

連続体力学 第5回

線形弾性論 (2) : Young 率と Poisson 比

川崎猛史

大阪大学 D3 センター / 大学院理学研究科物理学専攻

Last update : November 17, 2025

第5回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
- 2 前回の復習
 - テンソル計算
 - ダイアド積
 - Hooke の法則の復習
- 3 Young 率と Poisson 比
 - 一軸伸長過程
 - Poisson 比の物理的範囲
- 4 まとめ
- 5 補遺：4 階等方テンソルの形式に関する証明（別解法）

第5回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 前回の復習

- テンソル計算
- ダイアド積
- Hooke の法則の復習

3 Young 率と Poisson 比

- 一軸伸長過程
- Poisson 比の物理的範囲

4 まとめ

5 補遺：4 階等方テンソルの形式に関する証明（別解法）

5.1. 講義のスケジュール

- | | | | |
|---|-------------------------|----|----------------------|
| 1 | 10/6：第 1 回 | 9 | 12/15：第 9 回 |
| 2 | 10/20：第 2 回 | 10 | 12/22：第 10 回 |
| 3 | 10/27：第 3 回 | 11 | 1/5：第 11 回 |
| 4 | 11/5(水)：第 4 回 | 12 | 1/15(木)：第 12 回 |
| 5 | 11/17：第 5 回 (11/10 は休講) | 13 | 1/19：第 13 回 |
| 6 | 11/26(水)：第 6 回 | 14 | 1/26：第 14 回 |
| 7 | 12/1：第 7 回 | 15 | 2/2：第 15 回 期末試験 (予定) |
| 8 | 12/8：第 8 回 | | |

第5回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 前回の復習

- テンソル計算
- ダイアド積
- Hooke の法則の復習

3 Young 率と Poisson 比

- 一軸伸長過程
- Poisson 比の物理的範囲

4 まとめ

5 補遺：4 階等方テンソルの形式に関する証明（別解法）

5.2. 前回の復習

本節では，前回質問を多く受けたテンソルの扱い，ダイアド積，Hooke の法則について復習する．

5.2.1. テンソル計算

♣ テンソル計算

ここではテンソル計算について体系的にまとめる．

- テンソル演算で最も基本的な演算である内積は，1 つの共通の添え字に関する和である，1 回縮約（single contraction）と呼ばれる操作である．実際，ベクトル \mathbf{a} とベクトル \mathbf{b} の内積は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_j a_j b_j \quad (1)$$

となる．次に行列 A とベクトル \mathbf{b} の積は

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{b})_i = \sum_j A_{ij} b_j \quad (2)$$

であり，これも 1 回縮約である．同様に，3 階テンソル A とベクトル \mathbf{b} の積は

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{b})_{ij} = \sum_k A_{ijk} b_k \quad (3)$$

5.2.1. テンソル計算 (2)

と表され 1 回縮約である．

- 行列 A と行列 B の積も

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} \quad (4)$$

と表され 1 回縮約に対応する．

- 一方，Hooke の法則では，応力テンソル P (2 階)，ひずみテンソル E (2 階)，弾性テンソル C (4 階) に対して

$$P_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl} E_{kl} \quad (5)$$

が成立する．これは 2 組の添字で縮約する 2 回縮約 (double contraction) であり，テンソル記号を用いると

$$P = C : E \quad (6)$$

と表される．

5.2.2. ダイアド積

♣ ダイアド積

- ダイアド積 (dyadic product) とは、2 つのベクトルから 2 階テンソル (行列) を作る操作である.

ベクトル \mathbf{a} とベクトル \mathbf{b} のダイアド積は

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \quad (7)$$

と表記され、その成分は

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j \quad (8)$$

となる. **なおダイアド積記号 \otimes を省略し \mathbf{ab} としても構わない (異教科書はこの表記を採用).**

5.2.2. ダイアド積 (2)

- 具体例として 3 次元ベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

のダイアド積は

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

となる.

- また, 3 つ以上のベクトルのダイアド積も構成することができ, その連鎖数に応じて, 高階のテンソルが構成される.

5.2.2. ダイアド積 (3)

- 例えばベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} を用いた

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \quad (11)$$

は ijk 成分を $a_i b_j c_k$ とする 3 階テンソルである.

例題 5-1: ダイアド積に関する簡単な計算

任意のベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} に対して

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (12)$$

が成立することを示せ.

