連続体力学 第 6 回
線形弾性論 (3)：弾性波と音速

川崎猛史

大阪大学 D3 センター/ 大学院理学研究科物理学専攻

Last update：November 26, 2025

第 6 回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 前回の復習

3 弾性波
- 弾性体の運動方程式
- 弾性波の波動方程式
- 弾性波の伝搬速度（音速）

4 まとめ

5 補遺：波動方程式の解（d'Alembert の解）

第 6 回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 前回の復習

3 弾性波
- 弾性体の運動方程式
- 弾性波の波動方程式
- 弾性波の伝搬速度（音速）

4 まとめ

5 補遺：波動方程式の解（d'Alembert の解）

6.1. 講義のスケジュール

1. 10/6：第 1 回
2. 10/20：第 2 回
3. 10/27：第 3 回
4. 11/5**(水)**：第 4 回
5. 11/17：第 5 回 **(11/10 は休講)**
6. 11/26**(水)**：第 6 回
7. 12/1：第 7 回
8. 12/8：第 8 回
9. 12/15：第 9 回
10. 12/22：第 10 回
11. 1/5：第 11 回
12. 1/15**(木)**：第 12 回
13. 1/19：第 13 回
14. 1/26：第 14 回
15. 2/2 ： 第 15 回 期末試験（予定）

第 6 回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 前回の復習

3 弾性波
- 弾性体の運動方程式
- 弾性波の波動方程式
- 弾性波の伝搬速度（音速）

4 まとめ

5 補遺：波動方程式の解（d'Alembert の解）

6.2. 前回の復習

前回扱った，Young 率と Poisson 比について復習する．

例題 6-1：Young 率と Poisson 比

等方弾性体における応力と歪みの関係は，Hooke の法則により

$$P_{ij} = \lambda\,\delta_{ij} \sum_k E_{kk} + 2\mu E_{ij} \tag{1}$$

となる．いま，x_1 軸に対する一軸伸長を考える（図 **1**）．このとき以下の各問いに答えよ．

(1) 体積弾性率は $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ である (例題 5-2 参照)．このとき，応力テンソル P_{ij} を K と μ を用いて表せ．

(2) Poisson 比 (σ) とは何か説明せよ．また σ を K と μ で表せ．

(3) Young 率 (Y) とは何か説明せよ．Y を K と μ を用いて表せ．

6.2. 前回の復習 (2)

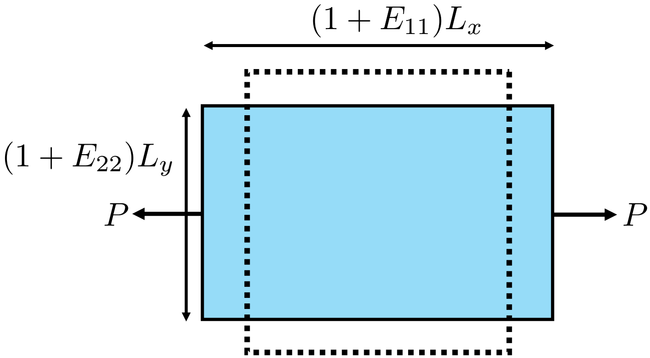

図 1: (再掲) 連続体の x_1 軸に垂直な面に外側へ向けて応力 P が作用し，その他の面には外部応力が作用していない場合．この連続体は x_1 方向に伸び，x_2，x_3 方向には縮む．

6.2. 前回の復習 (3)

(1) 等方弾性体の Hooke の法則は

$$P_{ij} = \lambda\,\delta_{ij} \sum_k E_{kk} + 2\mu E_{ij} \tag{2}$$

で与えられる．
体積弾性率の定義より

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{3}$$

したがって

$$\lambda = K - \frac{2}{3}\mu \tag{4}$$

である．
これを (2) に代入すると

$$P_{ij} = \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\delta_{ij} \sum_k E_{kk} + 2\mu\, E_{ij} \tag{5}$$

6.2. 前回の復習 (4)

これを，$\mathrm{Tr}\mathsf{E} = \sum_k E_{kk}$ のもと整理すると，応力は等方成分と偏差成分に分解され

$$\boxed{P_{ij} = K(\mathrm{Tr}\mathsf{E})\,\delta_{ij} + 2\mu\left(E_{ij} - \frac{1}{3}(\mathrm{Tr}\mathsf{E})\,\delta_{ij}\right)} \tag{6}$$

