

# 連続体力学 第1回

## 連続体の導入・Euler 記述と Lagrange 記述・連続の式

川崎猛史

大阪大学 D3 センター/ 大学院理学研究科物理学専攻

Last update : October 6, 2025

# 第1回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
  - 講義担当者と講義方針
  - 講義内容（予定）
- 2 イントロ
  - 連続体とは何か
  - 連続体の力学
- 3 連続体の記述
  - Lagrange 記述
  - Euler 記述
- 4 連続の式（連続方程式）
  - Lagrange 記述による質量保存則と連続の式
  - Euler 記述による質量保存則と連続の式
  - Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係
- 5 まとめ

# 第1回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

- 講義担当者と講義方針
- 講義内容（予定）

## 2 イントロ

- 連続体とは何か
- 連続体の力学

## 3 連続体の記述

- Lagrange 記述
- Euler 記述

## 4 連続の式（連続方程式）

- Lagrange 記述による質量保存則と連続の式
- Euler 記述による質量保存則と連続の式
- Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係

## 5 まとめ

## 1.1. 講義のスケジュール

- 1 10/6：第 1 回
- 2 10/20：第 2 回
- 3 10/27：第 3 回
- 4 11/5(水)：第 4 回
- 5 11/17：第 5 回 (11/7 は休講)
- 6 11/26(水)：第 6 回
- 7 12/1：第 7 回
- 8 12/8：第 8 回
- 9 12/15：第 9 回
- 10 12/22：第 10 回
- 11 1/5：第 11 回
- 12 1/15(木)：第 12 回
- 13 1/19：第 13 回
- 14 1/26：第 14 回
- 15 2/2：第 15 回 期末試験（予定）

## 1.1.1. 講義担当者と講義方針

- 担当者：川崎猛史（C2 学際計算物理・豊中 D3 センター 616 号室）  
email:kawasaki.takeshi.d3c@osaka-u.ac.jp
- 講義の進め方：
  - 講義資料（スライド形式）を CLE から配布
  - スライドと板書の併用（これらを基に自分なりのノートを作成することを推奨）
  - 出欠アンケートで質問を受け付ける
- 教科書・参考書：
  - （教科書）連続体の力学（巽著，岩波書店）
  - （参考書）連続体の力学（佐野著，裳華房），連続体力学（佐野著，朝倉書店）
- 成績: (1)+(2)+(3)  $\rightarrow$  6 割で合格
  - (1) 出欠アンケート 20 %
    - 毎回（小テスト形式）.
    - 簡単なアンケートに回答．質問などを書き込んでもよい（必ず全てに目し QA 集をつくる）.
  - (2) 中間レポート課題 40 % 12 月ごろ
  - (3) 期末試験 40 % 2 月

## 1.1.2. 講義内容 (予定)

本講義では以下の内容を予定している.

- 1 連続の式
- 2 運動方程式と応力テンソル
- 3 歪みテンソル
- 4 静的弾性変形
- 5 弾性体の運動方程式と弾性波
- 6 流体運動
- 7 流体の運動方程式
- 8 ポテンシャル流
- 9 粘性流
- 10 流体の波
- 11 乱流

# 第 1 回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
  - 講義担当者と講義方針
  - 講義内容（予定）
- 2 イントロ
  - 連続体とは何か
  - 連続体の力学
- 3 連続体の記述
  - Lagrange 記述
  - Euler 記述
- 4 連続の式（連続方程式）
  - Lagrange 記述による質量保存則と連続の式
  - Euler 記述による質量保存則と連続の式
  - Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係
- 5 まとめ

## 1.2. イントロ

本節では、連続体についての基本概念を導入する。



## 1.2.1. 連続体とは何か

### ♣ 質点，剛体，連続体の比較

- 質点：大きさを無視した点
- 剛体：変形しない大きさをもつ物体
  - 微視的な原子分子の相対位置は固定
- 連続体：変形する物体
  - 微視的な原子分子の相対位置が変化
  - 連続体の例：
    - 弾性体（固体）
    - 流体
    - 粘弾性体・塑性体

