

連続体力学 第10回

高 Reynolds 数流体：Bernoulli 則

川崎猛史

大阪大学 D3 センター / 大学院理学研究科物理学専攻

Last update : January 4, 2026

第10回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 高 Reynolds 数流体：完全流体と Bernoulli の定理

- Euler 方程式
- Euler 方程式の第 1 積分
- 静止流体における静水圧条件
- 定常完全流体における Bernoulli の定理

3 まとめ

第10回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 高 Reynolds 数流体：完全流体と Bernoulli の定理

- Euler 方程式
- Euler 方程式の第 1 積分
- 静止流体における静水圧条件
- 定常完全流体における Bernoulli の定理

3 まとめ

10.1. 講義のスケジュール

- | | |
|---------------------------|-----------------------|
| ① 10/6：第 1 回 | ⑨ 12/15：第 9 回 |
| ② 10/20：第 2 回 | ⑩ 12/22：第 10 回 |
| ③ 10/27：第 3 回 | ⑪ 1/5：第 11 回 |
| ④ 11/5(水)：第 4 回 | ⑫ 1/15(木)：休講 |
| ⑤ 11/17：第 5 回 (11/10 は休講) | ⑬ 1/19：第 12 回 |
| ⑥ 11/26(水)：第 6 回 | ⑭ 1/26：第 13 回 |
| ⑦ 12/1：第 7 回 | ⑮ 2/2：第 14 回 期末試験（予定） |
| ⑧ 12/8：第 8 回 | |

第10回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 高 Reynolds 数流体：完全流体と Bernoulli の定理

- Euler 方程式
- Euler 方程式の第 1 積分
- 静止流体における静水圧条件
- 定常完全流体における Bernoulli の定理

3 まとめ

10.2. 高 Reynolds 数流体：完全流体と Bernoulli の定理

- 今回より， Reynolds 数の高い流体の振る舞いを考察する.
- Reynolds 数は

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \quad (1)$$

で定義されることを第8回に学んだ. この定義から， Reynolds 数が高い流体は，動粘性係数 ν が小さい，注目する長さスケール L が大きい，あるいは代表速度 U が大きい，といった特徴をもつことがわかる.

- 特に，第8回で見積もった通り，我々が日常的に目に多くの流体運動は，

$$\text{Re} \gg 1 \quad (2)$$

を満たす高 Reynolds 数流体である.

10.2. 高 Reynolds 数流体：完全流体と Bernoulli の定理 (2)

- 次小節で改めて確認するが，Reynolds 数が十分に高い極限では，粘性項の寄与は相対的に小さくなり，流体は理想流体として近似できる場合がある．すなわち，

$$\nu \rightarrow 0 \quad (3)$$

の極限を考えることに対応する．

- 理想流体は一見すると単純なモデルに見えるが，慣性に由来する非線形項を無視できないため，数学的にはむしろ高度な問題を含んでいる．
- 以下では，このような高 Reynolds 数流体に対する理論的枠組みを概観する．

10.2.1. Euler 方程式

♣ Euler 方程式

- Reynolds 数の導出の際、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

を満たす非圧縮性流体は、次元解析に基づく無次元化によって、基礎方程式が

$$\underbrace{\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}}}_{\text{慣性項}} = - \underbrace{\tilde{\nabla} \tilde{p}}_{\text{圧力勾配項}} + \underbrace{\frac{1}{\text{Re}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}}}_{\text{粘性項}} \quad (5)$$

と表されることを扱った。

10.2.1. Euler 方程式 (2)

- この式から、

$$\text{Re} \gg 1 \quad (6)$$

の高 Reynolds 数極限では、粘性項が無視できることがわかる。このとき次元を元に戻すと、

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^*} \quad (7)$$

を得る。

- ここで、

$$p^* = p + \Psi \quad (8)$$

とし、外場が

$$\mathbf{K} = -\nabla \Psi \quad (9)$$

10.2.1. Euler 方程式 (3)

で与えられる保存力であることを仮定している。このとき、式(7)は

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \mathbf{K}} \quad (10)$$

と書き換える。

- このように、粘性が無視でき、応力が静水圧のみで記述される流体を理想流体（完全流体）と呼ぶ。また、この流体の運動を支配する基礎方程式(10)をEuler 方程式という（第2回および第8回参照）。

10.2.2. Euler 方程式の第 1 積分

♣ Euler 方程式の第 1 積分

- Euler 方程式では、粘性によるエネルギー散逸が存在しない。そのため、力学的エネルギー保存則と類似した数理構造を見出すことができる。
- ここで、Euler 方程式に現れる移流項

