連続体力学 第2回
連続体に働く力と運動方程式

川﨑猛史

大阪大学 D3 センター/ 大学院理学研究科物理学専攻

Last update：October 26, 2025

第 2 回講義資料目次

第 2 回講義資料目次

2.1. 講義のスケジュール

1. 10/6：第 1 回
2. 10/20：第 2 回
3. 10/27：第 3 回
4. 11/5**(水)**：第 4 回
5. 11/17：第 5 回 **(11/10 は休講)**
6. 11/26**(水)**：第 6 回
7. 12/1：第 7 回
8. 12/8：第 8 回
9. 12/15：第 9 回
10. 12/22：第 10 回
11. 1/5：第 11 回
12. 1/15**(木)**：第 12 回
13. 1/19：第 13 回
14. 1/26：第 14 回
15. 2/2 ： 第 15 回 期末試験（予定）

第 2 回講義資料目次

2.2. 前回の復習

- 前回，Lagrange 微分と Euler 微分について扱った．
- 特に Lagrange 微分自体，あるいは Euler 微分を橋渡しする移流項の物理的意味についての質問や疑問を受けた．
- Lagrange 微分は変数の取り扱いがやや特殊であるので，改めて説明する．

2.2.1. Lagrange 微分の意味

♣ Lagrange 微分の意味

- 前回と同様，連続体中のスカラー量 A を考える．ただし，連続体ではこれを場の量として考えるため，一般には $A(\mathbf{x}, t)$ と書くのが好ましい．(前回はこれを $A(\mathbf{x}(t))$ と書いたが Lagrange 微分の際には正当化される．)
- 以下，Lagrange 微分と全微分の関係を議論する（厳密にはこれらは異なる）．
- まず，$A(\mathbf{x}, t)$ を全微分すると

$$\mathrm{d}A(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial A}{\partial t}\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i \tag{1}$$

2.2.1. Lagrange 微分の意味 (2)

である．両辺を微小量 $\mathrm{d}t$ で割る（常微分する）と

$$\frac{\mathrm{d}A(\mathbf{x},t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} A(\mathbf{x},t)\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

となる．

- ここでの全微分は，$\mathbf{x}$ と t を独立変数とする数学的操作である．したがって，$\mathrm{d}\mathbf{x}$ は任意の方向に取りうる．
- つまり，$A(\mathbf{x},t)$ のような場の変数においては，全微分における $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$ は必ずしも流れの速度 $\mathbf{u}$ ではなく，任意の速度ベクトルである．

2.2.1. Lagrange 微分の意味 (3)

- 一方，Lagrange 微分では $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{u}$ と流体粒子の速度に固定されるため，

$$\frac{\mathrm{D}A}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} A \tag{3}$$

  となり，流体粒子に随伴した変化率を表す．
- **Lagrange 微分は，必ず連続体の流れの方向の変化を追う**ため，粒子の軌跡 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ に沿って場の変数を $A(\mathbf{x}(t), t)$ あるいは簡略化して $A(\mathbf{x}(t))$ と書くことができる．
- このように，**Lagrange 微分は流体粒子の運動（流れの方向）に限定した全微分である**と言える．

2.2.2. 移流項

♣ 移流項

- Lagrange 微分と Euler 微分の差分

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} A \tag{4}$$

  は，定点から連続体粒子の流れによって移動した，単位時間あたりの A の変化である．
- このため，移流項と呼ばれる．
- Lagrange 記述（$\frac{\mathrm{D}A}{\mathrm{D}t}$）を考えると，常に流れの方向の変化を追っているので，移流が陽には生じない．
- これまでの質点系の力学との対応を考えると Lagrange 記述は大変便利である．

2.2.3. 連続の式と非圧縮条件

♣ 連続の式と非圧縮条件

- Lagrange 微分で質量保存則は

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = -\rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} \tag{5}$$

  であることを前回導いた．
- Lagrange 微分では移流が陽に生じないためここでの密度 ρ の変化は連続体の体積変化のみであり，この効果は $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = \mathrm{div}\,\mathbf{u}$（単位時間あたりの体積増加率）から生じる．
- 液体や固体の連続体は一般的に ρ の時間変化が小さく，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0$ つまり $\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0$ とおけることが多い．このような条件を非圧縮条件という．