## 1.2.1. 連続体とは何か (2)

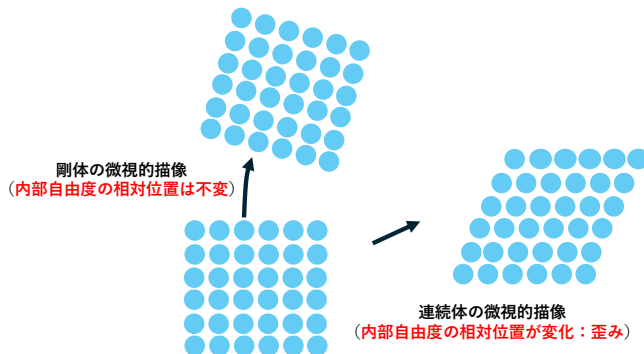


図 1: 剛体と連続体の微視的描像の比較. これらは質点の集合体としては共通だが, 剛体はそれらの相対位置が一切変化せず, 一方連続体はこれに変化する. この相対位置の変化を「歪み」とよぶ.

## 1.2.2. 連続体の力学

### ♣ 連続体の力学

- 巨視的な領域の平均的な振る舞い（質点の集合）
- 連続体に働く力と運動を取り扱う体系（応力と歪みの関係）
- 無限の自由度をもつ場の量（位置  $\mathbf{x}$  に対する量）として扱う
  - 例：密度  $\rho(\mathbf{x})$ ，圧力  $p(\mathbf{x})$ ，温度  $T(\mathbf{x})$ ，速度  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ，加速度  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$

# 第 1 回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
  - 講義担当者と講義方針
  - 講義内容（予定）
- 2 イントロ
  - 連続体とは何か
  - 連続体の力学
- 3 連続体の記述
  - Lagrange 記述
  - Euler 記述
- 4 連続の式（連続方程式）
  - Lagrange 記述による質量保存則と連続の式
  - Euler 記述による質量保存則と連続の式
  - Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係
- 5 まとめ

## 1.3. 連続体の記述

本節では、連続体を考える上で重要な、Lagrange 記述と Euler 記述について導入する。

## 1.3.1. Lagrange 記述

### ♣ Lagrange 記述

- 連続体とともに動く点（粒子記述）に基づく記述： $\mathbf{x}$  と  $t$  を共に変数として扱う.
- 粒子の速度：

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t)) = \frac{D\mathbf{x}(t)}{Dt} \quad (1)$$

- 粒子の加速度：

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) = \frac{D\mathbf{u}(\mathbf{x}(t))}{Dt} \quad (2)$$

- Lagrange 微分：微分記号  $\frac{D}{Dt}$ 
  - 時刻  $t$  および位置  $\mathbf{x}(t)$  を変数とする微分
  - 全微分  $\frac{d}{dt}$  と同等
  - 粒子に随伴して観測される変化率を表す

### 1.3.1. Lagrange 記述 (2)

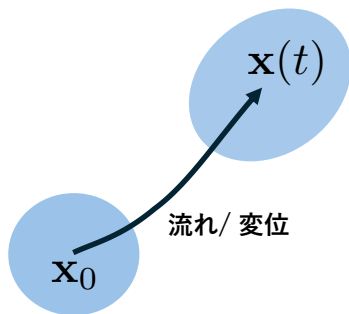


図 2: Lagrange 記述. 連続体の微小素片が時間とともに位置と形が変化していく様子. (水中を流れるインクなどをイメージ)

## 1.3.2. Euler 記述

### ♣ Euler 記述

#### ■ Euler 記述と Euler 微分：

- 空間中の固定点で連続体場の変化を観測する記述を **Euler 記述**と呼ぶ
- $\frac{\partial}{\partial t}$ ：空間中の定点における局所的な時間変化であり、これを **Euler 微分**と呼ぶ
- 以下，Lagrange 微分と Euler 微分の関係を議論する．



## 1.3.2. Euler 記述 (2)

- スカラー量  $A(\mathbf{x}(t))$  の Lagrange 微分を連鎖律により変形：

$$\begin{aligned}
 \frac{DA(\mathbf{x}(t))}{Dt} &= \frac{\partial A(\mathbf{x}(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A(\mathbf{x}(t))}{\partial x_i} \frac{Dx_i}{Dt} \\
 &= \frac{\partial A(\mathbf{x}(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A(\mathbf{x}(t))}{\partial x_i} u_i \\
 &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) A(\mathbf{x}(t)) \\
 &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) A(\mathbf{x}(t)) \tag{3}
 \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ ,  $\mathbf{u}(t) = \frac{D\mathbf{u}(\mathbf{x}(t))}{Dt} = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$  である。  
 また、 $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$  (ベクトル微分演算子) である。

