

# 物性理論特論 II 第 12・13 回 運動量空間くりこみ群 (2)(3)

$\phi^4$  模型における **Wilson-Fisher** 固定点と  $\varepsilon$  展開

川崎猛史

大阪大学 D3 センター/ 大学院理学研究科物理学専攻

Last update : July 8, 2025

# 第 12・13 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 $\phi^4$ 模型における 1-loop くりこみ群方程式の導出

- 自由エネルギーの摂動展開
- 1 次摂動
- 2 次摂動
- 1-loop 補正くりこみ群方程式
- Wilson-Fisher 固定点と  $\varepsilon$  展開

## 3 まとめ

## 4 補遺：Wick の定理と Feynman ダイアグラム

# 第 12・13 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 $\phi^4$ 模型における 1-loop くりこみ群方程式の導出

- 自由エネルギーの摂動展開
- 1 次摂動
- 2 次摂動
- 1-loop 補正くりこみ群方程式
- Wilson-Fisher 固定点と  $\varepsilon$  展開

## 3 まとめ

## 4 補遺：Wick の定理と Feynman ダイアグラム

# 1. 講義のスケジュール

- 1 4/15：第 1 回
- 2 4/22：第 2 回
- 3 5/07：第 3 回
- 4 5/13：第 4 回
- 5 5/20：第 5 回
- 6 5/27：第 6 回
- 7 6/03：第 7 回
- 8 6/10：第 8 回
- 9 6/17：第 9 回
- 10 6/24：第 10 回
- 11 7/01：第 11 回
- 12 7/08：第 12 回
- 13 7/15：第 13 回
- 14 7/22：休講
- 15 7/29：第 14 回

# 第 12・13 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 $\phi^4$ 模型における 1-loop くりこみ群方程式の導出

- 自由エネルギーの摂動展開
- 1 次摂動
- 2 次摂動
- 1-loop 補正くりこみ群方程式
- Wilson-Fisher 固定点と  $\varepsilon$  展開

## 3 まとめ

## 4 補遺：Wick の定理と Feynman ダイアグラム

## 2. $\phi^4$ 模型における 1-loop くりこみ群方程式の導出

- 前回は、 $\phi^4$  模型の解析の準備として、 $u = 0$  である Gauss 模型からわずかにずれた状態におけるくりこみ群解析を行った。
- これにより、 $d > 4$  では、 $u$  が非有意変数となり、 $u \rightarrow 0$  となる Gauss 模型が有効であることを確認した。
- 今回は  $d < 4$  での振る舞いを議論する。

## 2.1. 自由エネルギーの摂動展開

### ♣ 自由エネルギーの摂動展開

- 前回に引き続き、 $\phi^4$  模型を考え、自由エネルギーは次のように与える：

$$\beta F[\phi] = \int d^d \mathbf{r} \{ \Lambda^{-2} (\nabla \phi(\mathbf{r}))^2 + t \phi^2(\mathbf{r}) + u \phi^4(\mathbf{r}) \} \quad (1)$$

今回の計算では、Ginzburg 項の係数を  $\Lambda^{-2}$  (勾配の特徴長さが粒子サイズ程度) とすることで以下の計算が簡潔にまとまる。前回議論した通り、この係数は中立変数であるので適当な定数でよい。

- 前回と同様に分配関数は波数空間の経路積分により、次のように定義される：

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-\beta F[\phi]} \quad (2)$$

- また、経路積分の測度は次のように与えられる：

$$\mathcal{D}\phi = \prod_{|\mathbf{q}| < \Lambda} d\tilde{\phi}(\mathbf{q}) \quad (3)$$

## 2.1. 自由エネルギーの摂動展開 (2)

- 秩序変数  $\phi(\mathbf{r})$  は、波数カットオフ  $\Lambda$  (連続体としての最小単位) を導入して以下のように展開できる：

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{|\mathbf{q}| < \Lambda} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \tilde{\phi}(\mathbf{q}) \quad (4)$$

これを高波数成分  $\phi_{>}$  ( $\Lambda/b < |\mathbf{q}| < \Lambda$ ) と、低波数成分  $\phi_{<}$  ( $|\mathbf{q}| < \Lambda/b$ ) に分けてモード分解する。

- 前回,  $d \geq 4$  では  $u$  は Gauss 固定点  $u = 0$  まわりの微小量であり,  $u$  は非有意変数であることから, くりこみを繰り返すことで  $u \rightarrow 0$  に収束することを確認した。(つまり Gauss 模型が妥当。)
- 一方,  $d < 4$  は Gauss 固定点において  $u$  は有意変数となるので今回は  $u = 0$  とはしないが, 特に  $d \sim 4$  ではその寄与が小さいとして  $u$  ( $\phi^4$  の項) に関する摂動展開を考える。



