物性理論特論 II 第 6 回
Ginzburg-Landau の自由エネルギー

川﨑猛史

大阪大学 D3 センター/ 大学院理学研究科物理学専攻

Last update：July 31, 2025

第 6 回講義資料目次

第 6 回講義資料目次

1. 講義のスケジュール

1. 4/15：第 1 回
2. 4/22：第 2 回
3. 5/07：第 3 回
4. 5/13：第 4 回
5. 5/20：第 5 回
6. 5/27：第 6 回
7. 6/03：第 7 回
8. 6/10：第 8 回
9. 6/17：第 9 回
10. 6/24：第 10 回
11. 7/01：第 11 回
12. 7/08：第 12 回
13. 7/15：第 13 回 7/22 は休講
14. 7/29：第 14 回
15. 8/5 予備 第 15 回

第 6 回講義資料目次

2. 今回の内容

今回は Ginzburg-Landau 理論を扱う。

- 前回は Landau 自由エネルギーから臨界指数を導出した。
- Landau 理論は空間一様を仮定し、空間的揺らぎを記述できない。
- 今回は Landau 自由エネルギーを拡張し、空間的臨界揺らぎが臨界点で発散することを示す。
- さらに，空間揺らぎの大きさに注目することで，次元を下げていった際に，平均場理論が破綻しはじめる空間次元（上部臨界次元）を具体的に求める (Ginzburg 基準)。

第 6 回講義資料目次

3.1. Ginzburg-Landau の自由エネルギー

♣ **Ginzburg-Landau** の自由エネルギー

- Landau 理論を空間一様を仮定していた。
- 空間一様の場合，Landau 理論は平均場理論と整合した。
- 平均場からのずれや空間揺らぎを議論するために，Landau 理論を空間変化を含めて拡張したものが Ginzburg-Landau 理論である。
- いま，Landau の自由エネルギーは磁化などの物理量が緩やかに変化している場合，連続空間での記述に拡張し，空間依存性を取り入れることが可能である。
- ここで磁化の空間依存性を顕に考慮し，とりわけ強磁性イジング模型においては，空間的にスピンが揃うことが好まれることから，磁化が空間的に変化することをエネルギー的に損であるとする。
- このことを考慮した最も簡単は自由エネルギーは，$m(\mathbf{r})$ の汎関数として

$$F = \int \mathrm{d}\mathbf{r} \left[f_L(m(\mathbf{r})) + \frac{1}{2} c(\nabla m(\mathbf{r}))^2 \right] \tag{1}$$

とおく。

3.1. Ginzburg-Landau の自由エネルギー (2)

- 式 (1) 右辺第 1 項は前回同様のランダウの自由エネルギー $f_L(m(\mathbf{r})) = f_0 + \frac{a}{2}m(\mathbf{r})^2 + \frac{b}{4}m(\mathbf{r})^4$ である。
- 同右辺第 2 項：$\frac{1}{2}c(\nabla m(\mathbf{r}))^2$ は，秩序変数の空間変化のエネルギーコストである。
- ここで係数 c は正の定数として扱い，空間依存せず臨界性はないものとする。($c \sim Ja^2$: a は格子サイズ)
- この勾配の 2 次項は勾配展開の帰結であり，最低次は方向依存をもたない 2 次項となる。(1 次は方向依存する。)

3.2. 臨界揺らぎの解析：空間相関関数

♣ 臨界揺らぎの解析：空間相関関数

- 実際の臨界現象では，空間を均一として扱うことができず，秩序の揺らぎが本質的役割を担う。
- したがって，本節では，秩序の空間揺らぎを解析するために磁化の空間相関関数

$$\boxed{G(\mathbf{r}) = \langle m(\mathbf{r}) m(\mathbf{0}) \rangle} \tag{2}$$

  を考える。
- この空間相関関数を簡便に解析するために，前節の Ginzburg-Landau 自由エネルギーを $\boxed{T > T_c \text{ の高温側に対する近似}}$ を考える（4 次まで考慮した模型を ϕ^4 模型とよび，臨界現象の解析には繰り込み群が必要になる）。

