連続体力学 第 9 回
低 Reynolds 数流体：Stokes 抵抗則

川崎猛史

大阪大学 D3 センター/ 大学院理学研究科物理学専攻

Last update：December 14, 2025

第 9 回講義資料目次

第 9 回講義資料目次

9.1. 講義のスケジュール

1. 10/6：第 1 回
2. 10/20：第 2 回
3. 10/27：第 3 回
4. 11/5**(水)**：第 4 回
5. 11/17：第 5 回 **(11/10 は休講)**
6. 11/26**(水)**：第 6 回
7. 12/1：第 7 回
8. 12/8：第 8 回
9. 12/15：第 9 回
10. 12/22：第 10 回
11. 1/5：第 11 回
12. 1/15**(木)**：休講
13. 1/19：第 12 回
14. 1/26：第 13 回
15. 2/2 ： 第 14 回 期末試験（予定）

第 9 回講義資料目次

9.2. Stokes 近似と球周りの流れ

本節では，低 Reynolds 数流体中において球をゆっくりと運動させたときに，球が受ける抵抗力

$$6\pi\eta a U$$

を導出する．Stokes 方程式の特解 (Stokes 極) までは前回の再掲である．

9.2.1. Stokes 極（再掲）

♣ Stokes 極（再掲）

[参考文献：佐野著 連続体の力学 (裳華房)，半場著 入門連続体の力学 (日本評論社)]

- 本節では，座標原点に半径 a の球を固定し，x_1 方向負の無限遠から x_1 軸に平行な方向に速度 U の一様流をかける．また，無限遠での圧力を p_∞ とする．

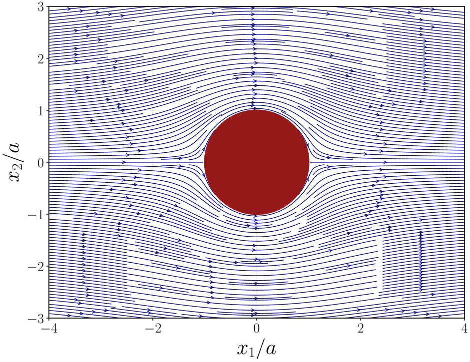

図 1: 低 Reynolds 数流体の流れ．座標原点に半径 a の球を固定し，x_1 方向負の無限遠から x_1 軸と平行に速度 U の流れをかけた場合のモデル計算 (式 (46)) の結果．

9.2.1. Stokes 極（再掲） (2)

- 前節までに扱ったように，非圧縮な低 Reynolds 数流体では，慣性項に比べて粘性項が支配的となり，運動方程式は

$$\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \nu\nabla^2\mathbf{u} \tag{1}$$

となる．ここで p は修正圧力 p^* を表している．
これを整理し，非圧縮条件と合わせると，

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} p = \eta\nabla^2\mathbf{u}} \tag{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0} \tag{3}$$

を連立して解く必要がある．

9.2.1. Stokes 極（再掲） (3)

- いま，式 (2) は非同次の偏微分方程式である．このような方程式は，非同次方程式の特解と同次方程式の一般解の重ね合わせとして，非同次方程式の一般解を構成できる．
- 参考までに，対応する同次方程式は

$$\boxed{\mathbf{0} = \eta \nabla^2 \mathbf{u}} \tag{4}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0} \tag{5}$$

である．

- したがって，まずは非同次方程式である式 (2) に対する本問題の基本解として，特解（特殊解）を求めるところから始める．

9.2.1. Stokes 極（再掲） (4)

- 式 (2) の両辺に div をとると

$$\boldsymbol{\nabla}^2 p = \eta \boldsymbol{\nabla}^2 (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) \tag{6}$$