## 2.1. 自由エネルギーの摂動展開 (3)

- くりこみの部分和の手続きを行うために、前回と同様に  $\phi = \phi_{<} + \phi_{>}$  とモード分解し、自由エネルギーを次のように分ける：

$$\beta F[\phi_{<} + \phi_{>}] = \beta F_0[\phi_{<}] + \beta F_0[\phi_{>}] + \beta F_{\text{int}}[\phi_{<}, \phi_{>}] \quad (5)$$

$$\beta F_0[\phi] = \int d^d \mathbf{r} \{ \Lambda^{-2} (\nabla \phi(\mathbf{r}))^2 + t \phi^2(\mathbf{r}) \} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \beta F_{\text{int}}[\phi_{<}, \phi_{>}] &= u \int d^d \mathbf{r} (\phi_{<}(\mathbf{r}) + \phi_{>}(\mathbf{r}))^4 \\ &= u \int d^d \mathbf{r} (\phi_{<}^4(\mathbf{r}) + 4\phi_{<}^3(\mathbf{r})\phi_{>}(\mathbf{r}) \\ &\quad + 6\phi_{<}^2(\mathbf{r})\phi_{>}^2(\mathbf{r}) + 4\phi_{<}(\mathbf{r})\phi_{>}^3(\mathbf{r}) + \phi_{>}^4(\mathbf{r})) \end{aligned} \quad (7)$$

である。

- ここで  $\beta F_0$  は自由場に対応するガウス項， $\beta F_{\text{int}}$  は摂動として扱う相互作用項である。

## 2.1. 自由エネルギーの摂動展開 (4)

- 有効自由エネルギー  $F_{\text{eff}}[\phi_{<}]$  は、高波数成分  $\phi_{>}$  に関する部分 and (＝部分的な分配関数) を取ることで定義される：

$$\begin{aligned} e^{-\beta F_{\text{eff}}[\phi_{<}]} &= \int \mathcal{D}\phi_{>} e^{-\beta F[\phi_{<} + \phi_{>}]} \\ &= e^{-\beta F_0[\phi_{<}]} \int \mathcal{D}\phi_{>} e^{-\beta F_0[\phi_{>}]} e^{-\beta F_{\text{int}}[\phi_{<}, \phi_{>}]} \end{aligned} \quad (8)$$

- ここで、空間次元  $d \sim 4$  では  $\phi^4$  項の寄与は小さいと仮定し、 $F_{\text{int}}$  を摂動的に展開する：

$$e^{-\beta F_{\text{int}}} = 1 - \beta F_{\text{int}} + \frac{1}{2}(\beta F_{\text{int}})^2 + \cdots \quad (9)$$

- 1loop 補正までを考慮する今回の摂動計算においては、 $(\beta F_{\text{int}})^2$  までの項を保持する。

## 2.1. 自由エネルギーの摂動展開 (5)

- 有効自由エネルギーの摂動展開を明示すると：

$$\begin{aligned}
 e^{-\beta F_{\text{eff}}[\phi_<]} &\sim e^{-\beta F_0[\phi_<]} \underbrace{\int \mathcal{D}\phi_> e^{-\beta F_0[\phi_>]}}_{\text{Gaussian ave for } \phi_>} \left( 1 - \beta F_{\text{int}} + \frac{1}{2}(\beta F_{\text{int}})^2 \right) \\
 &= e^{-\beta F_0[\phi_<]} \left( 1 - \langle \beta F_{\text{int}} \rangle_0 + \left\langle \frac{1}{2}(\beta F_{\text{int}})^2 \right\rangle_0 \right) \quad (10)
 \end{aligned}$$

- ここで  $\langle \dots \rangle_0$  は、高波数モード  $\phi_>$  に関するガウス分布

$$P[\phi_>] \propto e^{-\beta F_0[\phi_>]} = \exp \left( -\beta \int_> d\mathbf{q} (\Lambda^{-2} + t) \tilde{\phi}(\mathbf{q})^2 \right) \quad (11)$$

による平均を意味する。ここで、 $\int_> d\mathbf{q} := \int_{\Lambda/b < |\mathbf{q}| < \Lambda} d\mathbf{q}$  であり、低波数側の積分を  $\int_< d\mathbf{q}$  とする。

## 2.1. 自由エネルギーの摂動展開 (6)

- 式 (10) の両辺の対数を取ることで、有効自由エネルギーの表式が得られる：

$$\begin{aligned}
 \beta F_{\text{eff}}[\phi_<] &= \beta F_0[\phi_<] - \log \left( 1 - \underbrace{\langle \beta F_{\text{int}} \rangle_0 - \left\langle \frac{1}{2} (\beta F_{\text{int}})^2 \right\rangle_0}_{\text{微小量}} \right) \\
 &\sim \beta F_0[\phi_<] + \underbrace{\langle \beta F_{\text{int}} \rangle_0 - \left\langle \frac{1}{2} (\beta F_{\text{int}})^2 \right\rangle_0}_{\text{log の 1 次}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\langle \beta F_{\text{int}} \rangle_0)^2}_{\text{log の 2 次}} \\
 &= \beta F_0[\phi_<] + \underbrace{\langle \beta F_{\text{int}} \rangle_0}_{\text{摂動 1 次}} - \underbrace{\left\langle \frac{1}{2} (\beta F_{\text{int}})^2 \right\rangle_0 + \frac{1}{2} (\langle \beta F_{\text{int}} \rangle_0)^2}_{\text{摂動 2 次}}
 \end{aligned} \tag{12}$$

