

連続体力学 第3回

応力テンソルと歪みテンソル

川崎猛史

大阪大学 D3 センター / 大学院理学研究科物理学専攻

Last update : October 26, 2025

第3回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
- 2 前回の復習
- 3 応力テンソルの性質
 - 応力テンソルの対称性
- 4 連続体の変形と応力
 - 連続体の変形
 - 歪みテンソルと回転ベクトル
 - さまざまな変形と歪みテンソル
- 5 まとめ

第3回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
- 2 前回の復習
- 3 応力テンソルの性質
 - 応力テンソルの対称性
- 4 連続体の変形と応力
 - 連続体の変形
 - 歪みテンソルと回転ベクトル
 - さまざまな変形と歪みテンソル
- 5 まとめ

3.1. 講義のスケジュール

- | | | | |
|---|-------------------------|----|----------------------|
| 1 | 10/6：第 1 回 | 9 | 12/15：第 9 回 |
| 2 | 10/20：第 2 回 | 10 | 12/22：第 10 回 |
| 3 | 10/27：第 3 回 | 11 | 1/5：第 11 回 |
| 4 | 11/5(水)：第 4 回 | 12 | 1/15(木)：第 12 回 |
| 5 | 11/17：第 5 回 (11/10 は休講) | 13 | 1/19：第 13 回 |
| 6 | 11/26(水)：第 6 回 | 14 | 1/26：第 14 回 |
| 7 | 12/1：第 7 回 | 15 | 2/2：第 15 回 期末試験 (予定) |
| 8 | 12/8：第 8 回 | | |

第3回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
- 2 前回の復習
- 3 応力テンソルの性質
 - 応力テンソルの対称性
- 4 連続体の変形と応力
 - 連続体の変形
 - 歪みテンソルと回転ベクトル
 - さまざまな変形と歪みテンソル
- 5 まとめ

3.2. 前回の復習

- 前回，連続体の運動方程式を導出する際に，構成粒子の相互作用を起源とし，面積力である応力および応力テンソルを導入した．
- 任意の位置 \mathbf{x} ，任意の面 $\mathbf{n} dS$ に生じる応力ベクトル $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ は，この微小面の外側の連続体から内側の連続体に働く力であることを確認した．
- さらに $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ は応力テンソルを用いて

$$\boxed{\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}} \quad (1)$$

また，成分表記では

$$p_i(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \sum_j P_{ij}(\mathbf{x}) n_j$$

$$P_{ij}(\mathbf{x}) = p_i(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) \quad (2)$$

であることを Cauchy の応力定理（例題 2-1）により導いた．

3.2. 前回の復習 (2)

- Cauchy の応力定理は，微小連続体にかかる応力の合力が釣り合うことを拠り所にした．
- このことは，体積力が領域の長さの 3 乗，面積力が 2 乗に比例することから，相対的に連続体が小さくなると面積力である応力以外が無視できるためである．
- 今回は前回に続き，応力テンソルの性質（とりわけ対称性）について議論する．

第3回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
- 2 前回の復習
- 3 応力テンソルの性質**
 - 応力テンソルの対称性
- 4 連続体の変形と応力
 - 連続体の変形
 - 歪みテンソルと回転ベクトル
 - さまざまな変形と歪みテンソル
- 5 まとめ

3.3. 応力テンソルの性質

本節では、前回導入した応力テンソルの対称性について議論する．

3.3.1. 応力テンソルの対称性

♣ 応力テンソルの対称性

■ 応力テンソルは

$$\boxed{P_{ij} = P_{ji}} \quad (3)$$

のように、非対角成分がすべて対称になることが知られている。

- この性質は、微小な連続体要素に対して回転トルクがゼロになることから導かれる。
- たとえば、 x_1 - x_2 平面上に張られた微小体積要素を考える。
- このとき、応力によって生じるトルク (x_3 軸まわり) は次式で表される：

$$\underbrace{(P_{12} dx_2 dx_3)}_{F_{12}} dx_1 - \underbrace{(P_{21} dx_1 dx_3)}_{F_{21}} dx_2 = (P_{12} - P_{21}) dV. \quad (4)$$

したがって、このトルクは体積 (長さの 3 乗) に比例する。

3.3.1. 応力テンソルの対称性 (2)

