

# 物性理論特論 II 第 9 回

## 実空間くりこみ群 (1) : 1 次元 Ising 模型

川崎猛史

大阪大学 D3 センター / 大学院理学研究科物理学専攻

Last update : June 17, 2025

# 第9回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 今回の内容：Wilson のくりこみ群理論

- くりこみ群の式
- くりこみ後のパラメータの導出
- くりこみ群の流れ（フロー図）
- くりこみ群方程式と固定点
- 固定点まわりの展開
- 臨界指数の算出

## 3 まとめ

# 第9回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 今回の内容：Wilson のくりこみ群理論

- くりこみ群の式
- くりこみ後のパラメータの導出
- くりこみ群の流れ（フロー図）
- くりこみ群方程式と固定点
- 固定点まわりの展開
- 臨界指数の算出

## 3 まとめ

# 1. 講義のスケジュール

- 1 4/15：第 1 回
- 2 4/22：第 2 回
- 3 5/07：第 3 回
- 4 5/13：第 4 回
- 5 5/20：第 5 回
- 6 5/27：第 6 回
- 7 6/03：第 7 回
- 8 6/10：第 8 回
- 9 6/17：第 9 回
- 10 6/24：第 10 回
- 11 7/01：第 11 回
- 12 7/08：第 12 回
- 13 7/15：第 13 回 7/22 は休講
- 14 7/29：第 14 回
- 15 8/5 予備 第 15 回

# 第9回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 今回の内容：Wilson のくりこみ群理論

- くりこみ群の式
- くりこみ後のパラメータの導出
- くりこみ群の流れ（フロー図）
- くりこみ群方程式と固定点
- 固定点まわりの展開
- 臨界指数の算出

## 3 まとめ

## 2. 今回の内容：Wilson のくりこみ群理論

- 前回、くりこみ変換および Kadanoff のスケーリング理論を紹介した。
- Kadanoff 理論では、Ising 模型における自由エネルギー密度が以下のようなスケーリング関係に従うと仮定した：

$$f(t, h) = \frac{1}{b^d} f(b^{y_t} t, b^{y_h} h) \quad (1)$$

ここで  $t = |(T - T_c)/T_c|$  は換算温度、 $h$  は外場である。

- この理論では、Ising モデルにおける自由エネルギーが  $t$  および  $h$  の関数であり、くりこみ操作によってそのスケーリング構造（すなわち普遍性クラス）が保存されると仮定している。
- 多くの場合はこの仮定が有効であり、スケーリング則や臨界指数の導出が可能となる。
- しかし、1 次元 Ising 模型においては臨界点が  $T = 0$  に位置し、その近傍ではスケーリング仮定に基づく自由エネルギーの関数形（特に  $t$  や  $h$  による特異性）が成立しないことが知られている。

## 2. 今回の内容：Wilson のくりこみ群理論 (2)

- 本講義ではまず Kadanoff 理論の限界を明確化し、その上でより一般的な Wilson のくりこみ群理論を導入する [Wilson, Phys. Rev. B 4, 3174 (1971)]。
- ここでは固定点近傍での変数の流れ (RG フロー) に注目することで、臨界現象における有意変数 (relevant variables) を見出し、さらに具体的に臨界指数を算出することを目的とする。
- 1 次元 Ising 模型は、くりこみ群の概念を具体的に理解するための最も単純かつ解析的に扱える系であり、本講義ではこのモデルを用いて、くりこみ変換の具体的計算と臨界指数の形式的定義の正当性を検討する。
- 最終的に、1 次元 Ising 模型において、どのような仮定のもとで臨界指数が形式的に定義可能か、またそれが物理的にどの程度の意味を持ち得るかを明らかにする。