5.2.2. ダイアド積 (4)

(解答)

与式はベクトルであり，この i 成分は

$$((\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c})_i = \sum_j (a_i b_j) c_j = a_i \sum_j b_j c_j = a_i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (13)$$

である．これらを，ベクトルに戻すと

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (14)$$

であることが示される．

5.2.3. Hooke の法則の復習

♣ Hooke の法則の復習

- 等方 4 階テンソルは一般的に

$$C_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk} \quad (15)$$

と表すことができることを前回学んだ（前回自主課題で出題した証明方法を本資料補遺にまとめた）。

- 一方，等方弾性体における弾性率テンソルは，小対称性： ij や kl の交換に関する対称性を考慮することで，係数 B と C が同等であることが言えるので，

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu\delta_{il}\delta_{jk} \quad (16)$$

と表される． λ および μ は Lamé の第 1，第 2 定数である．

5.2.3. Hooke の法則の復習 (2)

- これを Hooke の法則に代入すると

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \sum_{kl} C_{ijkl} E_{kl} \\ &= \sum_{kl} (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk}) E_{kl} \end{aligned} \quad (17)$$

となる.

- 各項を計算すると：

第 1 項：

$$\sum_{kl} \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} E_{kl} = \lambda \delta_{ij} \sum_{kl} \delta_{kl} E_{kl} = \lambda \delta_{ij} \sum_k E_{kk} = \lambda \delta_{ij} \text{Tr} E \quad (18)$$

第 2 項：

$$\sum_{kl} \mu \delta_{ik} \delta_{jl} E_{kl} = \mu E_{ij} \quad (19)$$

5.2.3. Hooke の法則の復習 (3)

第 3 項：

$$\sum_{kl} \mu \delta_{il} \delta_{jk} E_{kl} = \mu E_{ji} = \mu E_{ij} \quad (20)$$

- したがって、等方弾性体の Hooke の法則は

$$\boxed{P_{ij} = \lambda(\text{Tr}E)\delta_{ij} + 2\mu E_{ij}} \quad (21)$$

- ここで、 $\text{Tr}E = \sum_k E_{kk}$ は体積変化率（体積歪み）である．

5.2.3. Hooke の法則の復習 (4)

♣ 体積弾性と剪断弾性定数

- 前回，式 (21) を，

$$P_{ij} = K(\text{Tr}E)\delta_{ij} + 2\mu \left(E_{ij} - \frac{1}{3}\text{Tr}(E)\delta_{ij} \right) \quad (22)$$

と恒等変形することにより，体積変形寄与の項と純粋剪断寄与の項に分けられることを確認した．ここで $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ である．

- ただし，導出がやや唐突だったかもしれないので，今回は，式 (21) から単純膨張/圧縮変形を行い，体積弾性率 K を導き，これをもとに式 (22) を導く．これについて例題形式で考察を進めよう．

5.2.3. Hooke の法則の復習 (5)

例題 5-2：膨張/圧縮過程

以下の各問いに答えよ．体積 V の等方弾性体を，等方的に膨張/圧縮させる．いま，この時の体積変化率を $\epsilon = \Delta V/V$ とする．ここでは，等方弾性体の Hooke の法則

$$P_{ij} = \lambda \text{Tr}(\mathbf{E}) \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \quad (23)$$

を用いて，この問題を考察しよう．

- (1) ここでの歪みテンソルが $E_{11} = E_{22} = E_{33} = \frac{\epsilon}{3}$ ，これら以外は 0 となることを示せ．
- (2) (1) のもとで，この連続体にかかる応力テンソルを求めよ．
- (3) $P_{11} = P_{22} = P_{33} \equiv P$ とする．この時，体積弾性率は

$$P = K \frac{\Delta V}{V} \quad (24)$$

と定義される．この時， $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ であることを示せ．

- (4) K を用いることで，Hooke の法則が以下のように表されることを示せ．

$$P_{ij} = K \text{Tr}(\mathbf{E}) \delta_{ij} + 2\mu \left(E_{ij} - \frac{1}{3} (\text{Tr} \mathbf{E}) \delta_{ij} \right) \quad (25)$$

5.2.3. Hooke の法則の復習 (6)

(解答)

- (1) (等方膨張・圧縮時の歪みテンソル) 等方変形において, 歪みテンソルは等方的であるから

$$E_{ij} = A \delta_{ij} \quad (26)$$

と書ける. 体積変化率は小変形の範囲で, 式 (26) より

$$\epsilon \equiv \frac{\Delta V}{V} = \text{Tr} E = 3A \quad (27)$$

したがって,

$$A = \frac{1}{3} \text{Tr}(E) = \frac{\epsilon}{3} \quad (28)$$

となる. すると, 歪みテンソルは

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = \frac{\epsilon}{3}, \quad E_{ij} = 0 \ (i \neq j). \quad (29)$$