## 2.1. 自由エネルギーの摂動展開 (7)

- また、相互作用項  $F_{\text{int}} = u \int d^d \mathbf{r} \phi^4(\mathbf{r})$  において、 $\phi(\mathbf{r}) = \phi_{<}(\mathbf{r}) + \phi_{>}(\mathbf{r})$  を代入すると、高波数と低波数の混合項を含む多くの項が出現する。
- とりわけ、 $u$  の次数に応じて摂動の 1 次, 2 次項 ( $u, u^2$ ) とする。
- これら摂動項には、 $\phi_{<}$  の次数が 2 次, 4 次となる項が複数存在し、それらは結合定数  $t, u$  の補正項として寄与する。

## 2.2. 1 次摂動

### ♣ 1 次摂動

- 式 (12) に現れる摂動 1 次項を評価する。
- 摂動 1 次項は以下のように展開できる：

$$\begin{aligned}
 \langle \beta F_{\text{int}} \rangle_0 &= u \int d^d \mathbf{r} \langle \phi^4(\mathbf{r}) \rangle_0 \\
 &= u \int d^d \mathbf{r} \langle (\phi_{<}(\mathbf{r}) + \phi_{>}(\mathbf{r}))^4 \rangle_0 \\
 &= u \int d^d \mathbf{r} \{ \phi_{<}^4(\mathbf{r}) + 6 \langle \phi_{>}^2(\mathbf{r}) \rangle_0 \phi_{<}^2(\mathbf{r}) + \langle \phi_{>}^4(\mathbf{r}) \rangle_0 \} \quad (13)
 \end{aligned}$$

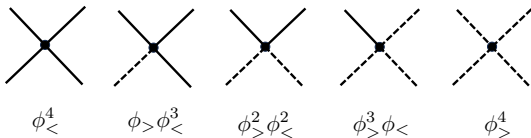
- 高波数モード  $\phi_{>}$  に対してガウス平均をとり、奇数次数の平均が 0 であることを用いた：

$$\langle \phi_{>}(\mathbf{r}) \rangle_0 = \langle \phi_{>}^3(\mathbf{r}) \rangle_0 = 0 \quad (14)$$

- 各項の展開構造は図 1 および図 2 に示す。
- Feynman ダイアグラムの使い方については補遺を参照せよ。

### 2.2. 1次摂動 (2)

- 摂動 1 次ではダイアグラムの意義は限定的だが，2 次以降では重要な役割を果たす。



**図 1:**  $\phi^4(\mathbf{r}) = (\phi_{<}(\mathbf{r}) + \phi_{>}(\mathbf{r}))^4$  の展開項に対応するツリー構造。実線は  $\phi_{<}$ 、波線は  $\phi_{>}$  を表す。

## 2.2. 1 次摂動 (3)

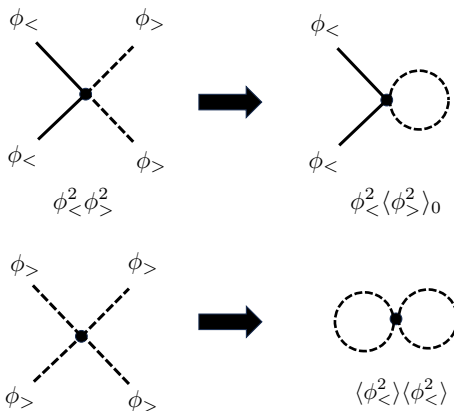


図 2:  $\phi^4(\mathbf{r})$  に対する高波数モードのガウス平均。非零となるのは 2 項のみであり、特に  $\langle \phi_{>}^2 \rangle_0 \phi_{<}^2$  の項は  $t$  の補正項に対応し、 $\langle \phi_{>}^4 \rangle_0 = 3 \langle \phi_{>}^2 \rangle_0 \langle \phi_{>}^2 \rangle_0$  の項は定数である。



## 2.2. 1 次摂動 (4)

- 補正項  $\delta t$  は  $\phi_{<}^2(\mathbf{r})$  の係数として現れ、次のように評価される：

$$\begin{aligned}\delta t \int d^d \mathbf{r} \phi_{<}^2(\mathbf{r}) &= 6u \int d^d \mathbf{r} \langle \phi_{>}^2(\mathbf{r}) \rangle_0 \phi_{<}^2(\mathbf{r}) \\ &= 6u \int d^d \mathbf{r} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}) \phi_{<}^2(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (15)$$