## 2.1. くりこみ群の式

### ♣ くりこみ群の式

- 1次元 Ising 模型において、Wilson 流に基づくくりこみ群解析を用いて、臨界指数を形式的に算出する。
- この模型は厳密解を持つだけでなく、変数の縮約（自由度の削減）操作を解析的に実行可能であり、くりこみの基本構造を具体的に学ぶ題材として最適である。
- ここでは Kadanoff の直観的議論を踏襲しつつ、実際の縮約操作を通じて、臨界現象においてどの変数が有意（relevant）であるかを演繹的に明らかにする。
- 前回に引き続き今回の手法は、Ginzburg – Landau 理論で扱ったような Fourier 空間を用いず、常に実空間内でくりこみ操作が完結するため、「**実空間くりこみ群**」と呼ばれる。
- 出発点となるハミルトニアンは、逆温度  $\beta = 1/(k_B T)$  を用いて以下のように表される：

$$\beta H = -K \sum_i S_i S_{i+1} - h \sum_i S_i \quad (2)$$



## 2.1. くりこみ群の式 (2)

- そして分配関数は

$$Z_N = \sum_{\{S_i\}} e^{-\beta H} \quad (3)$$

である。

- 分配関数における偶数番目のスピンを縮約するため、まず  $S_2$  に関する和を実行すると：

$$\begin{aligned} \sum_{S_2=\pm 1} e^{K(S_1 S_2 + S_2 S_3) + h S_2} &= e^{K(S_1 + S_3) + h} + e^{-K(S_1 + S_3) - h} \\ &=: A e^{g(S_1, S_3)} \end{aligned} \quad (4)$$

## 2.1. くりこみ群の式 (3)

- この  $Ag(S_1, S_3)$  は  $S_1, S_3$  の関数であり、これらの指数の肩で冪級数展開が可能であるが、交換対称性および  $S_i^2 = 1$  の性質から、3 次以上の項は現れない ( $A$  は指数の肩の定数項からくる:  $A = e^{h_0}$ )。したがって、

$$Ae^{g(S_1, S_3)} \sim A \exp \left\{ \underbrace{h_1(S_1 + S_3)}_{1 \text{ 次項}} + \underbrace{K' S_1 S_3}_{2 \text{ 次項}} \right\} \quad (5)$$

のように、1 次および 2 次の項に展開できる。

- 同様の操作を  $S_2, S_4, S_6, \dots$  に対して繰り返すと、縮約後の系は次のようになる：

$$\sum_{S_2, S_4, \dots} e^{-\beta H} = \tilde{A} \exp \left[ K' \sum_{i:\text{odd}} S_i S_{i+2} + \underbrace{(h + 2h_1)}_{=: h'} \sum_{i:\text{odd}} S_i \right] \quad (6)$$

ただし、 $\tilde{A} = A^{N/2}$  は定数である。

## 2.1. くりこみ群の式 (4)

- よって、分配関数は次のように再表現される：

$$\begin{aligned} Z_N &= \sum_{\{S_i\}} e^{-\beta H} \\ &= \sum_{S_1, S_3, S_5, \dots} \tilde{A} \exp \left[ K' \sum_i S_i S_{i+2} + h' \sum_i S_i \right] \\ &=: Z_{N'} \end{aligned} \tag{7}$$

- このように、自由度が半減し、結合定数  $K$  および外場  $h$  が、それぞれ新たな定数  $K'$ 、 $h'$  に変換される。この変換構造こそが Wilson 型くりこみ群の基本であり、変数の流れ (RG フロー) を記述する枠組みとなる。

## 2.2. くりこみ後のパラメータの導出

♣ クリこみ操作により得られる新たなパラメータ  $K'$ ,  $h'$ ,  $A$  の導出

- 前スライドの縮約操作 ((4) 式) により、例えば  $S_2$  に関する縮約に注目すれば以下を得る：

$$2 \cosh (K(S_1 + S_3) + h) = A \exp [h_1(S_1 + S_3) + K' S_1 S_3] \quad (8)$$

なお、他のスピン縮約に関しても対称性から同等の関係式を得る。

- そこで式 (8) の  $S_1$  と  $S_3$  のスピン配置ごとに場合分けし比較することで、パラメータ  $K$ ,  $h$ ,  $A$  のに関する関係式

