

# 物性理論特論Ⅱ 第8回

## Kadanoff のスケーリング理論とくりこみ群

川崎猛史

大阪大学 D3 センター/ 大学院理学研究科物理学専攻

Last update : June 10, 2025

# 第8回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 くりこみ群の導入

- くりこみ群と粗視化
- くりこみ群とスケール変換

## 3 Kadanoff のスケーリング理論

- 臨界現象とスケーリング理論
- 相関長に基づくスケーリング：ハイパースケーリング関係式
- まとめ

# 第8回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 くりこみ群の導入

- くりこみ群と粗視化
- くりこみ群とスケール変換

## 3 Kadanoff のスケーリング理論

- 臨界現象とスケーリング理論
- 相関長に基づくスケーリング：ハイパースケーリング関係式
- まとめ

# 1. 講義のスケジュール

- 1 4/15 : 第 1 回
- 2 4/22 : 第 2 回
- 3 5/07 : 第 3 回
- 4 5/13 : 第 4 回
- 5 5/20 : 第 5 回
- 6 5/27 : 第 6 回
- 7 6/03 : 第 7 回
- 8 6/10 : 第 8 回
- 9 6/17 : 第 9 回
- 10 6/24 : 第 10 回
- 11 7/01 : 第 11 回
- 12 7/08 : 第 12 回
- 13 7/15 : 第 13 回 7/22 は休講
- 14 7/29 : 第 14 回
- 15 8/5 予備 第 15 回

# 第8回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 くりこみ群の導入

- くりこみ群と粗視化
- くりこみ群とスケール変換

## 3 Kadanoff のスケーリング理論

- 臨界現象とスケーリング理論
- 相関長に基づくスケーリング：ハイパースケーリング関係式
- まとめ

## 2. くりこみ群の導入

- これまでの議論では、平均場理論により揺らぎの効果を無視した条件下で臨界指数を求めてきた。
- 平均場理論は、上部臨界次元より高い次元では有効だが、3次元以下の現実的な系では実験結果を正確に説明できなかった。
- 今回から、こうした問題を克服する方法の一つとして「くりこみ群 (Renormalization Group)」を導入し、主に低次元系の臨界現象を解析する。

## 2.1. くりこみ群と粗視化

### ♣ くりこみ群と粗視化

- くりこみ群 (RG: Renormalization Group) の基本的な発想は、ゆらぎの効果を系統的に取り入れつつ、空間スケールの変化に伴う物理量の変化を調べることで、臨界点近傍における普遍的な性質を明らかにすることである。
- そのために、まず微視的自由度の一部を消去し、スケール変換に対応する有効理論 (粗視化理論) の変化法則 (くりこみ変換) を構築する。
- 本講義では、Ising モデルなどにおいて、実空間においてスピン変数の一部に和をとる操作を繰り返す「実空間くりこみ群」を扱う。
- 具体的には、図 1 のように対等な自由度を 2 組:  $\times$  グループと  $\bullet$  グループに分け、 $\times$  に関して先に和をとると、残された  $\bullet$  の自由度の間に新たな有効相互作用が誘起され、元の系は新たな相互作用をもつ系へと変換される (図 1 中段)。

## 2.1. くりこみ群と粗視化 (2)

- すると分配関数は次のように変換される：

$$\begin{aligned}
 Z_N(H) &= \sum_{\{S_\bullet\}} \sum_{\{S_x\}} e^{-\beta H} \\
 &= \sum_{\{S_\bullet\}} e^{-\beta H'} \\
 &=: Z'_N(H')
 \end{aligned} \tag{1}$$

