

連続体力学 第13回 (最終回)

高 Reynolds 数流体：2次元非粘性流と複素関数論

川崎猛史

大阪大学 D3 センター / 大学院理学研究科物理学専攻

Last update : January 26, 2026

第 13 回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 2次元非粘性流

- 複素関数論の応用
- 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ
- 円柱まわりの流れ
- 回転する流体から円柱が受ける力：揚力

3 まとめ

第 13 回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 2次元非粘性流

- 複素関数論の応用
- 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ
- 円柱まわりの流れ
- 回転する流体から円柱が受ける力：揚力

3 まとめ

13.1. 講義のスケジュール

- | | | | |
|---|-------------------------|----|-----------------|
| 1 | 10/6：第 1 回 | 9 | 12/15：第 9 回 |
| 2 | 10/20：第 2 回 | 10 | 12/22：第 10 回 |
| 3 | 10/27：第 3 回 | 11 | 1/5：第 11 回 |
| 4 | 11/5(水)：第 4 回 | 12 | 1/15(木)：休講 |
| 5 | 11/17：第 5 回 (11/10 は休講) | 13 | 1/19：第 12 回 |
| 6 | 11/26(水)：第 6 回 | 14 | 1/26：第 13 回 |
| 7 | 12/1：第 7 回 | 15 | 2/2：第 14 回 期末試験 |
| 8 | 12/8：第 8 回 | | |

第 13 回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 2 次元非粘性流

- 複素関数論の応用
- 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ
- 円柱まわりの流れ
- 回転する流体から円柱が受ける力：揚力

3 まとめ

13.2. 2 次元非粘性流

- 前回の講義では、粘性を無視した Euler 方程式で記述される流れに対して、Lagrange の渦定理より、初期条件として渦なし条件を課せば、その後の時間発展においても流れは常に渦なしに保たれること、さらに、速度場に対する Helmholtz 分解を用いることで、渦なし条件のもとでは流体の運動は速度ポテンシャルを求める問題へと帰着することを学んだ。
- 本講義では、この結果を踏まえ、渦なし条件下における 2 次元の非粘性流体においては、当該理論を複素関数論を用いて極めて効率よく解析できることを示す。
- 2 次元の流れは前回の講義内容の特例に相当するが、問題の単純化と解析手法の豊富さにより、理論的にも応用的にもその利用価値はきわめて大きい。
- 実際、今日の複素関数論の発展の礎の一部は、このような流体解析とともに築かれてきたと言っても過言ではない。

13.2.1. 複素関数論の応用

♣ 複素関数論の応用

- ここでは、渦なし条件下における 2 次元非粘性流体の定常流れ $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ を考える.
- いま、点 A から点 P へ至る任意の経路に沿って、次の 2 つの線積分を定義する：

$$\Gamma(A \rightarrow P) = \int_A^P u_s \, ds, \quad (1)$$

$$\Psi(A \rightarrow P) = \int_A^P u_n \, ds. \quad (2)$$

ここで、流動場 \mathbf{u} のうち、経路に沿った接線方向成分を u_s 、法線方向成分を u_n とする.

- このとき、 $\Gamma(A \rightarrow P)$ は循環の一部を与え、 $\Psi(A \rightarrow P)$ は、経路 AP の左側から右側へ通過する流量を表す.

13.2.1. 複素関数論の応用 (2)

- 次に, Ψ の線素 ds に沿った微小変化を考えると, 式 (2) より

$$\underbrace{d\Psi = u_n ds}_{\text{式 (2) より}} = \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds \quad (3)$$

となる. ここで, 最右辺の式は $d\Psi = \nabla \Psi \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial \Psi}{\partial s} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds$ であることを用いた.

- また, 特に, 流線の方に ds を選べば常に $u_n = 0$ であるから $d\Psi = 0$ となる. したがって, Ψ が一定となる曲線は流線を表す. この関数 Ψ を **流れ関数** とよぶ.
- 次に, ds を座標微小変位 $dx_1 \mathbf{e}_1, dx_2 \mathbf{e}_2$ と選べば, それぞれ

$$d\Psi = -u_2 dx_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1, \quad (4)$$

$$d\Psi = u_1 dx_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_2 \quad (5)$$

を得る (図 1).