2.2.3. 連続の式と非圧縮条件 (2)

- つまり，非圧縮条件のもとでの連続の式は

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{6}$$

となり，速度場の発散がゼロという条件に簡略化される．
- 注意：非圧縮条件は密度が空間に対して一定（$\rho(\mathbf{x}, t) =$ 一定）という意味ではなく，流体粒子に随伴した密度変化がない（$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0$）という意味である．したがって，非圧縮流体でも空間的に密度分布をもつことができる．
- 非圧縮流体でも空間的に密度分布をもつ例：
  - 混合流体：異なる液体の混合初期段階（例：水と油の相分離）

第 2 回講義資料目次

2.3. 連続体に働く力と運動

本節では，連続体に働く力について議論する．連続体力学では，力を以下の 2 つに分類する：

- 体積力（volume force）：外場（重力，電磁場など）や慣性力を起源とする体積に比例する力
- 面積力（応力）（stress）：連続体内部の相互作用を起源とする表面力

2.3.1. 体積力

♣ 体積力

- 体積力とは，連続体を構成する粒子に対して一様にかかる力であり，連続体の体積 V に比例する (図 **1**).

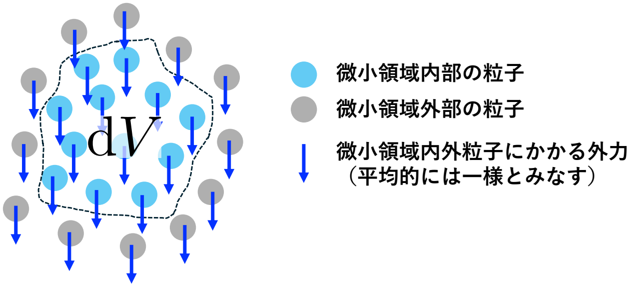

図 **1**: 点線で囲まれる体積 $\mathrm{d}V$ の連続体にかかる外力の和を考える．各粒子には平均的に一様な外力がかかるとすると，空間内での合力は体積に比例するため体積積分で表される．

2.3.1. 体積力 (2)

- したがって，連続体の位置 $\mathbf{x}$ において単位体積あたり $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ の外力が掛かっている際，体積 V の連続体全体にかかる力は，

$$\mathbf{F}_{\mathrm{B}} = \int_V \mathbf{K}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V \tag{7}$$

となる．

- 連続体の慣性力は，構成粒子に一様にかかるとみなす．これより，運動方程式の慣性項は，質量密度 ρ，および，常にに同じ構成粒子に注目するために Lagrange 微分を用いて，

$$\int_V \rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t}\,\mathrm{d}V \tag{8}$$

となる．

2.3.2. 面積力

♣ 面積力

- 体積 $\mathrm{d}V$ の連続体にかかる力の中で，構成粒子間の内力に起因した力を応力という（図 2 における領域内部の内力の合計）．

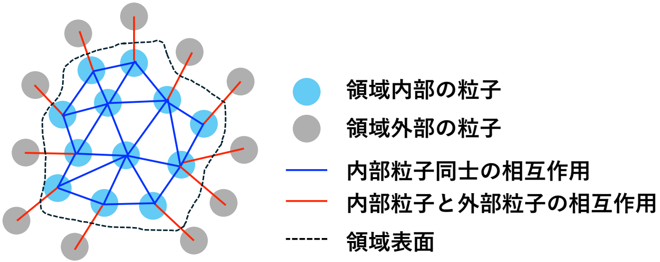

図 2: 点線で囲まれる体積 $\mathrm{d}V$ の連続体にかかる内力の和を考える．青線で示した相互作用力は領域内で相殺する．赤色で示した表面を貫く外部粒子との相互作用は領域内で外から受ける力のみが存在し相殺しない．このような相殺しない相互作用数は表面積に比例するため面積積分で表現される．

2.3.2. 面積力 (2)