5.2.3. Hooke の法則の復習 (7)

(2) Lamé 係数を用いた Hooke の法則

$$P_{ij} = \lambda (\text{Tr} \mathbf{E}) \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \quad (30)$$

に (29) を代入すると

$$P_{ij} = \lambda \epsilon \delta_{ij} + 2\mu \left(\frac{\epsilon}{3} \delta_{ij} \right) = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \epsilon \delta_{ij}, \quad (31)$$

となる。したがって

$$P_{11} = P_{22} = P_{33} = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \epsilon \quad (32)$$

が示される。そして、非対角項の歪みは $E_{ij} = 0$ であるので、対応する応力は $P_{ij} = 0$ である。

5.2.3. Hooke の法則の復習 (8)

- (3) (体積弾性率) (31) より, 各対角成分を $P_{11} = P_{22} = P_{33} \equiv P$ とおき, 体積弾性率 K の定義式 (24) に則れば

$$P = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \epsilon = K \frac{\Delta V}{V}, \quad (33)$$

を得る. したがって

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (34)$$

が得られる.

5.2.3. Hooke の法則の復習 (9)

- (4) (K を用いた表式) 式 (30) から式 (34) で得た $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ をあえて抽出すると

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \lambda (\text{Tr} \mathbf{E}) \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \\ &= \underbrace{\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right)}_K \text{Tr}(\mathbf{E}) \delta_{ij} + 2\mu \left(E_{ij} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{E}) \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

を得る．すなわち

$$P_{ij} = K \text{Tr}(\mathbf{E}) \delta_{ij} + 2\mu \left(E_{ij} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{E}) \delta_{ij} \right). \quad (36)$$

となる．なお， $E_{ij} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{E}) \delta_{ij}$ はトレースが 0 (トレースレス) になることから，体積変化に寄与しない剪断寄与である．例えば，図 1 のように， $E_{12} = E_{21} = \gamma/2$ となる，トレース成分のない歪みを与えた際の応力は，

$$P_{12} = 2\mu E_{12} = \mu\gamma \quad (37)$$

となり剪断弾性率のみが効くことになる．

5.2.3. Hooke の法則の復習 (10)

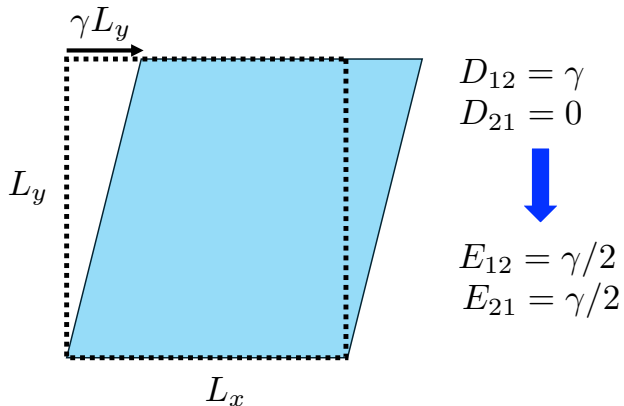


図 1: 単純剪断の場合の変形
勾配テンソルと歪みテンソ
ル (復習)

5.2.3. Hooke の法則の復習 (11)

一方今回のような一様圧縮/膨張の際は，歪みが対角成分のみで

$$P_{11} = P_{22} = P_{33} = K \operatorname{Tr}(\mathbf{E}) = K \frac{\Delta V}{V} = K \epsilon \quad (38)$$

という形をとる．

第 5 回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
- 2 前回の復習
 - テンソル計算
 - ダイアド積
 - Hooke の法則の復習
- 3 Young 率と Poisson 比
 - 一軸伸長過程
 - Poisson 比の物理的範囲
- 4 まとめ
- 5 補遺：4 階等方テンソルの形式に関する証明（別解法）

5.3. Young 率と Poisson 比

本節では，弾性体の一軸伸長過程において定義される材料定数である，Young 率（Young's modulus）と Poisson 比（Poisson's ratio）について導入する．これらは弾性体を特徴づける最も基本的な材料定数として，工学的応用において頻繁に参照される重要な量である．

5.3.1. 一軸伸長過程

♣ 一軸伸長過程

- 連続体の x_1 に垂直な面に外側に向けて P の応力が外部から作用し、その他の面には外部応力が作用していない場合 (図 2) を考える.