13.2.1. 複素関数論の応用 (3)

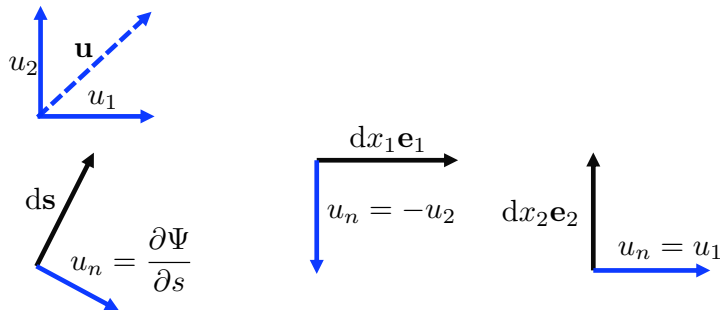


図 1: 線素と垂直な速度成分. 一般の座標変位 ds との関係 (左). ds を x_1 方向, x_2 方向に選んだ際 (右) これにより式 (4) および (5) が見出される.

13.2.1. 複素関数論の応用 (4)

- 一方、渦なしを仮定しているので、速度ポテンシャル Φ と流動場の関係は

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi$$

である。従って、

$$u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \quad (6)$$

$$u_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \quad (7)$$

となる。

- 以上より、式 (4) と (5) の結果を合わせて、速度場は次の 2 通りに表される：

$$u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, \quad (8)$$

$$u_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}. \quad (9)$$

13.2.1. 複素関数論の応用 (5)

- ここで複素関数

$$f = \Phi + i\Psi \quad (10)$$

および

$$z = x_1 + ix_2 \quad (11)$$

を定義すると、関係式 (8)(9) は、複素関数論における **Cauchy–Riemann (コーシー・リーマン) の関係式** に対応する．また、 f は z の解析関数であることを表す．

- このことから、以下のいくつかの性質が導かれることを、例題形式で確認しよう．

13.2.1. 複素関数論の応用 (6)

例題 13-1: 複素関数 f の諸性質

$f = \Phi + i\Psi$ および $z = x_1 + ix_2$ であるとき, 以下の各問に答えよ.

(1) 微分

$$\frac{df}{dz} = u_1 - iu_2 \equiv w \quad (12)$$

となることを示せ. w を 複素速度, f を 複素速度ポテンシャルとよぶ.

(2) 適当な周回経路 C に関する積分が

$$\oint_C w \, dz = \Gamma + iQ \quad (13)$$

となることを示せ. ここで, Γ は循環, Q は流量である.

(3) $\nabla\Phi$ と $\nabla\Psi$ が直交, すなわち, 等 Φ 線, および等 Ψ 線が直交することを示せ.

(解答)

13.2.1. 複素関数論の応用 (7)

- (1) f は z の解析関数であるから, z 微分は実部方向 x_1 の微分と等価である. また, Cauchy–Riemann の関係式 (8), (9) が成り立つので,

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = u_1 - i u_2 \quad (14)$$

を得る. したがって, (12) が示された.

- (2) 複素速度は $w = df/dz$ より,

$$\oint_C w dz = \oint_C \frac{df}{dz} dz = \oint_C df = \oint_C (d\Phi + i d\Psi) \quad (15)$$

である. ここで, 線素に対する接線ベクトル (単位ベクトル) $\mathbf{t} \propto (dx_1, dx_2)^T$ かつ $ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}$ を用いると, $(dx_1, dx_2)^T = \mathbf{t} ds$ であるので

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2 = u_1 dx_1 + u_2 dx_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} ds = u_s ds, \quad (16)$$

13.2.1. 複素関数論の応用 (8)

また，線素の法線ベクトル（単位ベクトル）は $\mathbf{n} \propto (dx_2, -dx_1)^T$ であるので， $(dx_2, -dx_1)^T = \mathbf{n} ds$ を用いると

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_2 = (-u_2) dx_1 + u_1 dx_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = u_n ds, \quad (17)$$

である．これらより式 (15) は

$$\oint_C w dz = \underbrace{\oint_C u_s ds}_{\text{循環}} + i \underbrace{\oint_C u_n ds}_{\text{流量}} \equiv \Gamma + iQ \quad (18)$$

となり，(13) が示された．

13.2.1. 複素関数論の応用 (9)

(3) 式 (8), (9) より

$$\nabla\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} \right) = (u_1, u_2), \quad \nabla\Psi = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}, \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} \right) = (-u_2, u_1).$$

