連続体力学 第 1 回
連続体の導入・Euler 記述と Lagrange 記述・連続の式

川﨑猛史

大阪大学 D3 センター/ 大学院理学研究科物理学専攻

Last update：October 6, 2025

第 1 回講義資料目次

第 1 回講義資料目次

1.1. 講義のスケジュール

1. 10/6：第 1 回
2. 10/20：第 2 回
3. 10/27：第 3 回
4. 11/5(水)：第 4 回
5. 11/17：第 5 回 **(11/7 は休講)**
6. 11/26(水)：第 6 回
7. 12/1：第 7 回
8. 12/8：第 8 回
9. 12/15：第 9 回
10. 12/22：第 10 回
11. 1/5：第 11 回
12. 1/15(木)：第 12 回
13. 1/19：第 13 回
14. 1/26：第 14 回
15. 2/2 ： 第 15 回 期末試験（予定）

1.1.1. 講義担当者と講義方針

- 担当者：川崎猛史（学際計算物理・豊中 D3 センター・居室 616 号室）
  email:kawasaki.takeshi.d3c@osaka-u.ac.jp
- 講義の進め方：
  - 講義資料（スライド形式）を CLE から配布
  - スライドと板書の併用（これらを基に自分なりのノートを作成することを推奨）
  - 出欠アンケートで質問を受け付ける
- 参考書：
  連続体の力学（巽著，岩波書店），連続体の力学（佐野著，裳華房），連続体力学（佐野著，朝倉書店）
- 成績: (1)+(2)+(3) $\rightarrow$ 6 割で合格
  (1) 出欠アンケート 20 %
    - 毎回（小テスト形式）.
    - 簡単なアンケートに回答．質問などを書き込んでもよい (必ず全てに目し QA 集をつくる).

  (2) 中間レポート課題 40 % 12 月ごろ
  (3) 期末試験 40 % 2 月

1.1.2. 講義内容（予定）

本講義では以下の内容を予定している．

1. 連続の式
2. 運動方程式と応力テンソル
3. 歪みテンソル
4. 静的弾性変形
5. 弾性体の運動方程式と弾性波
6. 流体運動
7. 流体の運動方程式
8. ポテンシャル流
9. 粘性流
10. 流体の波
11. 乱流

第 1 回講義資料目次

1.2. イントロ

本節では，連続体についての基本概念を導入する。

1.2.1. 連続体とは何か

♣ 質点，剛体，連続体の比較

- 質点：大きさを無視した点
- 剛体：変形しない大きさをもつ物体
  - 微視的な原子分子の相対位置は固定
- 連続体：変形する物体
  - 微視的な原子分子の相対位置が変化
  - 連続体の例：
    - 弾性体（固体）
    - 流体
    - 粘弾性体・塑性体

1.2.1. 連続体とは何か (2)

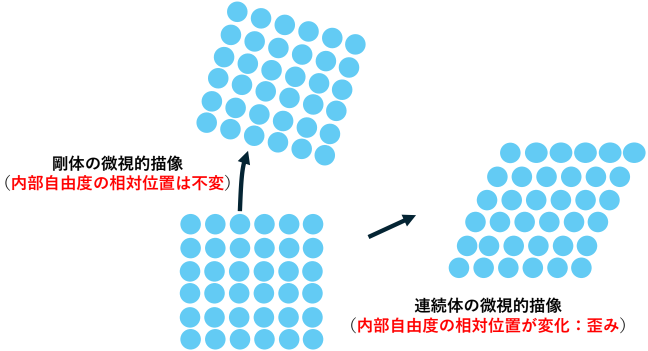

図 1: 剛体と連続体の微視的描像の比較．これらは質点の集合体としては共通だが，剛体はそれらの相対位置が一切変化せず，一方連続体はこれが変化する．この相対位置の変化を「歪み」とよぶ．

1.2.2. 連続体の力学

♣ 連続体の力学

- 巨視的な領域の平均的な振る舞い（質点の集合）
- 連続体に働く力と運動を取り扱う体系（応力と歪みの関係）
- 無限の自由度をもつ場の量（位置 $\mathbf{x}$ に対する量）として扱う
    - 例：密度 $\rho(\mathbf{x})$，圧力 $p(\mathbf{x})$，温度 $T(\mathbf{x})$，速度 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$，加速度 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$

第 1 回講義資料目次

1.3. 連続体の記述

本節では，連続体を考える上で重要な，Lagrange 記述と Euler 記述について導入する．

1.3.1. Lagrange 記述

♣ Lagrange 記述

- 連続体とともに動く点（粒子記述）に基づく記述：$\mathbf{x}$ と t を共に変数として扱う．
- 粒子の速度：

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\mathrm{D}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{D}t} \tag{1}$$

