

# 連続体力学 第8回

## Reynolds 相似則, 低 Reynolds 数流体

川崎猛史

大阪大学 D3 センター / 大学院理学研究科物理学専攻

Last update : December 6, 2025

# 第8回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
- 2 様々な流体の流れ
  - 無次元化（次元解析）：Reynolds の相似則
  - Reynolds 数による基礎方程式の数理解造の変化
- 3 低 Reynolds 数流体の流れ
  - Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極
- 4 まとめ
- 5 補遺

# 第 8 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 様々な流体の流れ

- 無次元化（次元解析）：Reynolds の相似則
- Reynolds 数による基礎方程式の数理解造の変化

## 3 低 Reynolds 数流体の流れ

- Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極

## 4 まとめ

## 5 補遺

## 8.1. 講義のスケジュール

- |   |                         |    |                      |
|---|-------------------------|----|----------------------|
| 1 | 10/6：第 1 回              | 9  | 12/15：第 9 回          |
| 2 | 10/20：第 2 回             | 10 | 12/22：第 10 回         |
| 3 | 10/27：第 3 回             | 11 | 1/5：第 11 回           |
| 4 | 11/5(水)：第 4 回           | 12 | 1/15(木)：休講           |
| 5 | 11/17：第 5 回 (11/10 は休講) | 13 | 1/19：第 12 回          |
| 6 | 11/26(水)：第 6 回          | 14 | 1/26：第 13 回          |
| 7 | 12/1：第 7 回              | 15 | 2/2：第 14 回 期末試験 (予定) |
| 8 | 12/8：第 8 回              |    |                      |

# 第8回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
- 2 様々な流体の流れ
  - 無次元化（次元解析）：Reynolds の相似則
  - Reynolds 数による基礎方程式の数理解造の変化
- 3 低 Reynolds 数流体の流れ
  - Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極
- 4 まとめ
- 5 補遺

## 8.2. 様々な流体の流れ

- 流体力学は境界条件と流れの関係を解析することに主眼を置いている。
- 流体の流れは、粘性の大きさ、流速、幾何形状などにより多種多様な振る舞いを見せる。
- 流体力学が適用される物理系は幅広いスケールにわたり、多種多様である：

| 物理系    | 特徴長さ                       | 動粘性率   | 特徴速度                         |
|--------|----------------------------|--|------------------------------|
| コロイド粒子 | $L = 100 \text{ nm}$       | $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (水)   | $U \sim 10^{-6} \text{ m/s}$ |
| 細菌     | $L \sim 1 \mu\text{m}$     | $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (水)   | $U \sim 10^{-5} \text{ m/s}$ |
| 小魚     | $L \sim 1 \text{ cm}$      | $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (水)   | $U \sim 10^{-2} \text{ m/s}$ |
| 大型魚・人間 | $L \sim 1 \text{ m}$       | $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (水)<br>$\nu \approx 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ (空気) | $U \sim 1 \text{ m/s}$       |
| 地形・気候  | $L \sim 100 \text{ km}$    | $\nu \approx 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ (空気)   | $U \sim 10 \text{ m/s}$      |
| 木星大赤斑  | $L \sim 10^7 \text{ m}$    | $\nu \approx 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$ (希薄大気)   | $U \sim 10^2 \text{ m/s}$    |
| 銀河系渦状腕 | $L \sim 10^{20} \text{ m}$ | $\nu \approx 10^{20} \text{ m}^2/\text{s}$ (星間物質)  | $U \sim 10^5 \text{ m/s}$    |

## 8.2. 様々な流体の流れ (2)

- 一方、一見全く異なるスケールの問題において、似通った (相似的な) 流動パターンが観察されることがある.

### 相似な流れの例

|                   |   |                        |
|-------------------|---|------------------------|
| 人の 100m ダッシュの空気流れ | ↔ | 100m 水泳自由型における水流       |
| 人の歩行の空気流れ         | ↔ | バレーボールにおける変化球の<br>空気流れ |
| タバコの煙             | ↔ | コーヒーの対流渦               |
| 自動車周りの空気流れ        | ↔ | クジラ遊泳における水流            |

- 仮説：これらの現象間には共通の数理解造が存在すると期待.
- 目標：スケーリング（無次元化）により普遍的数理解造を抽出する.
- 応用：実験室スケール → 実用スケールへの外挿により工学的設計指針などを得る.