したがって,

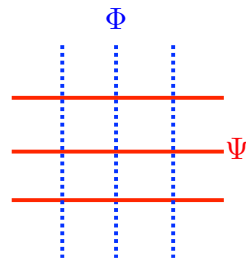
$$\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi = (u_1, u_2)^T \cdot (-u_2, u_1)^T = -u_1u_2 + u_2u_1 = 0 \quad (19)$$

となり, これらは, 直交することが分かる. すなわち, これらの勾配と垂直な速度ポテンシャル Φ の等値線と, 流れ関数 Ψ の等値線 (流線) は互いに直交する. このことから, 速度ポテンシャル線が流線と直交することもわかる.

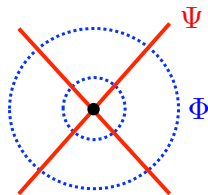
13.2.2. 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ

♣ 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ

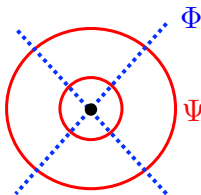
- 以下，複素速度ポテンシャルと簡単な流れについて見ていく．



例1
一様流



例2
湧き出し
(吸い込み)



例3
渦糸まわり

図 2: 以下扱う例における，等 Φ (ポテンシャル) 線と等 Ψ (流れ関数) 線 (流線)．

13.2.2. 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ (2)

例 1：一様流

U を実定数とする時，複素速度ポテンシャル

$$f = Uz \quad (20)$$

における流動場を考察せよ．また，速度ポテンシャルと流れ関数を求めよ．

■ 複素速度は

$$w = \frac{df}{dz} = U \quad (21)$$

である． $w = u_1 - iu_2$ であるので， $u_1 = U$ ， $u_2 = 0$ から， x_1 軸正の方向の一様流である．

13.2.2. 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ (3)

- また,

$$f = Ux_1 + iUx_2 = \Phi + i\Psi \quad (22)$$

であるので,

$$\Phi = Ux_1, \quad (23)$$

$$\Psi = Ux_2 \quad (24)$$

を得る.

- このとき,

$$u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = U, \quad u_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0 \quad (25)$$

となり, 確かに一様流であることが確認できる.

13.2.2. 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ (4)

例 2：湧き出し・吸い込み
 m を実定数とする時

$$f = m \log z \quad (26)$$

における流動場を考察せよ．また，速度ポテンシャルと流れ関数，さらに循環，流度を求めよ．

■ 複素速度は

$$w = \frac{df}{dz} = \frac{m}{z} \quad (27)$$

である．したがって，

$$w = \frac{m}{x_1 + ix_2} = \frac{m(x_1 - ix_2)}{x_1^2 + x_2^2} \quad (28)$$

13.2.2. 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ (5)

いま, $w = u_1 - iu_2$ であるので,

$$u_1 = \operatorname{Re} w = \frac{mx_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad u_2 = -\operatorname{Im} w = \frac{mx_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad (29)$$

を得る. これは原点から (x_1, x_2) 方向への放射状に広がる流れを表す. そして, $m > 0$ のときは湧き出し, $m < 0$ のときは吸い込みを表す.

■ また,

$$z = re^{i\theta} \quad (30)$$

と書けば,

$$f = m \log z = m(\log r + i\theta) = \Phi + i\Psi \quad (31)$$

であるので, 速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\Phi = m \log r, \quad (32)$$

$$\Psi = m\theta \quad (33)$$

である.

13.2.2. 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ (6)

- 原点周りの半径 r の円周経路 C に関する循環と流度は

$$\Gamma + iQ = \oint_C \frac{df}{dz} dz = \oint_C \frac{m}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{m}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} im d\theta = 2\pi im \quad (34)$$

である．よって

$$\Gamma = 0, \quad (35)$$

$$Q = 2\pi m \quad (36)$$

であり，循環のない湧き出し流であることが分かる．

13.2.2. 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ (7)

例 3：渦糸 (点渦)

κ を実定数とする時

$$f = i\kappa \log z \quad (37)$$

における流動場を考察せよ．また，速度ポテンシャルと流れ関数，さらに循環，流度を求めよ．

■ 複素速度は

$$w = \frac{df}{dz} = i\kappa \frac{1}{z} \quad (38)$$

である．したがって，

$$w = i\kappa \frac{1}{x_1 + ix_2} = i\kappa \frac{x_1 - ix_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad (39)$$

13.2.2. 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ (8)

より, $w = u_1 - iu_2$ であるので,

$$u_1 = \operatorname{Re} w = \kappa \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad u_2 = -\operatorname{Im} w = -\kappa \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \quad (40)$$

を得る. これは原点のまわりを回転する流れを表す (図 3).