3.2. 臨界揺らぎの解析：空間相関関数 (2)

- ここでは, 磁化が小さいとして Landau 自由エネルギーの高次項である 4 次の項を無視した Gauss 模型

$$F = \int d\mathbf{r} \left[\frac{1}{2} a m(\mathbf{r})^2 + \frac{1}{2} c (\nabla m(\mathbf{r}))^2 \right] \tag{3}$$

を考える。ここでは今後の $m(\mathbf{r})$ の変分や統計力学の計算で効いてこないので定数項も無視する。

- これを解くにあたり，Fourier・逆 Fourier 変換

$$\boxed{\tilde{m}(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r}\, m(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}} \tag{4}$$

$$\boxed{m(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{q}\, \tilde{m}(\mathbf{q})\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}} \tag{5}$$

3.2. 臨界揺らぎの解析：空間相関関数 (3)

を定義する。さらに

$$\boxed{\int d\mathbf{r}\, e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = (2\pi)^d \delta(\mathbf{q})} \tag{6}$$

に注意すると，Ginzburg-Landau 自由エネルギーは

$$\begin{aligned} F &= \int d\mathbf{r} \left[\frac{1}{2}am(\mathbf{r})^2 + \frac{1}{2}c(\nabla m(\mathbf{r}))^2\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int d\mathbf{q}\, \frac{(a+cq^2)}{2}\tilde{m}(\mathbf{q})\tilde{m}(-\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int d\mathbf{q}\, \frac{(a+cq^2)}{2}\, |\tilde{m}(\mathbf{q})|^2 \end{aligned} \tag{7}$$

となる。

3.2. 臨界揺らぎの解析：空間相関関数 (4)

- 以上の計算を補足する。まず，式 (7) 右辺第 1 項は

$$
\begin{aligned}
\int d\mathbf{r}\, m(\mathbf{r})^2 &= \int d\mathbf{r} \left(\int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\, \tilde{m}(\mathbf{q})\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \right) \left(\int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^d}\, \tilde{m}(\mathbf{q}')\, e^{i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{r}} \right) \\
&= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^d}\, \tilde{m}(\mathbf{q})\, \tilde{m}(\mathbf{q}') \int d\mathbf{r}\, e^{i(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\cdot\mathbf{r}} \\
&= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^d}\, \tilde{m}(\mathbf{q})\, \tilde{m}(\mathbf{q}')\, (2\pi)^d \delta(\mathbf{q}+\mathbf{q}') \\
&= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\, \tilde{m}(\mathbf{q})\, \tilde{m}(-\mathbf{q}) \\
&= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\, |\tilde{m}(\mathbf{q})|^2 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

ここで，$\tilde{m}(-\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r}\, m(\mathbf{r})\, e^{+i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = \tilde{m}(\mathbf{q})^*$（複素共役）であることを使った。

3.2. 臨界揺らぎの解析：空間相関関数 (5)

- 式 (7) 右辺第 2 項は

$$
\begin{aligned}
\int d\mathbf{r}\, |\nabla m(\mathbf{r})|^2 &= \int d\mathbf{r} \left(\nabla \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\, \tilde{m}(\mathbf{q})\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \right) \cdot \left(\nabla \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^d}\, \tilde{m}(\mathbf{q}')\, e^{i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{r}} \right) \\
&= - \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^d}\, \tilde{m}(\mathbf{q})\, \tilde{m}(\mathbf{q}')\, \mathbf{q}\cdot\mathbf{q}' \int d\mathbf{r}\, e^{i(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\cdot\mathbf{r}} \\
&= - \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^d}\, \tilde{m}(\mathbf{q})\, \tilde{m}(\mathbf{q}')\, \mathbf{q}\cdot\mathbf{q}' (2\pi)^d \delta(\mathbf{q}+\mathbf{q}') \\
&= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\, \mathbf{q}^2\, \tilde{m}(\mathbf{q})\, \tilde{m}(-\mathbf{q}) \\
&= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\, \mathbf{q}^2\, |\tilde{m}(\mathbf{q})|^2 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

