連続体力学 2025 年度レポート問題

川崎 出題

2025 年 12 月 23 日

[**注意事項**] 以下の問題（第 1 問・第 2 問・第 3 問・第 4 問・第 5 問）を期限までに解き、CLE の当該箇所から PDF 形式で提出せよ。なお，他人の答案の剽窃は厳禁である．また，生成 AI の過度な依存（内容を理解せず写したと思われるものなど）も剽窃とみなす場合があるので注意せよ．特に問題文に断りのない場合は答案の導出過程を詳細に示すこと．

第 1 問（連続体の基礎）

一般の連続体に関して以下の設問に答えよ．
[設問]

(1) 任意の微小連続体の面積要素を考える．ここでの法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とする．この面に働く応力ベクトル $\mathbf{p}$（この面が外部から受ける単位面積あたりの力）が，この微小連続体の応力テンソル P_{ij} を用いて

$$p_i = \sum_j P_{ij} n_j$$

と表せることを示せ（Cauchy の応力定理）．[ヒント：四面体の微小連続体を考えるとよい．微小連続体中の応力テンソルは均一とみなしてよい．]

(2) 極近傍にある連続体上の 2 点 $\mathbf{x}$ および $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ を考える．連続体が運動（または変形）することにより，それぞれの点が $\mathbf{r}$ および $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ 変位したとする．この時 $\delta\mathbf{r}$ を変形ベクトルであることを講義で導入した．この時，$\delta\mathbf{r}$ と $\delta\mathbf{x}$ の関係から変形勾配テンソル D_{ij} を導出せよ．ただし $\delta\mathbf{x}$ の大きさは極めて小さいとし，線形近似が成立するものとする．また，変形勾配テンソルを対称・反対称テンソル（それぞれ E_{ij} および F_{ij}）に分解せよ．

(3) 変形勾配テンソルが $D_{21} = \gamma$，その他の成分が 0 である変形を考える．連続体は変形前は一辺が L の立方体領域であり，これがどのように変形されたか図示せよ．[なお，図に関しては x_1, x_2 平面への投影図として示せ．また講義で扱った問題と設定がやや異なるので注意せよ．]

(4) 問 (3) の変形に対応する E_{ij} と F_{ij} を求めよ．また，それぞれがどのような変形に対応するか問 (3) と同様に図示せよ．

第 2 問（線形弾性論）

微小変形下における弾性体に関する以下の設問に答えよ．
[設問 **I**]

(1) 一般の弾性体における構成関係式は

$$P_{ij} = \sum_{k\ell} C_{ijk\ell} E_{k\ell}$$

と表される（Hooke の法則）．いま，弾性体が等方的であるとき，弾性率テンソル $C_{ijk\ell}$ は

$$C_{ijk\ell} = \lambda\delta_{ij}\delta_{k\ell} + \mu(\delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk})$$

と表される．この時，構成関係式が

$$P_{ij} = \lambda\,\mathrm{Tr}(\mathsf{E})\,\delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$$

となることを示せ.

(2) 弾性体が（圧縮・膨張とは限らない）任意の変形により体積が V から $V + \Delta V$ に変化したとする．この時，体積変化率が

$$\frac{\Delta V}{V} = \mathrm{Tr}(\mathsf{E})$$

となることを示せ［ヒント：$\delta\mathbf{x}$ の各成分を基底軸とする直方体の体積を $V = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$ とする．これが変形により，対応するベクトルが $\delta\mathbf{x} + \delta\mathbf{r} = (\mathsf{I} + \mathsf{D}) \cdot \delta\mathbf{x}$ に変化する．これにともない，各基底ベクトルも変形し，直方体領域は平行六面体（体積 $V + \Delta V$）に変形したと考えることができる．この時，平行六面体の体積は $\det(\mathsf{I} + \mathsf{D})V$ となることを用いてよい（ヤコビ行列の考え方と近い）］.

(3) 系に等方的な応力 $P_{ij} = p\delta_{ij}$ を与えた際の等方膨張の変形を考える．この時，体積変化率 (体積歪み) が $\frac{\Delta V}{V} = \epsilon$ である時，歪みテンソル E を求めよ.

(4) 問 (3) の条件のもと体積弾性率 K の定義は

$$p = K\frac{\Delta V}{V} = K\epsilon$$

である．この時，K を λ と μ を用いて表せ.

[**設問 II**] 一辺の長さが L の立方体の等方弾性体を考える．各辺に平行な方向を x_1, x_2, x_3 軸とする．図 1 のような 1 軸伸長変形を考える（他軸には一切の外力がかかっていないものとする）．構成関係式は問 (1) で求めたものと同様のものを用いるものとする．この時，以下の各問いに答えよ［講義と設定が異なるので注意せよ］.