となる．非圧縮条件 (3) より右辺が 0 となるので

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}^2 p = 0} \tag{7}$$

を得る．これより，圧力 p は調和関数である．調和関数については，以下補足 1-3 を参照せよ．

補足 1：調和関数の定義

関数 $f(\mathbf{x})$ が領域 D で調和関数 **(harmonic function)** であるとは，その領域 D においてラプラス方程式

$$\boldsymbol{\nabla}^2 f = 0 \tag{8}$$

を満たすことである．

9.2.1. Stokes 極（再掲） (5)

補足 2： 調和関数の特殊解（球対称）

球対称な調和関数を求める．ラプラス方程式を球座標系で書き下すと，関数 f が動径 r のみに依存する $(f = f(r))$ ため，$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0$ となり，ラプラス方程式 $\nabla^2 f = 0$ は球対称性により角度に関する項がゼロとなるため，以下の常微分方程式となる

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right) = 0 \tag{9}$$

これを解くと

$$f(r) = c_0 + \frac{c_1}{r} \tag{10}$$

となる．

9.2.1. Stokes 極（再掲） (6)

補足 3：多重極展開表示（非対称を含む）

調和関数において，球対称解（すなわち動径 r のみに依存する解）は $f = c_0 + c_1 \frac{1}{r}$ である．一方，調和関数 f の空間微分（$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ や $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ など）もまた調和関数となることが知られている（ラプラシアン ∇^2 が微分演算子であるため $\nabla^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla^2 f) = 0$）．

球対称解 $f = \frac{1}{r}$ を x_1 で微分してもラプラス方程式の解となる：

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}\right) = -\frac{1}{2}(r^2)^{-3/2}(2x_1) = -\frac{x_1}{r^3} \tag{11}$$

この解 $\frac{x_1}{r^3}$ は双極子 (Dipole) のポテンシャルに対応する．このような微分操作を繰り返すと，一般に原点 $r = 0$ を除く領域で調和関数 f は，i や ij に関する Einstein 縮約に注意して

$$f(\mathbf{x}) = c_0 + c_1 \frac{1}{r} + a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) + a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots = c_0 + c_1 \frac{1}{r} + a_i' \frac{x_i}{r^3} + a_{ij}'' \frac{x_i x_j}{r^5} + \cdots \tag{12}$$

のように，原点からの距離 r の逆冪乗で展開されたものの和として表現できる (多重極展開)．

9.2.1. Stokes 極（再掲） (7)

- 以下，式 (7)：$\nabla^2 p = 0$ を解く．
- いま，十分遠方で圧力と流速が p_∞ および U の遅い粘性流のもと，球の周りの流れを考える．
- 調和関数としての圧力場 p の一般表示は，無限遠での収束条件および回転に対する異方性を含めて，式 (12) より

$$\boxed{p = c_0 + c_1 \frac{1}{r} + a_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r}\right) + a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots} \tag{13}$$

と書ける．

- 第 1 項の c_0 は，十分遠方 $r \to \infty$ において $\frac{1}{r^n} \to 0 \ (n > 0)$ であることから，圧力場が定数 p_∞ に収束することを要請する項である．したがって，

$$c_0 = p_\infty \tag{14}$$

である．

9.2.1. Stokes 極（再掲） (8)

- 第 2 項の $c_1 \frac{1}{r}$ は，球対称な圧力成分に対応する．例えば $c_1 > 0$ の場合には，球を通過した流れが球から離れる方向へ修正される湧き出し型の流れを生じる．一方，$c_1 < 0$ の場合には，流れは球の中心に向かって収束する．いずれの場合も，球表面に沿った流れを形成することはできないため，物理的に不適切であり，

$$c_1 = 0 \tag{15}$$

としなければならない．
また，この項を保持したまま Stokes 方程式を機械的に解くと，無限遠において等方的な定数速度成分が必ず残ることも示すことができる．しかし，本問題では無限遠で x_1 方向の一様流のみを課しており，このような等方的流れは許されない．（厳密な証明は補遺に示す）したがって，本設定においては c_1/r 項は不適切である．

9.2.1. Stokes 極（再掲） (9)

- 第 3 項

$$a_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r}\right) = -a_1 \frac{x_1}{r^3} \tag{16}$$

は x_1 方向に異方的な圧力成分であり，外部流れの対称性と整合的であるため保持される．球表面に沿った流れを実現するためには，このような異方性が不可欠である（x_1 方向に関して，球の前後で反対称な力場が必要となる）．一方，他の方向に関する一次の異方性項は，流れの対称性により消失する（x_2，x_3 方向には反対称性が存在しない）．
また，より高次の多極項については，~~外部領域 $r \gg a$ において~~ 球が十分大きい場合，外部領域 ($r \geq a$) において近似的に無視することができる．これらは高次の摂動としてのみ寄与し，例えば Stokes 抵抗の高次補正項などに対応する．