であることから，式 (7) が成立することがわかる。

3.2. 臨界揺らぎの解析：空間相関関数 (6)

- 次に本節で解析する相関関数 $G(\mathbf{r})$ を Fourier 成分で表現すると

$$
\begin{aligned}
G(\mathbf{r}) &= \langle m(\mathbf{r})\, m(\mathbf{0})\rangle \\
&= \frac{1}{V}\int d\mathbf{r}' \langle m(\mathbf{r}+\mathbf{r}')\, m(\mathbf{r}')\rangle \\
&= \frac{1}{V}\int d\mathbf{r}' \left\langle\left(\int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\, \tilde{m}(\mathbf{q})\, e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}+\mathbf{r}')}\right)\left(\int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^d}\, \tilde{m}(\mathbf{q}')\, e^{i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{r}'}\right)\right\rangle \\
&= \frac{1}{V}\int d\mathbf{r}' \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^d} \langle \tilde{m}(\mathbf{q})\, \tilde{m}(\mathbf{q}')\rangle\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\, e^{i(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\cdot\mathbf{r}'} \\
&= \frac{1}{V}\int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \langle \tilde{m}(\mathbf{q})\, \tilde{m}(-\mathbf{q})\rangle\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \\
&= \frac{1}{V}\int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \left\langle |\tilde{m}(\mathbf{q})|^2 \right\rangle e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

3.2. 臨界揺らぎの解析：空間相関関数 (7)

- となり，以降，

$$\tilde{G}(\mathbf{q}) := \left\langle |\tilde{m}(\mathbf{q})|^2 \right\rangle \tag{11}$$

  と定義する。以下，この $\tilde{G}(\mathbf{q})$ の計算が鍵となるが，ここでの統計平均は，磁化 $\{\tilde{m}(\mathbf{q}')\}$ のもとでの粗視化環境での統計平均として考える必要がある。
- そこでは自由エネルギー $F(\{\tilde{m}(\mathbf{q}')\})$ が粗視化されたハミルトニアンとみなすことができる (参照：西森著，相転移・臨界現象の統計力学，培風館)。
- ここで $\{\cdots\}$ は多様な $\mathbf{q}'$ に関する汎函数であることを表す（実際自由エネルギーは $\mathbf{q}'$ の積分であった)。
- 以下，これらの理由を，微視的な統計力学的枠組みから定式化する。

3.2. 臨界揺らぎの解析：空間相関関数 (8)

- いま，$\{\tilde{m}(\mathbf{q}')\}$ を平均にとる状態 i での微視的エネルギー ϵ_i を考える。ここで ϵ はさまざまな値を取りうるが，粗視化空間 における多様な $\mathbf{q}'$ に対する磁化分布が $\{\tilde{m}(\mathbf{q}')\}$ となる確率は，さまざまな磁化分布を含めた分配関数 Z を用いることで確率は，

$$p(\{\tilde{m}(\mathbf{q}')\}) = \sum_{i\in\{\tilde{m}(\mathbf{q}')\}} \frac{e^{-\beta\epsilon_i}}{Z} \tag{12}$$

で与えられる。

- ここで i に対する和を連続極限をとり積分で表現すると

$$p(\{\tilde{m}(\mathbf{q}')\}) = \int_{\epsilon(\{\tilde{m}(\mathbf{q}')\})} d\epsilon D(\epsilon) \frac{e^{-\beta\epsilon}}{Z} \tag{13}$$

ここで，ϵ に対して，状態の縮退が考えられるため，積分の測度としてエネルギー状態密度 $D(\epsilon)$ を導入する必要がある。

3.2. 臨界揺らぎの解析：空間相関関数 (9)