5.3.1. 一軸伸長過程 (2)

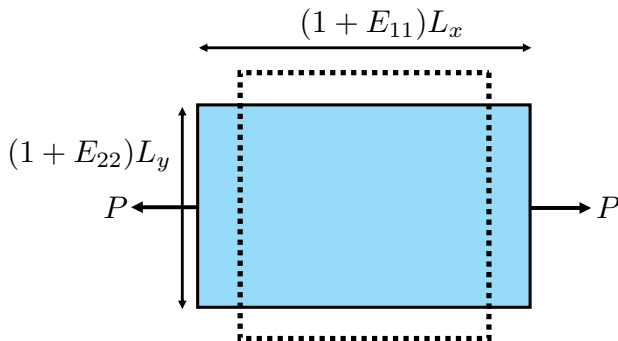


図 2: 連続体の x_1 に垂直な面に外側に向けて P の応力が外部から作用し、その他の面には外部応力が作用していない場合. この連続体は x_1 方向には伸びるが, x_2 方向は縮む.

- この際に生じる歪みテンソル E を求める.

5.3.1. 一軸伸長過程 (3)

- ここでは、式 (36) で表される構成方程式

$$P_{ij} = K \operatorname{Tr}(\mathbf{E}) \delta_{ij} + 2\mu \left(E_{ij} - \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(\mathbf{E}) \delta_{ij} \right) \quad (39)$$

を用いる．

- 外部応力と弾性力の釣り合いから：
11 成分：

$$P = K \operatorname{Tr}(\mathbf{E}) + 2\mu \left(E_{11} - \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(\mathbf{E}) \right) \quad (40)$$

22 および 33 成分：

$$0 = K \operatorname{Tr}(\mathbf{E}) + 2\mu \left(E_{22} - \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(\mathbf{E}) \right) \quad (41)$$

$$0 = K \operatorname{Tr}(\mathbf{E}) + 2\mu \left(E_{33} - \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(\mathbf{E}) \right) \quad (42)$$

5.3.1. 一軸伸長過程 (4)

- 対称性から $E_{22} = E_{33}$ であるので, $\text{Tr}(\mathbf{E}) = E_{11} + 2E_{22}$ である.
- 式 (41) より:

$$\begin{aligned} 0 &= K(E_{11} + 2E_{22}) + 2\mu \left(E_{22} - \frac{1}{3}(E_{11} + 2E_{22}) \right) \\ &= \left(K - \frac{2\mu}{3} \right) (E_{11} + 2E_{22}) + 2\mu E_{22} \end{aligned} \quad (43)$$

- これを整理すると:

$$\left(K - \frac{2\mu}{3} \right) E_{11} + \left(2K + \frac{2\mu}{3} \right) E_{22} = 0 \quad (44)$$

- 式 (44) より:

$$E_{22} = -\frac{K - \frac{2\mu}{3}}{2K + \frac{2\mu}{3}} E_{11} = -\frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)} E_{11} \quad (45)$$

5.3.1. 一軸伸長過程 (5)

- ここで Poisson 比 (一軸伸長の際の伸長方向と伸縮方向の歪みの大きさの比) は：

$$\sigma = -\frac{E_{22}}{E_{11}} = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)} \quad (46)$$

となる (この性質については後で議論する)。

- 次に, Young 率 Y を, 伸長方向の応力 P_{11} と歪み E_{11} の比

$$P_{11} = Y E_{11} \quad (47)$$

と定義する. Young 率は, 材料の引張り剛性を特徴づける量 (弾性係数) である.

- これを求めるために, E トレースを E_{11} のみで表すと：

$$\text{Tr}(\mathbf{E}) = E_{11} + 2E_{22} = E_{11} \left(1 - \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu} \right) = E_{11} \frac{3\mu}{3K + \mu} \quad (48)$$

5.3.1. 一軸伸長過程 (6)

- 式 (40) に代入すると：

$$\begin{aligned} P &= KE_{11} \frac{3\mu}{3K + \mu} + 2\mu \left(E_{11} - \frac{1}{3} E_{11} \frac{3\mu}{3K + \mu} \right) \\ &= E_{11} \left[\frac{3K\mu}{3K + \mu} + 2\mu \left(1 - \frac{\mu}{3K + \mu} \right) \right] \\ &= E_{11} \left[\frac{3K\mu + 6K\mu}{3K + \mu} \right] = E_{11} \frac{9K\mu}{3K + \mu} \end{aligned} \quad (49)$$

