

物性理論特論Ⅱ 第5回

Landau 自由エネルギーと相転移・臨界現象

川崎猛史

大阪大学 D3 センター/ 大学院理学研究科物理学専攻

Last update : May 25, 2025

第5回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
- 2 今回の内容
- 3 Landau 理論
 - Landau の現象論
- 4 Landau 理論を用いた臨界指数の計算
 - 自発磁化と臨界指数 β
 - 磁気感受率と臨界指数 γ
 - 臨界等温線と臨界指数 δ
 - 比熱と臨界指数 α
 - Landau 理論における臨界指数のまとめ
- 5 外場依存性
 - 低温領域での外場に対する 1 次転移
 - 外場依存性の臨界近傍での振る舞い
- 6 まとめ

第5回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 今回の内容

3 Landau 理論

■ Landau の現象論

4 Landau 理論を用いた臨界指数の計算

■ 自発磁化と臨界指数 β

■ 磁気感受率と臨界指数 γ

■ 臨界等温線と臨界指数 δ

■ 比熱と臨界指数 α

■ Landau 理論における臨界指数のまとめ

5 外場依存性

■ 低温領域での外場に対する 1 次転移

■ 外場依存性の臨界近傍での振る舞い

6 まとめ

1. 講義のスケジュール

- 1 4/15 : 第 1 回
- 2 4/22 : 第 2 回
- 3 5/07 : 第 3 回
- 4 5/13 : 第 4 回
- 5 5/20 : 第 5 回
- 6 5/27 : 第 6 回
- 7 6/03 : 第 7 回
- 8 6/10 : 第 8 回
- 9 6/17 : 第 9 回
- 10 6/24 : 第 10 回
- 11 7/01 : 第 11 回
- 12 7/08 : 第 12 回
- 13 7/15 : 第 13 回 7/22 は休講
- 14 7/29 : 第 14 回
- 15 8/5 予備 第 15 回

第5回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 今回の内容

3 Landau 理論

- Landau の現象論

4 Landau 理論を用いた臨界指数の計算

- 自発磁化と臨界指数 β
- 磁気感受率と臨界指数 γ
- 臨界等温線と臨界指数 δ
- 比熱と臨界指数 α
- Landau 理論における臨界指数のまとめ

5 外場依存性

- 低温領域での外場に対する 1 次転移
- 外場依存性の臨界近傍での振る舞い

6 まとめ

2. 今回の内容

今回は、Landau 理論を扱う。

- 前回、Ising 模型の平均場近似により、Landau 型自由エネルギーを導出した。
- 今回は、こうした自由エネルギーを、系の対称性に基づき現象論的に導出する方法を紹介する。
- さらに、この Landau 自由エネルギーを用いて、平均場（Ising 模型と同等）におけるさまざまな物理量の臨界現象を議論する。

第5回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 今回の内容

3 Landau 理論

■ Landau の現象論

4 Landau 理論を用いた臨界指数の計算

■ 自発磁化と臨界指数 β

■ 磁気感受率と臨界指数 γ

■ 臨界等温線と臨界指数 δ

■ 比熱と臨界指数 α

■ Landau 理論における臨界指数のまとめ

5 外場依存性

■ 低温領域での外場に対する 1 次転移

■ 外場依存性の臨界近傍での振る舞い

6 まとめ

3.1. Landau の現象論

♣ Landau の現象論

- 前回、Ising 模型の平均場近似により、磁化 m の冪の関数で表される自由エネルギー密度 f_L を導出した。
- Landau は、 f_L に対して現象論的な解釈を与え、より汎用的な理論体系を構築した。
- Ising 模型では、スピン変数は \mathbb{Z}_2 対称性 ($S_i = \pm 1$) をもつため、磁化 m も正負に対して対称であり、 $m \rightarrow -m$ の変換に対して f_L は不変となる。
- すなわち、 f_L は m の偶関数でなければならない。
- $T > T_c$ では、 $m = 0$ が無秩序状態の安定点となる。
- $T < T_c$ では、温度の低下にともない m_0 or $-m_0$ の自発磁化が連続的に増大する (磁化を小さいと仮定してよい)。
- これらを踏まえ、Landau は f_L を $m = 0$ 周りの低次展開で近似できると考えた。

