連続体力学 第7回
流体の基礎方程式

川﨑猛史

大阪大学 D3 センター/ 大学院理学研究科物理学専攻

Last update：December 1, 2025

第 7 回講義資料目次

第7回講義資料目次

7.1. 講義のスケジュール

1. 10/6：第 1 回
2. 10/20：第 2 回
3. 10/27：第 3 回
4. 11/5**(水)**：第 4 回
5. 11/17：第 5 回 **(11/10 は休講)**
6. 11/26**(水)**：第 6 回
7. 12/1：第 7 回
8. 12/8：第 8 回
9. 12/15：第 9 回
10. 12/22：第 10 回
11. 1/5：第 11 回
12. 1/15**(木)**：休講
13. 1/19：第 12 回
14. 1/26：第 13 回
15. 2/2 ： 第 14 回 期末試験（予定）

第 7 回講義資料目次

7.2. 流体力学

- 今回から流体力学を扱う．流体とは，液体や気体のような容易に変形する連続体を指す．流体も微視的には原子・分子の集合体であるため，力学的エネルギーや運動量の保存則が成り立つ．
- 第 2 回で導いた連続体の一般的な運動方程式（運動量保存則）において，応力テンソルに流体特有の構成則を適用することで，流体力学の基礎方程式を得ることができる．
- なお，今回より **Einstein 縮約**を用いる．同じ添え字が 2 度現れる場合，その添え字について和を取ることを意味する：

$$\boxed{\sum_i a_i b_i \to a_i b_i, \quad \sum_k E_{kk} \to E_{kk}.} \tag{1}$$

これにより数式表記が簡潔になるが，慣れないうちは和の取り忘れに注意すること．

7.2.1. 流体の構成則

♣ 流体の構成則

- まず，$\boxed{\text{静止状態にある流体}}$を考える．流体が静止状態で「形状」を維持するためには外から圧力で押さえつける必要がある．実際，水中などにおいて水圧がかかることからも我々は経験的に知っている．つまり静止流体に働く応力は

$$\boxed{P_{ij} = P_{ij}^{\mathrm{st}} = -p\delta_{ij}} \tag{2}$$

となる（第 2 回でも応力テンソルの例として少し扱った）．
- $-p\delta_{ij}$ は，等方テンソル（第 4 回 4.3.2. 参照）であり，等方的に外から内側に向けて p の大きさの応力（圧力）が，連続体にかかることを意味する．

7.2.1. 流体の構成則 (2)

- 次に，流体に歪み速度がかかる動的状況を考える．
- 弾性体においては，歪みに比例した応力が生じる Hooke の法則により応力の構成方程式が記述される．これに対して，動的な流体においては，静水圧に加え，歪み速度に比例した応力（粘性応力）：

$$P_{ij}^{\mathrm{vis}} = G_{ijkl}\dot{E}_{kl} \tag{3}$$

が生じる（**Newton の粘性法則**）．ここで G_{ijkl} は粘性率テンソル，$\dot{E}_{kl}$ は歪み速度テンソルあり

$$\dot{E}_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \tag{4}$$

となる (歪み速度は第 6 回の Navier 方程式の導出でも出てきた)．式 (3) における kl については **Einstein** 縮約により和をとることに注意せよ．

- これより，動的な流体に作用する全応力テンソルは，

$$\boxed{P_{ij} = P_{ij}^{\mathrm{st}} + P_{ij}^{\mathrm{vis}} = -p\delta_{ij} + G_{ijkl}\dot{E}_{kl}} \tag{5}$$

7.2.1. 流体の構成則 (3)

- また多くの流体は**等方的**である．等方的流体では，第 4 回で学んだ弾性率テンソルの対称性と同様の議論により，粘性率テンソルの $\boxed{\text{独立成分は 2 つに縮約}}$ され，

$$G_{ijkl} = \zeta\delta_{ij}\delta_{kl} + \eta(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{6}$$

となる．ここで，η を剪断粘性係数（第 1 粘性係数），ζ を第 2 粘性係数という．（考え方は弾性体の時の議論と全く同じ）

- これを式 (5) に代入すると，構成方程式は

$$\boxed{P_{ij} = (-p + \zeta\dot{E}_{kk})\delta_{ij} + 2\eta\dot{E}_{ij}} \tag{7}$$

