

# 物性理論特論 II 第 10 回

## 実空間くりこみ群 (2)

くりこみ群理論の一般化, Migdal-Kadanoff くりこみ群

川崎猛史

大阪大学 D3 センター / 大学院理学研究科物理学専攻

Last update : June 24, 2025

# 第 10 回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
- 2 今回の内容
- 3 くりこみ理論の一般化
  - 一般次元 Ising 模型を例に
  - くりこみの線形変換
  - 変数の有意性
- 4 Migdal-Kadanoff のくりこみ群 (MKRG)
- 5 まとめ

# 第 10 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 今回の内容

## 3 くりこみ理論の一般化

- 一般次元 Ising 模型を例に
- くりこみの線形変換
- 変数の有意性

## 4 Migdal-Kadanoff のくりこみ群 (MKRG)

## 5 まとめ

# 1. 講義のスケジュール

- 1 4/15：第 1 回
- 2 4/22：第 2 回
- 3 5/07：第 3 回
- 4 5/13：第 4 回
- 5 5/20：第 5 回
- 6 5/27：第 6 回
- 7 6/03：第 7 回
- 8 6/10：第 8 回
- 9 6/17：第 9 回
- 10 6/24：第 10 回
- 11 7/01：第 11 回
- 12 7/08：第 12 回
- 13 7/15：第 13 回 7/22 は休講
- 14 7/29：第 14 回
- 15 8/5 予備 第 15 回

# 第 10 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 今回の内容

## 3 くりこみ理論の一般化

- 一般次元 Ising 模型を例に
- くりこみの線形変換
- 変数の有意性

## 4 Migdal-Kadanoff のくりこみ群 (MKRG)

## 5 まとめ

## 2. 今回の内容

前回は、1 次元 Ising 模型を題材として、くりこみ群による解析を行った。

- 1 次元 Ising 模型に対して、くりこみ群の手法を適用することで、解析解と整合する臨界指数を得ることができた。
- 今回は、その手法を出発点として、くりこみ群の理論的枠組みをより一般化する。
- この一般化に基づき、空間次元が 2 以上の場合における Ising 模型に対する実空間くりこみ群の解析を行う。
- このとき、分配関数の厳密な計算が困難になるため、近似手法の導入が必要となる。
- 本講義では、Migdal-Kadanoff 近似を導入することで、2 次元以上の Ising 模型の臨界指数を評価する。

# 第 10 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 今回の内容

## 3 くりこみ理論の一般化

- 一般次元 Ising 模型を例に
- くりこみの線形変換
- 変数の有意性

## 4 Migdal-Kadanoff のくりこみ群 (MKRG)

## 5 まとめ

### 3. くりこみ理論の一般化

ここでは、2次元以上の次元をもつ一般的 Ising 模型を例として、より一般的なくりこみ群の理論体系を説明する。



## 3.1. 一般次元 Ising 模型を例に

### ♣ 一般次元 Ising 模型を例に

- 本節では、次のような Ising 模型のハミルトニアン

$$\beta H = -K \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - h \sum_i S_i \quad (1)$$

のもと、外場がない状況、すなわち  $h = 0$  を仮定する。

### 3.1. 一般次元 Ising 模型を例に (2)

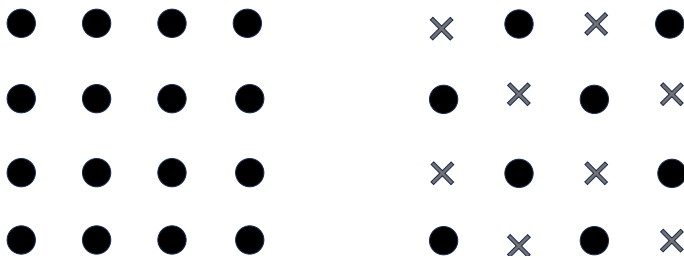


図 1: 一般次元の Ising 模型におけるくりこみ変換。左：元のスピン自由度，右：交互に部分和をとるスピン (×) を定義。

- 図 1 のように、スピンを交互に配置された  $\circ$  および  $\times$  に分類し、 $\times$  に対応する自由度について部分和を取る。