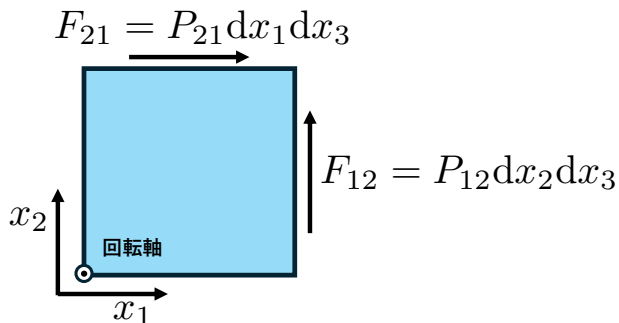


図 1: x_1 - x_2 平面上に張られた微小体積要素に働く面積力によるトルクは、 x_3 軸まわりで釣り合う。

- 一方、体積力による力は体積に比例するため、そのモーメントは長さの 4 乗に比例する。
- また、慣性項に対応する慣性モーメントは質量 (長さの 3 乗) に長さの 2 乗を掛けたものであり、全体として長さの 5 乗に比例する。

3.3.1. 応力テンソルの対称性 (3)

- したがって、体積要素が十分に小さい場合、体積力や慣性項によるトルクは応力によるトルクに比べて高次の微小量となり、無視できる.
- これより、回転の運動方程式 (角運動量保存則) を立てると

$$(P_{12} - P_{21}) dV = 0 \quad (5)$$

が得られる.

- よって,

$$P_{12} = P_{21} \quad (6)$$

が成り立つ (図 1 参照).

3.3.1. 応力テンソルの対称性 (4)

- 同様の議論から,

$$P_{13} = P_{31}, \quad P_{23} = P_{32} \quad (7)$$

が導かれる.

- したがって, 応力テンソルは対称テンソルであり, 独立な成分は 9 個ではなく 6 個となる.

第3回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
- 2 前回の復習
- 3 応力テンソルの性質
 - 応力テンソルの対称性
- 4 連続体の変形と応力
 - 連続体の変形
 - 歪みテンソルと回転ベクトル
 - さまざまな変形と歪みテンソル
- 5 まとめ

3.4. 連続体の変形と応力

- 連続体の運動方程式を解くには，連続体の密度 ρ ，速度 \mathbf{u} ，応力テンソル \mathbf{P} を決定する必要がある．
- 連続体が変形すると応力の変化がもたらされる．
- その変化は弾性体と流体で異なる．
- 本節では，具体的な弾性体や流体の議論に入る前に，**応力発現の起源となる連続体の変形と歪みについて定量化**する．

3.4.1. 連続体の変形

♣ 連続体の変形

- 連続体中の 2 点 \mathbf{x} と \mathbf{x}' を考え、それぞれが \mathbf{r} および \mathbf{r}' 変位したとする。
- この時、

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}'(\mathbf{x}') \quad (8)$$

ならば変形なし。

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{r}'(\mathbf{x}') \quad (9)$$

ならば変形ありと特徴付けられる。

- したがって、連続体の変形 (**deformation**) を定量的に以下のように定義：

$$\mathbf{r}'(\mathbf{x}') - \mathbf{r}(\mathbf{x}) =: \delta \mathbf{r}(\delta \mathbf{x}) \quad (10)$$

3.4.1. 連続体の変形 (2)

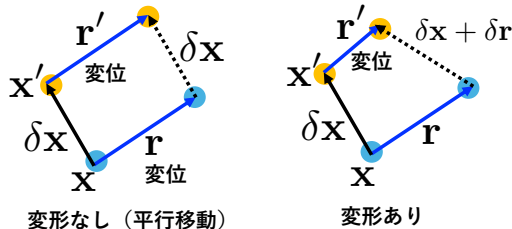


図 2: 連続体中の 2 点 x と x' がそれぞれ, r および r' 変位した際, $r(x) = r'(x')$ の変形なしの場合 (左) と $r(x) \neq r'(x')$ 変形ありの場合 (右). つまり $\delta r(\delta x) \neq 0$ であれば連続体の変形がある.

- このように変形 δr は位置 x および 2 点間の相対位置 δx の関数である.

3.4.1. 連続体の変形 (3)

- このため、 $\delta \mathbf{x}$ を微小量として、 $\delta \mathbf{r}$ の i 成分を Taylor 展開すると

$$\delta r_i(\delta \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial r_i(\delta \mathbf{x} = \mathbf{0})}{\partial x_j} \delta x_j + O((\delta \mathbf{x})^2) \quad (11)$$

となる.

- ここで出てくる $\frac{\partial r_i}{\partial x_j}$ は 2 点の相対位置 $\delta \mathbf{x}$ の大きさによらない量であり、連続体の変形の性質を議論する上で便利である.

