模型が有効な理論となり平均場理論が正当化される。
- 一方、$d < 4$ では u は 有意 であり、$u \neq 0$ に向かって流れる。このとき新たな固定点（Wilson – Fisher 固定点）が存在する（次回以降扱う）。

2.2. Gauss 模型におけるくりこみ群

♣ Gauss 模型におけるくりこみ群

- 本節では、$d \geq 4$ において有効とされる Gauss 固定点を前提に、スケーリング理論に基づいて臨界指数を導出する。
- $d \geq 4$ の場合、ϕ^4 項の係数 u は有意ではないとみなされるため、$u = 0$（固定点）とし、自由エネルギー密度を $f(t, h)$ として議論を進める。

2.2. Gauss 模型におけるくりこみ群 (2)

- この状況では、第 8 回で導入した Kadanoff のスケーリング理論が適用でき、臨界指数について次の関係式が得られる：

$$\alpha = 2 - \frac{d}{y_t} = 2 - \frac{d}{2} \tag{18}$$

$$\beta = \frac{d - y_h}{y_t} = \frac{d - \frac{d+2}{2}}{2} = \frac{d-2}{4} \tag{19}$$

$$\gamma = \frac{d + 2 - d}{y_t} = 1 \tag{20}$$

$$\delta = \frac{y_h}{d - y_h} = \frac{\frac{d+2}{2}}{d - \frac{d+2}{2}} = \frac{d+2}{d-2} \tag{21}$$

$$\nu = \frac{1}{y_t} = \frac{1}{2} \tag{22}$$

  この結果から、γ および ν は平均場理論の結果と一致することがわかる。

- 一方、α、β、δ には空間次元 d が残っており、平均場理論では定数として与えられるのに対し、ここでは d に依存して変化する。

2.2. Gauss 模型におけるくりこみ群 (3)

- 実際に $d = 4$ を代入すると、

$$\alpha = 0 \tag{23}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \tag{24}$$

$$\delta = 3 \tag{25}$$

となり、平均場の結果と一致しているように見える。

- しかし、$d > 4$ のときにはこれらの指数は平均場理論と一致せず、上記のスケーリング関係式が一般には正しくないことが示される。
- なぜこのような不一致が生じるのだろうか？
- 第 8 回で述べた Kadanoff 理論では、非有意変数 u の寄与を無視し、磁化のスケーリングを次のように記述した：

$$\begin{aligned} m(t,h) &= \frac{1}{b^d}\frac{\partial}{\partial h} f(b^{y_t}t, b^{y_h}h) \\ &= b^{-d+y_h} m(b^{y_t}t, b^{y_h}h) \end{aligned} \tag{26}$$

2.2. Gauss 模型におけるくりこみ群 (4)

- ここで $h = 0$、$b = t^{-1/y_t}$ と選ぶと、

$$
\begin{aligned}
m(t,0) &= t^{\frac{d-y_h}{y_t}} m(1,0) \\
&= t^{\frac{d-2}{4}} m(1,0)
\end{aligned}
\tag{27}
$$

となるが、このとき $\boxed{m(1,0)\ \text{を定数}}$ と仮定していた点に注意が必要である。

- 実際、$d \geq 4$ における平均場理論では、Ginzburg 項を無視して u を残したまま磁化を求めると、

$$
\frac{\partial f}{\partial m} = 2tm + 4um^3 = 0 \tag{28}
$$

が成り立ち、非自明な解として

$$
m = \sqrt{-\frac{t}{2u}} \tag{29}
$$

が得られる。

2.2. Gauss 模型におけるくりこみ群 (5)

- この結果から明らかなように、$u \to 0$（Gauss 固定点）とすると m は発散し、正則な極限を持たない。したがって $m(1,0)$ を定数と見なすのは不適切である。
- 実際、$m(1,0) \propto \sqrt{1/u}$ であることから、$m(1,0) = m(1,0,u)$ のように u への依存を明示的に含める必要がある。このため自由エネルギー密度も $f(t,h,u)$ として再考すべきである。
- このように $f(t,h,u)$ を用いてスケーリングを再構成すると、

$$
\begin{aligned}
m(t,h,u) &= \frac{1}{b^d}\frac{\partial}{\partial h} f(b^{y_t}t, b^{y_h}h, b^{y_u}u) \\
&= b^{-d+y_h} m(b^{y_t}t, b^{y_h}h, b^{y_u}u) \qquad (30)
\end{aligned}
$$