### 3.1. 一般次元 Ising 模型を例に (3)

- この操作により、くりこみ後の有効ハミルトニアンは次のような形となる：

$$\beta H' = -K' \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - K'' \sum_A S_i S_j - K^{(3)} \sum_B S_i S_j S_k S_l + \cdots \quad (2)$$

- ここで、 $A$  は次近接サイト間のペア、 $B$  は縮約後の単位正方格子に含まれるスピンの組を表す。部分和を取ることによって、元のハミルトニアンには存在しなかった新たな相互作用項や有効な結合定数が出現する。
- 以下では、式 (2) を簡潔に導出する。

### 3.1. 一般次元 Ising 模型を例に (4)

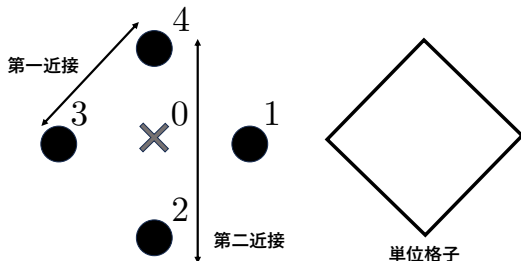


図 2: スピン  $S_0$  縮約の際の近接スピン  $S_1, S_2, S_3, S_4$  を定義する。その際の第一近接, 第二近接, 単位格子。

- 図 2 の様に, スピン  $S_0$  の隣接スピンを  $S_1, S_2, S_3, S_4$  とする。

### 3.1. 一般次元 Ising 模型を例に (5)

- このとき、スピン  $S_0$  の部分和は以下になる：

$$\begin{aligned}\sum_{S_0=\pm 1} e^{K S_0 (S_1+S_2+S_3+S_4)} &= e^{K(S_1+S_2+S_3+S_4)} + e^{-K(S_1+S_2+S_3+S_4)} \\ &=: e^{g(S_1, S_2, S_3, S_4)} =: Z_{\text{local}}\end{aligned}\quad (3)$$

- この分配関数は、 $\{S_i\}$  の同時反転に対して不変であるため、 $g(S_1, S_2, S_3, S_4)$  はスピンの偶数次の項で展開できる。したがって、

$$Z_{\text{local}} = A \exp \left\{ K_2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} S_i S_j + K_4 S_1 S_2 S_3 S_4 \right\} \quad (4)$$

### 3.1. 一般次元 Ising 模型を例に (6)

- 特に 2 次の項を、第一近接・第二近接項に分けて書き直すと、

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{local}} = A \exp \left\{ \underbrace{K_2(S_1 S_2 + S_1 S_4 + S_2 S_3 + S_3 S_4)}_{\text{第一近接}} \right. \\
 \quad + \underbrace{K_2(S_1 S_3 + S_2 S_4)}_{\text{第二近接}} \\
 \quad \left. + \underbrace{K_4 S_1 S_2 S_3 S_4}_{\text{単位格子}} \right\} \quad (5)
 \end{aligned}$$

- これをすべての  $\times$  の自由度に対して適用すると、全体の分配関数は次のように表される：

$$Z_{N'} := \sum_{\{S_i\}} \tilde{A} \exp \left\{ K' \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j + K'' \sum_A S_i S_j + K^{(3)} \sum_B S_i S_j S_k S_l \right\} \quad (6)$$

- このとき、 $Z_{\text{local}}$  との対応から、係数には  $K' = 2K_2$ ,  $K'' = K_2$ ,  $K^{(3)} = K_4$  が得られる。(証明終了)

### 3.1. 一般次元 Ising 模型を例に (7)

#### ♣ クリこみ変換

以下、くりこみ変換の定式化を考える。ここでは、ハミルトニアン の 結合定数の組みとスピン演算子の組みを分けて考える。スピン演算子の組みの性質はよくわかっているので、くりこみの際に注目するのは結合点数の組みの変化である。