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (11)$$

は、次のベクトル恒等式を用いて変形できる（詳細は例題 10-1 で改めて確認する）：

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (12)$$

10.2.2. Euler 方程式の第 1 積分 (2)

- ここで渦度を

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (13)$$

と定義する。式 (12) を Euler 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \mathbf{K} \quad (14)$$

に代入すると、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \mathbf{K} \quad (15)$$

を得る。

10.2.2. Euler 方程式の第 1 積分 (3)

- ここで改めて、外力が保存力

$$\mathbf{K} = -\nabla\Psi \quad (16)$$

で与えられると仮定する。また、密度 ρ が位置に依存しない とすれば、式 (15) は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{\Psi}{\rho} \right) \quad (17)$$

と、 ∇ についていくつかの項をまとめることができる。これが完全流体における有用な基礎表現であることを次節で示す。

- その前に以下のベクトル恒等式の証明を行う。

10.2.2. Euler 方程式の第 1 積分 (4)

例題 10-1：ベクトル恒等式の証明

以下の公式を証明せよ：

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (18)$$

(解答) 以下, $\partial_\ell = \frac{\partial}{\partial x_\ell}$, Einstein 縮約に注意せよ.

まず, 右辺における $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$ の i 成分を計算する：

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}))_i &= \epsilon_{ijk} u_j (\nabla \times \mathbf{u})_k \\ &= \epsilon_{ijk} u_j (\epsilon_{klm} \partial_\ell u_m) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} u_j \partial_\ell u_m \end{aligned} \quad (19)$$

10.2.2. Euler 方程式の第 1 積分 (5)

ここで、 ϵ_{ijk} および $\epsilon_{k\ell m}$ はレビイ・チビタ記号である。レビイ・チビタ記号は、3つの添字がすべて異なる場合に ± 1 、それ以外の場合に 0 の値をとる。特に、(1, 2, 3) の偶置換に対して +1、奇置換に対して -1 と定義する。

このとき、次の縮約公式が成り立つ：

$$\underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{k\ell m} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{\ell m k}}_{\epsilon_{k\ell m} \text{を } 2 \text{ 度置換}} = \delta_{i\ell} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{j\ell} \quad (20)$$

これを式 (19) に代入すると、

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}))_i &= (\delta_{i\ell} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{j\ell}) u_j \partial_\ell u_m \\ &= u_j \partial_i u_j - u_j \partial_j u_i \end{aligned} \quad (21)$$

一方、

$$u_j \partial_i u_j = \partial_i \frac{1}{2} (u_j u_j) = \partial_i \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) \quad (22)$$

10.2.2. Euler 方程式の第 1 積分 (6)

$$u_j \partial_j u_i = (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i \quad (23)$$

であるから、式 (21) より

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i = \partial_i \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) - (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}))_i \quad (24)$$

これはベクトル表示で

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (25)$$

を意味し、求める恒等式が証明された。

10.2.3. 静止流体における静水圧条件

♣ 静止流体における静水圧条件

- ここでは、完全流体における最も基本的な場合として、静止状態

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (26)$$

を考える。

- このとき、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad (27)$$

が成り立つ。したがって、Euler 方程式は、

$$\nabla(p + \Psi) = \mathbf{0} \quad (28)$$

へと簡約される。

10.2.3. 静止流体における静水圧条件 (2)

- これより、この勾配ベクトルに対して任意の方向 $d\mathbf{r}$ に対する変化量は

$$\nabla(p + \Psi) \cdot d\mathbf{r} = d(p + \Psi)|_{d\mathbf{r} \text{ 方向}} = 0 \quad (29)$$

である。

- したがって、任意の位置に対して、次の静水圧条件（保存則）が得られる：

$$p + \Psi = \text{const.} \quad (30)$$

- 特に、重力場中の流体を考え、重力ポテンシャルを

$$\Psi = \rho gy \quad (31)$$

とすると、

$$p + \rho gy = \text{const.} \quad (32)$$

を得る。これは、静止流体における静水圧分布を与える基本式である。

10.2.4. 定常完全流体における Bernoulli の定理

♣ 定常完全流体における Bernoulli の定理

- 前節では、Euler 方程式が

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{\Psi}{\rho} \right) \quad (33)$$

と書き換えられることを示した.

- 以下では、定常状態

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (34)$$

を考える. このとき、Euler 方程式は

$$\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{\Psi}{\rho} \right) \quad (35)$$

となる.