- ここで  $G(\mathbf{r})$  は高波数モードに関する 2 点相関関数：

$$G(\mathbf{r}) := \langle \phi_{>}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) \phi_{>}(\mathbf{r}_0) \rangle_0 \quad (16)$$

と定義され、 $G(\mathbf{0}) = \langle \phi_{>}^2(\mathbf{r}_0) \rangle_0$  は自己相関関数を表す。

## 2.2. 1 次摂動 (5)

- この自己相関関数をフーリエ変換で評価すると：

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{0}) &= \frac{1}{2} \int_{>} d^d \mathbf{q} \frac{1}{\Lambda^{-2} q^2 + t} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} dq \frac{S_d q^{d-1}}{\Lambda^{-2} q^2 + t} \\
 &\sim \frac{S_d}{2(2\pi)^d} \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} dq q^{d-1} \frac{\Lambda^2}{q^2} \left( 1 - t \frac{\Lambda^2}{q^2} \right) \quad (17)
 \end{aligned}$$

ここで  $S_d q^{d-1}$  は  $q$  次元球の表面積である。

## 2.2. 1 次摂動 (6)

- 第 1 項の積分は、 $b \sim 1$  として：

$$\begin{aligned}
 \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} dq q^{d-1} \frac{\Lambda^2}{q^2} &= \Lambda^2 \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} dq q^{d-3} \\
 &= \Lambda^2 \left[ \frac{1}{d-2} q^{d-2} \right]_{\Lambda/b}^{\Lambda} \\
 &= \Lambda^d \cdot \frac{1}{d-2} \left( 1 - b^{2-d} \right) \\
 &= \Lambda^d \cdot \frac{1}{d-2} \left( 1 - e^{(2-d) \log b} \right) \\
 &\sim \Lambda^d \log b
 \end{aligned} \tag{18}$$

- 同様に補正項の第 2 積分も：

$$\int_{\Lambda/b}^{\Lambda} dq q^{d-1} \frac{\Lambda^4}{q^4} \sim \Lambda^d \log b \tag{19}$$

## 2.2. 1 次摂動 (7)

- よって  $G(\mathbf{0})$  は, 定数  $k := \frac{S_d}{2(2\pi)^d} \Lambda^d$  とすることで, 以下のように評価される:

$$G(\mathbf{0}) = \frac{S_d}{2(2\pi)^d} \Lambda^d \log b(1-t) = k \log b(1-t) \quad (20)$$

- これより,  $t$  の補正は次のように得られる:

$$\boxed{\delta t = 6uk \log b(1-t)} \quad (21)$$

となり,

$$\delta t \int d^d \mathbf{r} \phi_{<}^2(\mathbf{r}) = 6uk \log b(1-t) \int d^d \mathbf{r} \phi_{<}^2(\mathbf{r}) \quad (22)$$

となり, Gauss 近似の時にくらべ,  $t$  の係数が  $\delta t$  だけ補正される。

## 2.3. 2 次摂動

### ♣ 2 次摂動

- 式 (12) で議論した通り、2 次摂動項は以下のように 2 次キュムラントの形をとる：

$$-\frac{1}{2} \left\{ \langle (\beta F_{\text{int}})^2 \rangle_0 - (\langle \beta F_{\text{int}} \rangle_0)^2 \right\} \quad (23)$$

- この項は、Feynman ダイアグラムで考えると、頂点が 2 つ、各頂点に 4 本の線が接続された構造を平均化したものに対応する。
- 上記の第 1 項および第 2 項には、\*\*頂点が繋がっていない（非連結）\*\*ダイアグラムが共通して現れ、符号の反転によって打ち消し合う。
- また、1 次摂動と同様に、奇数次の平均は

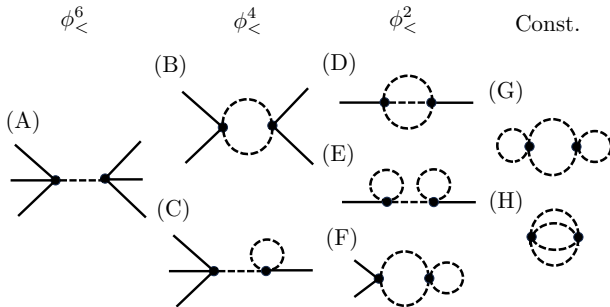
$$\langle \phi \rangle_0 = \langle \phi^3 \rangle_0 = \dots = 0 \quad (24)$$

よりすべて消える。

- よって、寄与を考慮すべき有意なダイアグラムは図 3 のような形である。

## 2.3. 2 次摂動 (2)

- この中で、 $t$  の補正に寄与するものもあるが、1-loop 近似の範囲では無視する。
- (C), (F) は、計算により 0 となる（詳細解析はレポート課題で問う予定）。
- 定数項は物理的に寄与しないため無視する。
- したがって、**寄与を考慮すべきは (B) の  $u$  に対する補正のみ**である。