1  $S_1 = S_3 = +1$  :

$$Ae^{2h_1+K'} = 2 \cosh(2K + h) \quad (9)$$

2  $S_1 = S_3 = -1$  :

$$Ae^{-2h_1+K'} = 2 \cosh(2K - h) \quad (10)$$

## 2.2. くりこみ後のパラメータの導出 (2)

■  $S_1 \neq S_3$  :

$$Ae^{-K'} = 2 \cosh(h) \quad (11)$$

を得る。

- 次に、これらを整理することで、くりこみ操作により変数の変換  $(K, h) \rightarrow (K', h')$  を得る。
- まず、式 (9) および (10) より：

$$A^2 e^{2K'} = 4 \cosh(2K + h) \cosh(2K - h) \quad (12)$$

- また、式 (11) より：

$$A^2 e^{-2K'} = 4 \cosh^2 h \quad (13)$$

- これらを掛け合わせると：

$$A^4 = 16 \cosh(2K + h) \cosh(2K - h) \cosh^2 h \quad (14)$$

## 2.2. くりこみ後のパラメータの導出 (3)

- 再び式 (11) より：

$$e^{4K'} = \frac{A^4}{16 \cosh^4 h} \Rightarrow \boxed{e^{4K'} = \frac{\cosh(2K + h) \cosh(2K - h)}{\cosh^2 h}} \quad (15)$$

- また、式 (9) / (10) より：

$$e^{4h_1} = \frac{\cosh(2K + h)}{\cosh(2K - h)} \quad (16)$$

- いま、 $h' = h + 2h_1$  であるから：

$$\boxed{e^{2h'} = e^{2h} \left( \frac{\cosh(2K + h)}{\cosh(2K - h)} \right)} \quad (17)$$

- このようにして、くりこみ操作により変数の変換  $(K, h) \rightarrow (K', h')$  が得られる。

## 2.3. くりこみ群の流れ (フロー図)

### ♣ くりこみ群の流れ (フロー図)

- 本系では、変数  $K$  は逆温度  $\beta$  に対応しており、くりこみ変換によって変化する。これは温度に相当する制御パラメータであり、系の巨視的状态を支配する。
- 特に、 $K \rightarrow \infty$  は絶対零度、 $K \rightarrow 0$  は高温極限に対応する。
- 外場  $h$  もまた、相転移の有無や相の対称性を制御する重要な外部パラメータである。
- これらの変数をくりこみ後の再スケーリングに適した形に変換するため、次のような変数変換を導入する：

$$x = e^{-4K}, \quad y = e^{-2h} \quad (18)$$

- 以下では、温度に対応する変数  $x$  および外場に対応する変数  $y$  が、くりこみ変換によってそれぞれ  $x'$ ,  $y'$  にどう変化するかを解析する。

## 2.3. くりこみ群の流れ (フロー図) (2)

- 前節で導出された変換後の結合定数 (式 (15)) を、 $x, y, x', y'$  の関数として再表現する。まず以下の関係がある：

$$e^{4K'} = \frac{1}{x'} \quad (19)$$

- 分母に現れる  $\cosh^2 h$  を  $y$  を用いて変形すると：

$$\begin{aligned} \cosh^2 h &= \left( \frac{e^h + e^{-h}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2h} + 2 + e^{-2h}}{4} \\ &= \frac{y + 2 + \frac{1}{y}}{4} = \frac{y^2 + 2y + 1}{4y} \end{aligned} \quad (20)$$