- ここで  $H'$  は粗視化後の有効ハミルトニアンであり、

$$e^{-\beta H'} = \sum_{\{S_x\}} e^{-\beta H}, \tag{2}$$

$$H' = -k_B T \log \sum_{\{S_x\}} e^{-\beta H} \tag{3}$$

のように定まる。 $H'$  は自由エネルギーと同様の構造を持つ。

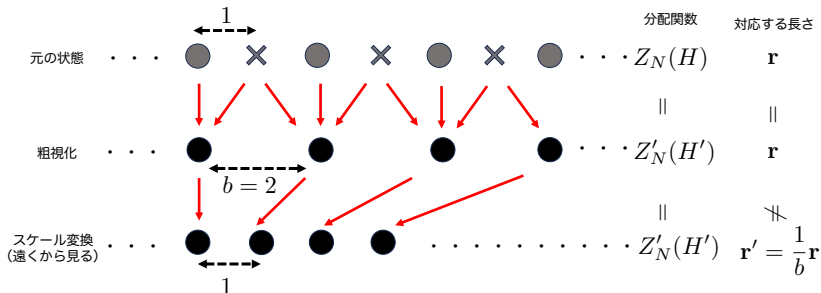
- くりこみ操作では、● どの距離を 1 に再スケーリング（規格化）することで、長さスケールを再定義する (図 1 下段)。



## 2.1. くりこみ群と粗視化 (3)

- この操作は、短いスケールでの揺らぎを消去し、長いスケールでの構造を際立たせる。すなわち、系を「遠くから見る」ことに対応する。
- たとえば、臨界点よりやや高温の系を遠くから見ると、揺らぎが抑えられて見えるため、実際よりも高温の系のように見える。
- 同様に、臨界点よりやや低温の系では、揺らぎが抑えられ、より低温の系のように見える。
- しかし、臨界点では揺らぎが発散しているため、どれだけ遠くから見ても揺らぎは消えず、スケール変換に不変な構造が現れる。
- このように、くりこみ変換を繰り返しても状態が変化しない点（固定点）に注目することで、臨界点の特異な振る舞いを理解することができる。

## 2.1. くりこみ群と粗視化 <sup>(4)</sup>



**図 1:** くりこみの考え方。上段はもとのスピン配列。 $\times$  のスピンの和をとり、中段の通り、あたかも  $\bullet$  のスピンのみの自由度が残るが、分配関数は等しい。下段は、粗視化した自由度を元の長さの間隔に戻す。この一連の変換はものを遠くからみて粗視化された光景をみることに対応する。見え方が変わる際には、温度などの制御変数も変化したとみなす。この振る舞いは以下の動画がわかりやすい [動画リンク](#) (c) Douglas Ashton

## 2.2. くりこみ群とスケール変換

### ♣ くりこみ群とスケール変換

- 前節で述べたように、くりこみ変換によって物理量がどのように変化するかを記述する法則が、くりこみ群 (RG: Renormalization Group) の基本原理である。
- 特に重要な要請は、**分配関数が不変であること**

$$Z_N(H) = Z_{N'}(H') \quad (4)$$

である。

- このとき、元のハミルトニアン  $H$  は、くりこみ変換によって新たなハミルトニアン  $H'$  に写される：

$$H' = R(H) \quad (5)$$

ここで  $R$  は一般に非線形な写像である。

## 2.2. くりこみ群とスケール変換 (2)

- この変換を繰り返すことで、ある特定のハミルトニアン  $H^*$  に収束することがある。これが**固定点**であり、次の条件を満たす：

$$H^* = R(H^*) \quad (6)$$

臨界点と固定点は密接に関係しているが、厳密には異なる概念であることに注意する。

- 以下では、粗視化の程度を表すスケール因子  $b$  を導入する。たとえば、1次元イジングモデルでスピンを一つおきに粗視化する場合、 $b = 2$  に対応する。
- 図 1 のようにスケール変換により、以下のような物理量の変化が生じる：
  - 空間の長さ： $r' = r/b$
  - 波数 (Fourier 空間)： $q' = bq$
  - 自由度の数： $N' = N/b^d$  ( $d$ : 空間次元)

## 2.2. くりこみ群とスケール変換 (3)

- 分配関数が不変であることから、系全体の自由エネルギー  $F$  も不変である：

$$F(H) = F(H') \quad (7)$$

- 一方で自由度の数は変化するため、1 自由度あたりの自由エネルギー  $f = F/N$  は次のように変換される：

$$\begin{aligned} \frac{F(H)}{N} &= \frac{F(H')}{N} \\ &= \frac{F(H')}{N/b^d} \cdot \frac{1}{b^d} \\ &= \frac{F(H')}{N'} \cdot \frac{1}{b^d} \end{aligned} \quad (8)$$