## 2.3. 2 次摂動 (3)

- 図 3: (A)  $\phi_{>}^6$  項：高次であり、4 次までの寄与を考慮する今回の近似範囲では非有意。  
 (B)  $\phi_{>}^4$  項： $u$  の補正に寄与。  
 (C)  $\phi_{>}^4$  項：計算により 0 となる。  
 (D)  $\phi_{>}^2$  項：2-loop に対応し、 $t$  の補正となるが、 $u^2$  に比例する高次項のため 1-loop 補正の範囲では無視。  
 (E) 同上。  
 (F) 同上。また実際計算すると (C) と同様に 0 となる。  
 (G)(H)：定数項であり物理的には無視してよい。

以下、図 3 (B) の項を計算する。

- もともとの項は、式 (23) における

$$-\frac{1}{2}(6u\phi_{<}(\mathbf{r})^2\phi_{>}(\mathbf{r})^2)\times(6u\phi_{<}(\mathbf{r}')^2\phi_{>}(\mathbf{r}')^2) \quad (25)$$

を平均し、空間積分した以下の項である：

$$-18u\int d^d\mathbf{r}\int d^d\mathbf{r}'\phi_{<}(\mathbf{r})^2\phi_{<}(\mathbf{r}')^2\langle\phi_{>}(\mathbf{r})^2\phi_{>}(\mathbf{r}')^2\rangle_0 \quad (26)$$

## 2.3. 2 次摂動 (4)

- Wick の定理より、

$$\langle \phi_{>}(\mathbf{r})^2 \phi_{>}(\mathbf{r}')^2 \rangle_0 = 2 \langle \phi_{>}(\mathbf{r}) \phi_{>}(\mathbf{r}') \rangle_0^2 + \langle \phi_{>}(\mathbf{r})^2 \rangle_0 \langle \phi_{>}(\mathbf{r}')^2 \rangle_0 \quad (27)$$

であり、右辺第 2 項は非連結ダイアグラムに対応し、キャンセルされる。

- したがって、図 3 (B) の寄与は、係数も含めて

$$-36u \int d^d \mathbf{r} \int d^d \mathbf{r}' \phi_{<}(\mathbf{r})^2 \phi_{<}(\mathbf{r}')^2 \langle \phi_{>}(\mathbf{r}) \phi_{>}(\mathbf{r}') \rangle_0^2 \quad (28)$$

となる。

- ここで、

$$\langle \phi_{>}(\mathbf{r}) \phi_{>}(\mathbf{r}') \rangle_0^2 = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 \quad (29)$$

である。



## 2.3. 2 次摂動 (5)

- 次に、式 (28) を重心座標  $\mathbf{R}$  と相対座標  $\mathbf{r}$  に座標変換する。

$$\begin{aligned}
 & -36u \int d^d \mathbf{R} \int d^d \mathbf{r} \phi_{<} \left( \mathbf{R} - \frac{1}{2} \mathbf{r} \right)^2 \phi_{<} \left( \mathbf{R} + \frac{1}{2} \mathbf{r} \right)^2 G(\mathbf{r})^2 \\
 & \sim -36u \int d^d \mathbf{R} \int d^d \mathbf{r} \phi_{<}(\mathbf{R})^4 G(\mathbf{r})^2
 \end{aligned} \tag{30}$$

となり、 $\phi_{<}$  の 4 次の寄与をもつ。ここでは、 $\phi_{<}$  は低波数モードであり、 $\mathbf{r}$  に対して滑らかに変化するので  $\phi_{<}(\mathbf{R} \pm \frac{1}{2}\mathbf{r})^2 \approx \phi_{<}(\mathbf{R})^2$  と近似できる (0 次勾配展開という: 摂動項なので荒くてよい)。

## 2.3. 2 次摂動 (6)

- 次に  $\int d^d \mathbf{r} G(\mathbf{r})^2$  はフーリエ変換を用いると、

$$\begin{aligned}
 \int d^d \mathbf{r} G(\mathbf{r})^2 &= \int d^d \mathbf{r} \int_{>} \frac{d^d \mathbf{q}_1}{2(2\pi)^d} \int_{>} \frac{d^d \mathbf{q}_2}{2(2\pi)^d} \frac{1}{\Lambda^{-2} q_1^2 + t} \frac{1}{\Lambda^{-2} q_2^2 + t} e^{i(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \cdot \mathbf{r}} \\
 &= \int_{>} \frac{d^d \mathbf{q}}{4(2\pi)^d} \left( \frac{1}{\Lambda^{-2} q^2 + t} \right)^2 (2\pi)^d \\
 &\sim \int_{>} \frac{d^d \mathbf{q}}{4(2\pi)^d} \left( \frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^2 \\
 &\sim \frac{S_d}{4(2\pi)^d} \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} dq q^{d-1} \cdot \frac{1}{q^4} \\
 &\sim \frac{1}{2} k \log b
 \end{aligned} \tag{31}$$