- したがって，Young 率は：

$$\boxed{Y = \frac{P}{E_{11}} = \frac{9K\mu}{3K + \mu}} \quad (50)$$

5.3.2. Poisson 比の物理的範囲

♣ Poisson 比の物理的範囲

- 前節で導出した Poisson 比の式：

$$\sigma = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)} \quad (51)$$

について、物理的に許される範囲を考察する．

- 弾性体の熱力学的安定性の必要十分条件：

$$K > 0, \quad \mu > 0 \quad (52)$$

- この条件のもとで σ の取りうる範囲を求める．

5.3.2. Poisson 比の物理的範囲 (K についての解)

- Poisson 比の式を K について解く：

$$K = \frac{2\mu(1 + \sigma)}{3(1 - 2\sigma)} \quad (53)$$

- $K > 0$ の条件および、両辺 $(1 - 2\sigma)^2$ をかけ、定数を落とすと

$$\mu(1 + \sigma)(1 - 2\sigma) > 0 \quad (54)$$

となる．したがって、 $\mu > 0$ の条件を課して（つまり両辺 μ で割っても不等号の向きが変わらないことを考慮して）、これを解くと、

$$\boxed{-1 < \sigma < \frac{1}{2}} \quad (55)$$

を得る．

5.3.2. Poisson 比の物理的範囲 ($K > \mu$ 条件の考慮)

- 通常材料の追加条件：中心力である原子間結合の性質から、一般に $K > \mu$ が成り立つ。
- 式 (53) で $K > \mu$ すなわち $\frac{K}{\mu} > 1$ の条件：

$$\frac{2(1 + \sigma)}{3(1 - 2\sigma)} > 1 \quad (56)$$

- これを解くと：

$$\sigma > \frac{1}{8} \quad (57)$$

- 通常材料での **Poisson** 比範囲：

$$\boxed{\frac{1}{8} < \sigma < \frac{1}{2}} \quad (K > \mu \text{ の条件下}) \quad (58)$$

5.3.2. Poisson 比の物理的範囲（境界での物理的解釈）

- 上限 $\sigma \rightarrow \frac{1}{2}$ の解釈：式 (53) で $\sigma \rightarrow \frac{1}{2}$ とすると：

$$\frac{K}{\mu} \rightarrow \frac{2(1 + \frac{1}{2})}{3(1 - 1)} = +\infty \quad (59)$$

$K \gg \mu$ ：体積変化への抵抗が支配的（非圧縮性材料）

- 下限 $\sigma \rightarrow -1$ の解釈：式 (53) で $\sigma \rightarrow -1$ とすると：

$$\frac{K}{\mu} \rightarrow \frac{2(1 - 1)}{3(1 + 2)} = 0 \quad (60)$$

$K \ll \mu$ ：せん断変形への抵抗が支配的（極端な異方性）

5.3.2. Poisson 比の物理的範囲（実材料での位置づけ）

■ 実材料での分布：

- $\sigma \approx \frac{1}{2}$ ：ゴム，液体 ($K \gg \mu$)
- $\sigma \approx 0.3$ ：金属 ($K \sim 3\mu$ 程度: 典型値 $K \sim 100\text{GPa}$, $\mu \sim 30\text{GPa}$ 程度.)
- $\sigma \approx \frac{1}{8}$ ：通常材料での下限 ($K = \mu$ が成立.)
- $\sigma < 0$ ：メタマテリアル ($K < \mu$ の人工構造)

■ まとめ：

$$\text{理論的範囲：} \quad -1 < \sigma < \frac{1}{2} \quad (K, \mu > 0) \quad (61)$$

$$\text{通常材料：} \quad \frac{1}{8} < \sigma < \frac{1}{2} \quad (K > \mu) \quad (62)$$

- 実際の材料特性は，原子間結合や構造設計により，この範囲内の特定の値を取る．

第5回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
- 2 前回の復習
 - テンソル計算
 - ダイアド積
 - Hooke の法則の復習
- 3 Young 率と Poisson 比
 - 一軸伸長過程
 - Poisson 比の物理的範囲
- 4 まとめ
- 5 補遺：4 階等方テンソルの形式に関する証明（別解法）

5.4. まとめ

- テンソル，ダイアド積，等方テンソルの復習を行なった．
- Young 率，Poisson 比を導入した．
- 物理的系および実在材料における Poisson 比について考察した（この話は役に立つ！）．