- いま，この積分は，熱力学極限において ϵ の平均値付近が支配的となるため，鞍点近似を行うと

$$\int_{\epsilon(\{\tilde{m}(\mathbf{q}')\})} d\epsilon D(\epsilon)\frac{e^{-\beta\epsilon}}{Z} \sim \Delta\epsilon D(\bar{\epsilon})\frac{e^{-\beta\bar{\epsilon}}}{Z} = W(\bar{\epsilon})\frac{e^{-\beta\bar{\epsilon}}}{Z} \tag{14}$$

  となる。
- ここで $W(\bar{\epsilon})$ はエネルギー $\bar{\epsilon}$ における等エネルギー面上の状態数であるのでボルツマンの原理をもちいることで $W(\bar{\epsilon}) = e^{S/k_\mathrm{B}}$ である。よって $W(\bar{\epsilon})\frac{e^{-\beta\bar{\epsilon}}}{Z} = \frac{e^{-\beta(\bar{\epsilon}-TS(\bar{\epsilon}))}}{Z}$ となる。
- いま $\bar{\epsilon} - TS(\epsilon)$ は自由エネルギー $F(\{m(\mathbf{q})\})$ と置くことが可能である。

3.2. 臨界揺らぎの解析：空間相関関数 (10)

- 従って，粗視化環境での分布関数

$$p(\{\tilde{m}(\mathbf{q}')\}) = \frac{e^{-\beta F(\{\tilde{m}(\mathbf{q}')\})}}{Z} \tag{15}$$

である。ここで分配関数 Z は，あらゆる磁化状態に関する和

$$Z = \int d\{\tilde{m}(\mathbf{q}')\} C e^{-\beta F(\{\tilde{m}(\mathbf{q}')\})} \tag{16}$$

である。ここで $d\{\tilde{m}(\mathbf{q}')\} = \prod_{\mathbf{q}'} d\tilde{m}(\mathbf{q}')$ であり，C は磁化に関する測度（状態密度）であるが，自由エネルギーにおいて $\tilde{m}(\mathbf{q})$ に関して均等に状態が存在する。

補足

Landau 自由エネルギーでは，各 m に対して異なる状態が 1 つずつ定義され，例えば区間 $[m, m+\Delta m]$ に存在する状態数は $C\Delta m$ 個である。

- よって測度は定数とみなすことができるため以下の計算ではこれを省略する。

3.2. 臨界揺らぎの解析：空間相関関数 (11)

- このようにして，モード分解された磁化 $\{\tilde{m}(\mathbf{q}')\}$ に対する統計重みは，$F(\{\tilde{m}(\mathbf{q}')\})$ をハミルトニアンと見なしたカノニカル分布によって与えられ，以下の平均操作が正当化される。

$$\tilde{G}(\mathbf{q}) = \frac{\displaystyle\int d\{\tilde{m}(\mathbf{q}')\}\,\left|\tilde{m}(\mathbf{q})\right|^2\, e^{-\beta F(\{m(\mathbf{q}')\})}}{\displaystyle\int d\{\tilde{m}(\mathbf{q}')\}\, e^{-\beta F(\{m(\mathbf{q}')\})}} \tag{17}$$

となる。

- 以下，式 (17) を計算する。この積分はさまざまな $m(\mathbf{q}')$ に関する積分であるが，モード $\mathbf{q}' = \mathbf{q}$ 以外の積分は，分母と分子でキャンセルする。ただし，ボルツマン因子中の $d\mathbf{q}$ の 1 モード分の刻み幅 $\frac{(2\pi)^d}{V}$ をかけることに注意して，式 (17) は

$$\tilde{G}(\mathbf{q}) = \frac{\displaystyle\int d\tilde{m}(\mathbf{q})\,\left|\tilde{m}(\mathbf{q})\right|^2\,\exp\left[-\beta\frac{(a+cq^2)}{2V}\left|\tilde{m}(\mathbf{q})\right|^2\right]}{\displaystyle\int d\tilde{m}(\mathbf{q})\,\exp\left[-\beta\frac{(a+cq^2)}{2V}V\left|\tilde{m}(\mathbf{q})\right|^2\right]} = \frac{V}{\beta(a+cq^2)} \tag{18}$$