ここでは、 $\int d^d \mathbf{r} e^{i(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \cdot \mathbf{r}} = (2\pi)^d \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)$  である。また、 $b \sim 1$  であるとし、1 次摂動における積分計算 (式 (18)) と同様の手続きをとり  $\log b$  を出している。

## 2.3. 2 次摂動 (7)

- よって、結合定数  $u$  の補正を  $\delta u$  とすると、

$$\delta u \int d^d \mathbf{r} \phi_{<}(\mathbf{r})^4 = -18ku^2 \log b \int d^d \mathbf{r} \phi_{<}(\mathbf{r})^4 \quad (32)$$

となり、Gauss 近似の時にくらべ、 $u$  の係数が  $\delta u$  だけ補正される。

- またここまで  $\delta t$  および  $\delta u$  の補正を考えたが、考慮したのは 1-loop までの寄与である。

## 2.4. 1-loop 補正くりこみ群方程式

### ♣ 1-loop 補正くりこみ群方程式

- 高波数モードに関する部分和を施した有効自由エネルギーは、1-loop 補正の範囲で次のように記述される：

$$\beta F_{\text{eff}} \sim A^> \int d^d \mathbf{r} \{ \Lambda^{-2} (\nabla_{<} \phi(\mathbf{r}))^2 + (t + \delta t) \phi_{<}^2(\mathbf{r}) + (u + \delta u) \phi_{<}^4(\mathbf{r}) \} \quad (33)$$

- これをスケール変換してモードの範囲を元に戻し ( $\phi_{<} \rightarrow \phi$ ), またマクロな自由エネルギーは不変 ( $F = F'$ ) であることを用いると：

$$\begin{aligned} F &= A \int d^d \mathbf{r} \{ \Lambda^{-2} (\nabla \phi(\mathbf{r}))^2 + (t + \delta t) \phi^2(\mathbf{r}) + (u + \delta u) \phi^4(\mathbf{r}) \} \\ &= A' \int d^d \mathbf{r}' \{ \Lambda'^{-2} (\nabla' \phi'(\mathbf{r}'))^2 + t' \phi'^2(\mathbf{r}') + u' \phi'^4(\mathbf{r}') \} = F' \end{aligned} \quad (34)$$

## 2.4. 1-loop 補正くりこみ群方程式 (2)

- Gauss 固定点まわりでのスケール変換を考慮すると、結合定数は次のように変換される：

$$t' = b^{y_t}(t + \delta t) \quad (35)$$

$$u' = b^{y_u}(u + \delta u) \quad (36)$$

- ここで、前回と同様にスケーリング次元は以下の通りである：

$$y_t = 2 \quad (37)$$

$$y_u = -d + 4 =: \varepsilon \quad (38)$$

- 以上より、1-loop レベルでのくりこみ群方程式は次のように得られる：

$$t' = b^2 (t + 6uk \log b \cdot (1 - t)) \quad (39)$$

$$u' = b^\varepsilon (u - 18ku^2 \log b) \quad (40)$$

- このくりこみ群方程式から、 $d < 4$  においては Gauss 固定点が不安定化し、 $u$  がゼロから離れて流れる。その結果、近傍に新たな Wilson - Fisher 固定点が出現する。

## 2.4. 1-loop 補正くりこみ群方程式 (3)

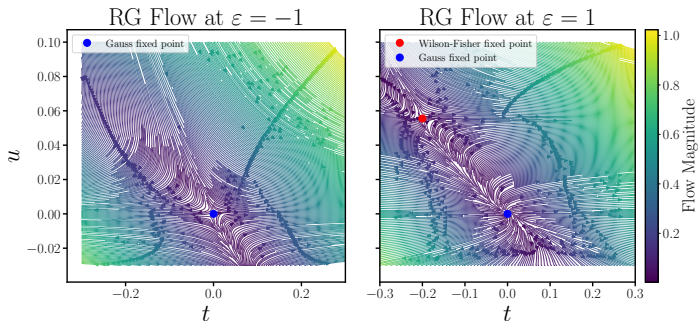


図 4:  $\varepsilon = -1$  ( $d = 5$ ) および  $\varepsilon = +1$  ( $d = 3$ ) において, 式 (39) および式 (40) の RG フローを図示したものである。特に  $u$  について,  $d > 4$  では Gauss 固定点が安定であるが,  $d < 4$  では不安定化し, 新たな固定点 (Wilson-Fisher 固定点) に吸収される。

## 2.5. Wilson-Fisher 固定点と $\varepsilon$ 展開

### ♣ Wilson-Fisher 固定点と $\varepsilon$ 展開

以下, 前節で求めたくりこみ群方程式 (式 (39), (40)) を解く。また,  $d \lesssim 4$  として  $\varepsilon = 4 - d$  を微小量として評価する。このような近似を **\*\* $\varepsilon$  展開\*\*** という。