## 1.3.2. Euler 記述 (3)

- 移流項： $\mathbf{u} \cdot \nabla$ 
  - 流体の運動による物理量の変化
  - Euler 記述と Lagrange 記述の本質的な違いを表現
  - 観測者の立場の違いが生む項

### ここまでのまとめ

- Lagrange 記述：「粒子」に随伴して観測 ( $\frac{D}{Dt}$ )
- Euler 記述：固定点で観測 ( $\frac{\partial}{\partial t}$ )
- 両者の関係：移流項が橋渡し

# 第 1 回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
  - 講義担当者と講義方針
  - 講義内容 (予定)
- 2 イントロ
  - 連続体とは何か
  - 連続体の力学
- 3 連続体の記述
  - Lagrange 記述
  - Euler 記述
- 4 連続の式 (連続方程式)
  - Lagrange 記述による質量保存則と連続の式
  - Euler 記述による質量保存則と連続の式
  - Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係
- 5 まとめ

## 1.4. 連続の式 (連続方程式)

連続体では，運動の法則，すなわち力と運動の関係を議論する。これに先立ち，連続体の質量保存則を連続体記述（連続の式）で立式する。

## 1.4.1. Lagrange 記述による質量保存則と連続の式

### ♣ Lagrange 記述による質量保存則と連続の式

#### ■ 系の設定：

- Lagrange 記述に従い、 $t = 0$  における閉曲面  $S_0$  が時刻  $t$  において  $S(t)$  へと時間発展
- この時の閉曲面に囲まれる体積をそれぞれ  $V_0(S_0)$ ,  $V(S(t))$  とする
- $V_0$  を構成する質点を時刻  $t$  で全て拾い上げる空間が  $V$  である.
- Lagrange 記述では、 $V_0$  を構成する質点と、 $V$  を構成する質点は 1 対 1 に対応することから他の質点の流入はないと考える.

#### ■ 質量保存則：

- 位置  $\mathbf{x}$  における質量密度を  $\rho(\mathbf{x})$  とする
- 時刻の異なる、対応する閉空間での質量を比較すると、同一質点集団の和であることから

$$\int_{V(S(t))} \rho(\mathbf{x}) dV = \int_{V_0(S_0)} \rho(\mathbf{x}_0) dV_0 \quad (4)$$

となり質量が保存する．ここでは生成消滅が起こらないことを原理として要請する．

## 1.4.1. Lagrange 記述による質量保存則と連続の式 (2)

### ■ ヤコビアン：

$$J := \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{03}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{03}} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{03}} \end{vmatrix} \quad (5)$$

による変数変換により,  $dV = J dV_0$  となるため, 式 (4) は

$$\int_{V(S(t))} \rho(\mathbf{x}) dV = \int_{V_0(S_0)} \rho(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)) J dV_0 = \int_{V_0(S_0)} \rho(\mathbf{x}_0) dV_0 \quad (6)$$

### ■ これより, 被積分関数を比較することで, 関係式

$$\boxed{\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} = \rho(\mathbf{x}_0)} \quad (7)$$

を得る. この関係式を Lagrange 記述における「質量に関する連続の式 (連続方程式)」(質量保存則の微分形式) という.

## 1.4.2. Euler 記述による質量保存則と連続の式

### ♣ Euler 記述による質量保存則と連続の式

- 以下, 前節の Lagrange 記述における連続の式の別表現を (Euler 記述により) 議論する.
- ここでは, 「固定」閉曲面  $S$  とそれに囲まれた閉区間  $V(S)$  を考える.
- この閉区間における, 質量の単位時間あたりの流入量は

$$-\underbrace{\int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS}_{\text{流入量}} \quad (8)$$

である. ここで,  $\mathbf{n}$  は微小面  $dS$  の法線ベクトルである.