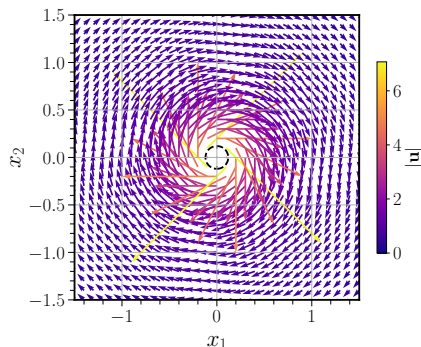


図 3: 例 3 に渦系まわりの流動場.

13.2.2. 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ (9)

■ また,

$$z = re^{i\theta} \quad (41)$$

と書けば,

$$f = i\kappa \log z = i\kappa(\log r + i\theta) = -\kappa\theta + i\kappa \log r = \Phi + i\Psi \quad (42)$$

であるので,

$$\Phi = -\kappa\theta, \quad (43)$$

$$\Psi = \kappa \log r \quad (44)$$

である.

■ このとき, 極座標での速度は

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (45)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{-\kappa}{r} \quad (46)$$

となる.

13.2.2. 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ (10)

- 等ポテンシャル，等流れ関数（流線）は

$$\Phi = \text{const.} \Rightarrow \underbrace{\theta = \text{const.}}_{\text{放射状}}, \quad \Psi = \text{const.} \Rightarrow \underbrace{r = \text{const.}}_{\text{同心円}}, \quad (47)$$

であり，等ポテンシャル線は放射状直線，流線は同心円となることがわかる．

- 原点周りの半径 r の円周経路 C の循環と流度は

$$\Gamma + iQ = \oint_C \frac{df}{dz} dz = \oint_C i\kappa \frac{1}{z} dz = 2\pi i(i\kappa) = -2\pi\kappa \quad (48)$$

である．よって

$$\Gamma = -2\pi\kappa, \quad (49)$$

$$Q = 0 \quad (50)$$

であり，流度を持たず循環のみを持つ渦流であることが分かる．

13.2.2. 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ (11)

- また次に示す通り，原点のみに渦度が存在し，それ以外の点はポテンシャル流として扱うことが可能である．
- それゆえにポテンシャル理論で渦の役割を考察する際に使われる有用なモデルである．

13.2.2. 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ (12)

渦なのにポテンシャル流として良いのか？：渦度の計算

点渦周りの流れは，原点以外では渦度が 0 であるので原点以外ではポテンシャル流である．

$$(\nabla \times \mathbf{u})_z = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (51)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\frac{2\kappa x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{2\kappa x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \quad (52)$$

$$\boxed{(\nabla \times \mathbf{u})_z = 0 \quad (x_1, x_2 \neq 0)} \quad (53)$$

解釈：原点以外に流体粒子を置くと，自身はつねに同じ方向を向きながら（自転せず），原点まわりで公転運動する（観覧車のカゴのイメージ）．この流動場に棒状の粒子を分散させた時の流れ：[動画リンク](#)

13.2.2. 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ (13)

例 4 : 2 重湧き出し流
 D を実定数とする時

$$f = -\frac{D}{z} \quad (54)$$

における流動場を考察せよ．また，速度ポテンシャルと流れ関数，さらに循環，流度を求めよ．

■ 複素速度は

$$w = \frac{df}{dz} = \frac{D}{z^2} \quad (55)$$

である． $z = x_1 + ix_2$ を代入すると，

$$w = \frac{D}{(x_1 + ix_2)^2} = \frac{D(x_1 - ix_2)^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{D(x_1^2 - x_2^2 - 2ix_1x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \quad (56)$$

13.2.2. 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ (14)

より，速度成分は

$$u_1 = \operatorname{Re} w = D \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad u_2 = -\operatorname{Im} w = D \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \quad (57)$$