3.4.1. 連続体の変形 (4)

- ここで高次の項は無視すれば

$$\delta \mathbf{r}(\delta \mathbf{x}) = \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{x} \quad (12)$$

と書ける．ここでは

$$\frac{\partial r_i(\delta \mathbf{x} = \mathbf{0})}{\partial x_j} =: (\mathbf{D})_{ij} \quad (13)$$

とする．

- 各成分を書き下すと

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} & \frac{\partial r_1}{\partial x_2} & \frac{\partial r_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial r_2}{\partial x_1} & \frac{\partial r_2}{\partial x_2} & \frac{\partial r_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial r_3}{\partial x_1} & \frac{\partial r_3}{\partial x_2} & \frac{\partial r_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (14)$$

である．これを変形勾配テンソル (deformation gradient tensor) と呼ぶ．

3.4.2. 歪みテンソルと回転ベクトル

♣ 歪みテンソルと回転ベクトル

- 変形勾配テンソル D は一般に対称ではない.
- これを以下のように対称・反対称部分に分ける：

$$(D)_{ij} = (E)_{ij} + (F)_{ij} \quad (15)$$

ここで,

$$(E)_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} + \frac{\partial r_j}{\partial x_i} \right) \quad (16)$$

$$(F)_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} - \frac{\partial r_j}{\partial x_i} \right) \quad (17)$$

3.4.2. 歪みテンソルと回転ベクトル (2)

- あとで議論するが、応力の寄与に関係するのは対称テンソル E である．これを歪みテンソル (strain tensor) といい、弾性体の場合、応力は歪みに対する線形和で書ける (Hooke の法則：次回以降扱う)．これらの比例係数を弾性係数と呼ぶ．
- 一方、反対称テンソル F は回転に寄与し応力変化に寄与しない (後で示す)．これを回転テンソル (rotation tensor) という．
- たとえば、**弾性体の場合、応力テンソルと歪みテンソルの関係は**

$$P_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} E_{kl} \quad (18)$$

などと表される (Hooke の法則)．

- このような線形弾性論を次回扱うが、今回は E_{kl} など歪みテンソル周辺の具体的振る舞いについて例を挙げながら議論する．

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル

♣ さまざまな変形と歪みテンソル

(例 1) $(E)_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_1} + \frac{\partial r_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial r_1}{\partial x_1}$ のみが存在して他が 0 である場合を考える.

$$E = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

また $F = 0$ とする.

■ 変形は

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{x} = \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{x} \quad (20)$$

で与えられる.

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (2)

■ すなわち,

$$\delta r_1 = \frac{\partial r_1}{\partial x_1} \delta x_1, \quad \delta r_2 = 0, \quad \delta r_3 = 0 \quad (21)$$

となる．これは一軸伸長を表す (図 3)．

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (3)

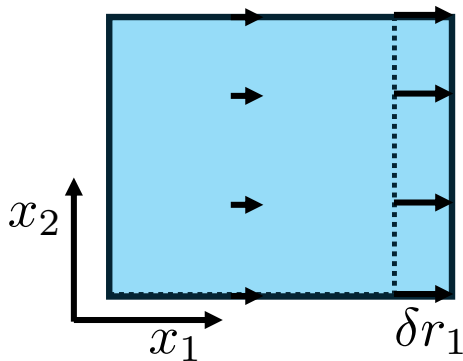


図 3: 一軸伸長

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (4)

(例 2) $(E)_{11}, (E)_{22}, (E)_{33}$ のみが存在して他が 0 である場合を考える.

$$E = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial r_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial r_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (22)$$

また $F = 0$ とする.

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (5)

■ 変形は

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{x} = \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{x} \quad (23)$$

であり,

$$\delta r_i = \frac{\partial r_i}{\partial x_i} \delta x_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (24)$$

となる．これは，各軸方向に独立に伸縮する等方的な変形を表す (図 4)．

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (6)

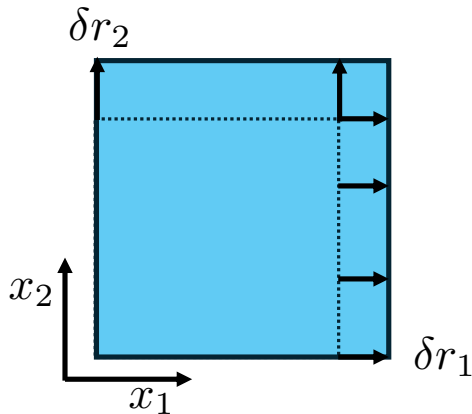


図 4: 多軸伸長 (x_1, x_2 平面を图示. x_3 方向も同様)