となる．ここで偏差成分はトレースレスとなっている．

(2) **Poisson 比は一軸伸長における伸長方向と伸縮方向の歪みの比：**

$$\boxed{\sigma = -\frac{E_{22}}{E_{11}}} \tag{7}$$

である．

以下これを求めよう．いま，x_1 方向に一軸伸長を加えた場合，応力は

$$P_{11} = P, \quad P_{22} = P_{33} = 0$$

6.2. 前回の復習 (5)

となる．構成方程式より

$$P = K(\mathrm{Tr}\mathsf{E}) + 2\mu\left(E_{11} - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\mathsf{E}\right) \tag{8}$$

$$0 = K(\mathrm{Tr}\mathsf{E}) + 2\mu\left(E_{22} - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\mathsf{E}\right) \tag{9}$$

$$0 = K(\mathrm{Tr}\mathsf{E}) + 2\mu\left(E_{33} - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\mathsf{E}\right) \tag{10}$$

よって $E_{22} = E_{33}$ である．
いま，$\mathrm{Tr}\mathsf{E} = E_{11} + 2E_{22}$ であるので，22 成分の構成関係式は

$$0 = K(E_{11} + 2E_{22}) + 2\mu\left(E_{22} - \frac{1}{3}(E_{11} + 2E_{22})\right) \tag{11}$$

6.2. 前回の復習 (6)

整理すると

$$0 = \left(K - \frac{2}{3}\mu\right) E_{11} + \left(2K + \frac{2}{3}\mu\right) E_{22} \tag{12}$$

これを解くと

$$E_{22} = -\frac{K - \frac{2}{3}\mu}{2K + \frac{2}{3}\mu} E_{11} \tag{13}$$

$$E_{22} = -\frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)} E_{11} \tag{14}$$

よって Poisson 比は，式 (7) より

$$\boxed{\sigma = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)}} \tag{15}$$

6.2. 前回の復習 (7)

(3) **Young 率は，一軸伸長時の応力と歪みの比として定義され**

$$\boxed{P_{11} = Y\, E_{11}} \tag{16}$$

である．

設問 (2) より

$$E_{22} = -\sigma E_{11}, \quad \sigma = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)} \tag{17}$$

トレースは

$$\mathrm{Tr}E = E_{11} + 2E_{22} = E_{11}(1 - 2\sigma) \tag{18}$$

構成方程式の 11 成分から

$$P_{11} = K(E_{11} + 2E_{22}) + 2\mu\left(E_{11} - \frac{1}{3}(E_{11} + 2E_{22})\right) \tag{19}$$

6.2. 前回の復習 (8)

整理すると

$$P_{11} = E_{11}\left[K(1-2\sigma) + 2\mu\left(1 - \frac{1}{3}(1-2\sigma)\right)\right] \tag{20}$$

σ を代入すると

$$P_{11} = E_{11}\frac{9K\mu}{3K+\mu} \tag{21}$$

よって Young 率は

$$\boxed{Y = \frac{P_{11}}{E_{11}} = \frac{9K\mu}{3K+\mu}} \tag{22}$$

6.2. 前回の復習 (9)

実用的な逆変換　材料定数として Young 率 Y と Poisson 比 σ が与えられる場合が多い．このとき体積弾性率 K とせん断弾性率 μ は，式 (15) と式 (22) を連立させることで求められ，最終的には次式に整理される：

$$\boxed{\mu = \frac{Y}{2(1+\sigma)}} \tag{23}$$

$$\boxed{K = \frac{Y}{3(1-2\sigma)}} \tag{24}$$

また，$\lambda = K - \frac{2}{3}\mu$ より，Lamé 第 1 定数 λ は Y と σ を用いて次のように表される：

$$\boxed{\lambda = \frac{Y\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}} \tag{25}$$

これより，前回算出したポアソン比の範囲 $-1 < \sigma < \frac{1}{2}$ において全ての弾性係数が正になることがわかる．

第 6 回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 前回の復習

3 弾性波
- 弾性体の運動方程式
- 弾性波の波動方程式
- 弾性波の伝搬速度（音速）

4 まとめ

5 補遺：波動方程式の解（d'Alembert の解）

6.3. 弾性波

第 6 回では，弾性歪みのダイナミクスである弾性波について扱う．弾性波の時間発展方程式は，これまでに議論してきた応力と歪みの関係式を，第 2 回で導出した運動方程式に適用することで得られる．以下では，弾性波の基礎方程式の導出とその解法を示す．