## 8.2.1. 無次元化（次元解析）：Reynolds の相似則

### ♣ 無次元化（次元解析）：Reynolds の相似則

- 本節では，流体の基礎方程式に基づき，非圧縮性流体の運動を考察する．
- ここでは，スケーリング（無次元化）によって得られる方程式の相似則について，その数学的かつ物理的意味を学ぶ．
- 特に，全く異なるスケールの現象を支配する方程式の数理構造が相似であるとき，観測される現象が定性的に同一となることを示す．
- 密度  $\rho$  が一定の粘性流体の流れを考える．
- 流体は，非圧縮条件（連続の式）

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

を満たす．このときの基礎方程式（Navier-Stokes 方程式）は，

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{K} \quad (2)$$



## 8.2.1. 無次元化（次元解析）：Reynolds の相似則 (2)

であり，Lagrange 微分を Euler 微分で書き下すと

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{K} \quad (3)$$

となる．

- いま，外場  $\mathbf{K}$  をポテンシャル力とすると， $\mathbf{K} = -\nabla \Psi$  として，圧力勾配項に組み入れることができる．
- 以下の修正圧力  $p^*$  を定義する．

$$p^* = p + \Psi \quad (4)$$

- これにより外場を方程式から除去できる．さらに方程式の両辺を  $\rho$  で割ると，

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^* + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (5)$$

となる．

- ここで， $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  は動粘性係数である．

## 8.2.1. 無次元化（次元解析）：Reynolds の相似則 (3)

- 特性量（単位）の導入：特性長さ  $L$ ，特性速度  $U$ ，特性時間  $T = L/U$  を用いて各変数の無次元化を行う．
- 変数の無次元化：

$$\mathbf{x} = L\tilde{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u} = U\tilde{\mathbf{u}}, \quad t = T\tilde{t} = \frac{L\tilde{t}}{U}, \quad p^* = \rho U^2 \tilde{p} \quad (6)$$

- 微分演算子の無次元化：

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}, \quad \nabla = \frac{1}{L} \tilde{\nabla}, \quad \nabla^2 = \frac{1}{L^2} \tilde{\nabla}^2 \quad (7)$$

- 式 (5) にこれらの変数を代入すると

$$\frac{U^2}{L} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \frac{U^2}{L} (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} = -\frac{U^2}{L} \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{\nu U}{L^2} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} \quad (8)$$

## 8.2.1. 無次元化（次元解析）：Reynolds の相似則 (4)

- 両辺を  $\frac{U^2}{L}$  で割ると,

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{\nu}{UL} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} \quad (9)$$

- ここで **Reynolds 数** ( $Re$ )

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{\text{慣性項}}{\text{粘性項}} \quad (10)$$

を導入する.

- これにより無次元 **Navier-Stokes** 方程式は

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} \quad (11)$$

となる.

## 8.2.1. 無次元化（次元解析）：Reynolds の相似則 (5)

- これより，無次元化方程式により得られる解は

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}, Re) \quad (12)$$

となり， $Re$  が解の定性的性質を支配することがわかる．

- また，どのようなスケールを出発しても，適当な単位でスケールすれば，同一の方程式に帰着することを意味する．
- これ故に， $Re$  が近ければ，概ね相似な流体の流れが観測されることを意味する．
- 以下，具体的な物体の流動について  $Re$  を計算してみよう．

## 8.2.1. 無次元化（次元解析）：Reynolds の相似則 (6)

### 例題 8：Reynolds 数の算出

同一のアスリートが陸上と水泳の両方で競技を行う場合を考える．

- 流体の物理定数：

- 空気（20°C）：動粘性率  $\nu_{\text{air}} = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

- 水（25°C）：動粘性率  $\nu_{\text{water}} = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

- 現象 A：100m ダッシュ：アスリートの特徴長さ  $L = 0.5 \text{ m}$ （肩幅），平均速度  $U_{\text{sprint}} = 10 \text{ m/s}$

- 現象 B：100m 自由形水泳：同じアスリート（ $L = 0.5 \text{ m}$ ），平均速度  $U_{\text{swim}} = 2 \text{ m/s}$