## 2.3. くりこみ群の流れ（フロー図） (3)

- 同様に、 $\cosh(2K \pm h)$  の積は以下のように展開できる：

$$\begin{aligned} & \cosh(2K + h) \cosh(2K - h) \\ &= \left( \frac{e^{2K+h} + e^{-2K-h}}{2} \right) \left( \frac{e^{2K-h} + e^{-2K+h}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (e^{4K} + e^{2h} + e^{-2h} + e^{-4K}) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + x + y \right) \end{aligned} \tag{21}$$

## 2.3. くりこみ群の流れ (フロー図) (4)

- 以上より、 $e^{4K'}$  は次のように整理される：

$$\begin{aligned}
 e^{4K'} &= \frac{\cosh(2K + h) \cosh(2K - h)}{\cosh^2 h} \\
 &= \frac{\frac{1}{4} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + x + y \right)}{\frac{1}{4} \cdot \frac{y^2 + 2y + 1}{y}} \\
 &= \frac{(x + y + xy^2 + x^2y)}{(1 + y)^2}
 \end{aligned} \tag{22}$$

- この式から  $x'$  を求めると、次の関係が得られる：

$$x' = \frac{1}{e^{4K'}} = \frac{(1 + y)^2}{(x + y)(1 + xy)} x \tag{23}$$

## 2.3. くりこみ群の流れ（フロー図） (5)

- よって、 $x$  に関するくりこみ変換の流れ（すなわちフロー）は次式で与えられる：

$$x' = \frac{(1+y)^2}{(x+y)(1+xy)}x \quad (24)$$

- 一方、 $y$  についても、前節の結果（式 (17)）に基づき、指数の関係を用いて変形することで次の式が得られる。これは、 $e^{2h'} = e^{2h} \cdot (\cosh(2K+h)/\cosh(2K-h))$  に  $x, y$  を代入し、定義  $y' = e^{-2h'}$  を用いることで導出される。

$$y' = \frac{x+y}{1+xy}y \quad (25)$$

- このように、式 (24), (25) に示されるような、制御変数のくりこみ変換を記述する写像を、フロー方程式と呼ぶ。これはパラメータ空間上の力学系のような構造を与えるものであり、固定点やスケーリングの性質を理解するうえで重要な役割を果たす。

## 2.4. くりこみ群方程式と固定点

### ♣ くりこみ群方程式と固定点

- 前節で導出したくりこみ群方程式により、パラメータ  $(x, y)$  の変換法則  $(x, y) \mapsto (x', y')$  が明示された。
- 臨界現象において、臨界点に対応する状態は、くりこみ変換を何度繰り返しても変化しない。このような状態は、パラメータ空間における **\*\*固定点 (fixed point) \*\*** として現れる。
- 一方、臨界点からわずかにずれると、くりこみ変換によってパラメータは固定点から離れていく。すなわち、臨界点は**\*\*不安定な構造\*\***を持つ。
- このようなパラメータの変化を視覚的に表したものが**\*\*フロー図 (flow diagram) \*\***であり、系の普遍的性質を理解するうえで重要な手がかりとなる。
- 本節では、くりこみ群の流れが持つ固定点構造と、その近傍における安定性について解析を行う。

## 2.4. くりこみ群方程式と固定点 (2)

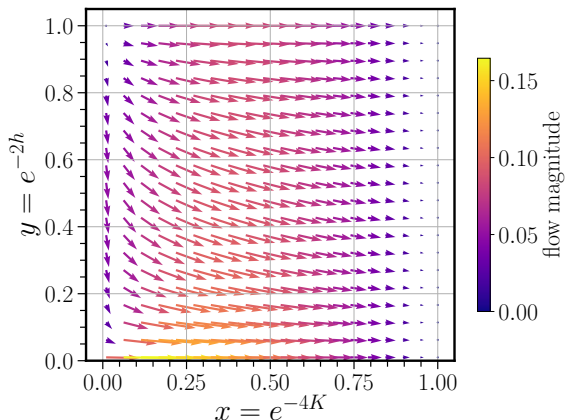


図 1: 1 次元 Ising モデルにおける  $x = e^{-4K}$ ,  $y = e^{-2h}$  に関するフロー図 (flow diagram)。