6.3.1. 弾性体の運動方程式

♣ 弾性体の運動方程式

- まず，連続体に弾性体固有の応力が作用する場合の運動方程式を考える．
- 連続体に対する一般的な運動方程式は，第 2 回で扱ったように，連続体の微小素片を粒子集合とみなし，それぞれの粒子の運動方程式を重心運動としてまとめて

$$\boxed{\rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathsf{P} + \mathbf{K}} \tag{26}$$

と与えられる．ここで，$\mathbf{u}$，P，$\mathbf{K}$ は，それぞれ時刻 t における位置 $\mathbf{x}$ での速度場，応力テンソル（面積力），外力（体積力）を表す．

- さらに式 (26) は，Euler 微分を用いて

$$\boxed{\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathsf{P} + \mathbf{K}} \tag{27}$$

と表すことができることを第 1 回で扱った．

6.3.1. 弾性体の運動方程式 (2)

- いま，弾性振動においては，連続体の変位は大変小さい (線形である) と仮定する．するとその時間微分である速度 $\mathbf{u}$ も微小量とみなせる．（もし変位が大きいと粒子の構造変化が起こり Hooke の法則が破れる．）この前提から，式 (27) における左辺第 2 項（移流項）は，$\mathbf{u}$ の 2 次の微小量であるため，他の項と比べ小さくなるので無視できる．よって

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathsf{P} + \mathbf{K} \tag{28}$$

となる．

- 次に，密度に関する連続の式 (第 1 回で導入)

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = -\rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}} \tag{29}$$

6.3.1. 弾性体の運動方程式 (3)

を考える．これについても $\mathbf{u}$ が微小量であるという条件を考慮すると，移流項が無視でき

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\rho\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} \tag{30}$$

となり密度の時間微分は $\mathbf{u}$ と同程度の微小量になる．

- これを踏まえ，運動方程式 (28) の両辺を t で偏微分すると，密度の時間微分の項は $\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \sim (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u})(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t})$ となり $\mathbf{u}$ の 2 次微小量となるため落とすことができ，

$$\boxed{\rho\,\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathsf{P}) + \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial t}} \tag{31}$$

となる．

6.3.1. 弾性体の運動方程式 (4)

- 次に，簡単のために，式 (31) の i 成分を書き，応力テンソル発散と時間微分の順序を交換すると

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial t}\right) + \frac{\partial K_i}{\partial t}. \tag{32}$$

となる．応力テンソル P_{ij} は弾性体を仮定すると Hooke の法則（第 4，5 回で導入）により

$$\boxed{P_{ij} = \lambda\,(\mathrm{Tr}\,\mathsf{E})\,\delta_{ij} + 2\mu\,E_{ij}} \tag{33}$$

と書ける．

- いま，式 (33) の両辺を t で微分すると

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial t} = \lambda\,\dot{E}_{kk}\,\delta_{ij} + 2\mu\,\dot{E}_{ij} \tag{34}$$

となる．ここで λ, μ は時間に依らない定数である．

6.3.1. 弾性体の運動方程式 (5)

- 以上より，式 (32) の右辺第 1 項は Hooke の法則を代入して

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial t}\right) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\lambda \sum_k \dot{E}_{kk}\,\delta_{ij} + 2\mu\,\dot{E}_{ij}\right]$$
$$= \lambda \frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_k \dot{E}_{kk}) + 2\mu \sum_j \frac{\partial\,\dot{E}_{ij}}{\partial x_j}. \tag{35}$$

ここで，歪みテンソルの時間微分（変位の時間微分は速度であることを用いる）

$$\sum_k \dot{E}_{kk} = \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \qquad \dot{E}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

6.3.1. 弾性体の運動方程式 (6)

を代入すると，式 (35) の右辺は

$$
\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_k \dot{E}_{kk}\Big) = \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}),
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_j \frac{\partial \dot{E}_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{1}{2}\sum_j \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla}^2 u_i + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u})}_{x_i\text{ 微分と }x_j\text{ 微分の順序交換}}\right].
\end{aligned}
\tag{36}
$$

6.3.1. 弾性体の運動方程式 (7)

したがって式 (34) の右辺第 1 項は

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial t}\right) = \lambda \frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) + 2\mu\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}^2 u_i + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u})\right]$$

$$= \mu\,\boldsymbol{\nabla}^2 u_i + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}). \tag{37}$$