を得る．

■ また， $z = re^{i\theta}$ と書けば，

$$f = -\frac{D}{re^{i\theta}} = -\frac{D}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) = -\frac{D \cos \theta}{r} + i \frac{D \sin \theta}{r} \quad (58)$$

であるので，速度ポテンシャル Φ と流れ関数 Ψ は

$$\Phi = -\frac{D \cos \theta}{r}, \quad \Psi = \frac{D \sin \theta}{r} \quad (59)$$

である．

13.2.2. 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ (15)

■ このとき,

$$\Phi = \text{const.} \Rightarrow r = c_1 \cos \theta, \quad \Psi = \text{const.} \Rightarrow r = c_2 \sin \theta$$

であり, 流線および等ポテンシャル線は, とともに原点で座標軸に接する円群となる (図 4).

13.2.2. 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ (16)

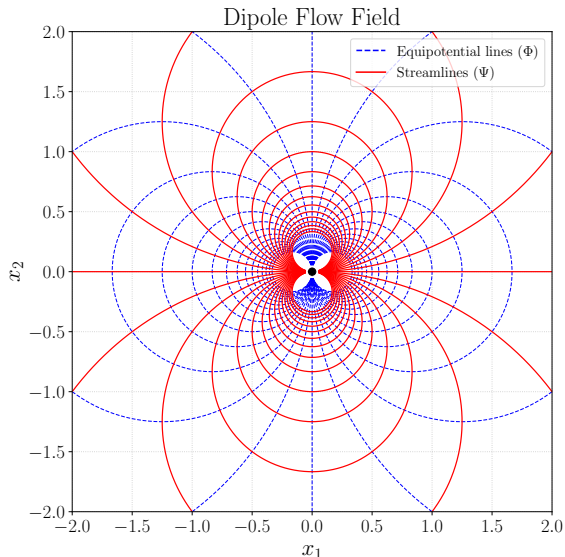


図 4: 例 4 における等ポテンシャルと流線.

13.2.2. 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ (17)

- 原点まわりの循環と流度は,

$$\Gamma + iQ = \oint_C \frac{df}{dz} dz = \oint_C \frac{D}{z^2} dz = 0 \quad (60)$$

である. よって

$$\Gamma = 0, \quad Q = 0 \quad (61)$$

となり, 原点以外に湧き出しも循環も持たないことが分かる.

13.2.2. 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ (18)

2 重湧き出しの導出：湧き出しと吸い込みの合体

点 $z = -\epsilon$ に強さ m の湧き出し，点 $z = \epsilon$ に強さ m の吸い込みを置くと，その複素ポテンシャルは次のように書ける：

$$f = m \log(z + \epsilon) - m \log(z - \epsilon) = m \log \left(\frac{z + \epsilon}{z - \epsilon} \right) \quad (62)$$

ここで， $|\epsilon/z| \ll 1$ とし， $\log(1+x) \approx x$ の近似を用いると，

$$f = m \left[\log \left(1 + \frac{\epsilon}{z} \right) - \log \left(1 - \frac{\epsilon}{z} \right) \right] \approx m \left(\frac{\epsilon}{z} - \left(-\frac{\epsilon}{z} \right) \right) = \frac{2\epsilon m}{z} \quad (63)$$

ここで，距離 $2\epsilon \rightarrow 0$ としつつ，強さとの積 $2\epsilon m$ を一定の定数 D に保つ極限をとれば，

$$\boxed{f = \frac{D}{z}} \quad (64)$$

が得られる（符号は湧き出しと吸い込みの左右配置に依存する）。

13.2.3. 円柱まわりの流れ

♣ 円柱まわりの流れ

- 次に、円柱周りの流れについて、複素関数論を用いて議論する.
- 前節で扱った、複素速度ポテンシャルの重ね合わせを考える.