## 2.4. くりこみ群方程式と固定点 (3)

- 図 1 は, 1 次元 Ising モデルにおける  $(x, y)$  平面でのくりこみ群のフローを示している。
- 臨界点での振る舞いを理解するには, まずフロー図における\*\*固定点\*\*を特定する必要がある。これは, くりこみ変換後もパラメータが変化しない点, すなわち

$$x' = x, \quad y' = y \quad (26)$$

を満たす点である。

- 一般に, 変換則  $x' = f(x)$ ,  $y' = g(y)$  に対して, 固定点は

$$x = f(x), \quad y = g(y) \quad (27)$$

を満たす解として定義される。

- 図 1 から, 以下の 3 種類の固定点 (あるいは固定線) が存在することがわかる:

## 2.4. くりこみ群方程式と固定点 (4)

(i)  $(x, y) = (1, 0) : T = 0, h = \infty$ 。

(ii)  $(x, y) = (0, 1) : T = 0, h = 0$ 。

(iii)  $x = 1$  上の直線:  $T = \infty$ , 任意の  $h$ 。

- 各固定点における流れの安定性を調べることで、臨界現象と関係する点を特定できる。
- この中で、臨界現象と直接関係するのは (ii) の固定点である。
- これは、固定点からわずかにずれると、温度 ( $x$ ) や外場 ( $y$ ) の変化によって系が固定点から遠ざかっていくためである。
- 実際、1 次元 Ising 模型では有限温度における強磁性転移は存在せず、臨界点は  $T = 0$  に限られ、かつ  $h = 0$  である。このことは (ii) の固定点と一致している。
- したがって、臨界点近傍の振る舞いを考察するには、(ii) の固定点の周囲での流れを調べればよいことがわかる。

## 2.5. 固定点まわりの展開

### ♣ 固定点まわりの展開

本節では、図 1 における固定点 (ii), すなわち  $(x, y) = (0, 1)$  の近傍における振る舞いを解析する。固定点の近傍では、くりこみ変換によるパラメータの変化が非常に小さくなるため、パラメータのずれを微小量として扱うことができる。

- ここでは、 $x$  をそのまま微小量とみなし、 $y$  に関しては固定点  $y = 1$  からのずれを

$$\epsilon = 1 - y \quad (28)$$

と定義する。

このとき、くりこみ群の変換式

$$x' = \frac{(1+y)^2}{(x+y)(1+xy)}x \quad \text{および} \quad y' = \frac{(1+y)(x+y)}{1+xy}$$

に、 $y = 1 - \epsilon$  を代入し、 $\epsilon$  および  $x$  をともに微小量として 2 次以上の項を無視すると、次のようになる：



## 2.5. 固定点まわりの展開 (2)

(1)  $x$  のくりこみ変換：

$$\begin{aligned}x' &= \frac{(1+y)^2}{(x+y)(1+xy)}x \\&= \frac{(2-\epsilon)^2}{(x+1-\epsilon)(1+x(1-\epsilon))}x \\&\sim \frac{4}{(x+1)(1+x)}x \\&\sim 4x\end{aligned}\tag{29}$$

## 2.5. 固定点まわりの展開 (3)

(2)  $y$  のくりこみ変換：

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(1+y)(x+y)}{1+xy} = \frac{(2-\epsilon)(x+1-\epsilon)}{1+x(1-\epsilon)} \\&\sim \frac{2(x+1-\epsilon)}{1+x} \\&= \left( \frac{2(x+1)}{1+x} \right) - \frac{2\epsilon}{1+x} \\&= 2 - \frac{2\epsilon}{1+x} \\&\sim 1 - 2\epsilon\end{aligned}\tag{30}$$

