

連続体力学 第4回

線形弾性論(1)：Hookeの法則

川崎猛史

大阪大学 D3センター / 大学院理学研究科物理学専攻

Last update : November 4, 2025

第4回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 前回の復習

- 変形勾配テンソルと歪みテンソル
- 体積変化率

3 線形弾性論

- Hooke の法則の一般形
- 等方弾性体の Hooke の法則
- 等方弾性体の構成方程式

4 まとめ

第4回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 前回の復習

- 変形勾配テンソルと歪みテンソル
- 体積変化率

3 線形弾性論

- Hooke の法則の一般形
- 等方弾性体の Hooke の法則
- 等方弾性体の構成方程式

4 まとめ

4.1. 講義のスケジュール

- | | |
|---------------------------|-----------------------|
| ① 10/6：第 1 回 | ⑨ 12/15：第 9 回 |
| ② 10/20：第 2 回 | ⑩ 12/22：第 10 回 |
| ③ 10/27：第 3 回 | ⑪ 1/5：第 11 回 |
| ④ 11/5(水)：第 4 回 | ⑫ 1/15(木)：第 12 回 |
| ⑤ 11/17：第 5 回 (11/10 は休講) | ⑬ 1/19：第 13 回 |
| ⑥ 11/26(水)：第 6 回 | ⑭ 1/26：第 14 回 |
| ⑦ 12/1：第 7 回 | ⑮ 2/2：第 15 回 期末試験（予定） |
| ⑧ 12/8：第 8 回 | |

第4回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 前回の復習

- 変形勾配テンソルと歪みテンソル
- 体積変化率

3 線形弾性論

- Hooke の法則の一般形
- 等方弾性体の Hooke の法則
- 等方弾性体の構成方程式

4 まとめ

4.2. 前回の復習

本節では、前回質問を多く受けた変形勾配テンソルや歪みテンソルの物理的意味、および体積変形率などについて補足する。

4.2.1. 変形勾配テンソルと歪みテンソル

♣ 変形勾配テンソルと歪みテンソル

- 連続体の 2 点 x と x' がそれぞれ r および r' に変位する際,

$$\delta r = r' - r \quad (1)$$

を变形 (deformation) と定義した.

- 変形 δr は x と x' の関数, すなわち x と $x + \delta x$ の関数である.
- δx を微小量として, 第 2 变数を x まわりでテイラー展開すると,

$$\delta r(x, \underline{x} + \delta x) = D(x, \underline{x}) \cdot \underbrace{\delta x}_{x' - x} \quad (2)$$

を得る. つまり, D は 1 点 x のみに依存する.

- ここで $(D)_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$ を変形勾配テンソルとよぶ.

4.2.1. 変形勾配テンソルと歪みテンソル (2)

- 変位 δr は座標 2 点に依存するが、変形勾配テンソルは座標 x のみに依存することから、 x における連続体方程式を構築する際、変形の寄与を表すのに便利である。
- また図 1 の通り、例えば均一な単純剪断変形を与えた場合、いずれの位置を基準にとっても、変形勾配テンソルが一様になることがわかる。

4.2.1. 変形勾配テンソルと歪みテンソル (3)