- いま、結合定数の組を次のベクトルとして表す：

$$\mathbf{u} := (K', K'', K^{(3)}, \dots) \quad (7)$$

- スピン演算子の組  $(\sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j, \sum_A S_i S_j, \sum_B S_i S_j S_k S_l, \dots)$  をベクトル  $\mathbf{O}$  とすると、ハミルトニアンは次のように書ける：

$$H = \mathbf{u} \cdot \mathbf{O} \quad (8)$$

$$H' = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{O}' \quad (9)$$

- クリこみ変換は非線形写像  $R$  を用いて、

$$\mathbf{u}' = R(\mathbf{u}) \quad (10)$$

## 3.1. 一般次元 Ising 模型を例に (8)

- 臨界点において、くりこみを繰り返すと固定点  $\mathbf{u}^*$  に到達する：

$$\mathbf{u}^* = R(\mathbf{u}^*) \quad (11)$$

- 固定点近傍での結合定数の変化  $\delta\mathbf{u}$  を用いると、

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \delta\mathbf{u} \quad (12)$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u}^* + \delta\mathbf{u}' \quad (13)$$

- このとき、次の線形関係が成り立つ：

$$\delta\mathbf{u}' = T(\mathbf{u}^*) \delta\mathbf{u} \quad (14)$$

ここで  $T(\mathbf{u}^*)$  は定数行列であるので線形変換である。

- 線形変換  $T(\mathbf{u}^*)$  は  $R$  のヤコビ行列として表される。

$$T(\mathbf{u}^*) = \left. \frac{\partial R(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} \quad (15)$$



### 3.1. 一般次元 Ising 模型を例に (9)

- 以下、式 (14), (15) の導出を簡単に示す：

#### 式 (14), (15) の導出

- 式 (10) - (13) に基づき、 $R$  を Taylor 展開して 1 次の寄与まで残すと、

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^* + \delta\mathbf{u}' &= R(\mathbf{u}^* + \delta\mathbf{u}) \\ &\sim R(\mathbf{u}^*) + \left. \frac{\partial R(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} \delta\mathbf{u}\end{aligned}\quad (16)$$

- 固定点の定義  $\mathbf{u}^* = R(\mathbf{u}^*)$  を用いれば、以下の線形変換

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{u}' &= \left. \frac{\partial R(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} \delta\mathbf{u} \\ &= T(\mathbf{u}^*)\delta\mathbf{u}\end{aligned}\quad (17)$$

を得る。

## 3.2. くりこみの線形変換

### ♣ くりこみの線形変換

固定点近傍のパラメータベクトルの変化  $\delta \mathbf{u}$  に対して、線形変換  $T(\mathbf{u}^*)$  を施すことにより  $\delta \mathbf{u}'$  が得られることを前節で導出した。この線形変換を対角化することで、各パラメータの寄与を独立に取り扱うことができる。

- いま、 $T(\mathbf{u}^*)$  は定数行列であるので線形変換である。この  $i$  番目の固有値を  $\lambda_i$ 、対応する固有ベクトルを  $\phi_i$  とすると、次の永年方程式が成り立つ：

$$T(\mathbf{u}^*)\phi_i = \lambda_i\phi_i \quad (18)$$

ここで、固有ベクトルからなる行列  $\Phi := (\phi_1, \phi_2, \dots)$  を用いると、 $i$  番目の単位直交ベクトル  $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots)^T$  に対して、

$$T(\mathbf{u}^*)\Phi\mathbf{e}_i = \lambda_i\Phi\mathbf{e}_i \quad (19)$$

となる。

## 3.2. くりこみの線形変換 (2)

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}T(\mathbf{u}^*)\Phi\mathbf{e}_i &= \lambda_i\Phi^{-1}\Phi\mathbf{e}_i \\ &= \lambda_i\mathbf{e}_i\end{aligned}\tag{20}$$

よって、 $\Phi^{-1}T(\mathbf{u}^*)\Phi = \text{diag}(\{\lambda_i\})$  は対角行列である。したがって、

$$T(\mathbf{u}^*) = \Phi \text{diag}(\{\lambda_i\}) \Phi^{-1}\tag{21}$$

と表される。

- この結果を式 (14) に代入して対角化を行うと、

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{u}' &= T(\mathbf{u}^*)\delta\mathbf{u} \\ &= \Phi \text{diag}(\{\lambda_i\}) \Phi^{-1}\delta\mathbf{u}\end{aligned}\tag{22}$$