9.2.1. Stokes 極（再掲） (10)

- したがって，p の特殊解は，新たな未定係数 A を用いて

$$p \sim p_\infty + A\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r}\right) = p_\infty - A\frac{x_1}{r^3} \tag{17}$$

となる．

- 次にこれを与式 (2) に代入すると，圧力定数項は落ちるので最初から無視して

$$\begin{aligned} \eta\nabla^2\mathbf{u} &= \boldsymbol{\nabla}p \\ &= A\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r}\right)\right) \\ &= A\frac{\partial}{\partial x_1}\boldsymbol{\nabla}(1/r) \\ &= \frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}^2 r \end{aligned} \tag{18}$$

9.2.1. Stokes 極（再掲） (11)

となる．ここで自明な計算から

$$\boxed{\nabla^2 r = \nabla^2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{2}{r}} \tag{19}$$

となることを用いた（各自確認せよ）．

- 再度式 (18) を整理すると

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2 \left(\frac{A}{2\eta} \nabla \frac{\partial r}{\partial x_1} \right) \tag{20}$$

となる．したがって，両辺を比較 (∇^2 の中身を比較)

$$\mathbf{u} = \frac{A}{2\eta} \left(\nabla \frac{\partial r}{\partial x_1} \right) + \mathbf{u}_0 \tag{21}$$

となる．ここで $\mathbf{u}_0$ は不定係数を含むベクトル場である．

9.2.1. Stokes 極（再掲） (12)

- 次にこの不定係数を定めるために，非圧縮条件の式 (3) に式 (21) を代入すると

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}_0+\frac{A}{2\eta}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)=0 \tag{22}$$

となる．ここで，$\nabla^2 r=\frac{2}{r}$ を用いれば

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}_0=-\frac{A}{2\eta}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nabla^2 r\right)=-\frac{A}{\eta}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{23}$$

を得る．

9.2.1. Stokes 極（再掲） (13)

- よってこれを成分ごとに書き下すと，

$$\frac{\partial u_{01}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{02}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{03}}{\partial x_3} = -\frac{A}{\eta}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{24}$$

となる．
よって，

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(u_{01} + \frac{A}{\eta}\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial u_{02}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{03}}{\partial x_3} = 0 \tag{25}$$

であるので，基本解（特解）として

$$\boxed{u_{01} = -\frac{A}{\eta}\frac{1}{r}, \qquad u_{02} = 0, \qquad u_{03} = 0} \tag{26}$$

を採用できる．

9.2.1. Stokes 極（再掲） (14)

(注) 今回選んだ解 $\mathbf{u}_0$ に定数ベクトルを加えた $\mathbf{u}_0 + \mathbf{w}$ (ただし $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$) も解として選ぶことができるが，これを選んでも，今後の議論で同次方程式 (後述の式 (??)) に吸収され同一の一般解が得られる．興味がある人は試してみよ．

- この結果を式 (21) に代入すると，$\mathbf{u}$ の特解は

$$\boxed{u_1 = -\frac{A}{2\eta}\left(\frac{1}{r} + \frac{x_1^2}{r^3}\right), \qquad u_2 = -\frac{A}{2\eta}\frac{x_1 x_2}{r^3}, \qquad u_3 = -\frac{A}{2\eta}\frac{x_1 x_3}{r^3}} \tag{27}$$

を得る．この解と式 (17) を **Stokes 極（Stokeslet）** とよび，Stokes 近似において，球周りの流れに関する x_1 方向に異方性をもつ基本的な特殊解を表す．この解は特解の一例であるが，この後同次方程式の解を重ね合わせて一般解を構成する．