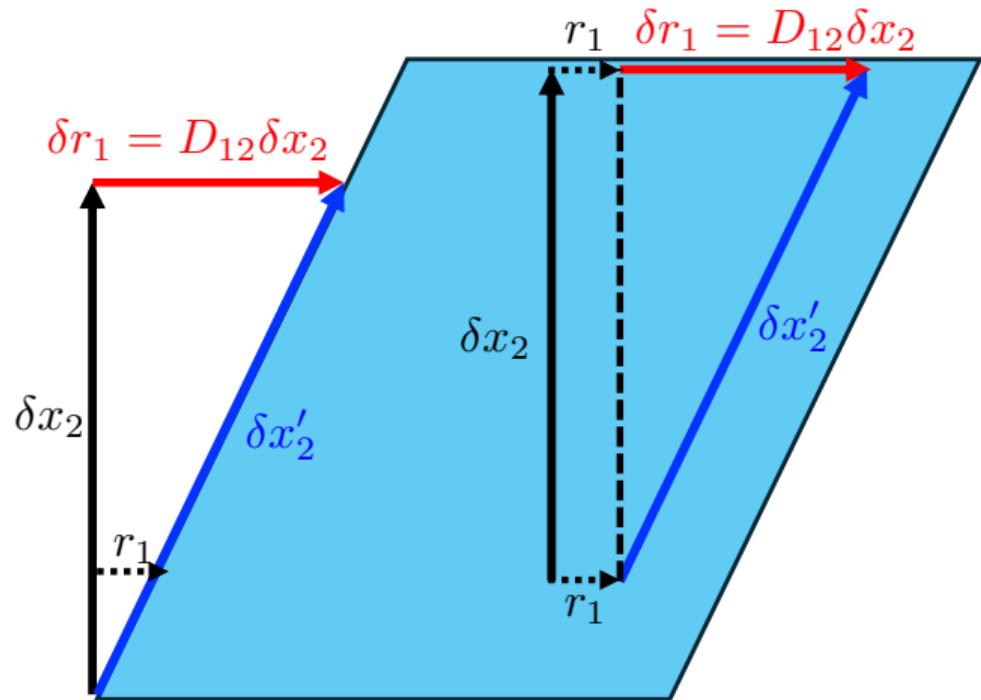


図 1: 単純剪断変形における
変位と変形勾配テンソルの関係.
基準点を変化させた場合.

4.2.1. 変形勾配テンソルと歪みテンソル (4)

♣ 変形勾配テンソルの分解

- 変形は部分的に応力の変化に寄与するが、特に回転成分は寄与しない。
- そこで変形勾配テンソル D を、対称テンソル

$$(E)_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} + \frac{\partial r_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

および、非対称テンソル

$$(F)_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} - \frac{\partial r_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

に分解した。

- 特に対称成分は応力変化に寄与する歪み、非対称成分は回転を表すことを前回扱った。

4.2.2. 体積変化率

♣ 体積変化率

- 連続体において変形による体積の変化を議論することが多い.
- 元の連続体の微小要素の体積を δV , 変形後を $\delta V'$ とする.
- その際, 体積変化率は歪みテンソルを使って一般的に

$$\boxed{\frac{\delta V' - \delta V}{\delta V} = \sum_i E_{ii}} \quad (5)$$

となる.

- 前回この証明を直交軸方向の伸長変形において行った ($\delta V' = \delta x'_1 \delta x'_2 \delta x'_3$ などと表現).
- 剪断に対しては明確な証明を与えず混乱を与えた (すみません).
- 今回は, より一般的な証明を与える.

4.2.2. 体積変化率 (2)

(証明)

- いま、微小体積 δV は、相対ベクトル $\delta \mathbf{x}$ の基底ベクトルが張る直方体の体積である。
- 一方、 $\delta V'$ は変形後の相対ベクトル $\delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{r}$ の基底ベクトル（必ずしも直交系ではない）が張る平行六面体の体積である。
- いま、

$$\delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{r} = (1 + D) \cdot \delta \mathbf{x} \quad (6)$$

である。

- 線形代数公式によれば、変形後の相対位置（式 (6)）の基底が張る平行六面体の体積 $\delta V'$ は

$$\delta V' = \det(1 + D) \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \quad (7)$$

である。ここで $\delta V = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$ である。したがって、

$$\frac{\delta V'}{\delta V} = \det(1 + D) \quad (8)$$

4.2.2. 体積変化率 (3)

である。いま、歪み勾配は十分小さいとすると、 $\det(1 + D)$ は

$$\begin{aligned}\det(1 + D) &= \left(1 + \frac{\partial r_1}{\partial x_1}\right) \left(1 + \frac{\partial r_2}{\partial x_2}\right) \left(1 + \frac{\partial r_3}{\partial x_3}\right) + \text{勾配の2次以上} \\ &\sim 1 + \sum_i \frac{\partial r_i}{\partial x_i}\end{aligned}\tag{9}$$

となる。ここで、歪みテンソルを用いることで、 $\sum_i \frac{\partial r_i}{\partial x_i} = \sum_i E_{ii}$.