となる．ここで $\dot{E}_{kk} = \dot{E}_{11} + \dot{E}_{22} + \dot{E}_{33}$ は **Einstein 縮約による**ことに注意せよ．

7.2.1. 流体の構成則 (4)

- 式 (4) より

$$\dot{E}_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} \quad (= \mathrm{div}\ \mathbf{u}) \tag{8}$$

であるので，構成方程式は

$$\boxed{P_{ij} = (-p + \zeta \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u})\delta_{ij} + 2\eta \dot{E}_{ij}} \tag{9}$$

と表される．

- これをもとに，具体的な流体の流れと応力の関係について，以下の例題を通して概観しよう．

7.2.1. 流体の構成則 (5)

例題 7-1：剪断流の構成関係

流体の構成関係は，Newton の法則により

$$P_{ij} = (-p + \zeta \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}) \delta_{ij} + 2\eta \dot{E}_{ij} \tag{10}$$

と書ける．いま，変形勾配テンソルの時間微分（変形勾配速度テンソル）が

$$\dot{D}_{12} = \dot{\gamma}, \qquad \text{その他の成分は } 0 \tag{11}$$

である流体場を考える．ここで，座標原点での流体の速度場は $\mathbf{0}$ であるとする．このとき以下の各問いに答えよ．なお，この設定は，容器の上部を接線方向に応力をかける剪断流をかける状況に対応する **(図 1)**．連続体は各辺が $[0, L]$ の立方体領域を考えよ．

(1) 任意の点 (x_1, x_2, x_3) における速度 $\mathbf{u}$ を求めることで，連続体にどのような流れが生じているか図示せよ．ただし，座標原点において流体は静止しているものとする．

(2) 歪み速度テンソル $\dot{\mathsf{E}}$ と回転速度テンソル $\dot{\mathsf{F}}$ を求めよ．考え方は歪みと同様に $\dot{\mathsf{D}} = \dot{\mathsf{E}} + \dot{\mathsf{F}}$ である．

(3) 本系の応力と歪み速度の関係を η，$\dot{\gamma}$ を用いて表せ．

7.2.1. 流体の構成則 (6)

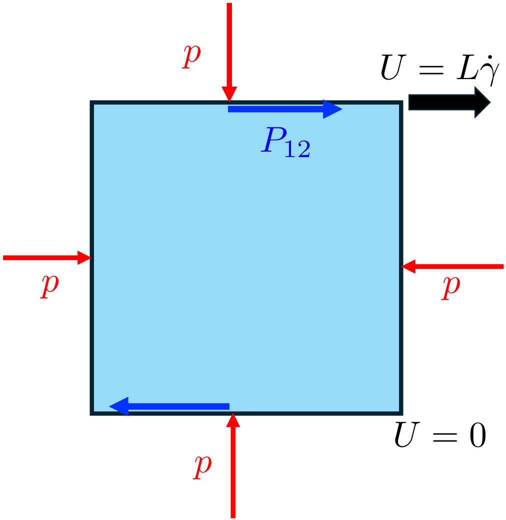

図 1: 例題 7-1 の問題設定．連続体の上面 (x_2 軸に垂直な面) の接線方向 (x_1 方向) に応力を加え，上面に $U = L\dot{\gamma}$ を速度で滑らせる．ここで底面での速度は 0 である．

7.2.1. 流体の構成則 (7)

解答

(1) 与えられた変形勾配速度テンソルは

$$\dot{\mathsf{D}} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

これは速度勾配

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \dot{\gamma}, \qquad \text{他は } 0$$

が与えられていることを意味する．上式を，境界条件を考慮して，x_2 に関して積分すると，速度場は

$$\mathbf{u} = (\dot{\gamma} x_2,\, 0,\, 0)$$

となり，「単純剪断流 (simple shear)」であることがわかる (図 **2**)．

7.2.1. 流体の構成則 (8)

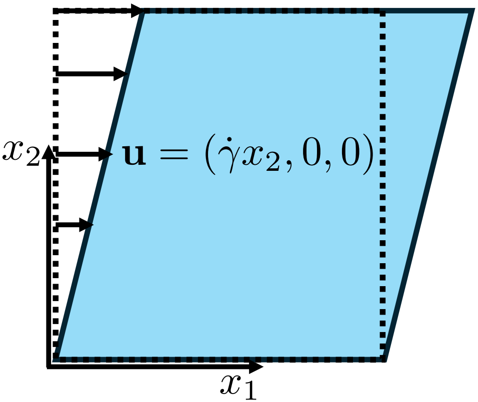

図 2: $\mathbf{u} = (\dot{\gamma}x_2,\ 0,\ 0)$ の流れ場をもつ単純剪断.