(1) 各現象における Reynolds 数  $Re_{\text{sprint}}$ ， $Re_{\text{swim}}$  を計算せよ．

(2) どちらの競技でより高い Reynolds 数となるか，その理由とともに考察せよ．

(3) 水泳において陸上と同じ Reynolds 数を実現するためには，どのくらいの速度が必要かを求めよ．

### 解答

## 8.2.1. 無次元化（次元解析）：Reynolds の相似則 (7)

- (1) 各現象の Reynolds 数  
100m ダッシュ：

$$\begin{aligned} Re_{\text{sprint}} &= \frac{U_{\text{sprint}} L}{\nu_{\text{air}}} = \frac{10 \times 0.5}{1.5 \times 10^{-5}} \\ &= \frac{5}{1.5 \times 10^{-5}} = 3.33 \times 10^5 \end{aligned} \quad (13)$$

100m 自由形：

$$\begin{aligned} Re_{\text{swim}} &= \frac{U_{\text{swim}} L}{\nu_{\text{water}}} = \frac{2 \times 0.5}{1.0 \times 10^{-6}} \\ &= \frac{1}{1.0 \times 10^{-6}} = 1.0 \times 10^6 \end{aligned} \quad (14)$$

## 8.2.1. 無次元化（次元解析）：Reynolds の相似則 (8)

### (2) Reynolds 数の比較と考察

$Re_{\text{swim}} > Re_{\text{sprint}}$ （水泳の方が約 3 倍高い）

理由：水の動粘性率は空気の約  $1/15$  と小さいため，速度が  $1/5$  になっても，Reynolds 数の分母が大幅に小さくなる効果の方が支配的となる：

$$\frac{Re_{\text{swim}}}{Re_{\text{sprint}}} = \frac{U_{\text{swim}}}{U_{\text{sprint}}} \times \frac{\nu_{\text{air}}}{\nu_{\text{water}}} = \frac{1}{5} \times \frac{15}{1} = 3 \quad (15)$$

両競技とも  $Re > 10^5$  の高 Reynolds 数領域にあり，慣性力が支配的で境界層が薄い流れとなる．

## 8.2.1. 無次元化（次元解析）：Reynolds の相似則 (9)

(3) 水泳で陸上と同じ **Reynolds** 数を実現する速度

条件： $Re_{\text{swim}} = Re_{\text{sprint}} = 3.33 \times 10^5$

$$\frac{U_{\text{required}} \times 0.5}{1.0 \times 10^{-6}} = 3.33 \times 10^5 \quad (16)$$

これより：

$$\begin{aligned} U_{\text{required}} &= \frac{3.33 \times 10^5 \times 1.0 \times 10^{-6}}{0.5} \\ &= \frac{0.333}{0.5} = 0.67 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (17)$$

結果：水泳で陸上と同じ Reynolds 数を得るには、約 **0.67 m/s**（現在の 1/3 の速度）で泳げばよい。

これは水の低い動粘性率により、陸上より低速でも同等の流体力学的条件を実現できることを示している。



## 8.2.2. Reynolds 数による基礎方程式の数理解造の変化

### ♣ Reynolds 数による基礎方程式の数理解造の変化

- 前節では、 $Re$  が流体の定性的な性質を支配することを扱った．
- $Re$  が極端に高い場合、および低い場合では、方程式の数理解造が大きく変わることができる．
- 特に、 $Re \gg 1$  の場合、方程式の粘性項が落ち、

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} \quad (18)$$

となる．次元を適宜戻すと、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^* \quad (19)$$

となり、粘性率が 0 とみなせる流体方程式が得られる．このような流体を完全流体（理想流体）といい、基礎方程式を **Euler** 方程式という．

## 8.2.2. Reynolds 数による基礎方程式の数理解造の変化 (2)

- この完全流体（理想流体）は，粘性によるエネルギー散逸が存在しないため，エネルギー保存則（Bernoulli の定理）が成立する．この理論体系は後日扱う．
- 一方， $Re \ll 1$  の場合，慣性項が粘性項に比べ小さくなり

$$\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^* + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (20)$$

となる．このように慣性項を無視する近似を **Stokes** 近似とよび，動粘度の高い流体の振る舞いを説明する方程式となる．

- （注）あくまでこれらの近似は，慣性項と粘性項の競合を議論したものであり，圧力勾配項に関する評価は自明ではない．そのため，圧力勾配項は常に残すことが妥当である（残す分には全く問題ない）．