9.2.2. 流れの一般解

♣ 流れの一般解

- 前節では，非同次な Stokes 方程式に対する特殊解（Stokes 極）を求めた．
- 本節では，まず当該方程式に対応する同次方程式の一般解を求める．その後，これを先に得た Stokes 極の特殊解と重ね合わせることにより，非同次な Stokes 方程式の一般解を構成する．
- 以下では，Stokes 方程式の同次方程式

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u}=\mathbf{0}} \tag{28}$$

および非圧縮条件

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}=0} \tag{29}$$

を同時に満たす流速場 $\mathbf{u}$ を考える．

9.2.2. 流れの一般解 (2)

- これらの条件を満たす解の一つとして，スカラーポテンシャル Ψ を用いたポテンシャル流の形

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}\Psi \tag{30}$$

が存在する．これは実際に式 (28) および式 (29) に代入することで確かめることができる（各自確認せよ）．

- この表式を非圧縮条件式 (29) に代入すると，

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}^2\Psi = 0} \tag{31}$$

を得る．すなわち，スカラーポテンシャル Ψ は調和関数である．

9.2.2. 流れの一般解 (3)

- この解は，$x_1 \to -\infty$ において流速成分が

$$u_1 \to U \tag{32}$$

となることを考慮すると，スカラーポテンシャル Ψ は

$$\Psi \sim Ux_1 + c_0\left(\frac{1}{r}\right) + c_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{33}$$

と書くことができる．
- ただし，定数項は速度場を求める際の空間微分により消失するため無視できる．また，高次の微分項は，r が十分大きい領域では急速に減衰するため，ここでは無視する．
- この結果，速度ベクトル $\mathbf{u}$ は以下の形に書き下すことができる．
- 式 (30) より，速度場は $\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}\Psi$ で与えられる．したがって，式 (33) を項別に微分すればよい．

9.2.2. 流れの一般解 (4)

- 速度場の j 成分は

$$
\begin{aligned}
u_j &= U\delta_{j1} + c_0 \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) + c_i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) \\
&= U\delta_{j1} - c_0 \frac{x_j}{r^3} + c_i \left(\frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{1}{r^3}\delta_{ij}\right)
\end{aligned}
\tag{34}
$$

となる．これが $\boxed{\text{同次方程式の一般解}}$ である．ここで c_0 を係数にもつ等方項が落ちることは，定性的に理解できるが，ここでは境界条件から消えることを次節で確認する (圧力 p での議論においてもこのような項を残したまま境界条件から落とすという方針でもよい)．

9.2.2. 流れの一般解 (5)

- これに Stokes 極の特殊解 (式 17) を重ね合わせることで，
  $\boxed{\text{非同次 Stokes 方程式の一般解}}$ は

$$\boxed{\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U - \dfrac{A}{2\eta}\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{x_1^2}{r^3}\right) - c_0\dfrac{x_1}{r^3} + c_i\left(\dfrac{3x_ix_1}{r^5} - \dfrac{1}{r^3}\delta_{i1}\right) \\ -\dfrac{A}{2\eta}\dfrac{x_1x_2}{r^3} - c_0\dfrac{x_2}{r^3} + c_i\left(\dfrac{3x_ix_2}{r^5} - \dfrac{1}{r^3}\delta_{i2}\right) \\ -\dfrac{A}{2\eta}\dfrac{x_1x_3}{r^3} - c_0\dfrac{x_3}{r^3} + c_i\left(\dfrac{3x_ix_3}{r^5} - \dfrac{1}{r^3}\delta_{i3}\right) \end{pmatrix}} \tag{35}$$

と表される．さらに，これを $(\mathbf{c})_i = c_i$ とすると，

$$\boxed{\mathbf{u}(\mathbf{r}) = U\,\mathbf{e}_1 - \frac{A}{2\eta}\left(\frac{\mathbf{e}_1}{r} + \frac{x_1}{r^3}\mathbf{r}\right) - c_0\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})}{r^5}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{c}}{r^3}} \tag{36}$$

9.2.2. 流れの一般解 (6)

と，大変見通しのよい式を構成することができる．

9.2.3. 境界条件を考慮した流れの特殊解

♣ 境界条件を考慮した流れの特殊解

- 前節では，非同次 Stokes 方程式の一般解を求めた．ここで未定係数 A, c_0, c_i $(i=1,2,3)$ を，以下の境界条件から決定する．
- $\boxed{\text{境界条件：球の表面で流速がゼロ（non-slip 境界条件）}}$.
- まず，$\mathbf{r}=(a,0,0)$ のとき，流速は