したがって、 $\epsilon' = 1 - y'$  より、

$$\epsilon' = 2\epsilon\tag{31}$$

が得られる。

## 2.5. 固定点まわりの展開 (4)

- この結果を，スケール因子  $b = 2$  によるスケーリング変換とみなすと，

$$x' = b^{y_x} x \quad (32)$$

$$\epsilon' = b^{y_\epsilon} \epsilon \quad (33)$$

という形式に書き換えることができる。

- したがって， $x$  と  $\epsilon$  に対応するスケール次元は，

$$y_x = 2, \quad y_\epsilon = 1 \quad (34)$$

である。

- これより、臨界現象を支配する有意な変数とそのスケール次元が特定できたので、次に、これらを用いてスケーリング理論から各種臨界指数を求める。
- 今回は有意な変数を正式に選ぶことができたことと、固定点近傍での議論であるので、自由エネルギーの普遍構造が担保され Kadanoff 理論を用いることが妥当である。

## 2.6. 臨界指数の算出

### ♣ 臨界指数の算出

- 前節でスケーリング次元  $y_x, y_\epsilon$  を得たので、これを用いて Kadanoff のスケーリング理論に基づき臨界指数を導出する。
- 表記は前回と異なるが、同様のスケーリングの枠組みにより導出は可能である。
- 1 自由度あたりの自由エネルギーを  $f(x, \epsilon)$  とし、次のスケーリング関係式を立てる：

$$f(x, \epsilon) = \frac{1}{b^d} f(b^{y_x} x, b^{y_\epsilon} \epsilon) \quad (35)$$

- なお先ほど、くりこみ変換の際に  $A$  という変数もあったが、これは、 $x, y$  (or  $\epsilon$ ) に対して従属であったため、自由エネルギーの独立変数にはならない点に注意する。

## 2.6. 臨界指数の算出 (2)

### ■ 磁化のスケーリング関係式:

磁化は自由エネルギーの外場に関する 1 階微分である。 $h = 0$  が  $\epsilon = 0$  に対応することから、

$$\begin{aligned}
 m(x, 0) &= \frac{1}{b^d} \left. \frac{\partial f(b^{y_x} x, b^{y_\epsilon} \epsilon)}{\partial h} \right|_{h=0} \\
 &= \frac{1}{b^d} \cdot \frac{\partial f(b^{y_x} x, b^{y_\epsilon} \epsilon)}{\partial \epsilon} \cdot \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial h} \right|_{h=0} \\
 &= b^{-d+y_\epsilon} \cdot f'(b^{y_x} x, 0) \cdot \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial h} \right|_{h=0}
 \end{aligned} \tag{36}$$

- ここで、 $\epsilon = 1 - e^{-2h}$  より、 $\partial \epsilon / \partial h = 2e^{-2h} \Rightarrow 2$  ( $h = 0$  にて) となり、この定数はスケーリングの係数に吸収できる。
- スケール因子として  $b = x^{-1/y_x}$  を選ぶと、

$$m(x, 0) \propto x^{\frac{y_\epsilon - d}{y_x}} = x^\beta \tag{37}$$

## 2.6. 臨界指数の算出 (3)

- よって,

$$\beta = \frac{y_\epsilon - d}{y_x} = \frac{1 - 1}{2} = 0 \quad (38)$$

が得られる。すなわち、このモデルでは自発磁化の相転移は存在しない。

- 非線形磁場応答（臨界点での  $m(h)$  の振る舞い）：

臨界点  $x = 0$  における磁化のスケーリング関係式は,

$$m(0, \epsilon) = b^{y_\epsilon - d} \cdot m(0, b^{y_\epsilon} \epsilon) \quad (39)$$

## 2.6. 臨界指数の算出 (4)

■  $b = \epsilon^{-1/y_\epsilon}$  を選ぶと,

$$\begin{aligned} m(0, \epsilon) &= \epsilon^{\frac{y_\epsilon - d}{y_\epsilon}} \cdot m(0, 1) \\ &= \epsilon^0 \cdot m(0, 1) = \epsilon^{1/\delta} \cdot m(0, 1) \end{aligned} \quad (40)$$