となる。ここで両辺に  $\Phi^{-1}$  を左からかけると、

## 3.2. くりこみの線形変換 (3)

$$\Phi^{-1} \delta \mathbf{u}' = \text{diag}(\{\lambda_i\}) \Phi^{-1} \delta \mathbf{u} \quad (23)$$

と書ける。ここで新たな変数ベクトルを

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{U} &:= \Phi^{-1} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{U}' &:= \Phi^{-1} \delta \mathbf{u}' \end{aligned} \quad (24)$$

と定義すれば、

$$\delta \mathbf{U}' = \text{diag}(\{\lambda_i\}) \delta \mathbf{U} \quad (25)$$

となる。

## 3.2. くりこみの線形変換 (4)

- このようにして得られる変数ベクトル  $\delta U$  は、すべての成分が互いに独立に変化することがわかる。そのとき、各固有値はスケーリング因子  $b$  の冪で表され、

$$\lambda_i = b^{y_i} \quad (26)$$

の形をとる。

ここでは固有値  $\{\lambda_i\}$  をすべて正の実数と仮定しているが、一般には変換を  $T = T_1 T_2$  と 2 段階に分解したとき、それぞれの固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  に対して  $\lambda = \lambda_1 \lambda_2$  の関係が成り立つ必要がある。よって、全体として一貫した変換とするためには、個々の変換の固有値も正定値であり、かつそれらはスケーリング因子  $b$  の冪として表現されるべきである。

- これより、線形変換されたパラメータの組み  $\delta U$  の  $i$  成分は

$$\delta U'_i = b^{y_i} \delta U_i \quad (27)$$

と表され、このような変数は無数に存在しうる。

### 3.3. 変数の有意性

#### ♣ 変数の有意性

- 前節では、くりこみ変換を固定点近傍で線形化し、それを対角化することで、各変数を互いに独立に扱える形へと変換した。
- このとき、スケーリング因子  $b$  に対して固有値  $\lambda_i = b^{y_i}$  が対応し、 $y_i$  をスケール次元として解釈できることを確認した。
- Kadanoff のスケーリング理論では、自由エネルギーの引数となる変数は臨界現象を支配する「有意な変数」である。これらの変数は、固定点からわずかにずれていても、くりこみ変換を繰り返すことで次第に固定点から遠ざかっていく。
- このような性質を持つ変数に対応するスケール次元は

$$y_i > 0 \quad (28)$$

でなければならない、このような変数は \*\*有意な変数 (relevant variable) \*\* と呼ばれる。

- 一方、次のような変数も存在する：

### 3.3. 変数の有意性 (2)

$$\boxed{y_i = 0} : \text{中立変数 (marginal variable)} \quad (29)$$

$$\boxed{y_i < 0} : \text{有意でない変数 (irrelevant variable)} \quad (30)$$

- 中立変数は、くりこみ変換を繰り返しても変化せず、その寄与が維持されるかどうかは状況に依存する。
- 有意でない変数は、くりこみを繰り返すことで固定点に吸収され、臨界現象に対する影響は消失する。

以下に、変数の分類とその特徴を表にまとめる：

表 1: 変数の分類とスケーリング次元

分類	$y_i$ の値	物理的意味
有意変数 (relevant)	$y_i > 0$	固定点から離れ、臨界現象を支配
中立変数 (marginal)	$y_i = 0$	変化せず、寄与は場合による
有意でない変数 (irrelevant)	$y_i < 0$	固定点に吸収され、影響は消失

### 3.3. 変数の有意性 (3)

- この分類は、臨界点近傍における物理現象の支配的自由度を選別する上で極めて重要であり、実験・数値解析・理論のいずれにおいても基本的な指針となる。
- 実際、Kadanoff 理論において自由エネルギーの引数として用いられるのは有意変数であり、具体例としてスケーリング温度  $t$  や外場  $h$ 、一次元 Ising 模型における  $x = e^{-4K}$  や  $\epsilon = 1 - e^{-2h}$  などが挙げられる。
- このようなくりこみ変換の考え方は、Ginzburg - Landau 理論における  $\phi^4$  モデルなどにも適用可能であり、その場合、自由エネルギー中の秩序変数汎関数に含まれる多項式の係数が、くりこみによって流動（変化）していく。
- 本節では、くりこみ操作の一般的な方法論を学び、その意義を理解できたと期待する。しかし実際に計算を行う際には、多くの困難が生じる。
- これらの困難を克服するためには、**近似が不可欠**であり、次節以降では、近似を用いた代表的なくりこみ計算手法を紹介する。