- よって，外力が時間に依存しない場合（$\partial\mathbf{K}/\partial t = 0$）には，式 (31) と式 (37) を合わせると

$$\boxed{\rho\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu\,\boldsymbol{\nabla}^2 u_i + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u})}. \tag{38}$$

6.3.1. 弾性体の運動方程式 (8)

- これをベクトル形式で書くと

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u})} \tag{39}$$

  となる．
  これは線形等方弾性体における速度場 $\mathbf{u}$ の支配方程式であり，**Navier**（ナビエ）の方程式と呼ばれる．

- Navier 方程式は，縦波（P 波）と横波（S 波）の伝播を記述する基本方程式であり，次節ではこれを用いて弾性波の解の導出を行う．

6.3.2. 弾性波の波動方程式

♣ 弾性波の波動方程式

- 弾性体内を伝わる波動の様子を調べる．
- 空間は一様であり，密度 ρ は一定とし，外力 $\mathbf{K}$ も時間・空間に依らず一定とする（したがって $\partial\mathbf{K}/\partial t = 0$ とおける）．
- 速度 $\mathbf{u}$ が x_1 方向のみに変化（＝波が x_1 方向に伝搬）する平面波である場合を考える．すなわち

$$\mathbf{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$$

- ここで Navier 方程式 (i 成分)

$$\boxed{\rho\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu\,\boldsymbol{\nabla}^2 u_i + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u})} \tag{40}$$

を用いる．

6.3.2. 弾性波の波動方程式 (2)

- まず u_1 成分について考える．右辺第 1 項は，ラプラシアンの第 1 成分より

$$\boldsymbol{\nabla}^2 u_i = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}$$

右辺第 2 項の発散は，x_1 成分の微分のみが残り

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1},$$

すると，

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \nabla^2 u_1.$$

したがって **Navier 方程式の $i = 1$ 成分は**

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}} \qquad (41)$$

6.3.2. 弾性波の波動方程式 (3)

となる．これは波の進行方向と変位の方向が等しい「縦波（P 波）」の波動方程式である．

- 一方，Navier 方程式の $i = 2, 3$ 成分については，x_2, x_3 方向に変化がない（すなわち $\partial/\partial x_2 = \partial/\partial x_3 = 0$）ため，発散の微分

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = 0,$$

が成り立つ．したがって **Navier 方程式の $i = 2, 3$ 成分は**

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}} \tag{42}$$

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}} \tag{43}$$

6.3.2. 弾性波の波動方程式 (4)

となる．これらは波の進行方向と変位の方向が垂直である「横波（S 波）」の波動方程式である．

- 重要な点として，縦波と横波では波動方程式の係数部分が異なる．この違いは伝搬速度（音速）の違いとして現れる．

6.3.3. 弾性波の伝搬速度（音速）

♣ 弾性波の伝搬速度（音速）

- 前節で導出した弾性波の波動方程式から，弾性体内における波の伝搬速度を求める．
- 条件は前節を踏襲する．
- 一般的に，x_1 方向に伝搬する波の波動方程式は

$$\boxed{\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2}} \tag{44}$$

と表される．ここで，c は波の伝搬速度（弾性体の場合音速）を表す．

6.3.3. 弾性波の伝搬速度（音速） (2)

- 前節の結果と比較すると：縦波（**P** 波）：式 **(41)**

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \tag{45}$$

これより：

$$\boxed{c_\mathrm{l} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}} \tag{46}$$

横波（**S** 波）：式 **(42)(43)**

$$\rho \frac{\partial^2 u_{2,3}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_{2,3}}{\partial x_1^2} \tag{47}$$

これより：

$$\boxed{c_\mathrm{t} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}} \tag{48}$$

6.3.3. 弾性波の伝搬速度（音速） (3)

- **P** 波（縦波）と **S** 波（横波）の速度比較：$\lambda > 0$ なので：

$$c_{\mathrm{l}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} > \sqrt{\frac{2\mu}{\rho}} > \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = c_{\mathrm{t}} \tag{49}$$

すなわち：

$$\boxed{c_{\mathrm{l}} > c_{\mathrm{t}}} \tag{50}$$

- この結果は，固体物質中の振動の伝搬のみならず，地震学においても基本的な関係であり，地震波の到達時間差から震源距離を推定する際に用いられる．

第 6 回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 前回の復習

3 弾性波
- 弾性体の運動方程式
- 弾性波の波動方程式
- 弾性波の伝搬速度（音速）

4 まとめ

5 補遺：波動方程式の解（d'Alembert の解）

6.4. まとめ

- 運動方程式と Hooke の法則から Navier 方程式を導出した．
- Navier 方程式が縦波（P 波）と横波（S 波）を記述することを示した．
- 各波の波動方程式から音速 $c_{\mathrm{l}}, c_{\mathrm{t}}$ を導出し，$c_{\mathrm{l}} > c_{\mathrm{t}}$ を確認した．