10.2.4. 定常完全流体における Bernoulli の定理 (2)

- 式(35)より、右辺の勾配ベクトルは、 \mathbf{u} （流線の接線方向）および $\boldsymbol{\omega}$ （渦線の接線方向）の双方に垂直であることがわかる。
- したがって、勾配の引数の $d\mathbf{u}$, $-d\boldsymbol{\omega}$ 方向 \mathbf{u} , $\boldsymbol{\omega}$ 方向への変化は

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{\Psi}{\rho} \right) \cdot (\textcolor{red}{d\mathbf{e}_u}) = d \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{\Psi}{\rho} \right) \Big|_{\mathbf{u} \text{ 方向}} = 0 \quad (36)$$

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{\Psi}{\rho} \right) \cdot (\textcolor{red}{d\mathbf{e}_\omega}) = d \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{\Psi}{\rho} \right) \Big|_{\boldsymbol{\omega} \text{ 方向}} = 0 \quad (37)$$

となる。(訂正メモ 1/4: 勾配の方向を $d\mathbf{u}$, $d\boldsymbol{\omega}$ 方向としていたものを上記に訂正。)

ここで \mathbf{e}_u , \mathbf{e}_ω は、それぞれ \mathbf{u} , $\boldsymbol{\omega}$ 方向の単位ベクトルである。したがって、勾配の引数

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{\Psi}{\rho} \quad (38)$$

は、流線および渦線に沿っては変化しない。

10.2.4. 定常完全流体における Bernoulli の定理 (3)

- 以上より、次の Bernoulli の定理が成立する：

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{\Psi}{\rho} = \text{const.} \quad (\text{同一流線あるいは同一渦線上}) \quad (39)$$

- この Bernoulli の定理は、完全流体の運動を解析する上で極めて広い適用範囲をもつ。
- 特に、水の運動を対象とする hydrodynamics においては、最も強力な解析手法の一つである。以下では、いくつかの具体例を通して、Bernoulli の定理の使い方を学ぶ。

例題 10-2：トリシェリの定理

下図に示すように、大きな容器内の液体が、水面から鉛直下向きに距離 h の位置にある小さな孔から定常に流出する場合を考える。大気圧を p_0 とする。水面と孔を結ぶ流線に沿って Bernoulli の定理を適用し、孔から流出する流体の速度を求めよ。重力加速度を g とする。

10.2.4. 定常完全流体における Bernoulli の定理 (4)

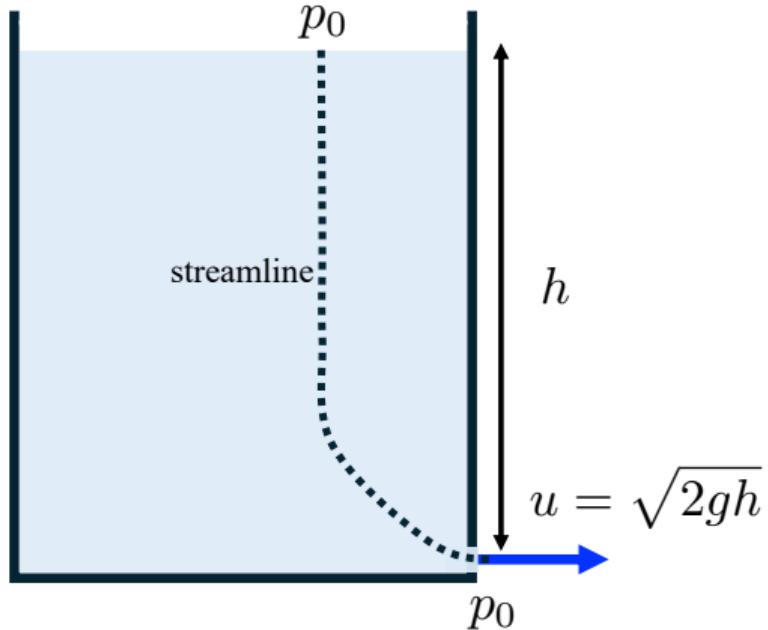


図 1: トリチェリの定理.

10.2.4. 定常完全流体における Bernoulli の定理 (5)

(解答) 孔から流出する流体の速度を u とする。水面および孔はいずれも大気圧 p_0 にさらされているため, Bernoulli の定理より

$$p_0 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (40)$$

が成り立つ。これを解くと,

$$u = \sqrt{2gh} \quad (41)$$

を得る。この関係式をトリチエリ (Torricelli) の定理という。この結果から、流体の流出速度は圧力には依存せず、高さ h からの自由落下速度と等しいことがわかる。

第10回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
- 2 高 Reynolds 数流体：完全流体と Bernoulli の定理
 - Euler 方程式
 - Euler 方程式の第 1 積分
 - 静止流体における静水圧条件
 - 定常完全流体における Bernoulli の定理
- 3 まとめ

10.3. まとめ

- 高 Reynolds 数流体における基礎方程式 Euler 方程式を導いた.
- Euler 方程式から、同一流線、渦線上の保存則：Bernoulli の定理を導いた.
- Bernoulli の定理の適用例として、Torricelli の定理を導いた.

次回：完全流体におけるポテンシャル流