- 粒子の加速度：

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\mathrm{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}(t))}{\mathrm{D}t} \tag{2}$$

- **Lagrange 微分**：微分記号 $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$
  - 時刻 t および位置 $\mathbf{x}(t)$ を変数とする微分
  - 全微分 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ と同等
  - 粒子に随伴して観測される変化率を表す

1.3.1. Lagrange 記述 (2)

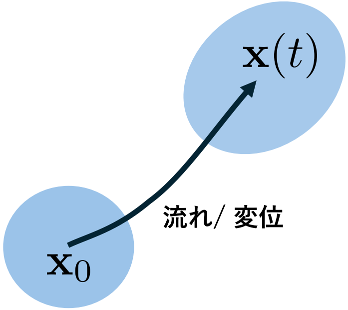

図 2: Lagrange 記述．連続体の微小素片が時間とともに位置と形が変化していく様子．(水中を流れるインクなどをイメージ)

1.3.2. Euler 記述

♣ Euler 記述

- **Euler** 記述と **Euler** 微分：
  - 空間中の固定点で連続体場の変化を観測する記述を **Euler** 記述と呼ぶ
  - $\frac{\partial}{\partial t}$：空間中の定点における局所的な時間変化であり，これを **Euler** 微分と呼ぶ
- 以下，Lagrange 微分と Euler 微分の関係を議論する．

1.3.2. Euler 記述 (2)

- スカラー量 $A(\mathbf{x}(t))$ の Lagrange 微分を連鎖律により変形：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}A(\mathbf{x}(t))}{\mathrm{D}t} &= \frac{\partial A(\mathbf{x}(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A(\mathbf{x}(t))}{\partial x_i} \frac{\mathrm{D}x_i}{\mathrm{D}t} \\
&= \frac{\partial A(\mathbf{x}(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A(\mathbf{x}(t))}{\partial x_i} u_i \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) A(\mathbf{x}(t)) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) A(\mathbf{x}(t)) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

ここで，$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$，$\mathbf{u}(t) = \frac{\mathrm{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}(t))}{\mathrm{D}t} = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ である．
また，$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ （ベクトル微分演算子）である．

1.3.2. Euler 記述 (3)

- 移流項：$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}$
  - 流体の運動による物理量の変化
  - Euler 記述と Lagrange 記述の本質的な違いを表現
  - 観測者の立場の違いが生む項

ここまでのまとめ

- Lagrange 記述：「粒子」に随伴して観測（$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$）
- Euler 記述：固定点で観測（$\frac{\partial}{\partial t}$）
- 両者の関係：移流項が橋渡し

第 1 回講義資料目次

1.4. 連続の式（連続方程式）

連続体では，運動の法則，すなわち力と運動の関係を議論する。これに先立ち，連続体の質量保存則を連続体記述（連続の式）で立式する。

1.4.1. Lagrange 記述による質量保存則と連続の式

♣ Lagrange 記述による質量保存則と連続の式

- 系の設定：
  - Lagrange 記述に従い，$t = 0$ における閉曲面 S_0 が時刻 t において $S(t)$ へと時間発展
  - この時の閉曲面に囲まれる体積をそれぞれ $V_0(S_0)$，$V(S(t))$ とする
  - V_0 を構成しる質点を時刻 t で全て拾い上げる空間が V である．
  - Lagrange 記述では，V_0 を構成する質点と，V を構成する質点は 1 対 1 に対応することから他の質点の流入はないと考える．
- 質量保存則：
  - 位置 $\mathbf{x}$ における質量密度を $\rho(\mathbf{x})$ とする
  - 時刻の異なる，対応する閉空間での質量を比較すると，同一質点集団の和であることから

$$\int_{V(S(t))} \rho(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V = \int_{V_0(S_0)} \rho(\mathbf{x}_0)\,\mathrm{d}V_0 \tag{4}$$

となり質量が保存する．ここでは生成消滅が起こらないことを原理として要請する．

1.4.1. Lagrange 記述による質量保存則と連続の式 (2)

- ヤコビアン：

$$J := \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{03}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{03}} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{03}} \end{vmatrix} \tag{5}$$

による変数変換により，$\mathrm{d}V = J\,\mathrm{d}V_0$ となるため，式 (19) は

$$\int_{V(S(t))} \rho(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V = \int_{V_0(S_0)} \rho(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t))J\,\mathrm{d}V_0 = \int_{V_0(S_0)} \rho(\mathbf{x}_0)\,\mathrm{d}V_0 \tag{6}$$

- これより，被積分関数を比較することで，関係式

$$\boxed{\rho(\mathbf{x})\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} = \rho(\mathbf{x}_0)} \tag{7}$$