3.1. Landau の現象論 (2)

- これにより磁気相転移を再現する最も単純な自由エネルギー密度は、 m の 4 次まで展開された

$$f_L := f_0(T) + \frac{1}{2}a(T)m^2 + \frac{b(T)}{4}m^4 - hm \quad (1)$$

であることが以上の現象論的議論から推察される。

- なお外場 h は極めて小さいと仮定している (イジング模型の自己無撞着方程式の展開を思い出そう)。
- まずは $h = 0$ を考える。ここでは $T = T_c$ を境に f_L の関数の形状 (極値が 1 つから 3 つに) が変化するように係数を決める。
- 極値条件は

$$\frac{df_L}{dm} = a(T)m + b(T)m^3 = m(a(T) + b(T)m^2) = 0 \quad (2)$$

である。

3.1. Landau の現象論 (3)

- $b(T)$ を正の定数とすれば、極値 m は
 - $T > T_c$ では $m = 0$ のみ
 - $T < T_c$ では $m = 0$ と $m = \pm \sqrt{-a(T)/b(T)} = \pm m_0$ とすることができる。
- 特に $m = \pm \sqrt{-a(T)/b(T)}$ は、自発磁化を表し、このような解を得るためには、 $a(T)$ が
 - $T > T_c$ では正
 - $T < T_c$ では負となればよいことがわかる。
- このように、自発磁化が連続的に増大する状況においては、 $T = T_c$ で $a(T)$ の正負が連続的に切り替わると考えることが自然である。
- すると $T \simeq T_c$ では $a(T) \sim 0$ であり、 T_c の周りで

$$a(T) = a_0(T - T_c), \quad a_0 > 0 \quad (3)$$

と展開できる。

3.1. Landau の現象論 (4)

- 以上を満たす自由エネルギーの形は、前回示した図 1 のように温度によって変化する。

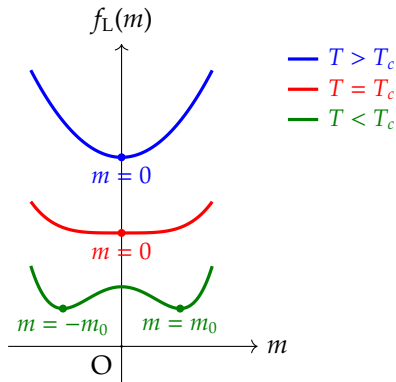


図 1: 各温度領域における Landau 自由エネルギー $f_L(m)$ の形

第5回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 今回の内容

3 Landau 理論

■ Landau の現象論

4 Landau 理論を用いた臨界指数の計算

■ 自発磁化と臨界指数 β

■ 磁気感受率と臨界指数 γ

■ 臨界等温線と臨界指数 δ

■ 比熱と臨界指数 α

■ Landau 理論における臨界指数のまとめ

5 外場依存性

■ 低温領域での外場に対する 1 次転移

■ 外場依存性の臨界近傍での振る舞い

6 まとめ

4.1. 自発磁化と臨界指数 β

♣ 自発磁化の導出

- ここでは、Landau 自由エネルギーから、臨界現象における臨界指数を求める。
- まずは前回も扱った自発磁化を求めよう。
- 外場 $h = 0$ のとき、極値条件は

$$\frac{df_L}{dm} = a(T)m + b(T)m^3 = 0 \quad (4)$$

となる。

- 自明な解 $m = 0$ のほか、非自明な解として

$$m_0^2 = -\frac{a(T)}{b(T)} \quad (5)$$

が得られる ($T < T_c$)。

4.1. 自発磁化と臨界指数 β (2)

- $a(T) = a_0(T - T_c)$ ($a_0 > 0$)、 $b(T)$ は臨界性をもたない正数であるので

$$m_0 \propto (T_c - T)^{1/2} \quad (6)$$

となる。

- よって、臨界指数 β_{MF} は

$$\boxed{\beta_{\text{MF}} = \frac{1}{2}} \quad (7)$$

4.2. 磁気感受率と臨界指数 γ

♣ 磁気感受率の導出

ここでは、有限の磁場 $|h| > 0$ を与える際の磁場応答を考える。

- 有限 h を与えた際の磁化は以下のように応答する

$$\begin{aligned} m(h) &= m(h=0) + \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{h=0} h + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 m}{\partial h^3} \right|_{h=0} h^3 + O(h^5) \\ &= m(h=0) + \chi h + \chi^{(3)} h^3 + O(h^5) \end{aligned} \quad (8)$$