- したがって、体積変化率は

$$\frac{\delta V' - \delta V}{\delta V} = \sum_i E_{ii}$$

(10)

となる。

第4回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 前回の復習

- 変形勾配テンソルと歪みテンソル
- 体積変化率

3 線形弾性論

- Hooke の法則の一般形
- 等方弾性体の Hooke の法則
- 等方弾性体の構成方程式

4 まとめ

4.3. 線形弾性論

今回は、弾性体における応力と歪みの構成関係を Hooke の法則に基づき導入する。

4.3.1. Hooke の法則の一般形

♣ Hooke の法則の一般形

- 弹性体において系の歪みは応力変化を伴う。
- とりわけ、歪みが小さい範囲においては、歪みに比例した応力が生じることが知られている（線形応答）。
- 一般的な連続体においては、応力テンソルと歪みテンソルの間には以下の線形関係式：

$$P_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl} E_{kl} \quad (11)$$

が成立する。

- このような関係式を Hooke (フック) の法則とよび、我々がこれまで扱ってきたバネにかかる弾性力の大元となる関係式である。
- C_{ijkl} を弾性率とよび、添え字の組み合わせは、前の 2 つは応力テンソル、後ろの 2 つは歪みテンソルの添え字を組み合わせた、4 階テンソルとなる。

4.3.1. Hooke の法則の一般形 (2)

- ここでは静水圧などの外圧がない状況 ($p = 0$) を考えている。固体は多くの場合外圧がなくても形状を維持できる（引力効果）。
- 対称性等を考慮しなければ、 C_{ijkl} は 81 通り考えられるが、応力と歪みの対称性などを考慮することにより、一般的な連続体においては 21 通りまで自由度を落とすことができる。
- さらに、等方的な連続体においては 2 通りまで自由度を落とすことができる。
- 以下、例題形式で上記を示す。

4.3.1. Hooke の法則の一般形 (3)

例題 4-1：一般的な弾性体における弾性率の自由度

一般的な弾性体における弾性係数 C_{ijkl} について以下の各問いに答えよ。

- (1) 応力テンソルと歪みテンソルはともに対称テンソルである。このため、弾性係数 C_{ijkl} における ij と kl は交換に対して不变となる（小対称性という）。この条件を満たすとき、弾性率の組み合わせ数が 36 通りに絞れることを示せ。
- (2) Hooke の法則を満たしながら、弾性体の歪み（歪みテンソルの各成分）が行う単位体積あたりの仕事（弾性エネルギー）は合計で

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} P_{ij} E_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} \quad (12)$$

と書ける。このことから、添え字 $\{ij\}$ と $\{kl\}$ の交換に対して対称となる（大対称性という）。設問 (1) と合わせて、この性質を考慮することにより、弾性係数の組み合わせが 21 通りまで落とせることを示せ。

4.3.1. Hooke の法則の一般形 (4)

(解答)

- (1) $\{ij\}$ および $\{kl\}$ はそれぞれ、 $\{11\}, \{22\}, \{33\}, \{12\}, \{13\}, \{23\}$ の 6 通りである。したがって、この対称性を考慮した C_{ijkl} の組み合わせは $6 \times 6 = 36$ 通りである。
- (2) 題意より、 $C_{ijkl} = C_{klji}$ となり、 $\{ij\}$ と $\{kl\}$ の交換に対して、弾性率は不变である。このため、
- $\{1212\}$ のように、 $\{ij\}$ と $\{kl\}$ が同等のとき、6 通り。
 - $\{1112\}$ のように、 $\{ij\}$ と $\{kl\}$ が異なるとき、 ${}_6C_2 = 15$ 通りしたがって、合計 21 通りである。