13.2.3. 円柱まわりの流れ

例 5：一様流中に静止する円柱まわりの流れ
複素速度ポテンシャル

$$f = Uz + \frac{UR^2}{z} \quad (65)$$

を考える．このポテンシャルが $r = R$ とする円柱周りの流れを記述することを考察する．いま， $r = R$ の円環が分離境界 $u_r = 0$ となることを示せ．

■ $z = re^{i\theta}$ を与式に代入すると

$$f = Ure^{i\theta} + \frac{UR^2}{r}e^{-i\theta} = \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)Ur \cos \theta + i \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)Ur \sin \theta \quad (66)$$

となる．

13.2.3. 円柱まわりの流れ (2)

- よって，速度ポテンシャル Φ と流れ関数 Ψ は

$$\Phi = \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) Ur \cos \theta, \quad \Psi = \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) Ur \sin \theta \quad (67)$$

である．これより，極座標に関する速度を求めると

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = U \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \theta \quad (68)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -U \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \theta \quad (69)$$

- これより， $u_r = 0$ となるのは $r = R$ (θ 任意) であるので，分離境界は $r = R$ の円環であることがわかる．
- また，表面速度は $\theta = \pi/2$ では $u_\theta = -2U$ ， $\theta = 3\pi/2$ では $u_\theta = 2U$ である．これはいずれも x_1 軸の正方向へ $2U$ の速度の流れが生じていることを意味する．
- $\theta = 0, \pi$ では $u_\theta = 0$ であり，これらは淀み点となる．

13.2.3. 円柱まわりの流れ (3)

例 6：循環をともなう一般的な円柱まわりの流れ
複素速度ポテンシャル

$$f = Uz + \frac{UR^2}{z} + i\frac{\Gamma}{2\pi} \log z \quad (70)$$

を考える．このポテンシャルが $r = R$ とする円柱まわりの流れを記述することを示せ．また，循環 Γ の値による淀み点の変化を考察せよ．

- 例 5 で確認した通り，ポテンシャル $Uz + \frac{UR^2}{z}$ は $r = R$ において

$$u_r = 0$$

を与える．

13.2.3. 円柱まわりの流れ (4)

- また、追加項 $i\frac{\Gamma}{2\pi}\log z$ は点渦（例 3）に対応し、その速度成分は半径方向 $u_r = 0$ 、周方向

$$u_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (71)$$

である．

- したがって、これらを重ね合わせた与式の f も $r = R$ において

$$u_r = 0$$

を満たし、半径 R の円柱表面を分離境界とする流れを記述する．

- また、流れの定性的振る舞いは循環 Γ に強く依存する．まず、複素速度は

$$w = \frac{df}{dz} = U - \frac{UR^2}{z^2} + i\frac{\Gamma}{2\pi z} \quad (72)$$

である．

13.2.3. 円柱まわりの流れ (5)

- これより淀み点は $w = 0$ で与えられるので,

$$U - \frac{UR^2}{z^2} + i\frac{\Gamma}{2\pi z} = 0 \quad (73)$$

を満たす．これを整理することで，淀み点の位置は，

$$\frac{z}{R} = -\frac{i\Gamma}{4\pi UR} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi UR}\right)^2} \quad (74)$$

となる．

- これより，淀み点の位置は循環 Γ の大きさに応じて以下のように変化する（図 5）：
 - $\Gamma = 0$ ： $z = \pm R$ （円柱の前後．例 5 の結果と一致）．
 - $0 < \Gamma < 4\pi UR$ ：淀み点は円柱表面上を下方へ連続的に移動する．
 - $\Gamma = 4\pi UR$ ：淀み点は $z = -iR$ となり，2つの淀み点は円柱の下端で一致する．
 - $\Gamma > 4\pi UR$ ：円柱表面上に解は存在せず，淀み点は円柱表面から離れて流体中に現れる．

13.2.3. 円柱まわりの流れ (6)

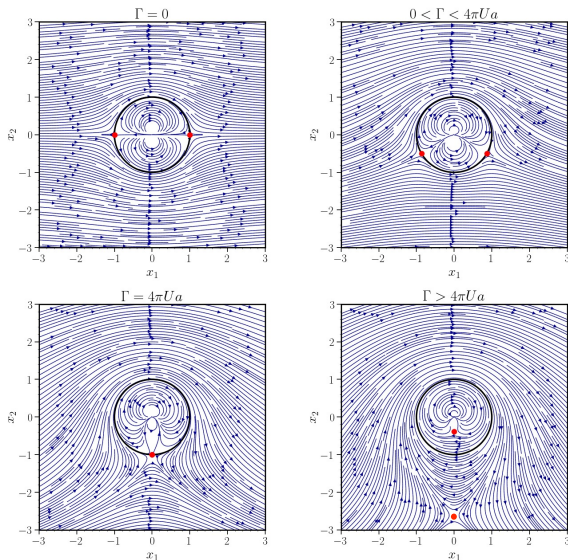


図 5: 例 6 における循環 Γ の値による流動場の変化.