- $u \neq 0$  において Gauss 固定点が不安定化することから,  $u$  の値が変化し, 新たな固定点に吸収される。
- ここでの固定点を  $u^*$  とする。
- このとき,  $u$  に関するくりこみ群方程式は

$$u^* = b^\varepsilon (u^* - 18k(u^*)^2 \log b) \quad (41)$$

## 2.5. Wilson-Fisher 固定点と $\varepsilon$ 展開 (2)

である。いま  $u^* \neq 0$  であるので、両辺を  $u^*$  で割り、 $b \sim 1$  のもとで評価すると、

$$\begin{aligned} 1 &= b^\varepsilon (1 - 18ku^* \log b) \\ &= \left(e^{\varepsilon \log b}\right) (1 - 18ku^* \log b) \\ &\sim (1 + \varepsilon \log b) (1 - 18ku^* \log b) \\ &\sim 1 + \varepsilon \log b - 18ku^* \log b \end{aligned} \tag{42}$$

となる。

- よって固定点  $u^*$  について解くと、

$$\boxed{u^* = \frac{\varepsilon}{18k}} \tag{43}$$

となる新たな固定点 [Wilson-Fisher (WF) 固定点] を得る。



## 2.5. Wilson-Fisher 固定点と $\varepsilon$ 展開 (3)

- 次に  $u$  のくりこみ群方程式を，新たな固定点  $u^*$  まわりで線形化すると，

$$\begin{aligned}\delta u' &= \frac{\partial}{\partial u} \{b^\varepsilon (u^* - 18k(u^*)^2 \log b)\}_{u=u^*} \delta u \\ &= b^\varepsilon (1 - 36ku^* \log b) \delta u \\ &= b^\varepsilon (1 - 2\varepsilon \log b) \delta u \\ &\sim b^\varepsilon e^{-2\varepsilon \log b} \delta u \\ &= b^\varepsilon b^{-2\varepsilon} \delta u \\ &= b^{-\varepsilon} \delta u\end{aligned}\tag{44}$$

を得る。よって，WF 固定点周りにおいては  $u$  は非有意変数となり，RG フローは固定点に収束する。

- したがって  $t$  のくりこみ群方程式では  $u$  は非有意変数として  $u^*$  の値を代入する。

## 2.5. Wilson-Fisher 固定点と $\varepsilon$ 展開 (4)

- それに対応する  $t$  の固定点  $t^*$  は,

$$\begin{aligned}
 t^* &= b^2 (t^* + 6ku^* \log b - 6ku^* t^* \log b) \\
 &= b^2 \left( t^* + \frac{\varepsilon}{3} \log b - \frac{\varepsilon}{3} t^* \log b \right) \\
 &\sim b^2 \left( t^* + \frac{\varepsilon}{3} \log b \right)
 \end{aligned} \tag{45}$$

である。ここでは高次項を 1 つ落とした。

- すると、これを解くことで  $b \sim 1$  とすれば、 $\log$  の微分の定義  $\frac{\log b - \log 1}{b-1} \rightarrow \frac{1}{b} \rightarrow 1$  が隠れていることに注意し,

$$\begin{aligned}
 t^* &= \frac{b^2}{1 - b^2} \frac{\varepsilon}{3} \log b \\
 &= -\frac{1 - \log b}{1 - b} \cdot \frac{b^2}{1 + b} \cdot \frac{\varepsilon}{3} \\
 &\sim -\frac{\varepsilon}{6}
 \end{aligned} \tag{46}$$

となる。

## 2.5. Wilson-Fisher 固定点と $\varepsilon$ 展開 (5)

- よって  $t^*$  周りで  $t$  に関するくりこみ群方程式を線形化すると,

$$\begin{aligned}
 \delta t' &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ b^2 (t + 6ku^* \log b - 6ku^* t \log b) \right\}_{t=t^*} \delta t \\
 &= \left( 1 - \frac{\varepsilon}{3} \log b \right) \delta t \\
 &\sim b^2 e^{-\frac{\varepsilon}{3} \log b} \delta t \\
 &= b^2 b^{-\frac{\varepsilon}{3}} \delta t \\
 &= b^{2-\frac{\varepsilon}{3}} \delta t
 \end{aligned} \tag{47}$$

となり,  $t$  のスケール次元は

$$\boxed{y_t = 2 - \frac{\varepsilon}{3}} \tag{48}$$

となる。

## 2.5. Wilson-Fisher 固定点と $\varepsilon$ 展開 (6)

- いま、相関長の臨界指数は  $\nu = \frac{1}{y_t}$  であるので、WF 固定点での臨界指数は、

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2 - \frac{\varepsilon}{3}} \sim \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{6}\right)} \quad (49)$$

となる。

- ここで  $\varepsilon = 1$  (すなわち 3 次元) とすれば、

$$\nu \sim 0.583 \quad (50)$$

を得る。この値は、平均場での値  $\nu_{\text{MF}} = \frac{1}{2}$  から、精密計算値  $\nu \sim 0.66$  に近づいている。