- よって、自由エネルギー密度 (1 自由度あたり) は次のスケーリング則に従う：

$$f(H) = \frac{1}{b^d} f(H') \quad (9)$$

## 2.2. くりこみ群とスケール変換 (4)

- このほかにも一般的な物理量  $A$  に関するくりこみ変換は

$$A' = b^{y_A} A \quad (10)$$

とスケール因子  $b$  の冪の関数で表される。

- その根拠は、スケール因子を  $b = b_1 b_2$  とするとき、いかなるくりこみ変換  $b$  は  $b_1, b_2$  の詳細によらない。(一気にサイズ  $b$  の粗視化をおこなっても、 $b_1$  と  $b_2$  と分けておこなっても結果は変わらない。) そのため、スケール変換は以下

$$b^{y_A} = b_1^{y_A} b_2^{y_A} \quad (11)$$

を満たす必要があり  $b$  の冪の関数として書かれることがわかる。

# 第 8 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 くりこみ群の導入

- くりこみ群と粗視化
- くりこみ群とスケール変換

## 3 Kadanoff のスケーリング理論

- 臨界現象とスケーリング理論
- 相関長に基づくスケーリング：ハイパースケーリング関係式
- まとめ

### 3. Kadanoff のスケーリング理論

くりこみ変換によって得られる物理量の変換則から、多くの臨界指数が互いに独立でないことが示される。この考え方は、Kadanoff によって初めて体系化された。以下では、いわゆる **Kadanoff** のスケーリング理論を紹介する。



## 3.1. 臨界現象とスケーリング理論

### ♣ 臨界現象とスケーリング理論

- 臨界現象では、多くの物理量が無次元温度 (reduced temperature)

$$t = \frac{|T - T_c|}{T_c} \quad (12)$$

や外場  $h$  に対して冪乗則 (power law) に従う。

- 各冪乗則に現れる指数は、臨界指数 (**critical exponent**) と呼ばれ、代表的なものは以下の通りであることをこれまでの講義で扱ってきた。

表 1: 臨界現象における代表的なスケーリング則と臨界指数

物理量	スケーリング則	条件
比熱	$C_V \sim t^{-\alpha}$	$T < T_c$
自発磁化	$m \sim t^\beta$	
磁化率	$\chi \sim t^{-\gamma}$	
非線形磁化応答	$m \sim h^{1/\delta}$	$T = T_c$
相関長	$\xi \sim t^{-\nu}$	
相関関数	$G(r) \sim r^{-(d-2+\eta)}$	
緩和時間	$\tau \sim \xi^z$	

## 3.1. 臨界現象とスケーリング理論 (2)

- 臨界指数の間には、スケーリング関係式と呼ばれる制約が存在し、くりこみ群の視点から導かれる。
- 自由エネルギー密度  $f(t, h)$  に対して、スケール因子  $b$  による再スケーリングを

$$t' = b^{y_t} t, \quad h' = b^{y_h} h \quad (13)$$

と定義する。

- このとき、自由エネルギー密度は以下のスケーリング則に従う：

$$f(t, h) = \frac{1}{b^d} f(b^{y_t} t, b^{y_h} h) \quad (14)$$

- この関係を用いることで、自由エネルギーの微分として得られる各物理量のスケーリング則を導出できる。

## 3.1. 臨界現象とスケーリング理論 (3)

### ♣ スケーリング次元から導かれる臨界指数

- この関係を用いることで、自由エネルギーの微分として得られる各物理量のスケーリング則を導出できる。

#### ■ 自発磁化のスケーリング

$h = 0$  における自発磁化は

$$m(t, 0) = - \left. \frac{\partial f(t, h)}{\partial h} \right|_{h=0} \quad (15)$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} m(t, 0) &\propto \left. \frac{\partial}{\partial h} \left[ \frac{1}{b^d} f(b^{y_t} t, b^{y_h} h) \right] \right|_{h=0} \\ &= b^{y_h - d} m(b^{y_t} t, 0) \end{aligned} \quad (16)$$