7.2.1. 流体の構成則 (9)

(2) 変形勾配速度テンソルの対称・反対称分解より

$$\dot{\mathsf{E}} = \frac{1}{2}\left(\dot{\mathsf{D}} + \dot{\mathsf{D}}^{\mathrm{T}}\right), \quad \dot{\mathsf{F}} = \frac{1}{2}\left(\dot{\mathsf{D}} - \dot{\mathsf{D}}^{\mathrm{T}}\right).$$

計算すると

$$\dot{\mathsf{E}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \\ \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\mathsf{F}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \\ -\frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.2.1. 流体の構成則 (10)

(3) 歪み速度テンソルの対角項は全て 0（$\mathrm{Tr}\mathsf{E} = E_{kk} = 0$) であるので，構成関係 (10) は

$$P_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\eta\,\dot{E}_{ij}$$

となる．
歪み速度テンソルの非零成分は

$$\dot{E}_{12} = \dot{E}_{21} = \frac{\dot{\gamma}}{2}.$$

したがって剪断応力は

$$\boxed{P_{12} = P_{21} = \eta\dot{\gamma}},$$

$$\boxed{P_{11} = P_{22} = P_{33} = -p}$$

である．したがって，応力テンソルは

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} -p & \eta\dot{\gamma} & 0 \\ \eta\dot{\gamma} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

7.2.1. 流体の構成則 (11)

Newton の粘性法則 (Newton 1687)・(Stokes 1845)

平行平板間の粘性流体において，上面に力を加えて一定速度で滑らせる場合，剪断応力は

$$P_{12} = P_{21} = \eta\dot{\gamma} = \eta\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} \tag{12}$$

で表される．ここで η は粘性率，$\dot{\gamma} = \mathrm{d}U/\mathrm{d}y$ は剪断率（速度勾配）である．
これが Newton の粘性法則（1687 年『プリンキピア』）における最も基本的な構成関係式である．
この関係をより一般的な 3 次元流に拡張すると，粘性応力テンソル [Stokes (1845)] は

$$P_{ij}^{\mathrm{vis}} = G_{ijkl}\dot{E}_{kl} \tag{13}$$

と表される．

7.2.2. 流体の支配方程式

♣ 流体の支配方程式

- 本節では，流体の運動方程式を導出する．
- 連続体に対する一般的な運動方程式は，第 2 回で扱ったように，連続体の微小要素を粒子集合とみなし，各粒子の運動方程式を重心運動としてまとめることで

$$\boxed{\rho\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathsf{P}+\mathbf{K}} \tag{14}$$

と与えられる．ここで，$\mathbf{u}$，P，$\mathbf{K}$ は，それぞれ時刻 t における位置 $\mathbf{x}$ での速度場，応力テンソル（面積力），外力（体積力）を表す．

- いま，これの i 成分を考えると

$$\boxed{\rho\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}+K_i} \tag{15}$$

と表される．

7.2.2. 流体の支配方程式 (2)

- 前節で求めた流体の構成関係式：

$$P_{ij} = \left(-p + \zeta \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) \delta_{ij} + 2\eta \dot{E}_{ij} \tag{16}$$

を代入して，運動方程式における応力テンソルの発散 $\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}$ を計算する．

- 第 1 項の寄与：

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(-p + \zeta \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) \delta_{ij}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \zeta \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \zeta \frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) \tag{17}$$

- 第 2 項の寄与：

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[2\eta \dot{E}_{ij}] = 2\eta \frac{\partial \dot{E}_{ij}}{\partial x_j} \tag{18}$$

ここで，歪み速度テンソルの定義より

7.2.2. 流体の支配方程式 (3)

$$\frac{\partial \dot{E}_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}^2 u_i + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) \tag{19}$$