3.2. 臨界揺らぎの解析：空間相関関数 (12)

となり，このようなローレンツ型の波数依存性をもつ相関関数を
Ornstein-Zernike 関数とよぶ。

- ここでは，積分公式

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} d^2x x^2 e^{-\alpha x^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} d^2x V e^{-\alpha x^2}} = \frac{1}{2\alpha}, \quad \text{ただし } \alpha > 0 \tag{19}$$

を用いた。

- 次に逆フーリエ変換を用いることで，実空間相関関数 $G(\mathbf{r})$ を求める。

3.2. 臨界揺らぎの解析：空間相関関数 (13)

- 実空間における 2 点相関関数は，構造因子 $\tilde{G}(\mathbf{q})$ の逆フーリエ変換として与えられ，

$$G(\mathbf{r}) := \langle m(\mathbf{r}), m(\mathbf{0})\rangle = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d V} \tilde{G}(\mathbf{q})\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tag{20}$$

ここでこれを $d = 3$ 次元空間において評価する。構造因子として

$$\tilde{G}(\mathbf{q}) = \frac{k_B T V}{a + cq^2}$$

を用い、波数空間の球対称性に注目し極座標積分に移ると：

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}) &= \frac{k_B T}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{a + cq^2} \\ &= \frac{k_B T}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dq\, \frac{q^2}{a + cq^2} \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta\, e^{iqr\cos\theta} \int_0^{2\pi} d\phi \end{aligned} \tag{21}$$

である。ここでは，回転対称性から $\mathbf{r}$ は任意の方向を取ることができ，今回は $\mathbf{r}$ は z 軸正方向にとった。そして $\mathbf{q}$ とのなす角度（天頂角）を θ，方位角を ϕ とした。

3.2. 臨界揺らぎの解析：空間相関関数 (14)

- これらを踏まえ角度積分を実行すると：

$$\int_0^\pi \sin\theta\, e^{iqr\cos\theta} d\theta = \int_{-1}^{1} e^{iqrx} dx = \frac{2\sin(qr)}{qr} \tag{22}$$

である。したがって，空間相関関数は

$$\begin{aligned} C(\mathbf{r}) &= \frac{4\pi k_B T}{(2\pi)^3 V r} \int_0^\infty dq\, \frac{q\sin(qr)}{a + cq^2} \\ &= \frac{k_B T}{2\pi^2 c V r} \int_0^\infty dq\, \frac{q\sin(qr)}{q^2 + \xi^{-2}}, \quad \text{with } \xi = \sqrt{\frac{c}{a}} \\ &= \frac{k_B T}{4\pi c V r} e^{-r/\xi} \end{aligned} \tag{23}$$

3.2. 臨界揺らぎの解析：空間相関関数 (15)

となる。ここで積分公式

$$\boxed{\int_0^\infty dx \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} = \frac{\pi}{2} e^{-ab}} \tag{24}$$

を用いた（証明は複素積分）。

- これより、空間相関関数は

$$\boxed{G(\mathbf{r}) = \frac{k_B T}{4\pi c r} e^{-r/\xi}} \tag{25}$$

となり、相関長 ξ は指数関数的減衰のスケールを与える量（相関長）であり，これまでの議論から

$$\boxed{\xi = \sqrt{\frac{c}{a}} \propto \sqrt{\frac{1}{T - T_c}} = \frac{1}{(T - T_c)^\nu}, \quad \nu = \frac{1}{2}} \tag{26}$$

を得る。

3.2. 臨界揺らぎの解析：空間相関関数 (16)

- したがって、相関長の臨界指数は

$$\nu_{\mathrm{MF}} = \frac{1}{2} \tag{27}$$

となる。

- なお、任意次元 d における Gauss 模型では、空間相関関数は以下のように与えられる：

$$\boxed{G(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{r^{(d-1)/2}} e^{-r/\xi}} \tag{28}$$