$b = t^{-1/y_t}$  を選ぶと、

$$m(t, 0) \propto t^{(d-y_h)/y_t} m(1, 0) = t^\beta m(1, 0) \Rightarrow \beta = \frac{d - y_h}{y_t} \quad (17)$$

## 3.1. 臨界現象とスケーリング理論 (4)

### ■ 磁化率のスケーリング

磁化率は

$$\begin{aligned}
 \chi(t) &= - \left. \frac{\partial^2 f(t, h)}{\partial h^2} \right|_{h=0} \\
 &\propto \left. \frac{\partial^2}{\partial h^2} \frac{1}{b^d} f(b^{y_t} t, b^{y_h} h) \right|_{h=0} \\
 &= b^{2y_h - d} \chi(b^{y_t} t)
 \end{aligned} \tag{18}$$

となる。  $b = t^{-1/y_t}$  とすると、

$$\chi(t) \propto t^{(-2y_h + d)/y_t} \chi(1) = t^{-\gamma} \chi(1) \Rightarrow \gamma = \frac{2y_h - d}{y_t} \tag{19}$$

## 3.1. 臨界現象とスケーリング理論 (5)

### ■ 非線形磁場応答のスケーリング

$t = 0 (T = T_c)$  における自発磁化は

$$m(0, h) = b^{y_h - d} m(0, b^{y_h} h) \quad (20)$$

である。いま  $b = h^{-1/y_h}$  を選ぶと、

$$m(0, h) \propto h^{(d - y_h)/y_h} m(0, 1) = h^{1/\delta} m(0, 1) \Rightarrow \delta = \frac{y_h}{d - y_h} \quad (21)$$

### ■ 比熱のスケーリング

$h = 0$  における比熱は

$$\begin{aligned} C(t, 0) &\propto \frac{\partial^2 f(t, 0)}{\partial t^2} \\ &= \frac{1}{b^d} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(b^{y_t} t, 0) \\ &= b^{-d + 2y_t} C(b^{y_t} t, 0) \end{aligned} \quad (22)$$

## 3.1. 臨界現象とスケーリング理論 (6)

$b = t^{-1/y_t}$  とすると、

$$C(t, 0) \propto t^{(d-2y_t)/y_t} C(1, 0) = t^{-\alpha} C(1, 0) \Rightarrow \boxed{\alpha = 2 - \frac{d}{y_t}} \quad (23)$$

表 2: スケーリング次元に基づく臨界指数の表現

関係式	スケーリング則
$\beta = \frac{d - y_h}{y_t}$	磁化 $m(t) \sim t^\beta$
$\gamma = \frac{2y_h - d}{y_t}$	磁化率 $\chi(t) \sim t^{-\gamma}$
$\alpha = 2 - \frac{d}{y_t}$	比熱 $C(t) \sim t^{-\alpha}$
$\delta = \frac{y_h}{d - y_h}$	非線形磁化応答 $m(h) \sim h^{1/\delta}$

これらの結果から、 $y_t$  および  $y_h$  を消去することで、臨界指数の間に以下の2つのスケーリング関係式が得られる：

## 3.1. 臨界現象とスケーリング理論 (7)

- $\beta + \gamma = \frac{y_h}{y_t}$  かつ  $\beta\delta = \frac{y_h}{y_t}$  である。よって

$$\delta = 1 + \frac{\gamma}{\beta} \quad (24)$$

と表される **Widom** の関係式を得る。

- $\alpha - 2 = -\frac{d}{y_t}$  かつ  $2\beta + \gamma = \frac{d}{y_t}$  である。これらから  $\frac{d}{y_t}$  を消去すれば

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (25)$$

と表される **Rushbrooke** の関係式を得る。

表 3: スケーリング関係式

関係式	名称
$\delta = 1 + \frac{\gamma}{\beta}$	Widom 関係式
$\alpha + 2\beta + \gamma = 2$	Rushbrooke 関係式