- したがって，

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \zeta\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) + \eta\boldsymbol{\nabla}^2 u_i + \eta\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\zeta+\eta)\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) + \eta\boldsymbol{\nabla}^2 u_i \end{aligned} \tag{20}$$

- これを式 (15) に代入すると，等方流体の運動方程式の成分形は：

$$\rho\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\zeta+\eta)\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) + \eta\boldsymbol{\nabla}^2 u_i + K_i \tag{21}$$

7.2.2. 流体の支配方程式 (4)

- これをベクトル形式で表すと，等方流体の運動方程式（**Navier-Stokes 方程式**）：

$$\boxed{\rho\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} = -\boldsymbol{\nabla}p + (\zeta+\eta)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) + \eta\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u} + \mathbf{K}} \tag{22}$$

が得られる．ここで，$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}$ である．

- Lagrange 微分を Euler 微分を用いて書けば

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}\right) = -\boldsymbol{\nabla}p + (\zeta+\eta)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) + \eta\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u} + \mathbf{K}} \tag{23}$$

となる．流体力学では基本的にこの方程式を解く問題に帰着する（液晶のような非等方な流体の場合，より複雑になるが）．

7.2.3. 非圧縮粘性流体の支配方程式

♣ 非圧縮粘性流体の支配方程式

- 液体状の流体は $\boxed{\text{非圧縮条件}}$

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0} \tag{24}$$

を満たすことが多い (第 1，2 回参照：質量密度の連続の式の Lagrange 形式：$\frac{D\rho}{Dt} = \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$ から).

- これを運動方程式に粘性応力を代入すると，非圧縮性条件下における Navier-Stokes 方程式は

$$\boxed{\rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} = -\boldsymbol{\nabla} p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{K}} \tag{25}$$

7.2.3. 非圧縮粘性流体の支配方程式 (2)

- Euler 微分を用いて書けば：

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}\right)=-\boldsymbol{\nabla}p+\eta\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u}+\mathbf{K}} \tag{26}$$

を得る．特に，$\boxed{\nu=\eta/\rho \text{ を動粘性率}}$ とおよび，式 (26) の両辺を ρ で割ることにより，非圧縮粘性流体の基礎方程式は

$$\boxed{\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}\right)=-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p+\nu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u}+\frac{1}{\rho}\mathbf{K}} \tag{27}$$

などと表現される．

7.2.4. 非圧縮粘性流体の流れ

♣ 非圧縮粘性流体の流れ

- 非圧縮粘性流体の基本的な流れについて，解析解が得られる代表的な例を例題形式で考察する．

例題 7-2：1 方向の流れ

流体の流線（速度ベクトル場）が常に x_1 軸方向を向く場合（管中の流れ）を考える．流体は非圧縮であり，動粘性係数を ν，静水圧を p とし，その他の外力は無視する．以下の問いに答えよ．

(1) 速度場 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ に対し，非圧縮条件から得られる制約を求めよ．

(2) 1 方向流れの条件 $u_2 = u_3 = 0$ のもとで，運動方程式を導け．

(3) 圧力場 p に関する条件を求めよ．

7.2.4. 非圧縮粘性流体の流れ (2)

解答

(1) 連続の式から非圧縮条件は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \tag{28}$$

である．1 方向流れ（$u_2 = u_3 = 0$）を代入すると

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \tag{29}$$

である．したがって

$$u_1 = u_1(x_2, x_3, t) \tag{30}$$

となり，u_1 は x_1 には依存せず，x_2，x_3 の関数であることがわかる．

7.2.4. 非圧縮粘性流体の流れ (3)

(2) Navier - Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \nu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u}, \tag{31}$$

における x_1 成分は

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu\boldsymbol{\nabla}^2 u_1. \tag{32}$$

である．1 方向流れの条件と式 (29) から

$$u_2 = u_3 = 0, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0.$$

さらに

$$\boldsymbol{\nabla}^2 u_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}. \tag{33}$$

7.2.4. 非圧縮粘性流体の流れ (4)

以上を (32) に代入すると

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right). \tag{34}$$

(3) 運動方程式（Navier – Stokes 方程式）の x_2，x_3 成分は，1 方向流れの条件

$$u_2 = u_3 = 0$$

を代入すると，それぞれ

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2}, \qquad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3}. \tag{35}$$