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (7)

- 例 1, 2 はいずれも歪みテンソルの対角成分による変形であり, 一般に体積変化を伴う.
- 実際, 連続体の体積 $\delta V = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$ が $\delta V' = \delta x'_1 \delta x'_2 \delta x'_3$ に変形したとする.
- すると,

$$\begin{aligned}\delta V' &= (\delta x_1 + \delta r_1)(\delta x_2 + \delta r_2)(\delta x_3 + \delta r_3) \\ &= \left(1 + \frac{\partial r_1}{\partial x_1}\right) \left(1 + \frac{\partial r_2}{\partial x_2}\right) \left(1 + \frac{\partial r_3}{\partial x_3}\right) \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \\ &\simeq \left(1 + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial r_i}{\partial x_i}\right) \delta V\end{aligned}\tag{25}$$

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (8)

- よって体積変化率は

$$\frac{\delta V' - \delta V}{\delta V} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial r_i}{\partial x_i} = \text{tr}(\mathbf{E}) \quad (26)$$

で表され、いずれの場合も有限の体積変化が生じる。

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (9)

(例 3) $(E)_{12}, (E)_{21}$ のみが存在して他が 0 である場合を考える．また $\frac{\partial r_1}{\partial x_2} = \frac{\partial r_2}{\partial x_1}$ とする．

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial r_1}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial r_2}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

また $F = 0$ とする．

このとき，変形は

$$\delta \mathbf{r} = D \cdot \delta \mathbf{x} = E \cdot \delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial r_1}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial r_2}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_2} \delta x_2 \\ \frac{\partial r_2}{\partial x_1} \delta x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (10)

で与えられる．すなわち，

$$\delta r_1 = \frac{\partial r_1}{\partial x_2} \delta x_2, \quad \delta r_2 = \frac{\partial r_2}{\partial x_1} \delta x_1, \quad \delta r_3 = 0. \quad (29)$$

仮定より $\frac{\partial r_1}{\partial x_2} = \frac{\partial r_2}{\partial x_1} \equiv \frac{\gamma}{2}$ とおけば， $\delta r_1 = \frac{\gamma}{2} \delta x_2$, $\delta r_2 = \frac{\gamma}{2} \delta x_1$, $\delta r_3 = 0$ と簡潔に書ける．

このような変形を 純粹剪断（ずれ）変形 (**pure shear deformation**) と呼び，対応する歪みを 剪断歪み (**shear strain**) という (図 5)．

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (11)

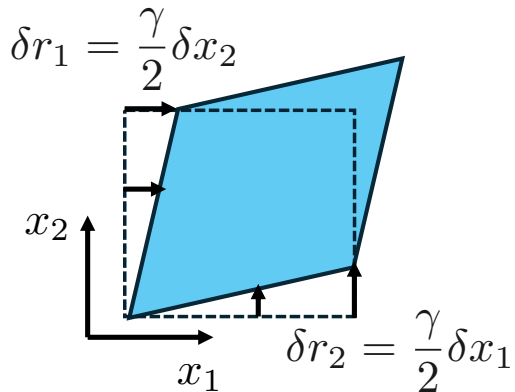


図 5: 純粋剪断変形

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (12)

なお、このときの体積変化は

$$\frac{\delta V' - \delta V}{\delta V} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial r_i}{\partial x_i} = 0 \quad (30)$$

となり、体積変化を伴わない変形である。

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (13)

最後に、反対称テンソル F を考察する.

■ F は,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -F_{21} & F_{13} \\ F_{21} & 0 & -F_{32} \\ -F_{13} & F_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

という構造をとり、各成分は

$$F_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_2} - \frac{\partial r_2}{\partial x_3} \right) \quad (32)$$

$$F_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_3} - \frac{\partial r_3}{\partial x_1} \right) \quad (33)$$

$$F_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_1} - \frac{\partial r_1}{\partial x_2} \right) \quad (34)$$

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (14)

であることから,

$$2F_{32} = \Omega_1 \quad (35)$$

$$2F_{13} = \Omega_2 \quad (36)$$

$$2F_{21} = \Omega_3 \quad (37)$$

とおく.

- いま, 以下のようにベクトル Ω は

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \nabla \times \mathbf{r} = \text{rot } \mathbf{r} \quad (38)$$

であり, 変位場 \mathbf{r} の回転成分 (回転ベクトル) であることがわかる.