# 第 12・13 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 $\phi^4$ 模型における 1-loop くりこみ群方程式の導出

- 自由エネルギーの摂動展開
- 1 次摂動
- 2 次摂動
- 1-loop 補正くりこみ群方程式
- Wilson-Fisher 固定点と  $\varepsilon$  展開

## 3 まとめ

## 4 補遺：Wick の定理と Feynman ダイアグラム

### 3. まとめ

- 本資料では、 $d < 4$  である  $\phi^4$  模型において、 $\varepsilon = 4 - d$  を微小量として摂動展開を行い平均場理論からのずれを議論した。
- このような摂動による部分和の計算から、結合係数  $t$  や  $u$  が補正されることを確認し、Wilson-Fisher 固定点が安定化することを確認した。
- この補正を含めたくりこみ群方程式を線形解析することで、スケール次元を求めることで平均場からのずれを考慮した臨界指数を算出することができた。

# 第 12・13 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 $\phi^4$ 模型における 1-loop くりこみ群方程式の導出

- 自由エネルギーの摂動展開
- 1 次摂動
- 2 次摂動
- 1-loop 補正くりこみ群方程式
- Wilson-Fisher 固定点と  $\varepsilon$  展開

## 3 まとめ

## 4 補遺：Wick の定理と Feynman ダイアグラム

## 4. 補遺：Wick の定理と Feynman ダイアグラム

### ♣ Wick の定理

#### Wick の定理

ガウス分布に対する平均を  $\langle \cdots \rangle_0$  とする。このとき、多体相関関数は以下のように、2 体相関関数の積の和に分解できる：

$$\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle_0 = \langle \phi_1 \phi_2 \rangle_0 \langle \phi_3 \phi_4 \rangle_0 + \langle \phi_1 \phi_3 \rangle_0 \langle \phi_2 \phi_4 \rangle_0 + \langle \phi_1 \phi_4 \rangle_0 \langle \phi_2 \phi_3 \rangle_0 \quad (51)$$

より一般には、

$$\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \cdots \phi_{2n} \rangle_0 = \sum_{\text{全ペア分け}} \prod_{\text{ペア } (i,j)} \langle \phi_i \phi_j \rangle_0 \quad (\text{全 } (2n-1)!! \text{ 通り}) \quad (52)$$

より身近な例として、

$$\langle \phi_1^4 \rangle_0 = 3 (\langle \phi_1^2 \rangle_0)^2 \quad (53)$$

がある。



## 4. 補遺：Wick の定理と Feynman ダイアグラム (2)

### ♣ Feynman ダイアグラム

- Feynman ダイアグラムは、もともと場の量子論において摂動展開の各項を視覚的に表すために導入された図である。
- ダイアグラムは頂点と線から構成される。頂点は相互作用（たとえば  $\phi^4$  のような項）を、線は粒子の伝播（相関関数）を表す。
- 線は次の 2 種類に分類される：
  - 外線：ある頂点から出て終端している線。1 点関数や外部脚に対応する。
  - 内線：2 つの頂点を結ぶ線。2 点相関関数に対応する。
- 例として、以下の関数を考える：

$$\phi_1^2 \phi_2^2 \quad (54)$$

これに対して、ガウス分布に関する平均を取ると、Wick の定理により

$$\langle \phi_1^2 \phi_2^2 \rangle_0 = 2 (\langle \phi_1 \phi_2 \rangle_0)^2 + \langle \phi_1^2 \rangle_0 \langle \phi_2^2 \rangle_0 \quad (55)$$

となる（詳しくは図 5 を参照）。

- 平均を取る前の  $\phi_1^2 \phi_2^2$  の項は、4 つの場（線）から構成され、頂点同士が結合していないツリー構造を持つ。

## 4. 補遺：Wick の定理と Feynman ダイアグラム (3)

- 平均を取ることで，自己相関はループを持つ構造に，相互相関は 2 点間を結ぶ線（プロパゲーター）としてダイアグラム上に現れる。

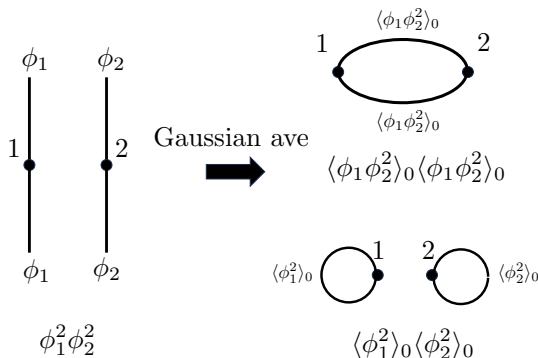


図 5: 関数  $\phi_1^2 \phi_2^2$  のツリー構造と， $\langle \phi_1^2 \phi_2^2 \rangle_0$  のファインマンダイアグラム。  
 上段は  $2 (\langle \phi_1 \phi_2 \rangle_0)^2$ ，下段は  $\langle \phi_1^2 \rangle_0 \langle \phi_2^2 \rangle_0$  に対応。