## 8.2.2. Reynolds 数による基礎方程式の数理解造の変化 (Stokes の抵抗則)

- このような動粘度の高い流体中に分散する球（半径  $a$ ）を考える．球を速度  $U$  で動かす時，この球が受ける抵抗力の大きさは

$$F = 6\pi\eta aU \quad (21)$$

となることが知られている．

- つまりこれまで古典力学において，流体中の球が受ける抵抗力を  $-k\mathbf{v}$  などと表してきたが，この抵抗係数が  $k = 6\pi\eta a$  となることを表す．
- この関係式を **Stokes** の抵抗則といい，流体力学における金字塔的結果である．
- 次回これを示すが，その準備的な議論を次節で行っておく．

# 第 8 回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
- 2 様々な流体の流れ
  - 無次元化（次元解析）：Reynolds の相似則
  - Reynolds 数による基礎方程式の数理解造の変化
- 3 低 Reynolds 数流体の流れ
  - Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極
- 4 まとめ
- 5 補遺

## 8.3. 低 Reynolds 数流体の流れ

本節では、低 Reynolds 数流体中において球をゆっくりと運動させたときに、球が受ける抵抗力

$$6\pi\eta aU$$

を導出する．（本講では、今回は途中まで扱う．）

## 8.3.1. Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極

### ♣ Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極

- 本節では、座標原点に半径  $a$  の球を固定し、 $x_1$  方向負の無限遠から  $x_1$  軸に平行な方向に速度  $U$  の一様流をかける．また、無限遠での圧力を  $p_\infty$  とする．

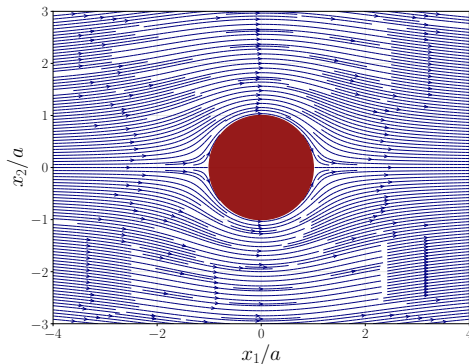


図 1: 低 Reynolds 数流体の流れ．座標原点に半径  $a$  の球を固定し、 $x_1$  方向負の無限遠から  $x_1$  軸と平行に速度  $U$  の流れをかけた場合の概念図．

### 8.3.1. Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極 (2)

- 前節までに扱ったように、非圧縮な低 Reynolds 数流体では、慣性項に比べて粘性項が支配的となり、運動方程式は

$$\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (22)$$

となる．ここで  $p$  は修正圧力  $p^*$  を表している．  
これを整理し、非圧縮条件と合わせると、

$$\boxed{\nabla p = \eta \nabla^2 \mathbf{u}} \quad (23)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{u} = 0} \quad (24)$$

を連立して解く必要がある．

### 8.3.1. Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極 (3)

- いま、式 (23) は非同次の偏微分方程式である。このような方程式は、非同次方程式の特解と同次方程式の一般解の重ね合わせとして、非同次方程式の一般解を構成できる。
- 参考までに、対応する同次方程式は

$$\mathbf{0} = \eta \nabla^2 \mathbf{u} \quad (25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (26)$$

である。

- したがって、まずは非同次方程式である式 (23) に対する本問題の基本解として、特解（特別解）を求めるところから始める。



### 8.3.1. Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極 (4)

- 式 (23) の両辺に  $\text{div}$  をとると

$$\nabla^2 p = \eta \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (27)$$

となる．非圧縮条件 (24) より右辺が 0 となるので

$$\boxed{\nabla^2 p = 0} \quad (28)$$

を得る．これより，圧力  $p$  は調和関数である．調和関数については，以下補足 1-3 を参照せよ．

#### 補足 1：調和関数の定義

関数  $f(\mathbf{x})$  が領域  $D$  で調和関数 (**harmonic function**) であるとは，その領域  $D$  においてラプラス方程式

$$\nabla^2 f = 0 \quad (29)$$

を満たすことである．

### 8.3.1. Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極 (5)

#### 補足 2：調和関数の特殊解（球対称）

球対称な調和関数を求める．ラプラス方程式を球座標系で書き下すと，関数  $f$  が動径  $r$  のみに依存する ( $f = f(r)$ ) ため， $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \phi} = 0$  となり，ラプラス方程式  $\nabla^2 f = 0$  は球対称性により角度に関する項がゼロとなるため，以下の常微分方程式となる