これを整理すると

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0. \tag{36}$$

7.2.4. 非圧縮粘性流体の流れ (5)

すなわち，圧力 p は横方向座標 x_2, x_3 に依存しない。このことは，流れが常に x_1 方向へ平行である（＝流線に曲がりがない）ため，流体内部で側方向の力の不均衡が生じ得ないことを意味する。
以上より，圧力は x_1 と t のみの関数であり，

$$p = p(x_1, t). \tag{37}$$

物理的には，この結果は「1 方向流れでは，流れ方向以外の方向に圧力勾配が存在しない」ことを示す。たとえば Poiseuille 流れ（平行平板間の粘性流）など，典型的な一方向流れでも $p = p(x_1)$ が成立する。

7.2.4. 非圧縮粘性流体の流れ (6)

例題 7-3：1 方向の定常流　（クエット流）

つぎに，例題 7-2 をさらに限定した場合について考える．速度場と圧力場は

$$\mathbf{u} = \big(u_1(x_2),\, 0,\, 0\big), \qquad p = p(x_1) \tag{38}$$

とし，流れは定常（$\partial/\partial t = 0$）であると仮定する．

(1) 上の仮定のもとで，定常 1 方向流に対する運動方程式を導け．

(2) x_2 方向に垂直な 2 枚の平板 $x_2 = 0$，$x_2 = H$ に挟まれた粘性流体の流れを考える．平板は x_1 方向に十分広いとみなし，境界条件として以下の場合を考える：下側平板 $x_2 = 0$ は静止，上側平板 $x_2 = H$ は速度 U で x_1 方向に一様に運動し，x_1 方向の圧力勾配は

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \tag{39}$$

であるとする．さらに，境界の速度場は，no-slip 境界条件（壁と隣接する流体は壁と同じ速度で運動する）として，

$$u_1(0) = 0, \qquad u_1(H) = U \tag{40}$$

が成り立つものとする．この場合について，速度分布 $u_1(x_2)$ を求めよ．

7.2.4. 非圧縮粘性流体の流れ (7)

解答

(1) Navier – Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \nu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{u} \tag{41}$$

に対し，仮定 (38) と定常条件

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{0} \tag{42}$$

を用いる．
まず対流項は

$$(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = u_1(x_2)\,\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} = \mathbf{0}, \tag{43}$$

となる（u_1 は x_2 のみの関数なので，$\partial \mathbf{u}/\partial x_1 = 0$）．

7.2.4. 非圧縮粘性流体の流れ (8)

したがって x_1 成分の方程式は

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \boldsymbol{\nabla}^2 u_1. \tag{44}$$

$u_1 = u_1(x_2)$ より

$$\boldsymbol{\nabla}^2 u_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}, \tag{45}$$

となるので，

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x_1} + \nu \frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}x_2^2}. \tag{46}$$

これが定常 1 方向流に対する運動方程式である．

7.2.4. 非圧縮粘性流体の流れ (9)

(2) 題意より，圧力勾配がゼロ：

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \tag{47}$$

なので，式 (46) は

$$\nu \frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}x_2^2} = 0 \tag{48}$$

となる．
2 回積分して

$$u_1(x_2) = C_1 x_2 + C_2 \tag{49}$$

を得る．
境界条件は

$$u_1(0) = 0, \qquad u_1(H) = U \tag{50}$$

であるから，

$$C_2 = 0, \qquad C_1 H = U \to C_1 = \frac{U}{H}. \tag{51}$$

7.2.4. 非圧縮粘性流体の流れ (10)

よって速度分布は

$$u_1(x_2) = \frac{U}{H} x_2 \tag{52}$$

となる．ここで，$\frac{U}{H}$ は例題 7-1 の $\dot{\gamma}$（速度勾配（剪断率）：shear rate）に当たる．そのため，流動場は，定性的に同一のものとなる．

- このような流動場を**クエット流 (Couette flow)** という．

第 7 回講義資料目次

7.3. まとめ

- Newton の法則をもとに，（等方）流体の構成関係式を導入した．
- 流体の支配方程式（運動方程式）である Navier-Stokes 方程式を導入した．
- 非圧縮条件下における流体を簡単な条件化で解いた (クエット流の導出)．

次回：レイノルズ相似則