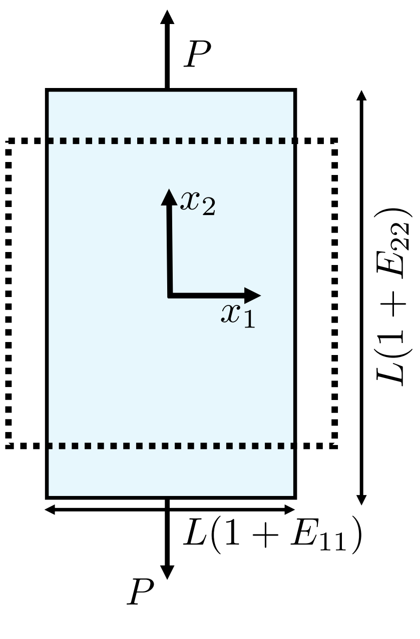

図 1: 第 2 問 [設問 II] の一軸伸長における設定図.

(5) 歪みテンソル E を λ，μ をなどを用いて求めよ.

(6) Poisson 比および Young 率を λ，μ をなどを用いて求めよ.

第 3 問（運動方程式）

以下の各設問に答えよ．

(1) 一般的な連続体の運動方程式が

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{u}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathsf{P}+\mathbf{K}$$

となることを示せ．ρ，$\mathbf{u}$，P，$\mathbf{K}$ は，それぞれ時刻 t，位置 $\mathbf{x}$ における連続体の質量密度，速度，応力テンソル，体積力（外力）である．

(2) 変位（速度）が小さい極限における，等方弾性体の運動方程式を導出せよ（Navier 方程式）．ここでは，第 2 問で議論した等方弾性体の構成関係式を前問 (1) の運動方程式に代入することにより求めよ．

(3) 静水圧を p とするとき，等方流体の構成関係式は，

$$P_{ij}=-p\delta_{ij}+\zeta\,\mathrm{Tr}(\dot{\mathsf{E}})\,\delta_{ij}+2\eta\dot{E}_{ij}$$

となることおよび問 (1) の運動方程式を合わせることで，等方流体の運動方程式（Navier-Stokes 方程式）を導け．

(4) 連続体の非圧縮条件を導出し，非圧縮条件下における Navier-Stokes 方程式を導け．非圧縮条件は結果だけでなく根拠となる式を合わせて導出の説明を与えること．

(5) $\mathbf{x}=L\tilde{\mathbf{x}}$，$\mathbf{u}=U\tilde{\mathbf{u}}$，$t=(L/U)\tilde{t}$，$p=\rho U^2\tilde{p}$ などとする，$\tilde{}$ で表した無次元化した物理量を定義する．これらおよび Reynolds 数 R_{e} を用いて問 (4) の方程式を表せ．なお，体積力は保存力とし圧力項に繰り込んでよいものとする．

第 4 問（流体力学：低 Reynolds 数流体）

$R_{\mathrm{e}}\ll 1$ である非圧縮性低 Reynolds 数流体に関する以下の各設問に答えよ．

(1) $R_{\mathrm{e}}\ll 1$ のもとで，Navier-Stokes 方程式を単純化した Stokes 方程式を導け．

以下の設問では原点に固定された球に x_2 軸無限遠負領域からから x_2 軸正領域に向けて一様流が流れる際の振る舞いを考える．球から無限遠領域において，流れの速度は $U\mathbf{e}_2$，圧力を p_∞ とする．また，球の表面での流体の速度を $\mathbf{0}$ とする（no-slip 境界条件）．この時，以下の各問いに答えよ．[講義資料と設定が異なることに注意せよ．]

(2) 問 (1) の方程式の基本解（特殊解：Stokeslet）を求めよ．

(3) 各境界条件を考慮することで問 (1) の方程式の解（流速場）を求めよ．

(4) 対称性から流体から球にかかる力 $\mathbf{F}=(0,F_2,0)$ となる．特に x_2 成分の力は $F_2=6\pi\eta aU$ となるが (Stokes 抵抗則)，これを求める方針を示せ（実際に計算しなくてもよい）．意欲がある人は計算過程も残せ．

第 5 問（流体力学：高 Reynolds 数流体）

密度 ρ が一定かつ $R_{\mathrm{e}}\gg 1$ である高 Reynolds 数流体（完全流体）に関する以下の各設問に答えよ．

(1) $\mathrm{Re}\gg 1$ のもとで，Navier-Stokes 方程式を単純化した Euler 方程式を導け．

(2) 以下のベクトル恒等式

$$(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2\right) - \mathbf{u}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})$$

を導け．

(3) 問 (1) の方程式に関して，定常流条件 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$ を考える．問 (2) の恒等式を用いることで以下の Bernoulli の定理

$$p + \frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2 + \Psi = \mathrm{const}\ \text{（同一流線上）}$$

を示せ．なお，流体にかかる外力はポテンシャル Ψ を用いて $-\boldsymbol{\nabla}\Psi$ と書けるとする．

(4) 大きな容器内の液体が，水面から鉛直下向きに距離 h の位置にある小さな孔から定常的に流出する場合を考える．大気圧を p_0 とする．水面と孔を結ぶ流線に沿って Bernoulli の定理を適用し，孔から流出する流体の速度を求めよ（Torricelli の定理）．なお，重力加速度の大きさを g とする．

[問題は以上]