## 3.2. 相関長に基づくスケーリング：ハイパースケーリング関係式

### ♣ 相関長に基づくスケーリング：ハイパースケーリング関係式

自由エネルギーの微分から得られる臨界指数に加えて、相関長や相関関数といった幾何的な物理量に注目することで、新たなスケーリング関係式が導出できる。これらの量は臨界指数とは独立に定義され、空間次元  $d$  を含む関係式となる。以下に、それぞれの導出過程を示す。

#### ■ 相関長 $\xi$ のスケーリング

相関長  $\xi(t, h)$  のスケーリング次元は、 $b\mathbf{r}' = \mathbf{r}$  と同様に

$$\xi(t, 0) = b \xi(b^{y_t} t, 0) \quad (26)$$

である。ここで、スケール因子  $b = t^{-1/y_t}$  を選ぶと、

$$\xi(t, 0) = t^{-1/y_t} \xi(1, 0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu = \frac{1}{y_t}} \quad (27)$$



## 3.2. 相関長に基づくスケーリング：ハイパースケーリング関係式 (2)

### ■ 相関関数 $G(r)$ のスケーリング

相関関数は、磁化のスケール次元が  $b^{y_h-d}$  であることと、 $b\mathbf{r}' = \mathbf{r}$  を考慮することで

$$G(r) = b^{2(y_h-d)} G\left(\frac{r}{b}\right) \quad (28)$$

を得る。ここでスケール因子  $b = r$  を選ぶと、

$$G(r) = r^{2(y_h-d)} G(1) = r^{-(d-2+\eta)} G(1) \Rightarrow \boxed{\eta = -2y_h + d + 2} \quad (29)$$

が得られる。

表 4: 相関関数に基づく臨界指数の表現

関係式	対応するスケーリング則
$\nu = \frac{1}{y_t}$	相関長 $\xi \sim t^{-\nu}$
$\eta = -2y_h + d + 2$	相関関数 $G(r) \sim r^{-(d-2+\eta)}$

## 3.2. 相関長に基づくスケーリング：ハイパースケーリング関係式 (3)

これらの関係式より、スケーリング次元  $y_t$ ,  $y_h$  は臨界指数で次のように表せる：

$$\begin{cases} y_t = \frac{1}{\nu} \\ y_h = \frac{d+2-\eta}{2} \end{cases} \quad (30)$$

これらを用いて、自由エネルギーのスケーリングから得られた指数表現を変換すれば、主要な臨界指数はすべて  $\nu$  および  $\eta$  によって表される：

### ■ 比熱指数

$\alpha = 2 - \frac{d}{y_t}$  より

$$\alpha = 2 - d\nu \quad (31)$$

(Josephson の関係式)

## 3.2. 相関長に基づくスケーリング：ハイパースケーリング関係式 (4)

- 磁化率指数

$$\gamma = \frac{2y_h - d}{y_t} \text{ より}$$

$$\gamma = \nu(2 - \eta) \quad (32)$$

(Fisher の関係式)

- 自発磁化指数

$$\beta = \frac{d - y_h}{y_t} \text{ より}$$

$$2\beta = \nu(d + \eta - 2) \quad (33)$$

- 非線形応答指数

$$\delta = \frac{y_h}{d - y_h} \text{ より}$$

$$\delta = \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta} \quad (34)$$

## 3.2. 相関長に基づくスケーリング：ハイパースケーリング関係式 (5)

このように、主要な臨界指数はすべて  $\nu$  および  $\eta$  によって記述でき、これらの関係式はハイパースケーリングの枠組みを構成する。

表 5: 主要な臨界指数のハイパースケーリング関係式 ( $\nu, \eta$  による表現)

臨界指数	ハイパースケーリング関係式
$\alpha$	$\alpha = 2 - d\nu$ (Josephson の関係式)
$\gamma$	$\gamma = \nu(2 - \eta)$ (Fisher の関係式)
$\beta$	$2\beta = \nu(d + \eta - 2)$
$\delta$	$\delta = \frac{d+2-\eta}{d-2+\eta}$

### 3.3. まとめ

- くりこみ群の考え方を導入した。
- Kadanoff のスケール理論により、臨界現象における臨界指数は独立ではなく拘束関係式が存在することを示した。

次回は、くりこみ群を用いて 1 次元 Ising 模型を解く。