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (15)

(例 4) 変形勾配テンソルが

$$\mathbf{D} = \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\Omega_3 & 0 \\ \frac{1}{2}\Omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

である場合を考える.

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (16)

- このとき、変形は

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\Omega_3 & 0 \\ \frac{1}{2}\Omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\Omega_3 \delta x_2 \\ \frac{1}{2}\Omega_3 \delta x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

で与えられる.

- すなわち,

$$\delta r_1 = -\frac{1}{2}\Omega_3 \delta x_2, \quad \delta r_2 = \frac{1}{2}\Omega_3 \delta x_1, \quad \delta r_3 = 0, \quad (41)$$

であり、点は x_3 軸まわりに角度 $\Omega_3/2$ [rad] だけ回転していることを意味する.

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (17)

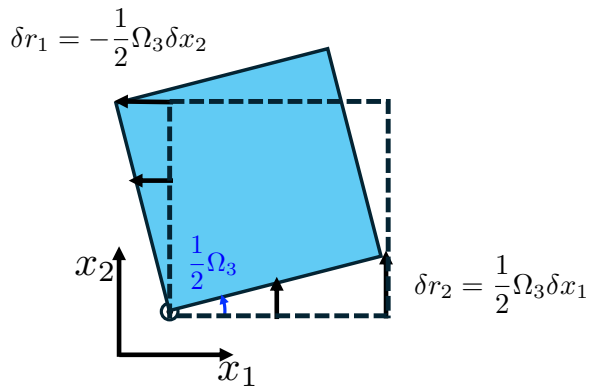


図 6: 回転変形

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (18)

- このように，変形勾配テンソルは

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{F} \quad (42)$$

と分解され， \mathbf{E} は対称成分（歪み）， \mathbf{F} は反対称成分（回転）をそれぞれ表す．

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (19)

例題 3-1：単純剪断変形

連続体が x_1 方向のみに変形し，変形の大きさが x_2 に比例する

$$\delta \mathbf{r} = (\alpha \delta x_2, 0, 0) \quad (43)$$

単純剪断変形を考える．ここで $\alpha(>0)$ は比例定数である．このときの変形勾配テンソル，歪みテンソル，回転テンソルを求めよ．また，回転テンソルから回転ベクトルを求めよ．

(解答)

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (20)

- 変位と相対位置の関係は,

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{x} \quad (44)$$

であるので, 変形勾配テンソルは

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

である.

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (21)

- これを対称, 反対称成分に分解すると, 対称成分である歪みテンソルは

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

となる.

- 一方, 反対称成分である回転テンソルは,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ -\frac{\alpha}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (47)$$

となる.

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (22)

- これより，回転ベクトルは

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad (48)$$

となる．

- このように，単純剪断変形 (simple shear) は，剪断歪み $\frac{\alpha}{2}$ を与えたのちに， $-\frac{\alpha}{2}$ 回転したものに相当する (図 7)．
- 単純剪断変形は，長方形の面の高さを維持しながら平行四辺形への変形に対応するため，連続体の体積が変化しないことがわかる．

3.4.3. さまざまな変形と歪みテンソル (23)

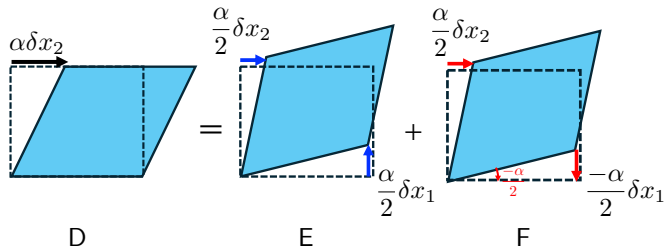


図 7: 単純剪断変形 (simple shear) を純粋剪断 (pure shear) と回転に分解する.

第3回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
- 2 前回の復習
- 3 応力テンソルの性質
 - 応力テンソルの対称性
- 4 連続体の変形と応力
 - 連続体の変形
 - 歪みテンソルと回転ベクトル
 - さまざまな変形と歪みテンソル
- 5 まとめ

3.5. まとめ

- 応力テンソルが対称であることを導出した.
- 連続体の変形について定式化した.
- 変形勾配テンソルを導入し, これを対称成分・反対称成分に分解すると, それぞれ歪みと回転に対応することを確認した.
- 様々な変形を具体的に定式化した.

次回：線形弾性論（Hooke の法則）