ここで、相関長は次のように振る舞う：

$$\xi \propto (T - T_c)^{-1/2} \tag{29}$$

3.2. 臨界揺らぎの解析：空間相関関数 (17)

- この導出では、Fourier 逆変換を行う際に、第 2 種修正 Bessel 関数 $K_\nu(x)$ の大きな x における漸近展開

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad (x \gg 1) \tag{30}$$

を用いる（詳細は省略）。

- 特に臨界点 $T = T_c$ では、相関長が発散し $\xi \to \infty$ となるため、相関関数は指数関数項を欠き、冪減衰を示す：

$$\boxed{\mathrm{G}(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{r^{(d-1)/2}}} \tag{31}$$

これは、臨界点で長距離相関が支配的となることを意味している。

- なお，$\boxed{\text{低温時 } T < T_c}$においても，$T > T_c$ と同等の臨界発散

$$\boxed{\xi \propto (T_c - T)^{-1/2}} \tag{32}$$

が得られる。導出は補遺に示した。これより，全ての温度で臨界指数 $\nu_{\mathrm{MF}} = \frac{1}{2}$ が得られる。

3.2. 実際の臨界指数との比較

♣ **Ising モデルにおける平均場理論と実際の臨界指数**

- これまで，ガウス模型における空間相関の臨界指数を求めた。
- ガウス模型では，フーリエモードがそれぞれ独立であり，あたかも 1 体問題のように扱うことができた。それゆえこれもある種の 平均場 であると考えることができる。
- 実際，高次元 Ising 模型から相関長を求めると，今回のガウス模型（平均場理論）の結果と一致することが知られている。
- 一方，これら平均場理論の結果は実際の臨界現象と以下のように乖離がある。
  - 平均場理論：$\nu = \frac{1}{2}$
  - 実際の Ising 模型の数値計算結果：
    - $d = 2$：$\nu = 1$
    - $d = 3$：$\nu \approx 0.63$
  - これらの乖離は臨界ゆらぎの効果による（Ginzburg 基準によって後述）。

3.3. Ginzburg 基準：平均場理論はどこまで正しいか？

♣ **Landau** 理論はどこまで正しいか？

- Landau 理論は平均場近似に基づき臨界指数を予言する。
- 一方，実際の臨界現象においては臨界点近傍では「臨界ゆらぎ」が支配的になる。
- このゆらぎのエネルギーが平均場自由エネルギーの障壁を越える場合、平均場理論は破綻する。
- このように「平均場の Landau 理論が破綻する領域」を定量評価するのが **Ginzburg** 基準 **(Ginzburg criterion)** である。

3.3. Ginzburg 基準

♣ 空間揺らぎのエネルギーと平均場自由エネルギー障壁の比較
空間次元 d が低下すると空間揺らぎが増大し，平均場自由エネルギーにおける秩序の安定性が崩れる。この安定性維持の観点から，相関長程度の大きさをもつ空間揺らぎが熱で $m=0$ の自由エネルギーの極大地点に到達しない条件（秩序が安定化する条件）を議論する。

- まず単位粒子あたりの平均場自由エネルギー

$$f_{\mathrm{L}}(m) = f_0 + \frac{1}{2}am^2 + \frac{1}{4}bm^4 \tag{33}$$

を考える。

- そこでの自由エネルギー障壁の高さ（原点と極小値の差）は

$$\Delta f_{\mathrm{B}} = f_{\mathrm{L}}(m_0) - f_{\mathrm{L}}(0) \sim -\frac{a^2}{4b} \quad \Rightarrow \quad |\Delta f_{\mathrm{B}}| \sim \frac{a^2}{b} \tag{34}$$

である。

3.3. Ginzburg 基準 (2)

- 特に臨界点近傍における障壁の高さは

$$a \sim a_0(T - T_c) \quad \Rightarrow \quad \Delta f_{\mathrm{B}} \sim (T - T_c)^2 \tag{35}$$