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df}{dr} \right) = 0 \quad (30)$$

これを解くと

$$f(r) = c_0 + \frac{c_1}{r} \quad (31)$$

となる．

### 8.3.1. Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極 (6)

補足 3：多重極展開表示（非対称を含む）

### 8.3.1. Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極 (7)

調和関数において，球対称解（すなわち動径  $r$  のみに依存する解）は  $f = c_0 + c_1 \frac{1}{r}$  である．一方，調和関数  $f$  の空間微分（ $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  や  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  など）もまた調和関数となることが知られている（ラプラシアン  $\nabla^2$  が微分演算子であるため  $\nabla^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla^2 f) = 0$ ）．

球対称解  $f = \frac{1}{r}$  を  $x_1$  で微分してもラプラス方程式の解となる：

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right) = -\frac{1}{2} (r^2)^{-3/2} (2x_1) = -\frac{x_1}{r^3} \quad (32)$$

この解  $\frac{x_1}{r^3}$  は双極子 (Dipole) のポテンシャルに対応する．このような微分操作を繰り返すと，一般に原点  $r = 0$  を除く領域で調和関数  $f$  は

$$f(\mathbf{x}) = c_0 + c_1 \frac{1}{r} + a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{r} \right) + a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right) + \cdots = c_0 + c_1 \frac{1}{r} + a'_i \frac{x_i}{r^3} + a''_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \cdots \quad (33)$$

のように，原点からの距離  $r$  の逆冪乗で展開されたものの和として表現できる（多重極展開）． $i$  や  $ij$  に関する Einstein 縮約に注意せよ．

### 8.3.1. Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極 (8)

- 以下，式 (28)： $\nabla^2 p = 0$  を解く．
- いま，十分遠方で圧力と流速が  $p_\infty$  および  $U$  の遅い粘性流のもと，球の周りの流れを考える．
- 調和関数としての圧力場  $p$  の一般表示は，無限遠での収束条件および回転に対する異方性を含めて，式 (33) より

$$p = c_0 + c_1 \frac{1}{r} + a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{r} \right) + a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right) + \cdots \quad (34)$$

と書ける．

- 第 1 項の  $c_0$  は，十分遠方  $r \rightarrow \infty$  において  $\frac{1}{r^n} \rightarrow 0$  ( $n > 0$ ) であることから，圧力場が定数  $p_\infty$  に収束することを要請する項である．したがって，

$$c_0 = p_\infty \quad (35)$$

である．

### 8.3.1. Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極 (9)

- 第 2 項の  $c_1 \frac{1}{r}$  は、球対称な圧力成分に対応する．例えば  $c_1 > 0$  の場合には、球を通過した流れが球から離れる方向へ修正される湧き出し型の流れを生じる．一方、 $c_1 < 0$  の場合には、流れは球の中心に向かって収束する．いずれの場合も、球表面に沿った流れを形成することはできないため、物理的に不適切であり、

$$c_1 = 0 \quad (36)$$

としなければならない．

また、この項を保持したまま Stokes 方程式を機械的に解くと、無限遠において等方的な定数速度成分が必ず残ることがわかる．しかし、本問題では、無限遠で  $x_1$  方向の一様流のみを課しており、このような等方的流れは許されない．したがって、本設定においては  $c_1/r$  項は不適切である．（厳密な証明は補遺に示す．なお、この項を残したまま計算を進めても、最後に無限遠境界条件を課すことでこの項が最終的に消えることを確認できる．この点は教科書ではあまり明示的に説明されず、初学者には理解しづらい部分である．）

### 8.3.1. Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極 (10)

#### ■ 第 3 項

$$a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{r} \right) = -a_1 \frac{x_1}{r^3} \quad (37)$$

は  $x_1$  方向に異方的な圧力成分であり，外部流れの対称性と整合的であるため保持される．球表面に沿った流れを実現するためには，このような異方性が不可欠である（ $x_1$  方向に関して，球の前後で反対称な力場が必要となる）．一方，他の方向に関する一次の異方性項は，流れの対称性により消失する（ $x_2, x_3$  方向には反対称性が存在しない）．

また，より高次の多極項については，外部領域  $r \gg a$  において近似的に無視することができる．これらは高次の摂動としてのみ寄与し，例えば Stokes 抵抗の高次補正項などに対応する．

### 8.3.1. Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極 (11)

- したがって、 $p$  の特殊解は、新たな未定係数  $A$  を用いて

$$p \sim p_{\infty} + A \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{r} \right) = p_{\infty} - A \frac{x_1}{r^3} \quad (38)$$

となる.