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{\mathbf{r}=(a,0,0)} = \begin{pmatrix} U - \dfrac{A}{2\eta}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{a^2}{a^3}\right) - \dfrac{c_0}{a^2} + c_i\left(\dfrac{3x_i}{a^4} - \dfrac{1}{a^3}\delta_{i1}\right) \\ -\dfrac{c_2}{a^3} \\ -\dfrac{c_3}{a^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

となる．

9.2.3. 境界条件を考慮した流れの特殊解 (2)

第 2・第 3 成分から

$$\boxed{c_2 = 0, \quad c_3 = 0} \tag{38}$$

が直ちにわかる．

- 次に，$\mathbf{r} = (0, a, 0)$ の場合を考える．上の結果 $c_2 = c_3 = 0$ を用いると，

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{\mathbf{r}=(0,a,0)} = \begin{pmatrix} U - \dfrac{A}{2\eta a} - \dfrac{c_1}{a^3} \\ -\dfrac{c_0}{a^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \tag{39}$$

となる．

9.2.3. 境界条件を考慮した流れの特殊解 (3)

- したがって，第 2 成分より
$$\boxed{c_0 = 0} \tag{40}$$
が得られる．
- 以上より，未定係数は A と c_1 のみとなる．これらは，式 (37) および式 (39) の第 1 成分から決定される．
- まず，$\mathbf{r} = (a, 0, 0)$ における第 1 成分から，
$$\boxed{0 = U - \frac{A}{\eta a} + \frac{2c_1}{a^3}} \tag{41}$$
を得る．

9.2.3. 境界条件を考慮した流れの特殊解 (4)

- 一方，$\mathbf{r} = (0, a, 0)$ における第 1 成分から，

$$\boxed{0 = U - \frac{A}{2\eta a} - \frac{c_1}{a^3}} \tag{42}$$

を得る．

- したがって，A と c_1 に関する連立方程式は

$$\boxed{\begin{cases} U - \dfrac{A}{\eta a} + \dfrac{2c_1}{a^3} = 0, \\ U - \dfrac{A}{2\eta a} - \dfrac{c_1}{a^3} = 0 \end{cases}} \tag{43}$$

と書ける．

9.2.3. 境界条件を考慮した流れの特殊解 (5)

- これを解くと，

$$\boxed{A = \frac{3}{2}\eta a U} \tag{44}$$

$$\boxed{c_1 = \frac{1}{4}Ua^3} \tag{45}$$

を得る．

- これらを代入することで，境界条件を考慮した流れ場は

$$\boxed{\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} U - \dfrac{3Ua}{4}\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{x_1^2}{r^3}\right) - \dfrac{Ua^3}{4}\left(\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3x_1^2}{r^5}\right) \\ -\dfrac{3Ua}{4}\dfrac{x_1x_2}{r^3} + \dfrac{3Ua^3}{4}\dfrac{x_1x_2}{r^5} \\ -\dfrac{3Ua}{4}\dfrac{x_1x_3}{r^3} + \dfrac{3Ua^3}{4}\dfrac{x_1x_3}{r^5} \end{pmatrix}} \tag{46}$$

9.2.3. 境界条件を考慮した流れの特殊解 (6)

で与えられる (図 **1** はこれを図示したもの).

9.2.4. 応力テンソルと球に働く力

♣ 応力テンソルと球に働く力

(注) 以下，計算はやや大変であるので詳細を追うことを必須としないが，何をやっているかは理解すること．

- 前節においては，球の周りの流れ場を求めることができた．
- 次に，応力テンソルを求め，球の表面に作用する応力ベクトルを表面積分することで，球にかかる流体からの合力

$$\mathbf{F} = \int \mathsf{P} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S \tag{47}$$

を評価する．対称性より，非零となるのは x_1 成分のみである．

9.2.4. 応力テンソルと球に働く力 (2)