- 連続体内部の粒子間の内力は，作用反作用の法則により相互作用ペア同士で相殺し **0** となる．
- ただし，考えている領域の表面を貫く相互作用は，領域内部にペアが存在しないため相殺しない．
- このような相殺しない力は，領域外部から受ける力であり表面積に比例する面積力となる．

2.3.2. 面積力 (3)

- 表面 S 上の位置 $\mathbf{x}$ における単位面積あたりの力を $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ とすると（$\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトル），連続体全体にかかる面積力は，

$$\mathbf{F}_\mathrm{S} = \int_S \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{n})\,\mathrm{d}S \tag{9}$$

となる．ここで $\mathbf{p}$ は応力ベクトル（stress/traction vector）と呼ばれる (図 **3**)．

- また作用反作用則により，外部の連続体が同一面を介して連続体内部から受ける力の大きさは等しく向きが逆であることから

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\mathbf{p}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}) \tag{10}$$

が成立する．

2.3.2. 面積力 (4)

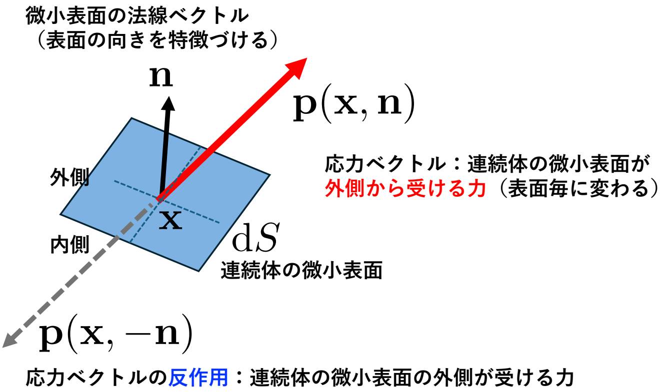

図 3: 微小面 $\mathrm{d}S$ に働く応力ベクトル $\mathbf{p}$．応力ベクトルは位置 $\mathbf{x}$，微小面の取り方（$\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$）に依存するため応力ベクトルは $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ となる．

2.3.3. 運動方程式

♣ 運動方程式

- 体積 V（対応する表面積 S）の連続体にかかる力を考えることで，Lagrange 記述（粒子描像）のもと，当該連続体の運動方程式を次のように構成できる：

$$\boxed{\int_V \rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t}\,\mathrm{d}V = \int_S \mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{n})\,\mathrm{d}S + \int_V \mathbf{K}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V} \tag{11}$$

2.3.3. 運動方程式 (2)

- 次に運動方程式の微分形式を考える．この際，Gauss の発散定理を用いて，面積力の面積積分を体積積分に変換したい．そのためには $\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$ という形が必要になる．
- 幸い，応力ベクトルは

$$\boxed{\mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{n}) = \mathsf{P}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}} \tag{12}$$

と分解できることが知られている（**Cauchy の応力定理: 例題 2-1**）．

- このとき $\mathsf{P}(\mathbf{x})$ は 3×3 行列であり，応力テンソル（**stress tensor**）と呼ばれる．
- テンソルとは，ベクトル・行列の一般的な総称である．ベクトルは 1 階テンソル，行列は 2 階テンソルである．

2.3.3. 運動方程式 (3)

- 応力テンソルの成分表示は

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}, \qquad p_i = \sum_{j=1}^{3} P_{ij} n_j \tag{13}$$

となる．

- 例えば，x_1 軸に垂直な面に働く応力ベクトルは

$$\mathsf{P} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathsf{P} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{pmatrix} \tag{14}$$

などとなる．ここで，$\mathbf{e}_1$ は x_1 軸に垂直な面の法線ベクトルである．

2.3.3. 運動方程式 (4)

- これより，応力テンソルの各成分は図 **4** のような単位立方体の表面に働く応力の各成分で構成されることがわかる．

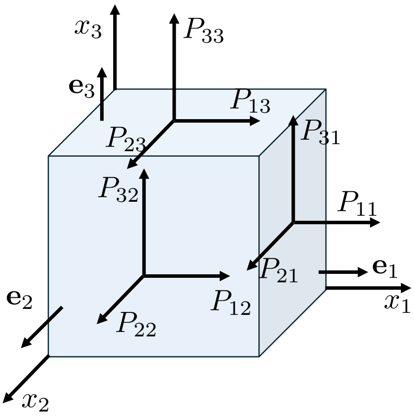

図 **4**: 各面に働く応力ベクトル．

2.3.3. 運動方程式 (5)