が得られる。

2.2. Gauss 模型におけるくりこみ群 (6)

- ここで $h=0$, $b=t^{-1/y_t}$ を選ぶと、

$$
\begin{aligned}
m(t,0) &= t^{\frac{d-y_h}{y_t}} m(1,0,t^{-\frac{y_u}{y_t}}u) \\
&= t^{\frac{d-2}{4}} m(1,0,t^{-\frac{4-d}{2}}u) \\
&\propto t^{\frac{d-2}{4}} \sqrt{t^{-\frac{4-d}{2}}u} \\
&= t^{\frac{d-2}{4}} t^{-\frac{4-d}{4}} \sqrt{u} \\
&= t^{\frac{1}{2}} \sqrt{u}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

となり、$d \geq 4$ における平均場の結果（臨界指数 $1/2$）が正しく再現される。

- このように、u は非有意でありながら臨界挙動に影響を与えるため、有意ではないが危険な変数（**dangerous irrelevant variable**）と呼ばれる。
- 次に、指数 δ についても同様に再検討しよう。

2.2. Gauss 模型におけるくりこみ群 (7)

- $t=0$ における磁化に注目すると、スケーリング関係式は

$$\begin{aligned} m(0,h,u) &= \frac{1}{b^d}\frac{\partial}{\partial h} f(0, b^{y_h} h, b^{y_u} u) \\ &= b^{-d+y_h} m(0, b^{y_h} h, b^{y_u} u) \end{aligned} \tag{32}$$

である。ここで $b = h^{-1/y_h}$ を選ぶと、

$$\begin{aligned} m(0,h,u) &= h^{\frac{d-y_h}{y_h}} m(0,1,h^{-\frac{y_u}{y_h}} u) \\ &= h^{\frac{d-\frac{d+2}{2}}{\frac{d+2}{2}}} m(0,1,h^{-\frac{2(4-d)}{d+2}} u) \\ &= h^{\frac{d-2}{d+2}} m(0,1,h^{\frac{2d-8}{d+2}} u) \end{aligned} \tag{33}$$

2.2. Gauss 模型におけるくりこみ群 (8)

- 一方、平均場の Landau 理論では、$t = 0$ における磁化 m は
$$\frac{\partial f}{\partial m} = 4um^3 - h = 0 \tag{34}$$
より、
$$m = \left(\frac{h}{4u}\right)^{1/3} \tag{35}$$
となる。
- この関係式から、$u \to 0$ の極限で正則な振る舞いを示さないことが分かる。よって $m(0,1,u) \propto u^{-1/3}$ と書ける。

2.2. Gauss 模型におけるくりこみ群 (9)

- このとき、全体として磁化は

$$\begin{aligned} m(0,h,u) &\propto h^{\frac{d-2}{d+2}}(h^{\frac{2d-8}{d+2}}u)^{-1/3} \\ &= h^{\frac{d-2}{d+2}+\frac{-2d+8}{3(d+2)}}u^{1/3} \\ &= h^{\frac{3d-6-2d+8}{3(d+2)}}u^{1/3} \\ &= h^{1/3}u^{1/3} \end{aligned} \tag{36}$$

となり、$\delta = 3$ の平均場の結果が回復される。

第 11 回講義資料目次

3. まとめ

本講では、高次元における臨界現象をくりこみ群の枠組みで議論した。

- $d \geq 4$ においては、Gauss 固定点により臨界現象を記述できることに注目し、各変数のスケーリング次元と有意性（relevance）を明らかにした。
- 一方で、スケーリングにおいて「有意」でなくても、固定点で発散し得る変数が存在し、それらは「危険な変数（dangerous variables）」として正則関数の形では扱えないことを確認した。
- 危険な変数を正しく取り扱うことで、$d \geq 4$ における平均場近似の結果をくりこみ群の枠組みからも正確に再現できることが示された。

次回は、$d < 4$ における臨界現象を扱う。自由エネルギーにおける 4 次の非線形項を保持した上で、1-loop 補正による摂動論的計算を通じて、新たに現れる固定点である Wilson – Fisher 固定点の性質を議論する予定である（2 回で完結予定）。