次回：線形弾性論 (3) （弾性波と音速）

第5回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
- 2 前回の復習
 - テンソル計算
 - ダイアド積
 - Hooke の法則の復習
- 3 Young 率と Poisson 比
 - 一軸伸長過程
 - Poisson 比の物理的範囲
- 4 まとめ
- 5 補遺：4 階等方テンソルの形式に関する証明（別解法）

5.5. 補遺：4 階等方テンソルの形式に関する証明（別解法）

♣ 補遺：4 階等方テンソルの形式に関する証明（別解法）（発展的内容・試験範囲外）参考：
佐野著 連続体の力学（裳華房）+ α

- 4 階の等方テンソル C は一般的に

$$A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk} \quad (63)$$

と表されることを扱った．

- この証明について，前回の自主課題 [4.3.2. 節] において出題した方法で試みる．
- まず，基底軸の π 回転に対する不変性から，ある添字が奇数回（1 回や 3 回）出現する成分は 0 である（2 階等方テンソルの場合と同様）．
- また基底軸の $\pi/2$ 回転は，例えば $2 \leftrightarrow 3$ の交換に対応するため， $C_{1122} = C_{1133}$ などの“特定軸の交換”に由来する等しさが得られる（一般の添字置換対称を主張するものではない）．

5.5. 補遺：4 階等方テンソルの形式に関する証明（別解法） (2)

- したがって、以下のようなケースに縮退する

$$C_{1122} = C_{2211} = C_{1133} = C_{2233} = \cdots = A \quad (64)$$

$$C_{1212} = C_{1313} = C_{2323} = C_{2121} = C_{3131} = \cdots = B \quad (65)$$

$$C_{1221} = C_{1331} = C_{2332} = C_{2112} = C_{3113} = \cdots = C \quad (66)$$

また、以下のようなケースが上の 3 つの特別な場合として

$$C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} = D \quad (67)$$

と区別される。

- 次に、 $D = A + B + C$ になることが、基底軸の $\pi/4$ 回転により示すことができる。
- 例えば、 x_1 軸まわりに $\pi/4$ 回転させると、新しい基底ベクトルは $\mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ 、 $\mathbf{e}'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ となる。

5.5. 補遺：4 階等方テンソルの形式に関する証明（別解法） (3)

- 4 階テンソルは，4 つのベクトルのダイアド積で以下のように表現できる．

$$\mathbf{C} = \sum_{ijkl} C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad (68)$$

- すると， x_1 軸まわりに $\pi/4$ 回転させた，4 階テンソルにおいて，添え字が 2 と 3 からなるものは，回転によって必ず 2222 成分を構成することができるので

$$C'_{2222} \mathbf{e}'_2 \otimes \mathbf{e}'_2 \otimes \mathbf{e}'_2 \otimes \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{4} (C'_{2222} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \cdots) \quad (69)$$

$$C'_{3333} \mathbf{e}'_3 \otimes \mathbf{e}'_3 \otimes \mathbf{e}'_3 \otimes \mathbf{e}'_3 = \frac{1}{4} (C'_{3333} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \cdots) \quad (70)$$

$$C'_{2323} \mathbf{e}'_2 \otimes \mathbf{e}'_3 \otimes \mathbf{e}'_2 \otimes \mathbf{e}'_3 = \frac{1}{4} (C'_{2323} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \cdots) \quad (71)$$

$$\text{以下同様に 5 通り} \quad (72)$$

5.5. 補遺：4 階等方テンソルの形式に関する証明（別解法） (4)

などと表される．したがって， $\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$ 成分に対して整理すると，回転前の係数 C_{2222} に対して

$$C_{2222} = \frac{1}{4}(C'_{2222} + C'_{3333} + C'_{2323} + C'_{2332} + C'_{3223} + C'_{3232} + C'_{2233} + C'_{3322}). \quad (73)$$

であるので，

$$D = \frac{1}{4}(D + D + A + A + B + B + C + C) \quad (74)$$

となり，

$$D = A + B + C \quad (75)$$

が示される．したがって，等方テンソル C は

$$C_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk} \quad (76)$$

とすれば， $i = j = k = l$ の時， $C_{ijkl} = A + B + C = D$ になることを含め，上の全ての場合を表すことができる．

5.5. 補遺：4 階等方テンソルの形式に関する証明（別解法） (5)

- さらに、これを、物理学的な小対称性を考慮すると、 i と j 、 k と l の交換に対して対称となるので、係数 B と C の項は同等であり、これらは等しくなる.
- したがって、等方弾性体の弾性率テンソルは

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk} \quad (77)$$