13.2.3. 円柱まわりの流れ (7)

- このように循環 Γ を与えることにより，上下の流速差（圧力差）が生じ，円柱には揚力が作用する．この効果を マグヌス効果 とよぶ．

13.2.4. 回転する流体から円柱が受ける力：揚力

♣ 回転する流体から円柱が受ける力：揚力

- 最後に、例 6 の流れ場から円柱が受ける力を計算しよう．
- 原点まわりの半径 $r = R$ の円環を C とすると、前回と同様に円柱が受ける力は Cauchy 応力定理より

$$\mathbf{F} = \oint_C \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} ds \quad (75)$$

で与えられる．ここで、完全流体において応力テンソルは

$$P_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (76)$$

であるので、

$$\mathbf{F} = - \oint_C p \mathbf{n} ds \quad (77)$$

となる．

13.2.4. 回転する流体から円柱が受ける力：揚力 (2)

- 円柱表面の速度を \mathbf{u} , 圧力を p とし, 無限遠で速度 U , 圧力 p_∞ をもつ境界条件を考慮すると, Bernoulli の定理より

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2} (U^2 - \mathbf{u}^2) \quad (78)$$

を得る.

- また, 円柱表面での速度は θ 方向成分のみからなり, $r = R$ における例 3 および例 5 の結果を重ね合わせると

$$\mathbf{u}^2 = u_\theta^2 = \left(-2U \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 \quad (79)$$

となる.

13.2.4. 回転する流体から円柱が受ける力：揚力 (3)

- これを式 (78) に代入すると

$$\begin{aligned} p &= p_{\infty} + \frac{\rho}{2} \left[U^2 - \left(2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 \right] \\ &= \underbrace{\left(p_{\infty} + \frac{\rho}{2} U^2 + \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 R^2} \right)}_{c_0 \text{ とおく}} - \frac{\rho U \Gamma}{\pi R} \sin \theta - 2\rho U^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (80)$$

を得る.

13.2.4. 回転する流体から円柱が受ける力：揚力 (4)

- したがって、式 (77) から、 $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)^T$ かつ、 $ds = R d\theta$ と変数変換することで

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(-c_0 - \frac{\rho U \Gamma}{\pi R} \sin \theta - 2\rho U^2 \sin^2 \theta \right) \cos \theta R d\theta \\ &= 0 \end{aligned} \tag{81}$$

を得る．

13.2.4. 回転する流体から円柱が受ける力：揚力 (5)

■ 同様に

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(-c_0 - \frac{\rho U \Gamma}{\pi R} \sin \theta - 2\rho U^2 \sin^2 \theta \right) \sin \theta R d\theta \\ &= -R \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{\rho U \Gamma}{\pi R} \sin \theta \right) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\rho U \Gamma}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \rho U \Gamma \end{aligned} \tag{82}$$

を得る.

13.2.4. 回転する流体から円柱が受ける力：揚力 (6)

- 以上より、円柱に作用する力は

$$F_1 = 0, \quad F_2 = \rho U \Gamma \quad (83)$$

であり、 $F_1 = 0$ は抵抗力が 0 となる d'Alembert のパラドックス、 $F_2 = \rho U \Gamma$ は揚力を表し、これが循環に比例することがわかる．この結果を **Kutta–Joukowski**（クッタ– ジューコフスキー）の定理 とよぶ．

- この結果は航空機的设计などにも応用される（複素関数の等角写像を用いることにより、平板が受ける揚力なども計算できる）．

第 13 回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 2次元非粘性流

- 複素関数論の応用
- 複素速度ポテンシャルと簡単な流れ
- 円柱まわりの流れ
- 回転する流体から円柱が受ける力：揚力

3 まとめ

13.3. まとめ

- 2次元の非粘性・渦なし流れを，複素関数論を用いて解析した．
- これにより，物体まわりの流れ場および，それによって物体に作用する力を効率よく計算できることを示した．
- 特に，複素関数を用いることで，循環をともなう流れがもたらす力（揚力）を厳密に求めることができた．この結果は クッター- ジューコフスキーの定理 として知られている．
- 本講義で得られた結果は，航空力学の基礎をなすものである．