- したがって

$$F_1 = \int P_{1j} n_j \, \mathrm{d}S \tag{48}$$

が $\boxed{\text{流体から受ける抵抗力}}$ となるはずであるので，この計算に必要な，球表面 $r = a$ における $P_{1j} n_j$ を求める．

- 等方流体における応力テンソルは

$$P_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{49}$$

で与えられる．したがって

$$P_{1j} = -p\,\delta_{1j} + \eta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) \tag{50}$$

である．

9.2.4. 応力テンソルと球に働く力 (3)

- ここでは，前節で得た速度場の u_1 成分

$$u_1 = U - \frac{3Ua}{4}\left(\frac{1}{r} + \frac{x_1^2}{r^3}\right) - \frac{Ua^3}{4}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x_1^2}{r^5}\right) \tag{51}$$

を用いて，まず $\partial u_1/\partial x_1$ を計算すると

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{3Ua}{4}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1^2}{r^3}\right)\right] - \frac{Ua^3}{4}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r^3}\right) - 3\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1^2}{r^5}\right)\right] \tag{52}$$

となる．

- 整理すると

$$\boxed{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{3Ua}{4}\left(\frac{x_1}{r^3} - 3\frac{x_1^3}{r^5}\right) + \frac{3Ua^3}{4}\left(\frac{3x_1}{r^5} - 5\frac{x_1^3}{r^7}\right)} \tag{53}$$

を得る．

9.2.4. 応力テンソルと球に働く力 (4)

- 次に，P_{12}, P_{13} を求めるために， $\partial u_1/\partial x_2, \partial u_1/\partial x_3$ を求める．式 (51) を x_2, x_3 で微分すると

$$\boxed{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{3Ua}{4}\left(\frac{x_2}{r^3} + 3\frac{x_1^2 x_2}{r^5}\right) + \frac{3Ua^3}{4}\left(\frac{x_2}{r^5} - 5\frac{x_1^2 x_2}{r^7}\right)} \tag{54}$$

$$\boxed{\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{3Ua}{4}\left(\frac{x_3}{r^3} + 3\frac{x_1^2 x_3}{r^5}\right) + \frac{3Ua^3}{4}\left(\frac{x_3}{r^5} - 5\frac{x_1^2 x_3}{r^7}\right)} \tag{55}$$

を得る．

9.2.4. 応力テンソルと球に働く力 (5)

- また，前節の解より

$$u_2 = -\frac{3Ua}{4}\frac{x_1x_2}{r^3} + \frac{3Ua^3}{4}\frac{x_1x_2}{r^5}, \qquad u_3 = -\frac{3Ua}{4}\frac{x_1x_3}{r^3} + \frac{3Ua^3}{4}\frac{x_1x_3}{r^5} \tag{56}$$

である．よって x_1 微分を計算すると

$$\boxed{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\frac{3Ua}{4}\left(\frac{x_2}{r^3} - 3\frac{x_1^2x_2}{r^5}\right) + \frac{3Ua^3}{4}\left(\frac{x_2}{r^5} - 5\frac{x_1^2x_2}{r^7}\right)} \tag{57}$$

$$\boxed{\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = -\frac{3Ua}{4}\left(\frac{x_3}{r^3} - 3\frac{x_1^2x_3}{r^5}\right) + \frac{3Ua^3}{4}\left(\frac{x_3}{r^5} - 5\frac{x_1^2x_3}{r^7}\right)} \tag{58}$$

を得る．

9.2.4. 応力テンソルと球に働く力 (6)

- 以上より，$j = 2, 3$ では $\delta_{1j} = 0$ なので

$$P_{12} = \eta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \qquad P_{13} = \eta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \tag{59}$$

となる．実際に加えると

$$\boxed{P_{12} = \eta \left[\frac{9Ua}{2} \frac{x_1^2 x_2}{r^5} + \frac{3Ua^3}{2} \frac{x_2}{r^5} - \frac{15Ua^3}{2} \frac{x_1^2 x_2}{r^7} \right]} \tag{60}$$

$$\boxed{P_{13} = \eta \left[\frac{9Ua}{2} \frac{x_1^2 x_3}{r^5} + \frac{3Ua^3}{2} \frac{x_3}{r^5} - \frac{15Ua^3}{2} \frac{x_1^2 x_3}{r^7} \right]} \tag{61}$$