などと書ける。ここで偶数次が存在しないのは、磁場の反転に対して磁化も同様に反転するためである。

- このように磁気感受率 χ は、上記展開における 1 次項である線形応答係数として

$$\chi = \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{h \rightarrow 0} \quad (9)$$

で定義される。 $\chi^{(3)}$ は非線形感受率などという。非線形現象を扱う際はこういった非線形感受率に注目することがある。

- ここでは熱平衡状態で実現される磁化 m に対する (線形) 磁気感受率 χ を求める。

4.2. 磁気感受率と臨界指数 γ (2)

- 熱平衡状態にある m は

$$\frac{df_L}{dm} = a(T)m + b(T)m^3 - h = 0 \quad (10)$$

を満たす。

- $T > T_c$ において $h = 0$ では $m = 0$ であることに注意すると、上式の両辺を h で微分し $h \rightarrow 0$ の極限をとることで

$$a(T)\chi + \underbrace{3b(T)m^2\chi}_{=0} - 1 = 0 \quad (11)$$

よって、

$$\chi = \frac{1}{a(T)} \propto \frac{1}{T - T_c} = (T - T_c)^{\gamma_{MF} = -1} \quad (12)$$

となる。

- $T < T_c$ において $m = m_0$ の磁気感受率をもとめる。

4.2. 磁気感受率と臨界指数 γ (3)

- これも

$$\left. \frac{df_L}{dm} \right|_{m=m_0} = a(T)m_0 + b(T)m_0^3 - h = 0 \quad (13)$$

を満たす。

- 両辺 h で微分し $h \rightarrow 0$ の極限をとると

$$a(T)\chi + 3b(T)m_0^2\chi - 1 = \chi(a(T) + 3b(T)m_0^2) - 1 = 0 \quad (14)$$

となる。これを解くと、

$$\chi = \frac{1}{a(T) + 3b(T)m_0^2} \quad (15)$$

である。ここで $a(T)$ および $3b(T)m_0^2$ が、ともに $\propto t = \frac{T_c - T}{T_c}$ であるので

$$\chi \propto \frac{1}{T_c - T} = (T_c - T)^{-1} \quad (16)$$

となる。

4.2. 磁気感受率と臨界指数 γ (4)

- 以上をまとめると，臨界点近傍では一般的に

$$\chi \propto |T_c - T|^{\gamma_{\text{MF}} = -1} \quad (17)$$

を得る。これは **Curie-Weiss 則** と呼ばれる関係式である。

- よって、臨界指数 γ_{MF} は

$$\boxed{\gamma_{\text{MF}} = 1} \quad (18)$$

4.3. 臨界等温線と臨界指数 δ

♣ 臨界等温線と臨界指数 δ

ここでは、臨界点直上での磁化の磁場応答が非線形になることを示す。

- 臨界温度 $T = T_c$ において、 $a(T) = 0$ であるので平衡状態を満たす極値条件は

$$b(T_c)m^3 = h \quad (19)$$

となる。

- ここで $b(T_c) > 0$ であるので、

$$m \propto h^{1/\delta_{MF}=1/3} \quad (20)$$

となる。

- よって、臨界指数 δ_{MF} は

$$\boxed{\delta_{MF} = 3} \quad (21)$$

4.4. 比熱と臨界指数 α

♣ 比熱と臨界指数 α

ここでは、比熱の臨界異常を議論する。多くの臨界現象においては臨界点で比熱が発散することが知られている。平均場理論でもそのような振る舞いが見られるか確かめる。

- $h = 0$ のもとで平均場自由エネルギー f_L は

$$f_L = f_0(T) + \frac{1}{2}a(T)m^2 + \frac{b(T)}{4}m^4 \quad (22)$$

である。

- 定積比熱 C_V は

$$C_V = T \frac{\partial S}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 f_L}{\partial T^2} \quad (23)$$

で定義される。

- $a(T)$ の T 依存 ($a(T) = a_0(T - T_c)$) に注意して、以下の2つの場合を考える：

4.4. 比熱と臨界指数 α (2)