- 応力テンソルを用いることで，面積力は Gauss の発散定理により

$$\mathbf{F}_{\mathrm{S}} = \int_S \mathsf{P}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathsf{P}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}V \tag{15}$$

と書ける．これにより，運動方程式を微分形式で書くと

$$\boxed{\rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathsf{P} + \mathbf{K}} \tag{16}$$

となる．

2.3.3. 運動方程式 (6)

- なお，この運動方程式を成分で書くと

$$\boxed{\rho\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}+K_i} \tag{17}$$

となる．

- また，Lagrange 微分を Euler 微分で表すと

$$\boxed{\rho\left\{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}\right\}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathsf{P}+\mathbf{K}} \tag{18}$$

を得る．

2.3.3. 運動方程式 (7)

- 例として，応力テンソルが静水圧のみから構成される完全流体（粘性が無視できる流体）の場合

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p\,\mathbf{I} \tag{19}$$

を考える（p は圧力（静水圧），$\mathbf{I}$ は単位行列）．
さらに，重力 $\mathbf{K} = \rho\,\mathbf{g}$ を，運動方程式 (式 18) に代入すると，重力下完全流体の運動方程式：Euler 方程式

$$\boxed{\rho\left\{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}\right\} = -\boldsymbol{\nabla} p + \rho\,\mathbf{g}} \tag{20}$$

2.3.3. 運動方程式 (8)

を得る．ここで，応力テンソルを $P_{ij} = -p\,\delta_{ij}$ とすれば，ベクトル $\nabla \cdot \mathsf{P}$ の i 成分は

$$\underbrace{(\nabla \cdot \mathsf{P})_i}_{(\mathrm{div}\ \mathsf{P})_i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} P_{ij} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(-p\,\delta_{ij}) = -\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_i}}_{(\mathrm{grad}\ p)_i} \tag{21}$$

となり，圧力勾配になることがわかる．

- このように，応力テンソルの表式を変えることで，流体であったり弾性体であったり，多様な連続体の運動を記述できる．
- 以下，応力テンソルの導入において前提とした Cauchy の応力定理および運動方程式の別導出に関する例題を解いてみよ．

2.3.3. 運動方程式 (9)

例題 2-1：Cauchy の応力定理

連続体の表面に働く応力ベクトルは，連続体の代表的な位置 $\mathbf{x}$ と応力が働く適当な面の法線ベクトル $\mathbf{n}$ の関数として $\mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{n})$ と書ける．このとき，$\mathbf{n}$ に依存しない応力テンソル $\mathsf{P}(\mathbf{x})$ を用いて，

$$\mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{n}) = \mathsf{P}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n} \tag{22}$$

と表されることを示せ．

ヒント：x_1x_2 平面，x_2x_3 平面，x_3x_1 平面と平行な面をもつ四面体の微小体積要素を考え，全ての面にかかる応力の和が釣り合うことにより示すことができる (図 **5**)．微小体積要素が無限に小さいとすると，体積力 (外力・慣性力) は要素の長さの 3 乗に比例ため，長さの 2 乗に比例する面積力（応力）に比べて無視できるようになる．このため運動方程式から各面の応力ベクトルの和が釣り合うことがわかる．

2.3.3. 運動方程式 (10)

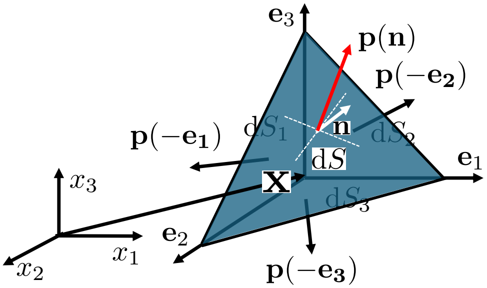

図 5: 位置 $\mathbf{x}$ にある，四面体状の微小連続体と各面に働く応力ベクトル．

2.3.3. 運動方程式 (11)