- 次にこれを与式 (23) に代入すると、圧力定数項は落ちるので最初から無視して

$$\begin{aligned} \eta \nabla^2 \mathbf{u} &= \nabla p \\ &= A \nabla \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{r} \right) \right) \\ &= A \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla (1/r) \\ &= \frac{A}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla \nabla^2 r \end{aligned} \quad (39)$$



### 8.3.1. Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極 (12)

となる．ここで自明な計算から

$$\boxed{\nabla^2 r = \nabla^2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{2}{r}} \quad (40)$$

となることを用いた（各自確認せよ）．

- 再度式 (39) を整理すると

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2 \left( \frac{A}{2\eta} \nabla \frac{\partial r}{\partial x_1} \right) \quad (41)$$

となる．したがって、両辺を比較 ( $\nabla^2$  の中身を比較)

$$\mathbf{u} = \frac{A}{2\eta} \left( \nabla \frac{\partial r}{\partial x_1} \right) + \mathbf{u}_0 \quad (42)$$

となる．ここで  $\mathbf{u}_0$  は不定係数を含むベクトル場である．

### 8.3.1. Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極 (13)

- 次にこの不定係数を定めるために，非圧縮条件の式 (24) に式 (42) を代入すると

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 + \frac{A}{2\eta} \nabla \cdot \left( \nabla \frac{\partial r}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (43)$$

となる．ここで， $\nabla^2 r = \frac{2}{r}$  を用いれば

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = -\frac{A}{2\eta} \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 r) = -\frac{A}{\eta} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (44)$$

を得る．

### 8.3.1. Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極 (14)

- よってこれを成分ごとに書き下すと,

$$\frac{\partial u_{01}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{02}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{03}}{\partial x_3} = -\frac{A}{\eta} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (45)$$

となる.

よって,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( u_{01} + \frac{A}{\eta} \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial u_{02}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{03}}{\partial x_3} = 0 \quad (46)$$

であるので, 基本解 (特解) として

$$\boxed{u_{01} = -\frac{A}{\eta} \frac{1}{r}, \quad u_{02} = 0, \quad u_{03} = 0} \quad (47)$$

を採用できる.

### 8.3.1. Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極 (15)

(注) 今回選んだ解  $\mathbf{u}_0$  に定数ベクトルを加えた  $\mathbf{u}_0 + \mathbf{w}$  (ただし  $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ ) も解として選ぶことができるが、これを選んでも、今後の議論で同次方程式 (後述の式 (49)) に吸収され同一の一般解が得られる．興味がある人は試してみよ．

- この結果を式 (42) に代入すると， $\mathbf{u}$  の特解は

$$\boxed{u_1 = -\frac{A}{2\eta} \left( \frac{1}{r} + \frac{x_1^2}{r^3} \right), \quad u_2 = -\frac{A}{2\eta} \frac{x_1 x_2}{r^3}, \quad u_3 = -\frac{A}{2\eta} \frac{x_1 x_3}{r^3}} \quad (48)$$

を得る．この解と式 (38) を **Stokes 極 (Stokeslet)** とよび，Stokes 近似において，球周りの流れに関する  $x_1$  方向に異方性をもつ基本的な特殊解を表す．この解は特解の一例であるが，この後同次方程式の解を重ね合わせて一般解を構成する．

### 8.3.1. Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極 (16)

- 以降は、式 (23)： $\eta \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p$  の同次方程式

$$\nabla^2 \mathbf{u} = 0$$

(49)

の一般解を求め、上記 Stokes 極の解を重ね合わせる．これにより元の方程式の一般解が求まる．

- この一般解に対し、境界条件（無限遠での速度  $U$  や球の表面  $r = a$  で速度 0）を満たす解を求める．
- さらにこの速度場から応力テンソルを計算し、球の表面にかかる力の合力を求めることで、これが抵抗力となる．
- 次回は、これらの境界条件の適用と抵抗力の導出を示す．