を得る．

9.2.4. 応力テンソルと球に働く力 (7)

- 最後に P_{11} 成分は

$$P_{11} = -p + 2\eta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \tag{62}$$

である．圧力

$$p = p_\infty - \frac{3\eta a U}{2} \frac{x_1}{r^3} \tag{63}$$

および式 (53) を用いると

$$\boxed{P_{11} = -p_\infty + \frac{9\eta U a}{2} \frac{x_1^3}{r^5} + \frac{9\eta U a^3}{2} \frac{x_1}{r^5} - \frac{15\eta U a^3}{2} \frac{x_1^3}{r^7}} \tag{64}$$

となる（x_1/r^3 の項は相殺される）．

9.2.4. 応力テンソルと球に働く力 (8)

- 以上で P_{1j} を具体的に求めた．次に球面 $r=a$ において

$$n_j = \left.\frac{x_j}{r}\right|_{r=a} = \frac{x_j}{a} \tag{65}$$

を用い，$P_{1j}n_j$ を計算して式 (48) を実行する．

- 球面上では

$$P_{1j}n_j = P_{11}n_1 + P_{12}n_2 + P_{13}n_3 = \frac{1}{a}\left(P_{11}x_1 + P_{12}x_2 + P_{13}x_3\right) \tag{66}$$

である．以下では，$r=a$ を代入して整理する．

9.2.4. 応力テンソルと球に働く力 (9)

- まず，式 (64) より，$r=a$ 上で

$$
\begin{aligned}
P_{11}\Big|_{r=a} &= -p_\infty + \frac{9\eta U a}{2}\frac{x_1^3}{a^5} + \frac{9\eta U a^3}{2}\frac{x_1}{a^5} - \frac{15\eta U a^3}{2}\frac{x_1^3}{a^7} \\
&= -p_\infty + \frac{9\eta U}{2a^2}x_1 - \frac{3\eta U}{a^4}x_1^3
\end{aligned} \tag{67}
$$

となる．

- 同様に，式 (60), (61) より

$$
\begin{aligned}
P_{12}\Big|_{r=a} &= \eta\left[\frac{9Ua}{2}\frac{x_1^2 x_2}{a^5} + \frac{3Ua^3}{2}\frac{x_2}{a^5} - \frac{15Ua^3}{2}\frac{x_1^2 x_2}{a^7}\right] \\
&= \eta\left[\frac{3U}{2a^2}x_2 - \frac{3U}{a^4}x_1^2 x_2\right],
\end{aligned} \tag{68}
$$

$$
P_{13}\Big|_{r=a} = \eta\left[\frac{3U}{2a^2}x_3 - \frac{3U}{a^4}x_1^2 x_3\right] \tag{69}
$$

9.2.4. 応力テンソルと球に働く力 (10)

を得る．

- これらを式 (66) に代入すると

$$
\begin{aligned}
P_{1j}n_j\Big|_{r=a} = \frac{1}{a}\Bigg[& x_1\left(-p_\infty + \frac{9\eta U}{2a^2}x_1 - \frac{3\eta U}{a^4}x_1^3\right) \\
&+ x_2\eta\left(\frac{3U}{2a^2}x_2 - \frac{3U}{a^4}x_1^2x_2\right) + x_3\eta\left(\frac{3U}{2a^2}x_3 - \frac{3U}{a^4}x_1^2x_3\right)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{70}
$$

となる．

9.2.4. 応力テンソルと球に働く力 (11)

- ここで球面上の恒等式

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2, \qquad x_2^2 + x_3^2 = a^2 - x_1^2 \tag{71}$$

を用いて整理すると，x_1^2 に比例する項が相殺され，

$$\boxed{P_{1j} n_j \Big|_{r=a} = -p_\infty \frac{x_1}{a} + \frac{3\eta U}{2a}} \tag{72}$$

を得る．

9.2.4. 応力テンソルと球に働く力 (12)