注：式 (12) について：一辺 L の立方体の容器の表面に、 $P_{12}L^2$ の力を加えると、変位 $D_{12}L$ が生じる。この時の仕事は $\frac{1}{2}P_{12}D_{12}V$ 。同様に $P_{21}L^2$ に関しては、 $\frac{1}{2}P_{21}D_{21}V$ の仕事を行う。これらの和は $\frac{1}{2}P_{21}(D_{12} + D_{21})V = \frac{1}{2}(P_{12}E_{12} + P_{21}E_{21})V$ と変形可能。あらゆる方向の応力に対しては一般的に、式 (12) の仕事を行う。

4.3.2. 等方弾性体の Hooke の法則

♣ 等方弾性体の Hooke の法則

- 次に等方弾性体を考える.
- 「等方」とは軸に対する任意の回転に対して系の性質が変わらない性質（回転不变性）をいい，巨視的な単結晶などにおいては当てはまらない.
- 非晶質固体（ガラス・ゲル）や微結晶粒が分散した（多結晶）系においては等方的となる.
- 以下の例題を解きながら，等方弾性体の弾性係数の自由度が 2 まで落ちることを示そう.

4.3.2. 等方弾性体の Hooke の法則 (2)

例題 4-2：等方弾性体の弾性係数の自由度

以下の各問いに答えよ。

- (1) 回転不变性を満たす 2 階テンソル（行列）は、

$$A\delta_{ij} \quad (13)$$

となることを示せ。

- (2) 回転不变性を満たす 4 階テンソルは、

$$A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk} \quad (14)$$

となることを示せ。

- (3) 等方弾性体における弾性率テンソル C_{ijkl} は

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (15)$$

と表せることを説明せよ。ここで λ は Lamé 第一係数、 μ は Lamé 第二係数（剪断弾性率）という。

4.3.2. 等方弾性体の Hooke の法則 (3)

(解答)

(1) 2 階テンソル (行列) を書き下すと

$$\mathbf{T} = \sum_{ij} A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (16)$$

となる。ここで、 $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ をダイアド積とよび、 ij 成分が $e_i e_j$ であるテンソル (行列) を構成する。これを全て書き下すと、

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & A_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + A_{12} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + A_{13} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \\ & + A_{21} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + A_{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + A_{23} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \\ & + A_{31} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + A_{32} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + A_{33} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (17)$$

■ テンソル \mathbf{T} を x 軸周りに π 回転させたものを \mathbf{T}' とすると、回転不変性により

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}' \quad (18)$$

4.3.2. 等方弾性体の Hooke の法則 (4)

- T' は T における $e_2 \rightarrow -e_2$ および $e_3 \rightarrow -e_3$ としたものであるので

$$\begin{aligned} T' = & A_{11}e_1 \otimes e_1 - A_{12}e_1 \otimes e_2 - A_{13}e_1 \otimes e_3 \\ & - A_{21}e_2 \otimes e_1 + A_{22}e_2 \otimes e_2 + A_{23}e_2 \otimes e_3 \\ & - A_{31}e_3 \otimes e_1 + A_{32}e_3 \otimes e_2 + A_{33}e_3 \otimes e_3 \end{aligned} \quad (19)$$

- $T = T'$ から、

$$A_{12} = -A_{12}, \quad A_{13} = -A_{13}, \quad A_{21} = -A_{21}, \quad A_{31} = -A_{31} \quad (20)$$

となるので、

$$A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0, \quad A_{21} = 0, \quad A_{31} = 0 \quad (21)$$

を得る。また同様の他軸回転操作から、

$$A_{23} = 0, \quad A_{32} = 0 \quad (22)$$

なども言える。

4.3.2. 等方弾性体の Hooke の法則 (5)