# 第 10 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 今回の内容

## 3 くりこみ理論の一般化

- 一般次元 Ising 模型を例に
- くりこみの線形変換
- 変数の有意性

## 4 Migdal-Kadanoff のくりこみ群 (MKRG)

## 5 まとめ

## 4. Migdal-Kadanoff のくりこみ群 (MKRG)

### ♣ Migdal-Kadanoff のくりこみ群 (MKRG)

前節では、くりこみ操作の一般的な方法論を学んだ。一方で、実際の計算には多くの困難が伴うため、適切な近似手法を導入することが重要である。本節では、一般次元の Ising 模型に対するくりこみ群解析の代表的な近似手法である Migdal-Kadanoff のくりこみ群 (MKRG) 計算を紹介する。以下では、外場が存在しない場合 ( $h = 0$ ) の二次元 Ising 模型を対象とする。

- MKRG では、くりこみ操作に先立って一部のスピン自由度を縮約し、その過程で失われる相互作用（ボンド）を、残されたボンドへ適切に再分配する（図 3）。この操作により、系を一次元的構造として再配置することが可能となる。
- $h = 0$  の一次元 Ising 模型については、第 9 回で扱ったように、縮約から得られる恒等式に基づいて変数の変換は次のように表される（第 9 回で導いた恒等式参照）：

$$Ae^{K'} = e^{2K} + e^{-2K} \quad (31)$$

$$Ae^{-K'} = 2 \quad (32)$$

## 4. Migdal-Kadanoff のくりこみ群 (MKRG) (2)

- 式 (31) および (32) の和を 2 で割ると、次式が得られる：

$$A \cosh K' = \frac{e^{2K} + e^{-2K} + 2}{2} = \frac{(e^K + e^{-K})^2}{2} \quad (33)$$

- 同様に、差を 2 で割ると：

$$A \sinh K' = \frac{e^{2K} + e^{-2K} - 2}{2} = \frac{(e^K - e^{-K})^2}{2} \quad (34)$$

- 式 (33) および (34) の比を取ることで、次の再帰関係式が導かれる：

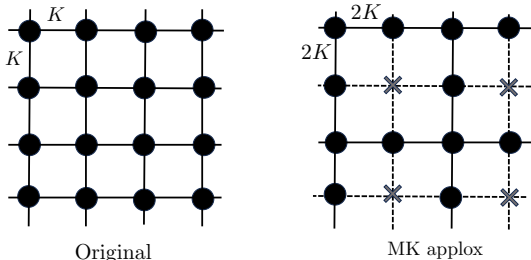
$$\tanh K' = (\tanh K)^2 \quad (35)$$

- ただし、MKRG では図 3 に示すように、縮約の際に結合定数が  $2K$  に対応するよう再分配された後、それを  $K'$  に写像する。このため再帰関係式は以下のように修正される：

$$\boxed{\tanh K' = (\tanh 2K)^2} \quad (36)$$

## 4. Migdal-Kadanoff のくりこみ群 (MKRG) (3)

- ここで、元のサイトと Migdal-Kadanoff (MK) 近似によって構成された擬似的なサイトとの対応に注目する。MK 近似により問題は次元鎖に帰着される。これは非常に粗い近似であるが、近似誤差を抑えるため、縮約に伴い残されたスピンの相互作用を  $2K$  に補正している。



**図 3:** 元の格子上のサイトと、Migdal-Kadanoff (MK) 近似によって再構成された擬似サイトとの対応関係。MK 近似を施すことで、問題を次元鎖として扱うことができる。近似誤差を軽減するため、縮約操作により残されたスピンの相互作用は  $2K$  に補正されている。