を得る．この関係式を Lagrange 記述における「質量に関する連続の式（連続方程式）」（質量保存則の微分形式）という．

1.4.2. Euler 記述による質量保存則と連続の式

♣ Euler 記述による質量保存則と連続の式

- 以下，前節の Lagrange 記述における連続の式の別表現を（Euler 記述により）議論する．
- ここでは，「固定」閉曲面 S とそれに囲まれた閉区間 $V(S)$ を考える．
- この閉区間における，質量の単位時間あたりの流入量は

$$\underbrace{-\int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S}_{\text{流入量}} \tag{8}$$

である．ここで，$\mathbf{n}$ は微小面 $\mathrm{d}S$ の法線ベクトルである．

1.4.2. Euler 記述による質量保存則と連続の式 (2)

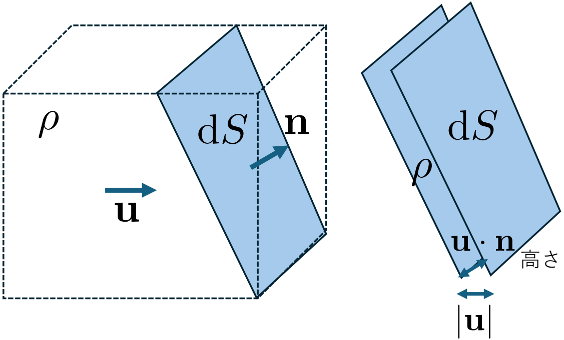

図 3: 微小固定面 dS を単位時間あたり通過（流出）する質量は $\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S$ となる．ここで $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$ は dS を底面とする柱体の高さ．

1.4.2. Euler 記述による質量保存則と連続の式 (3)

- いま，質量保存則が成り立つならば，$V(S)$ における全質量の時間変化量と表面 S における単位時間あたりの流入量が等しくなる（つまり生成消滅が起こらない）ので

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\,\mathrm{d}V = -\int_S \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S} \tag{9}$$

となる．

- さらに，Gauss の発散定理より

$$-\int_S \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = -\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{u})\,\mathrm{d}V \tag{10}$$

となるので，被積分関数を比較し移項することで，以下の微分形式の関係式

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0} \tag{11}$$

を得る．これを Euler 記述における質量に関する連続の式という．

1.4.3. Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係

♣ Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係

- Euler 記述における連続の式で出てきた以下の式は

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \left(u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \\
&= \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

である．

1.4.3. Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係 (2)

- よって，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \rho + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{13}$$

であるので，Lagrange 微分を用いて表すと連続の式は

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0} \tag{14}$$

となる．

- さらに，連続体の密度が時間に対して変化しない条件（非圧縮条件）は

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{15}$$

である．このことから，

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0} \tag{16}$$

を非圧縮条件の式という．

1.4.3. Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係 (3)

- 最後に，例題 1 により，Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係を議論する．

例題 1

Lagrange 記述における連続の式

$$\rho(\mathbf{x})\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} = \rho(\mathbf{x}_0) \tag{17}$$

と，Euler 記述における連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{18}$$

が等価であることを示せ．

1.4.3. Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係 (4)

（解答）与式は，

$$\rho(\mathbf{x})J = \rho(\mathbf{x}_0) \tag{19}$$

である．いま，$\mathbf{x}_0$ を定数とし両辺に $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ を施すと，

$$J\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\frac{\mathrm{D}J}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{20}$$

1.4.3. Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係 (5)

を得る．ここで

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}J}{\mathrm{D}t} &= \frac{\partial(\dot{x}_1, x_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} + \frac{\partial(x_1, \dot{x}_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} + \frac{\partial(x_1, x_2, \dot{x}_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} \\
&= \left\{ \frac{\partial(\dot{x}_1, x_2, x_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} + \frac{\partial(x_1, \dot{x}_2, x_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} + \frac{\partial(x_1, x_2, \dot{x}_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \right\} \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} \\
&= \left(\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} \right) J \\
&= (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) J
\end{aligned} \tag{21}
$$

となる．ここでは，

$$
\frac{\partial(\dot{x}_1, x_2, x_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} \tag{22}
$$

1.4.3. Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係 (6)

となることを用いた。よって，式 (20) は，式 (21) から，

$$J\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u})J = 0 \tag{23}$$

であるので，両辺を J で割ることで，

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) = 0 \tag{24}$$

を得る．ここで，Lagrange 微分を Euler 微分で書くと

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho \tag{25}$$

であるので，これを式 (24) に代入すると

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho + \rho(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) = 0 \tag{26}$$

1.4.3. Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係 (7)

を得る．これを整理すると，Euler 形式の連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{27}$$

を得る．

第 1 回講義資料目次

1.5. まとめ

- 連続体の基本概念を導入した。
- 連続体における Lagrange 記述および Euler 記述について導入した。
- 質量保存原理から質量に関する連続の式を導出した。

次回：連続体にかかる力と応力テンソル