- y 軸周りに $\frac{\pi}{2}$ 回転させた T'' を考える。この時、 T'' は基底ベクトルを $e_1 \rightarrow e_3$, $e_3 \rightarrow -e_1$ と変換したものなので、回転不变性より

$$A_{11} = A_{33} \quad (23)$$

- 同様に、

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = A \quad (24)$$

したがって、

$$(T)_{ij} = A\delta_{ij} \quad (25)$$

4.3.2. 等方弾性体の Hooke の法則 (6)

(2) 4 階テンソル $(C)_{ijkl}$ を考える。テンソルの成分 $\{ij\}$ を固定した 2 階テンソル $(C_{ij})_{kl}$ が回転不变性を満たすためには

$$(C_{ij})_{kl} = A_{ij}\delta_{kl} \quad (26)$$

となる必要がある。同様に $\{kl\}$ を固定した 2 階テンソル $(C_{kl})_{ij}$ が回転不变性を満たすためには

$$(C_{kl})_{ij} = A_{kl}\delta_{ij} \quad (27)$$

となる。この 4 階テンソルが回転不变であるためには、上記 2 条件の両方を満たし $A_{ij} = A\delta_{ij}$ となる必要がある。したがって、

$$(C)_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (28)$$

となれば 4 階テンソル $(C)_{ijkl}$ は回転不变である。

同様に、固定する 2 つ添え字の組みを変えると

$$(C)_{ijkl} = B\delta_{ik}\delta_{jl} \quad (29)$$

4.3.2. 等方弾性体の Hooke の法則 (7)

および

$$(C)_{ijkl} = C\delta_{il}\delta_{jk} \quad (30)$$

もそれぞれ回転不变であることがわかる。さらに、これらの線形結合が最も一般性の高い形となり、等方 4 階テンソルは

$$(C)_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk} \quad (31)$$

という形をとる。

- 物理的に $B\delta_{ik}\delta_{jl}$ と $C\delta_{il}\delta_{jk}$ は、クロネッカーデルタの添え字の組みが応力と歪みから 1 つずつ取り出したものであり、対称性より等価である。これより、これらの係数は等しくなる。 $A\delta_{ij}\delta_{kl}$ の項は、クロネッカーデルタの添え字がそれぞれ、応力・歪みに対応するものからなり、先ほどの 2 つの項と対称性が異なる。したがって、係数は 2 種類のみとなり、

$$(C)_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (32)$$

となる。

4.3.3. 等方弾性体の構成方程式

♣ 等方弾性体の構成方程式

- 最後に、等方弾性体の構成方程式（応力と歪みの関係）を考える。
- 前節の例題 4-2 の結果を用いることで、等方弾性体の構成方程式は

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \sum_{kl} C_{ijkl} E_{kl} \\ &= \sum_{kl} \{\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})\} E_{kl} \end{aligned} \quad (33)$$

となる。

- この関係式から、構成方程式は次のように書ける（詳細は例題 4-3 で導く）：

$$P_{ij} = \lambda(\text{Tr } \mathbf{E}) \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \quad (34)$$

ここで $\text{Tr } \mathbf{E} = \sum_k E_{kk}$ は歪みテンソルのトレース（体積変化率）である。

4.3.3. 等方弾性体の構成方程式 (2)

- さらに、この式を体積変化をともなう圧縮成分と、体積変化をともなわない剪断成分に分けると、

$$P_{ij} = K(\text{Tr } \mathbf{E}) \delta_{ij} + 2\mu \left(E_{ij} - \frac{1}{3}(\text{Tr } \mathbf{E}) \delta_{ij} \right), \quad (35)$$

ここで $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ は体積弾性率 (bulk modulus) である。

- この構成方程式から、適当な応力テンソルを与えた際の、系の歪み（どのような変形が生じるか）を算出することができる（次回の課題）。
- 以下の例題では、等方弾性体の構成方程式の算出までを順を追って考察する。

4.3.3. 等方弾性体の構成方程式 (3)