## 4. Migdal-Kadanoff のくりこみ群 (MKRG) (4)

- 次に、 $u = \tanh K$  とおくことで、式 (36) に基づく くりこみ群方程式を導出する。
- まず、式 (36) の右辺は次のように展開される：

$$\begin{aligned}
 (\tanh 2K)^2 &= \left( \frac{e^{2K} - e^{-2K}}{e^{2K} + e^{-2K}} \right)^2 \\
 &= \left( \frac{2(e^K + e^{-K})(e^K - e^{-K})}{(e^K + e^{-K})^2 + (e^K - e^{-K})^2} \right)^2 \\
 &= \left( \frac{2 \tanh K}{1 + \tanh^2 K} \right)^2 \\
 &= \left( \frac{2u}{1 + u^2} \right)^2
 \end{aligned} \tag{37}$$

## 4. Migdal-Kadanoff のくりこみ群 (MKRG) (5)

- これにより、以下のくりこみ群方程式が得られる：

$$\boxed{u' = \left( \frac{2u}{1+u^2} \right)^2} \quad (38)$$

- ここで、くりこみ群方程式の固定点を  $u^*$  とする。固定点からのずれを  $\epsilon$  とおくと、

$$u' = u^* + \epsilon' \quad (39)$$

$$u = u^* + \epsilon \quad (40)$$

と表される。

## 4. Migdal-Kadanoff のくりこみ群 (MKRG) (6)

- 固定点は,

$$\boxed{u^* = \left( \frac{2u^*}{1 + (u^*)^2} \right)^2} \quad (41)$$

の解であり, 適宜 4 次方程式などを解けば  $u^* \sim 0.297$  (臨界温度  $T_c/J = 3.27$ ,  $J$  は結合定数, 厳密解は  $T_c/J = 2.27$ ) が臨界現象を示唆する解として見つかる。そのほか  $u^* = 0, 1$  なども見つかるが, 高温, 低温極限ゆえに除外する。

- このとき, この固定点  $u^* \sim 0.297$  周りでくりこみ群方程式 (式 (41)) を線形化すると,

$$u^* + \epsilon' \sim \left( \frac{2u^*}{1 + (u^*)^2} \right)^2 + \left. \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{2u}{1 + u^2} \right)^2 \right|_{u=u^*} \epsilon \quad (42)$$

- よって,  $\epsilon$  に関する線形化の結果は次のようになる:

$$\begin{aligned} \epsilon' &\sim \frac{8u^*(1 - (u^*)^2)}{(1 + (u^*)^2)^3} \epsilon \\ &= b^y \epsilon \end{aligned} \quad (43)$$

## 4. Migdal-Kadanoff のくりこみ群 (MKRG) (7)

- したがって、 $b = 2$  のもとで、固定点  $u^* \sim 0.296$  を用いると、スケーリング次元は次のように得られる：

$$y_\epsilon = \log_2 \left( \frac{8u^*(1 - (u^*)^2)}{(1 + (u^*)^2)^3} \right) \sim 0.747 \quad (44)$$

- Kadanoff のスケーリング理論によれば、相関長の臨界指数  $\nu$  は

$$\nu = \frac{1}{y_\epsilon} \sim 1.388 \quad (45)$$

となる。二次元 Ising 模型における厳密解は  $\nu = 1$  (平均場では  $\nu = \frac{1}{2}$ ) であるため、おおむね良好な一致が得られているが、次元が上がるほど厳密解とは乖離するので 3 次元以上においては別のアプローチを採用すべきである。



# 第 10 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 今回の内容

## 3 くりこみ理論の一般化

- 一般次元 Ising 模型を例に
- くりこみの線形変換
- 変数の有意性

## 4 Migdal-Kadanoff のくりこみ群 (MKRG)

## 5 まとめ

## 5. まとめ

2次元以上の次元をもつ Ising モデルについてのくりこみ群解析をおこなった。

- くりこみ理論に関する一般的な理論体系をまとめた。
- Migdal-Kadanoff 近似を施したモデルでの臨界指数を具体的に計算したところ、厳密解との乖離はあるが、まずまずの一致が得られることを確認した。
- ただしこの手の近似は、次元が上がるほど厳密解とは乖離する。

次回からは、Ginzburg -Langau 模型に対するくりこみ群解析を行うことで4次元近傍における臨界指数を求める。