である。

- 次に，相関長 ξ の一様な相関領域における自由エネルギー障壁の大きさは $\xi^d \Delta f_{\mathrm{B}}$ 程度である。
- これに対し，相関長程度の波長をもつ揺らぎの，モードあたりのエネルギーは，古典統計ではエネルギー等分配則，量子統計でも補正はありうるが，およそ $k_{\mathrm{B}}T$ と見積もれる (固体振動の Debye 模型などでの議論を思い出せ)。

3.3. Ginzburg 基準 (3)

- よって，相関長程度の空間揺らぎが安定である条件（＝平均場理論が成立する条件）は，十分エネルギー障壁が高い場合であるので

$$\boxed{\xi^d \Delta f_{\mathrm{B}} \geq k_{\mathrm{B}} T} \tag{36}$$

  である。（なお，ここでは，相関長より短波長の揺らぎは散逸し不安定化してもよい。相関長より長波長の揺らぎが安定であれば平均場の議論が成立する。）

- ここで $t = \frac{T_c - T}{T_c}$ のもと，$\Delta f_{\mathrm{B}} \propto t^2$，$\xi^d \propto |t|^{-d\nu}$ より，次元をスケールアウトさせれば条件

$$|t|^{2-d\nu} \geq 1 \tag{37}$$

  を得る。

3.3. Ginzburg 基準 (4)

- 上の関係が臨界点 ($|t| \ll 1$) まで安定である必要条件は平均場理論での値 $\nu = \frac{1}{2}$ を用いて，
$$2 - d\nu \leq 0 \tag{38}$$
である。したがって
$$\boxed{d \geq 4} \tag{39}$$
を得る。これより，4 次元未満では平均場理論が破れることがわかる。
- 揺らぎが支配的となり平均場理論が破れるの次元のうち最大のもの（ここでは 4 次元）を上部臨界次元 (upper critical dimension) という。

3.4. Ginzburg 基準の一般化

♣ Ginzburg 基準の一般化
Ginzburg 基準は，臨界指数 β, γ, ν を用いて

$$d \geq \frac{\gamma + 2\beta}{\nu} \tag{40}$$

と表されることが知られている。これは Landau 理論における，2 次と 4 次の係数 a と b が，これらの臨界指数に対して制約条件を満たすことから導かれる。以下これを示す。

- 前回と同様に，外場 h を加えた Landau の自由エネルギー密度

$$f(m) = \frac{1}{2}am^2 + \frac{1}{4}bm^4 - hm \tag{41}$$

を考える。

- 平衡状態では $\partial f / \partial m = 0$ より

$$am_0 + bm_0^3 = h \tag{42}$$

これは $m(h)$ の関係式。

3.4. Ginzburg 基準の一般化 (2)

- 感受率 $\chi = \frac{\partial m}{\partial h}\Big|_{h\to 0}$ を求めるために両辺を h で微分：

$$\left(a + 3bm_0^2\right)\frac{dm_0}{dh} = 1 \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{1}{a + 3bm_0^2} \tag{43}$$

- $T \to T_c$（すなわち $t \to 0$）で、$m_0^2 \sim -a/b$（自発磁化の式）を代入：

$$\chi \sim \frac{1}{a + 3b \cdot \frac{-a}{b}} = \frac{1}{a - 3a} = \frac{1}{-2a} \tag{44}$$

- よって、感受率は臨界点で $\chi \sim t^{-\gamma}$ より：

$$\boxed{a \sim t^{\gamma}} \tag{45}$$

- また、先ほどの $m_0^2 = -a/b \sim t^{2\beta}$ より：

$$\boxed{b \sim \frac{a}{t^{2\beta}} \sim \frac{t^{\gamma}}{t^{2\beta}} = t^{\gamma - 2\beta}} \tag{46}$$

3.4. Ginzburg 基準の一般化 (3)

■ 以上より、係数のスケーリング則は：

$$\boxed{a \sim t^{\gamma}, \quad b \sim t^{\gamma-2\beta}} \tag{47}$$

■ 自由エネルギー障壁のスケーリングは：

$$\Delta f_B \sim f(0) - f(m_0) = \frac{a^2}{4b} \sim t^{\gamma+2\beta} \tag{48}$$