次回：流体と流れ

第 6 回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 前回の復習

3 弾性波
- 弾性体の運動方程式
- 弾性波の波動方程式
- 弾性波の伝搬速度（音速）

4 まとめ

5 補遺：波動方程式の解（d'Alembert の解）

6.5. 補遺：波動方程式の解（d'Alembert の解）

- 一次元方向に伝搬する波動方程式は

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{51}$$

と表される．

- この方程式をダランベール（d'Alembert）によって与えられた方法で解く．
- ダランベールの解法は，適切な変数変換により偏微分方程式を簡単化する古典的手法である．
- 新しい変数の導入：以下の変数変換を行う：

$$\begin{cases} \xi = x - ct, \\ \eta = x + ct \end{cases} \tag{52}$$

6.5. 補遺：波動方程式の解（d’Alembert の解） (2)

- 逆変換：

$$\begin{cases} x = \dfrac{\xi + \eta}{2}, \\ t = \dfrac{\eta - \xi}{2c} \end{cases} \tag{53}$$

- 偏微分の変換：連鎖律により：

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \tag{54}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta} = -c\frac{\partial}{\partial \xi} + c\frac{\partial}{\partial \eta}. \tag{55}$$

6.5. 補遺：波動方程式の解（d'Alembert の解） (3)

- x に関する 2 次偏微分：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \tag{56}$$

- t に関する 2 次偏微分：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-c\frac{\partial}{\partial \xi} + c\frac{\partial}{\partial \eta}\right) = c^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2c^2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + c^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \tag{57}$$

6.5. 補遺：波動方程式の解（d’Alembert の解） (4)

- 波動方程式に代入：

$$\left(c^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-2c^2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+c^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)u-c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)u=0 \tag{58}$$

- 整理すると：

$$-4c^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 \tag{59}$$

- したがって：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 \tag{60}$$

6.5. 補遺：波動方程式の解（d'Alembert の解） (5)

- 式 (60) を解くために 2 段階の積分を行う：
  第 **1** 段階：η について積分

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0 \tag{61}$$

これより：

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = F(\xi) \tag{62}$$

ここで $F(\xi)$ は ξ のみの任意関数（η に関する積分定数）.
第 **2** 段階：式 (62) を ξ について積分

$$u = \int F(\xi) d\xi + G(\eta) = f(\xi) + G(\eta) \tag{63}$$

ここで $G(\eta)$ は η のみの任意関数（ξ に関する積分定数）.

6.5. 補遺：波動方程式の解（d'Alembert の解） (6)

- したがって一般解は：

$$\boxed{u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)} \tag{64}$$

ここで $f(\xi) = f(x-ct)$，$g(\eta) = g(x+ct)$ は任意の 2 回微分可能な関数．

- ダランベールの一般解：

$$\boxed{u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)} \tag{65}$$

- 第 1 項：$f(x-ct)$（右進行波）
  - $x - ct =$ 一定 であるとき，$x = ct +$ 一定
  - 時間とともに正の x 方向に速度 c で伝搬する波
  - 波形 f が変形することなく右方向に移動
- 第 2 項：$g(x+ct)$（左進行波）
  - $x + ct =$ 一定 であるとき，$x = -ct +$ 一定

6.5. 補遺：波動方程式の解（d'Alembert の解） (7)

- 時間とともに負の x 方向に速度 c で伝搬する波
- 波形 g が変形することなく左方向に移動

- このように，一般解は右進行波と左進行波の重ね合わせとして表現される．
- 弾性波との関係：
  - P 波（縦波）：$u(x,t) = f_\mathrm{l}(x - c_\mathrm{l}t) + g_\mathrm{l}(x + c_\mathrm{l}t)$，$c_\mathrm{l} = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$
  - S 波（横波）：$u(x,t) = f_\mathrm{t}(x - c_\mathrm{t}t) + g_\mathrm{t}(x + c_\mathrm{t}t)$，$c_\mathrm{t} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$
- これより，弾性体内の波動現象を定量的に記述できる．
- 具体的な解は，f や g は，三角関数となるが，これは波動方程式を変数分離などすることにより容易に求めることができる．