- $T > T_c$ のとき : $m = 0$ なので

$$f_L = f_0(T) \quad (24)$$

より、 C_V は $f_0(T)$ の 2 階微分

$$C_V = -T \frac{\partial^2 f_0}{\partial T^2} \quad (25)$$

である。

- $T < T_c$ のとき : $m^2 = -a(T)/b$ であり、

$$\begin{aligned} f_L &= f_0(T) + \frac{1}{2}a(T)m^2 + \frac{b}{4}m^4 \\ &= f_0(T) + \frac{1}{2}a(T)\left(-\frac{a(T)}{b}\right) + \frac{b}{4}\left(\frac{a(T)}{b}\right)^2 \\ &= f_0(T) - \frac{a(T)^2}{4b} \end{aligned} \quad (26)$$

4.4. 比熱と臨界指数 α (3)

- よって、 $T < T_c$ では f_L に $a(T)^2$ が含まれるため、 T に関して 2 階微分すると

$$-T \frac{\partial^2 f_L}{\partial T^2} = -T \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial T^2} - \frac{\partial^2}{\partial T^2} \frac{a_0^2 (T - T_c)^2}{4b} \right) \sim -T \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial T^2} + \frac{a_0^2}{2b} \right) \quad (27)$$

すなわち、 c は T_c で不連続な跳びを持つ（ジャンプする）が、発散はしないことがわかった。

- したがって

$$\boxed{\alpha_{MF} = 0} \quad (28)$$

であり、平均場理論は現実の臨界現象との乖離が見られる。

- とはいえ、多くの本質的な振る舞いが定性的には再現できている点は忘れてはいけない。
- 本講義では次回以降、平均場からのずれの寄与を議論する。

4.5. Landau 理論における臨界指数のまとめ

表 1: Landau 理論における主要な臨界指数のまとめ

物理量	臨界指数	現象
比熱 $c \sim T - T_c ^{-\alpha_{\text{MF}}}$	$\alpha_{\text{MF}} = 0$	比熱の跳び (不連続)
自発磁化 $m_0 \sim (T_c - T)^{\beta_{\text{MF}}}$	$\beta_{\text{MF}} = 1/2$	自発磁化の消失
磁気感受率 $\chi \sim T - T_c ^{-\gamma_{\text{MF}}}$	$\gamma_{\text{MF}} = 1$	感受率の発散
臨界等温線 $m \sim h^{1/\delta_{\text{MF}}} (T = T_c)$	$\delta_{\text{MF}} = 3$	臨界等温線の非線形性

第5回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 今回の内容

3 Landau 理論

■ Landau の現象論

4 Landau 理論を用いた臨界指数の計算

■ 自発磁化と臨界指数 β

■ 磁気感受率と臨界指数 γ

■ 臨界等温線と臨界指数 δ

■ 比熱と臨界指数 α

■ Landau 理論における臨界指数のまとめ

5 外場依存性

■ 低温領域での外場に対する 1 次転移

■ 外場依存性の臨界近傍での振る舞い

6 まとめ

5.1. 低温領域での外場に対する 1 次転移

♣ 低温領域での外場に対する 1 次転移

- Landau 自由エネルギーは、磁化が温度に対する臨界現象のみならず磁場 h 依存性において 1 次転移することを示す。
- $h \neq 0$ のとき、Landau 自由エネルギーの極値条件は

$$a(T)m + b(T)m^3 - h = 0 \quad (29)$$

である。したがって、これを整理すると

$$h = a(T)m + b(T)m^3 \quad (30)$$

である。この関数は m の 3 次関数であり、 h を準静的に変化させると $h = 0$ で磁化は不連続に変化する (図 2 左)。

- このことは、第 3 回で扱った共通接線構成および Maxwell の等面積則と同様であり、上向・下向磁化の共存が起こる。

5.1. 低温領域での外場に対する 1 次転移 (2)

- また、第 3 回では紹介しなかったが、 h を
有限速度で（動的に）変化させるとヒステリシスが見られるようになる。（ヒステリシスは第 3 回の気液転移の系でも見られる。）（図 2 右）
- これは、準安定状態（自由エネルギーが極小をとるが最小ではない状態）を有限時間維持されることが起因となる（図 3）。
- 準安定時間での維持時間が外場変化の特徴時間より十分長ければヒステリシスが観測される（実験的にはよく起こりうる）。