（解答）問題のヒントの通り，微小体積要素において，各面に働く応力の合力は 0 である．このことから以下の式が成り立つ：

$$\mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{n})\mathrm{d}S + \sum_{j=1}^{3}\mathbf{p}(\mathbf{x},-\mathbf{e}_j)\mathrm{d}S_j = \mathbf{0} \tag{23}$$

また，作用反作用則より $\mathbf{p}(\mathbf{x},-\mathbf{e}_j) = -\mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{e}_j)$ となる．これより，斜面の応力は

$$\mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{n})\mathrm{d}S = \sum_{j=1}^{3}\mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{e}_j)\mathrm{d}S_j \tag{24}$$

である．いま，各面 $\mathrm{d}S_j$ は幾何的に

$$\mathrm{d}S_j = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_j)\mathrm{d}S = n_j\mathrm{d}S \tag{25}$$

である (図 **6**).

2.3.3. 運動方程式 (12)

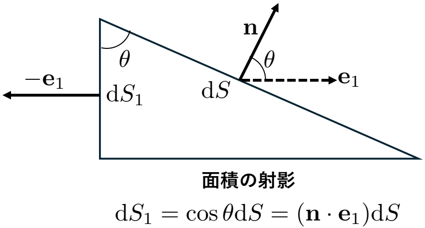

図 6: 各面の面積は射影により法線ベクトルで特徴づけられる．

これより，

$$\mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{n})\mathrm{d}S = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{e}_j) n_j \mathrm{d}S \tag{26}$$

いま，応力ベクトルの i 成分を考え，上記関係式の両辺を $\mathrm{d}S$ で割ると

$$p_i(\mathbf{x},\mathbf{n}) = \sum_{j=1}^{3} p_i(\mathbf{x},\mathbf{e}_j) n_j \tag{27}$$

2.3.3. 運動方程式 (13)

が得られる．ここで $p_i(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) =: P_{ij}(\mathbf{x})$ と置くと

$$p_i(\mathbf{n}) = \sum_{j=1}^{3} P_{ij}(\mathbf{x}) n_j \tag{28}$$

となり，P_{ij} は応力テンソルの成分であることがわかる．この応力テンソルは $\mathbf{n}$ とは独立である．これより，

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathsf{P}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \tag{29}$$

が得られた．

2.3.3. 運動方程式 (14)

例題 2-2：Euler 記述から運動方程式を求める

固定領域での定点観測である Euler 記述からも，運動量保存則から Lagrange 記述と矛盾しない運動方程式が導かれることを示せ．
（ヒント）Euler 記述では，固定空間の体積 V に作用した力積と，境界を通じて流入した運動量の合計が，その固定空間内の運動量の変化量に等しいという運動量保存の関係（運動量に関する連続の式）を i 成分に関してたてると，

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}}_{\text{単位時間あたりの運動量変化}} = \underbrace{-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho u_i \mathbf{u})}_{\text{運動量の流入}} + \underbrace{(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathsf{P})_i + K_i}_{\text{単位時間あたりに掛かった力積：力}} \tag{30}$$

となる． （追記補足：体積積分 $\int_V \mathrm{d}V$ の被積分関数が満たす式．）これに質量密度 ρ に関する連続の式 $\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{u})$ も併用することで，Lagrange 記述から求めた運動方程式が得られる．

2.3.3. 運動方程式 (15)

（解答）
運動量保存則左辺：

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = \rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{31}$$

である．
運動量保存則右辺流入項：

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho u_i \mathbf{u}) &= -\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) \\ &= -\sum_{j=1}^{3}\left(u_i u_j\frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) \end{aligned} \tag{32}$$

2.3.3. 運動方程式 (16)

これより，式 (30) に式 (31) と式 (32) を代入すると，

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_i\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\sum_{j=1}^{3}\left(u_iu_j\frac{\partial \rho}{\partial x_j}+\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\rho u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathsf{P})_i+K_i \tag{33}$$