## 1.4.2. Euler 記述による質量保存則と連続の式 (2)

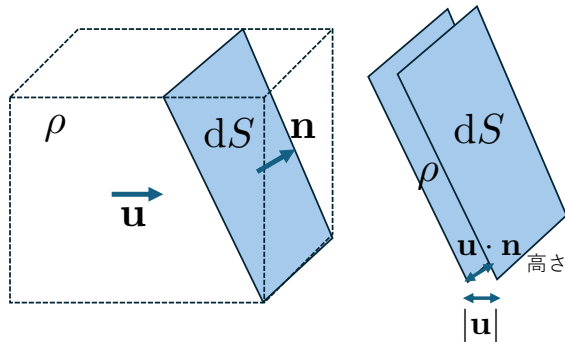


図 3: 微小固定面  $dS$  を単位時間あたり通過 (流出) する質量は  $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$  となる. ここで  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  は  $dS$  を底面とする柱体の高さ.



## 1.4.2. Euler 記述による質量保存則と連続の式 (3)

- いま、質量保存則が成り立つならば、 $V(S)$  における全質量の時間変化量と表面  $S$  における単位時間あたりの流入量が等しくなる (つまり生成消滅が起こらない) ので

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS} \quad (9)$$

となる.

- さらに、Gauss の発散定理より

$$- \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV \quad (10)$$

となるので、被積分関数を比較し移項することで、以下の微分形式の関係式

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0} \quad (11)$$

を得る. これを Euler 記述における質量に関する連続の式という.

## 1.4.3. Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係

### ♣ Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係

- Euler 記述における連続の式で出てきた以下の式は

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left( u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \\ &= \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u}\end{aligned}\tag{12}$$

である.

### 1.4.3. Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係 (2)

- よって,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (13)$$

であるので, Lagrange 微分を用いて表すと連続の式は

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0} \quad (14)$$

となる.

- さらに, 連続体の密度が時間に対して変化しない条件 (非圧縮条件) は

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (15)$$

である. このことから,

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{u} = 0} \quad (16)$$

を**非圧縮条件**の式という.

### 1.4.3. Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係 (3)

- 最後に、例題 1 により、Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の間係を議論する.

#### 例題 1

Lagrange 記述における連続の式

$$\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} = \rho(\mathbf{x}_0) \quad (17)$$

と、Euler 記述における連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (18)$$

が等価であることを示せ.

### 1.4.3. Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係 (4)

(解答) 与式は,

$$\rho(\mathbf{x})J = \rho(\mathbf{x}_0) \quad (19)$$

である. いま,  $\mathbf{x}_0$  を定数とし両辺に  $\frac{D}{Dt}$  を施すと,

$$J \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{DJ}{Dt} = 0 \quad (20)$$

### 1.4.3. Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係 (5)

を得る．ここで

$$\begin{aligned}
 \frac{DJ}{Dt} &= \frac{\partial(\dot{x}_1, x_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} + \frac{\partial(x_1, \dot{x}_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} + \frac{\partial(x_1, x_2, \dot{x}_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} \\
 &= \left\{ \frac{\partial(\dot{x}_1, x_2, x_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} + \frac{\partial(x_1, \dot{x}_2, x_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} + \frac{\partial(x_1, x_2, \dot{x}_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \right\} \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} \\
 &= \left( \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} \right) J \\
 &= (\nabla \cdot \mathbf{u}) J
 \end{aligned} \tag{21}$$

となる．ここでは,

$$\frac{\partial(\dot{x}_1, x_2, x_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} \tag{22}$$

### 1.4.3. Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係 (6)

となることを用いた。よって、式 (20) は、式 (21) から、

$$J \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u})J = 0 \quad (23)$$

であるので、両辺を  $J$  で割ることで、

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (24)$$

を得る。ここで、Lagrange 微分を Euler 微分で書くと

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \quad (25)$$

であるので、これを式 (24) に代入すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (26)$$

### 1.4.3. Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係 (7)

を得る．これを整理すると，Euler 形式の連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (27)$$

を得る．



# 第 1 回講義資料目次

- 1 講義のスケジュール
  - 講義担当者と講義方針
  - 講義内容（予定）
- 2 イントロ
  - 連続体とは何か
  - 連続体の力学
- 3 連続体の記述
  - Lagrange 記述
  - Euler 記述
- 4 連続の式（連続方程式）
  - Lagrange 記述による質量保存則と連続の式
  - Euler 記述による質量保存則と連続の式
  - Euler/Lagrange 記述における質量に関する連続の式の関係
- 5 まとめ

## 1.5. まとめ

- 連続体の基本概念を導入した。
- 連続体における Lagrange 記述および Euler 記述について導入した。
- 質量保存原理から質量に関する連続の式を導出した。

次回：連続体にかかる力と応力テンソル