- したがって，式 (48) は

$$F_1 = \int_{r=a} \left(-p_\infty \frac{x_1}{a} + \frac{3\eta U}{2a} \right) \mathrm{d}S \tag{73}$$

となる．ここで $x_1 = a\cos\theta$ および

$$\mathrm{d}S = a^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{74}$$

を用いると

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \left(-p_\infty \cos\theta + \frac{3\eta U}{2a} \right) a^2 \sin\theta \\ &= -p_\infty a^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \cos\theta \sin\theta + \frac{3\eta U}{2a} a^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin\theta \end{aligned} \tag{75}$$

9.2.4. 応力テンソルと球に働く力 (13)

である．第 1 項は

$$\int_0^\pi \cos\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^\pi = 0 \tag{76}$$

より消える．また

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin\theta = 4\pi \tag{77}$$

であるから，

$$\boxed{F_1 = 6\pi\eta a U} \tag{78}$$

を得る **[Stokes(1851)]**.

第 9 回講義資料目次

9.3. まとめ

- 低 Re 無限遠から直線的に流れる流体から球が受ける抵抗力（Stokes 抵抗）を求めた．

次回： 完全流体の流体方程式と Bernoulli 則．

第 9 回講義資料目次

9.4. 補遺：ストークス極における球対称圧力項 c_1/r の排除

♣ ストークス極において，球対称圧力モードが排除される理由

まず，圧力場のうち球対称成分のみを取り出す：

$$p^{(0)}(r) = \frac{c_1}{r}. \tag{79}$$

この圧力成分に対応する速度場 $\mathbf{u}^{(0)}$ は，Stokes 方程式

$$\eta\nabla^2\mathbf{u}^{(0)} = \nabla p^{(0)} \tag{80}$$

を満たす．
式 (79) を式 (80) の右辺に代入すると，

$$\eta\nabla^2\mathbf{u}^{(0)} = \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{c_1}{r}\right) \tag{81}$$

となる．

9.4. 補遺：ストークス極における球対称圧力項 c_1/r の排除 (2)

ここで，次の恒等式を用いる：

$$\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\nabla}^2 r = \frac{1}{r}. \tag{82}$$

これを用いると，式 (81) は

$$\eta\nabla^2\mathbf{u}^{(0)} = \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{c_1}{2}\,\boldsymbol{\nabla}^2 r\right) \tag{83}$$

$$= \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{c_1}{2}\,r\right) \tag{84}$$

と書き換えられる．
したがって，∇^2 の中身を比較することで，次の特解が得られる：

$$\mathbf{u}^{(0)} = \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{c_1}{2\eta}\,r\right) \tag{85}$$

$$= \frac{c_1}{2\eta}\,\mathbf{e}_r + \mathbf{u}_{\mathrm{c}}, \tag{86}$$

9.4. 補遺：ストークス極における球対称圧力項 c_1/r の排除 (3)

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{87}$$

は動径方向の単位ベクトルである．ここで $\mathbf{u}_\mathrm{c}$ は不定ベクトルであり $\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u}_\mathrm{c} = 0$ を満たすので，同次方程式に吸収させることができる．このため式 (86) の第 1 項が本質的であることがわかる．
式 (86) より，この解は無限遠において

$$u_r \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{c_1}{2\eta} \tag{88}$$

という等方的な定数速度を必ず残すことがわかる．
しかし，本問題の設定では，無限遠での流れは x_1 方向の一様流のみであり，それ以外の方向の速度成分は 0 でなければならない．したがって，

$$c_1 = 0 \tag{89}$$

でなければならない．

9.4. 補遺：ストークス極における球対称圧力項 c_1/r の排除 (4)

結論

球対称圧力成分

$$p^{(0)}(r) = \frac{c_1}{r} \tag{90}$$

に対応する速度解は，無限遠において定数速度

$$u_r \to \frac{c_1}{2\eta} \tag{91}$$

を必ず残す．
しかし，問題設定では無限遠で x_1 方向以外の速度は消失しなければならないため，このような球対称成分は許されない．
したがって，

$$p^{(0)}(r) = \frac{c_1}{r} \quad \text{は排除され，} \quad c_1 = 0 \tag{92}$$

である．