# 第 8 回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
- 2 様々な流体の流れ
  - 無次元化（次元解析）：Reynolds の相似則
  - Reynolds 数による基礎方程式の数理解造の変化
- 3 低 Reynolds 数流体の流れ
  - Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極
- 4 まとめ
- 5 補遺

## 8.4. まとめ

- Reynolds 数  $Re$  を導入し，これが等しければ，同様の流体挙動が異なるスケールの系で見られることを説明した (Reynolds 相似則)．
- $Re$  が極端に高い場合 (高 Reynolds 流体) と低い場合 (低 Reynolds 数流体) の基礎方程式 (Euler 方程式と Stokes 方程式) を求めた．
- 特に  $Re$  が低い場合において，球を定速で動かした際の抵抗 (Stokes 抵抗) を求める準備として，Laplace 方程式の特殊解である多重極展開 (Stokes 極) を求めた．

次回： Stokes 抵抗則  $F = 6\pi\eta aU$  を導出する．

# 第 8 回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
- 2 様々な流体の流れ
  - 無次元化（次元解析）：Reynolds の相似則
  - Reynolds 数による基礎方程式の数理解造の変化
- 3 低 Reynolds 数流体の流れ
  - Stokes 近似と球周りの流れ：Stokes 極
- 4 まとめ
- 5 補遺



## 8.5. 補遺：ストークス極における球対称圧力項 $c_1/r$ の排除

♣ ストークス極において，球対称圧力モードが排除される理由  
まず，圧力場のうち球対称成分のみを取り出す：

$$p^{(0)}(r) = \frac{c_1}{r}. \quad (50)$$

この圧力成分に対応する速度場  $\mathbf{u}^{(0)}$  は，Stokes 方程式

$$\eta \nabla^2 \mathbf{u}^{(0)} = \nabla p^{(0)} \quad (51)$$

を満たす．

式 (50) を式 (51) の右辺に代入すると，

$$\eta \nabla^2 \mathbf{u}^{(0)} = \nabla \left( \frac{c_1}{r} \right) \quad (52)$$

となる．

## 8.5. 補遺：ストークス極における球対称圧力項 $c_1/r$ の排除 (2)

ここで、次の恒等式を用いる：

$$\frac{1}{2} \nabla^2 r = \frac{1}{r}. \quad (53)$$

これを用いると、式 (52) は

$$\eta \nabla^2 \mathbf{u}^{(0)} = \nabla \left( \frac{c_1}{2} \nabla^2 r \right) \quad (54)$$

$$= \nabla^2 \nabla \left( \frac{c_1}{2} r \right) \quad (55)$$

と書き換えられる．

したがって、 $\nabla^2$  の中身を比較することで、次の特解が得られる：

$$\mathbf{u}^{(0)} = \nabla \left( \frac{c_1}{2\eta} r \right) \quad (56)$$

$$= \frac{c_1}{2\eta} \mathbf{e}_r + \mathbf{u}_c, \quad (57)$$

## 8.5. 補遺：ストークス極における球対称圧力項 $c_1/r$ の排除 (3)

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (58)$$

は動径方向の単位ベクトルである．ここで  $\mathbf{u}_c$  は不定ベクトルであり  $\nabla^2 \mathbf{u}_c = 0$  を満たすので，同次方程式に吸収させることができる．このため式 (57) の第 1 項が本質的であることがわかる．

式 (57) より，この解は無限遠において

$$u_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{c_1}{2\eta} \quad (59)$$

という等方的な定数速度を必ず残すことがわかる．

しかし，本問題の設定では，無限遠での流れは  $x_1$  方向の一様流のみであり，それ以外の方向の速度成分は 0 でなければならない．したがって，

$$c_1 = 0 \quad (60)$$

でなければならない．

## 8.5. 補遺：ストークス極における球対称圧力項 $c_1/r$ の排除 (4)

### 結論

球対称圧力成分

$$p^{(0)}(r) = \frac{c_1}{r} \quad (61)$$

に対応する速度解は，無限遠において定数速度

$$u_r \rightarrow \frac{c_1}{2\eta} \quad (62)$$

を必ず残す．

しかし，問題設定では無限遠で  $x_1$  方向以外の速度は消失しなければならないため，このような球対称成分は許されない．

したがって，

$$p^{(0)}(r) = \frac{c_1}{r} \quad \text{は排除され,} \quad c_1 = 0 \quad (63)$$

である．