物性理論特論 II 2025 年度期末レポート問題

川崎 出題

2025 年 7 月 28 日

[注意事項] 以下の問題（第 1 問・第 2 問・第 3 問）を期限までに解き、CLE の当該箇所から PDF 形式で提出せよ。剽窃は厳禁である。

第 1 問（1 次元 Ising 模型におけるくりこみ群解析）

外部磁場が 0 である 1 次元 Ising 模型のハミルトニアンを

$$\beta H = -K \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j$$

とする。この模型のくりこみ群解析を行う。講義では 1 サイトおきに部分和をとることで粗視化し、スケール因子 $b = 2$ の場合を扱った。ここではより一般的に、$b - 1$ サイトごとに部分和をとり、1 サイトを残す操作を繰り返す。ここで $u = \tanh K$ とおくとき、以下の各問に答えよ。

[設問]

(1) $b = 3$ のとき、くりこみ群方程式が

$$u' = u^3$$

と表されることを示せ。

(2) 一般の b に対して、くりこみ群方程式が

$$u' = u^b$$

となることを示せ。

以下、一般のスケール因子 b に対するくりこみ群方程式を考える。

(3) $u = 1$ が固定点であることを示せ。また、このときの物理的状態を説明せよ（例：高温極限における理想気体に対応した状態など）。

(4) $u = 1$ の固定点近傍において、u がくりこみ変換に対する有意変数であることを示せ。

(5) u が有意変数であると仮定し、$u = 1$ の固定点近傍における系の相関長 $\xi(u)$ が次のスケーリング関係

$$\xi(u') = \frac{1}{b}\xi(u)$$

を満たすとする。このとき、$\xi(u)$ は

$$\xi(u) = \frac{k}{|\log u|}$$

の形で表されることを示せ。ただし k は定数とする。

(6) (5) の関数において、$u \sim 1$ の固定点近傍において

$$\xi = k' x^{-1/2}$$

と振る舞うことを示せ。ただし $x = e^{-4K}$ である（この結果は講義で扱った $b = 2$ の場合と整合するものである）。

第 2 問（ϕ^4 模型のくりこみ群解析）

外部磁場が 0 の d 次元 ϕ^4 模型

$$\beta F[\phi] = \int d^d\mathbf{r}\left\{\Lambda^{-2}(\nabla\phi(\mathbf{r}))^2 + t\phi^2(\mathbf{r}) + u\phi^4(\mathbf{r})\right\}$$

を考える。講義では $d \leq 4$ において、

$$\beta F_{\rm int}[\phi] = u\int d^d\mathbf{r}\,\phi^4(\mathbf{r})$$

の項を摂動として扱い，$u = 0$ の Gauss 模型（平均場近似）からのずれをくりこみ群解析により議論した。

ϕ^4 模型のくりこみ群解析においては、秩序変数 $\phi(\mathbf{r})$ をフーリエ変換して

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{|\mathbf{q}|<\Lambda}\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\tilde{\phi}(\mathbf{q})$$

のようにモード分解し、これを高波数成分 $\phi_>$（$\Lambda/b < |\mathbf{q}| < \Lambda$）と低波数成分 $\phi_<$（$|\mathbf{q}| < \Lambda/b$）に分けることで、

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_<(\mathbf{r}) + \phi_>(\mathbf{r})$$

と分解する。その上で、分配関数における $\phi_>$ に関する部分和をとり、有効自由エネルギーを導出することができる。以下、有効自由エネルギーの 摂動寄与に注目し，$d < 4$ に関して以下の問いに答えよ。Feynman ダイアグラムの記法は講義資料に準拠する。相関関数はすべてガウス分布による平均であることに注意せよ。Wick の定理は証明なしで用いてよいものとする。

[設問]

2 次摂動の関して以下の各問に答えよ。

(1) 2 次摂動において非連結ダイアグラムの寄与がないことを示せ（ヒント：キュムラント展開)。

(2) 2 次摂動において $\phi_>$ 奇数次の項の寄与が 0 になることを示せ (図 1(A) など)。

(3) 図 1(B) に示す 2 つの Feynman ダイアグラムがともに 0 になることを示せ。

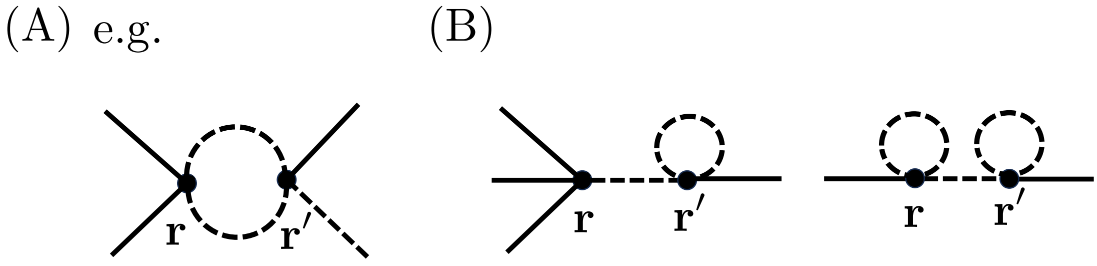

図 1: 第 2 問で議論する Feynman ダイアグラム

最後に，1 次摂動および 2 次摂動に関する以下の各問に答えよ。

(4) 1 次摂動からの t の補正を δt，2 次摂動からの u の補正を δu とする。このとき，一般のスケール因子 b に対するくりこみ群方程式が

$$t' = b^2(t + \delta t)$$
$$u' = b^{4-d}(u + \delta u)$$

と書けることを，Gauss 模型で行ったスケール変換を参考に示せ。ただし δt や δu を具体的に求める必要はないが具体的にどこからくる寄与であるか分かりやすく説明せよ。

第3問（XY 模型における相関関数）

　空間一様な連続自由度をもつスピン系（XY 模型や Heisenberg 模型など）では、2 次元以下の系において長距離秩序が存在せず、代わって 特異な相転移（トポロジカル転移） が生じることが知られている。

　ここで、スピン変数の場を

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = (\cos\theta(\mathbf{r}),\, \sin\theta(\mathbf{r}))$$

と定義する。講義では、このスピンの相関関数

$$G(\mathbf{r}) := \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{0}) \rangle = \left\langle e^{i(\theta(\mathbf{r})-\theta(\mathbf{0}))} \right\rangle$$

を用いて、複素表示によるキュムラント展開を行い、位相の二乗変位などを評価した。

　これを踏まえて、以下の各問いに答えよ。

設問：

(1) 相関関数 $G(\mathbf{r})$ は、もともと実数ベクトル場の内積として定義されているが、それが上式のように 複素数表示で記述できる理由 を、数学的および物理的観点から説明せよ。

(2) 2 次元系の十分低温状態において長距離秩序が存在せず、相関関数がべき減衰することを示せ。余裕があれば、BKT 転移により無数の渦が生じること、転移点以下では渦が対を形成し準長距離秩序を維持する機構について論じよ。