例題 4-3：等方弾性体の構成方程式

等方弾性体の構成方程式に関して以下の各問いに答えよ。なお、応力テンソルは Hooke の法則から

$$P_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl} E_{kl} \quad (36)$$

で与えられ、系の等方性から弾性率テンソルは

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (37)$$

を満たすものとする。

(1) 構成方程式が

$$P_{ij} = \lambda (\text{Tr } \mathbf{E}) \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \quad (38)$$

となることを示せ。

(2) (1) の式を体積変化をともなう圧縮成分と、体積変化をともなわない剪断成分に分けると、

$$P_{ij} = K(\text{Tr } \mathbf{E}) \delta_{ij} + 2\mu \left(E_{ij} - \frac{1}{3}(\text{Tr } \mathbf{E}) \delta_{ij} \right), \quad (39)$$

となることを示せ。ここで、 $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ は体積弾性率 (bulk modulus) である。

4.3.3. 等方弾性体の構成方程式 (4)

(解答)

(1) (36) と (37) を用いる。

$$\begin{aligned}
 P_{ij} &= \sum_{kl} \left[\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] E_{kl} \\
 &= \lambda \delta_{ij} \underbrace{\sum_{kl} \delta_{kl} E_{kl}}_{= \sum_l E_{ll} = \text{Tr } \mathsf{E}} + \mu \underbrace{\sum_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} E_{kl}}_{= E_{ij}} + \mu \underbrace{\sum_{kl} \delta_{il} \delta_{jk} E_{kl}}_{= E_{ji} = E_{ij}} \\
 &= \lambda (\text{Tr } \mathsf{E}) \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}. \tag{40}
 \end{aligned}$$

よって、

$$P_{ij} = \lambda (\text{Tr } \mathsf{E}) \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \tag{41}$$

となり、(38) が得られる。

4.3.3. 等方弾性体の構成方程式 (5)

(2) 歪みテンソルを以下のようにトレースレス項 E' と余剰項に分ける：

$$E_{ij} = E'_{ij} + A\delta_{ij} \quad (42)$$

いま、両辺トレースをとると

$$\text{Tr}\mathsf{E} = \text{Tr}\mathsf{E}' + 3A \quad (43)$$

かつ

$$\text{Tr}\mathsf{E}' = 0 \quad (44)$$

であるので、

$$A = \frac{1}{3} \text{Tr}\mathsf{E} \quad (45)$$

を得る。これより、

$$E'_{ij} = E_{ij} - \frac{1}{3}(\text{Tr}\mathsf{E})\delta_{ij} \quad (46)$$

4.3.3. 等方弾性体の構成方程式 (6)

はトレースレスとなる。これを、式(38)に代入すると

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \lambda(\text{Tr } \mathbf{E}) \delta_{ij} + 2\mu [E'_{ij} + \frac{1}{3}(\text{Tr } \mathbf{E}) \delta_{ij}] \\ &= \underbrace{\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right)}_{=:K} (\text{Tr } \mathbf{E}) \delta_{ij} + 2\mu E'_{ij}. \end{aligned} \quad (47)$$

よって、

$$P_{ij} = \underbrace{K(\text{Tr } \mathbf{E}) \delta_{ij}}_{\text{体積変化}} + \underbrace{2\mu \left(E_{ij} - \frac{1}{3}(\text{Tr } \mathbf{E}) \delta_{ij} \right)}_{\text{体積変化なし：剪断}}, \quad (48)$$

となり、(39)を示した。

これより体積変化と剪断が独立に寄与することがわかる。

第4回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 前回の復習

- 変形勾配テンソルと歪みテンソル
- 体積変化率

3 線形弾性論

- Hooke の法則の一般形
- 等方弾性体の Hooke の法則
- 等方弾性体の構成方程式

4 まとめ

4.4. まとめ

- Hooke の法則により弾性体の構成方程式を構築した.
- 対称性を考慮することにより，一般の弾性体では弾性率が 21 通り，等方弾性体では 2 通りまで自由度が落ちることを確認した.

次回：線形弾性論 (2) (Hooke の法則の解. Poisson 比と Young 率.)