■ 相関領域の自由エネルギー障壁は：

$$\xi^d \Delta f_B \sim t^{-d\nu} \cdot t^{\gamma+2\beta} = t^{\gamma+2\beta-d\nu} \tag{49}$$

■ Ginzburg 基準（熱ゆらぎ $k_B T$ に対する障壁の高さ）：

$$\boxed{\xi^d \Delta f_B \geq k_B T \quad \Rightarrow \quad t^{\gamma+2\beta-d\nu} \geq 1} \tag{50}$$

3.4. Ginzburg 基準の一般化 (4)

- したがって、$t \ll 1$ のもと上の不等式を解くと，平均場理論が有効であるための必要条件は

$$\boxed{d \geq \frac{\gamma + 2\beta}{\nu}} \tag{51}$$

となる。

- 等号の臨界次元が上部臨界次元であり平均場の各指数を代入すれば 4 が得られる。

第 6 回講義資料目次

4. まとめ

- Ginzburg-Landau 理論は、Landau 理論を空間変化に拡張し、秩序変数の勾配項を導入することで、ドメイン壁や相関の空間構造を記述可能にする。
- ここでの臨界ゆらぎの相関関数は

$$C(r) \sim \frac{e^{-r/\xi}}{r}$$

（3 次元）となる。

- また相関長は

$$\xi^{-2} = \frac{a}{c}, \quad a \propto T - T_c$$

となるので，平均場理論では

$$\xi \propto |T - T_c|^{-1/2}$$

- Ginzburg 基準は、平均場が成立する条件を与え、空間次元 $d \geq 4$ でゆらぎが無視できることを示す。
- 実際の系では、臨界ゆらぎにより平均場の臨界指数は修正される。

次回は動的臨界現象を扱う。

第 6 回講義資料目次

5. $T < T_c$ での相関長

♣ $T < T_c$ での相関長
以下，$T < T_c$ での空間相関について議論する。

- $T < T_c$ においては，自発磁化が生じるため，Ginzburg Landau (GL) 自由エネルギーの秩序変数を $m(\mathbf{r}) = m_0 + \delta m(\mathbf{r})$ とする。m_0 は自発磁化である。そこで GL 自由エネルギーを $\delta m(\mathbf{r})$ について展開すると，

$$F = \int d\mathbf{r} \left[f_L(m_0) + \left.\frac{df_L}{dm}\right|_{m=m_0} \delta m(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 f_L}{dm^2}\right|_{m=m_0} \delta m(\mathbf{r})^2 + \frac{c}{2}(\nabla(m_0 + \delta m(\mathbf{r})))^2 \right]$$

$$= \int d\mathbf{r} \left[\underbrace{f_L(m_0)}_{\text{統計計算では不要}} + \underbrace{(am_0 + bm_0^3)}_{=0} \delta m(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \underbrace{(a + 3bm_0^2)}_{m_0^2 = -a/b} \delta m(\mathbf{r})^2 + \frac{c}{2}(\underbrace{\nabla \delta m(\mathbf{r})}_{m_0\text{の寄与は落ちた}})^2 \right]$$

$$\sim \int d\mathbf{r} \left[\frac{1}{2}(-2a)\delta m(\mathbf{r})^2 + \frac{c}{2}(\nabla \delta m(\mathbf{r}))^2 \right] \tag{52}$$

となるので，この自由エネルギーの数理構造は，$a \to -2a$ へと変わった点以外は $T > T_c$ の時と同等である。したがって，同様に相関長が定義でき，

$$\xi \propto \sqrt{\frac{c}{-2a}} \propto \sqrt{\frac{1}{T_c - T}} \tag{53}$$

5. $T < T_c$ での相関長 (2)

つまり全ての温度で $\nu = \frac{1}{2}$ を得る。