よって,

$$\boxed{\delta = \frac{y_\epsilon}{y_\epsilon - d} = \infty} \quad (41)$$

が得られる。すなわち、磁場をわずかにかけるだけで磁化が急峻に立ち上がる。

## 2.6. 臨界指数の算出 (5)

- 磁気感受率のスケーリング関係式 :

磁気感受率は磁場に関する 2 階微分として定義される :

$$\chi(x, 0) = \left. \frac{\partial^2 f(x, \epsilon)}{\partial h^2} \right|_{h=0} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial h} \right) \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial h} \bigg|_{h=0} \quad (42)$$

よって,

$$\chi(x, 0) \propto b^{-d+2y_\epsilon} \chi(b^{y_x} x, 0) \quad (43)$$

スケール因子  $b = x^{-1/y_x}$  を選ぶと,

$$\chi(x, 0) \propto x^{\frac{2y_\epsilon - d}{y_x}} = x^{-\gamma} \quad (44)$$

よって,

$$\gamma = \frac{d - 2y_\epsilon}{y_x} = \frac{1 - 2}{2} = \frac{1}{2} \quad (45)$$

が得られる。



## 2.6. 臨界指数の算出 (6)

- 相関長のスケーリング関係式：

$$\xi(x, 0) = b\xi(b^{y_x}x, 0) \quad (46)$$

である。ここで  $b = x^{-1/y_x}$  と選べば,

$$\begin{aligned} \xi(x, 0) &= x^{-1/y_x} \xi(1, 0) \\ &= x^{-1/2} \xi(1, 0) \\ &\propto x^{-\nu} \end{aligned} \quad (47)$$

となり,

$$\boxed{\nu = \frac{1}{y_x} = \frac{1}{2}} \quad (48)$$

を得る。

## 2.6. 臨界指数の算出 (7)

- 以上のように、1 次元 Ising 模型における  $T = 0$  にむけての相転移をくりこみ群解析により解析した。次に、これを厳密解と比較したのが表 1 である。これよりくりこみ群解析の結果が厳密解とよく合っていることが見て取れる。
- 一方、この手の解析は、2 次元以上になると計算が煩雑になり近似の必要性が増す。

表 1: スケーリング理論による臨界指数と厳密解の比較 (1 次元 Ising 模型,  $x = e^{-4K}$ ,  $\epsilon = 1 - e^{-2h}$ ,  $y_x = 2$ ,  $y_\epsilon = 1$  のとき)

臨界指数 (臨界点)	スケーリング理論の結果	厳密解
$\beta$	0	0 ( $T > 0$ で自発磁化なし)
$\gamma$	$1/2$	$1/2$ ( $\chi \sim x^{-1/2} \propto e^{2K}$ )
$\delta$	$\infty$	$\infty$ ( $T = 0$ で磁化が急峻)
$\nu$	$1/2$	$1/2$ ( $\xi \sim x^{-1/2} \propto e^{2K}$ )
$T_c$	$T_c = 0$	$T_c = 0$ (有限温度で相転移なし)

# 第9回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 今回の内容：Wilson のくりこみ群理論

- くりこみ群の式
- くりこみ後のパラメータの導出
- くりこみ群の流れ（フロー図）
- くりこみ群方程式と固定点
- 固定点まわりの展開
- 臨界指数の算出

## 3 まとめ

### 3. まとめ

1 次元 Ising モデルを例にくりこみ群解析をおこなった。

- この系では解析解と整合する臨界指数を求めることができた。
- ただし 2 次元以上の空間次元をもつ Ising 模型の場合、実空間くりこみ群解析の際に、近似が必要になるが、平均場より現実に近い臨界指数が求まる。

今回は、実空間くりこみ群解析と Migdal Kadanoff 近似などを用い、2 次元以上の Ising モデルの臨界指数を求める。