整理すると，

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}&=-u_i\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}u_j\frac{\partial \rho}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{3}\rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)\\&\quad+(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathsf{P})_i+K_i\\&=-u_i\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{u})\right)+(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathsf{P})_i+K_i\end{aligned} \tag{34}$$

2.3.3. 運動方程式 (17)

ここで連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{35}$$

を用いると，括弧内の項が 0 となり，

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathsf{P})_i + K_i \tag{36}$$

を得る．これをベクトル形式で書くと

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \mathbf{u} \right) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathsf{P} + \mathbf{K} \tag{37}$$

が得られる．これは Lagrange 微分を用いて

$$\rho \frac{\mathrm{D} \mathbf{u}}{\mathrm{D} t} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathsf{P} + \mathbf{K} \tag{38}$$

2.3.3. 運動方程式 (18)

と書け，Lagrange 記述から求めた運動方程式と一致する．

第 2 回講義資料目次

2.4. まとめ

- Lagrange 微分について復習した。
- 連続体にかかる体積力，面積力の起源について議論した。
- 連続体の運動方程式を導いた。
- 応力テンソルを静水状態を仮定することで，完全流体の運動方程式：Euler 方程式を導いた。

次回：応力テンソルと歪みテンソル

第 2 回講義資料目次

2.5. 補遺：Gauss の発散定理

ベクトル $\mathbf{u}$ に関する Gauss の発散定理

$$\int_S \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathrm{d}V \tag{39}$$

を示す．（注：$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}$）

- 微小体積要素 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$ におけるベクトル $\mathbf{u}$ の流出量は $\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathrm{d}V$ である．(cf: x_1 方向からの流出量 $\frac{\partial\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\mathrm{d}V$ である；3 方向足し合わせると $\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathrm{d}V$)
- さらに，このような微小体積要素を V にわたって足し合わせると，この連続体における $\mathbf{u}$ の総流出量は
$$\int_V \mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathrm{d}V \tag{40}$$
である．

2.5. 補遺：Gauss の発散定理 (2)

- この時，隣り合う微小要素同士の流出量同士は，共通の $\mathbf{u}$ および正負の異なる法線ベクトルが作用するため相殺する．このため，表面での流出量

$$\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S \tag{41}$$

のみが残ることがわかる．

2.5. 補遺：Gauss の発散定理 (3)

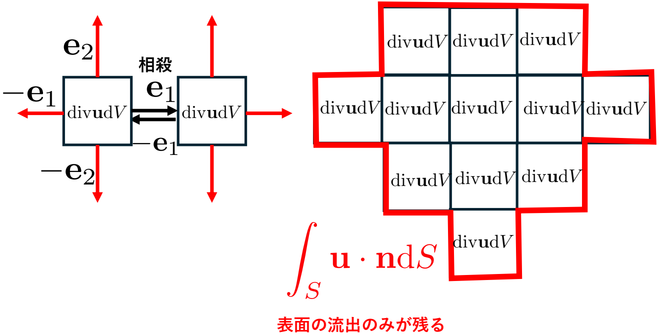

図 7: 隣り合う微小要素同士の流出量同士は，共通の $\mathbf{u}$ および正負の異なる法線ベクトルが作用するため相殺．表面での流出量のみが残る（ Gauss の発散定理）.

2.5. 補遺：Gauss の発散定理 (4)

- これより

$$\int_S \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathrm{d}V \tag{42}$$

が得られる．

2.5. 補遺：Gauss の発散定理 (5)

- Gauss の発散定理はテンソル（行列）P に関しても同様に示すことができ，

$$\int_S \mathsf{P} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathsf{P} \, \mathrm{d}V \tag{43}$$

となる．

- ここで $\mathsf{P} \cdot \mathbf{n}$ はテンソルとベクトルの積であり，

$$(\mathsf{P} \cdot \mathbf{n})_i = \sum_{j=1}^{3} P_{ij} n_j \tag{44}$$

である．

2.5. 補遺：Gauss の発散定理 (6)

- $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathsf{P}$ はテンソルの発散で，

$$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathsf{P})_i = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \tag{45}$$

である．この関係式は応力テンソルを含む運動方程式の導出で用いられる．