5.1. 低温領域での外場に対する 1 次転移 (3)

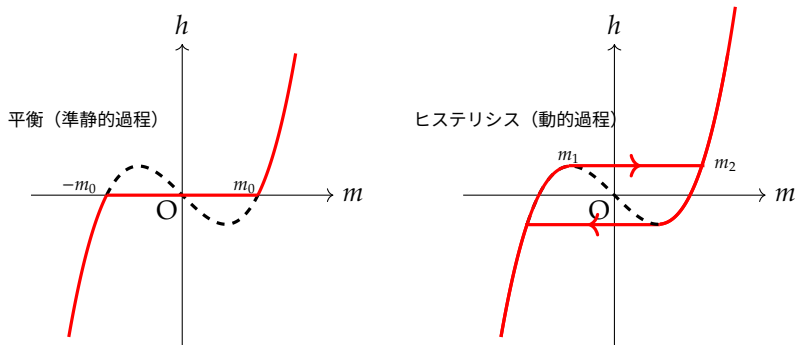


図 2: 左：温度が臨界点以下で、準静的に外場 h を変化させた時の磁化 m の応答。中央の不安定領域（破線）は実現されず、 $-m_0$ および m_0 の間で共存する。右：外場 h を有限速度で上げ下げしたときの磁化 m のヒステリシス。準安定状態が保持されるため、履歴依存性が現れる。ヒステリシスの大きさは、外場を変調させる速度に依存する。図は最速で変化させた時の振る舞い。

5.2. 外場依存性の臨界近傍での振る舞い

♣ 外場依存性の臨界近傍での振る舞い

- このような一次転移は $T \geq T_c$ で消える。
- 特に $T = T_c$ では $a(T_c) = 0$ のため、 $h = bm^3$ に従い、曲線は滑らかに原点を通る。
- $m \propto h^{1/3}$ であり、 h の増大にともない、 $h = 0$ において急峻に (m 正方向に) 立ち上がり、磁気感受率の発散を示唆する (図 4)。

5.2. 外場依存性の臨界近傍での振る舞い (2)

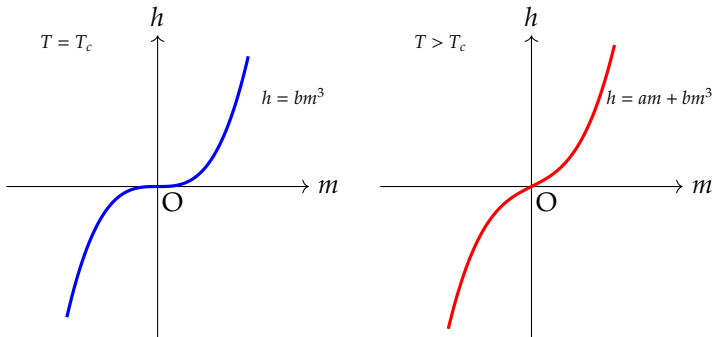


図 4: 左：臨界温度 $T = T_c$ において、 $h = bm^3$ に従う滑らかな応答。原点で磁気感受率 ($\chi = \frac{\partial m}{\partial h}|_{h=0}$) の発散を示唆する。右：高温相 ($T > T_c$) では、 $a > 0$ のため $h = am + bm^3$ に従い、 m は外場 h に対して単調に増加する。磁気感受率は有限である。

第5回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 今回の内容

3 Landau 理論

■ Landau の現象論

4 Landau 理論を用いた臨界指数の計算

■ 自発磁化と臨界指数 β

■ 磁気感受率と臨界指数 γ

■ 臨界等温線と臨界指数 δ

■ 比熱と臨界指数 α

■ Landau 理論における臨界指数のまとめ

5 外場依存性

■ 低温領域での外場に対する 1 次転移

■ 外場依存性の臨界近傍での振る舞い

6 まとめ

6. まとめ

- 臨界現象を現象論的に説明する Landau 理論を紹介した。
- 磁化，比熱，磁気感受率の臨界指数を見積もった。
- 外場応答における相転移を議論した。

次回：空間情報を取り入れた Ginzburg-Landau 理論を扱う。