

# 連続体力学 第12回

## 高 Reynolds 数流体：ポテンシャル流

川崎猛史

大阪大学 D3 センター / 大学院理学研究科物理学専攻

Last update : January 19, 2026

# 第 12 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 渦なし流れとポテンシャル運動

- Helmholtz 分解
- 非圧縮条件下における完全流体のポテンシャル流
- ポテンシャル流の具体例 (一様流)
- ポテンシャル流の具体例 (湧き出し・吸い込み)
- ポテンシャル流の具体例 (半無限物体を過ぎる流れ)
- ポテンシャル流の具体例 (ランキン卵形)
- ポテンシャル流の具体例 (ランキン卵形の双極子近似：球の周りの流れ)
- 非粘性ポテンシャル流から球に働く力
- ポテンシャル流のまとめ

## 3 まとめ

# 第 12 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 渦なし流れとポテンシャル運動

- Helmholtz 分解
- 非圧縮条件下における完全流体のポテンシャル流
- ポテンシャル流の具体例 (一様流)
- ポテンシャル流の具体例 (湧き出し・吸い込み)
- ポテンシャル流の具体例 (半無限物体を過ぎる流れ)
- ポテンシャル流の具体例 (ランキン卵形)
- ポテンシャル流の具体例 (ランキン卵形の双極子近似：球の周りの流れ)
- 非粘性ポテンシャル流から球に働く力
- ポテンシャル流のまとめ

## 3 まとめ

## 12.1. 講義のスケジュール

- |   |                         |    |                      |
|---|-------------------------|----|----------------------|
| 1 | 10/6：第 1 回              | 9  | 12/15：第 9 回          |
| 2 | 10/20：第 2 回             | 10 | 12/22：第 10 回         |
| 3 | 10/27：第 3 回             | 11 | 1/5：第 11 回           |
| 4 | 11/5(水)：第 4 回           | 12 | 1/15(木)：休講           |
| 5 | 11/17：第 5 回 (11/10 は休講) | 13 | 1/19：第 12 回          |
| 6 | 11/26(水)：第 6 回          | 14 | 1/26：第 13 回          |
| 7 | 12/1：第 7 回              | 15 | 2/2：第 14 回 期末試験 (予定) |
| 8 | 12/8：第 8 回              |    |                      |

# 第 12 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 渦なし流れとポテンシャル運動

- Helmholtz 分解
- 非圧縮条件下における完全流体のポテンシャル流
- ポテンシャル流の具体例 (一様流)
- ポテンシャル流の具体例 (湧き出し・吸い込み)
- ポテンシャル流の具体例 (半無限物体を過ぎる流れ)
- ポテンシャル流の具体例 (ランキン卵形)
- ポテンシャル流の具体例 (ランキン卵形の双極子近似：球の周りの流れ)
- 非粘性ポテンシャル流から球に働く力
- ポテンシャル流のまとめ

## 3 まとめ

## 12.2. 渦なし流れとポテンシャル運動

- 前回の講義では、渦のある流れが循環によって特徴付けられ、その保存則が流体運動の本質的な性質を支配することを学んだ。
- さらに、Lagrange の渦定理により、(非保存力の働かない) 定常完全流体においては、
  - いったん存在する渦は消滅せず、
  - 逆に、初めに渦が存在しなければ、その後も新たな渦は生成されないことが示された。
- 本講義では、この「渦なし」の条件に着目し、完全流体における流動場の構造を体系的に考察する。

## 12.2.1. Helmholtz 分解

### ♣ Helmholtz 分解

- 一般に，十分な滑らかさと適切な境界条件のもとで，流体の速度場は Helmholtz 分解により

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (1)$$

と表される．ここで  $\Phi$  はスカラーポテンシャル， $\mathbf{A}$  はベクトルポテンシャルである．

- **Lagrange の渦定理** より，（非保存力の働かない）完全流体においては，  
**渦なしの初期条件** を課することができれば，その後の時間発展においても常に渦なしの状態が保たれる．
- すなわち，全ての時刻において，

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (\nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (2)$$

が成り立つ．

## 12.2.1. Helmholtz 分解 (2)

- この条件のもとで、より一般的には

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \phi \quad (3)$$

とおくことができる。しかしこのとき、

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi + \nabla \phi = \nabla (\Phi + \phi) \quad (4)$$

となり、結局、速度場は再びスカラーポテンシャル（速度ポテンシャル）の勾配として表される。

- したがって、渦なし完全流体の流れは常に

$$\boxed{\mathbf{u} = \nabla \Phi} \quad (5)$$

と書くことができる。このような流れを **ポテンシャル流** と呼ぶ。

## 12.2.2. 非圧縮条件下における完全流体のポテンシャル流

### ♣ 非圧縮条件下における完全流体のポテンシャル流

- 前節で議論した通り，（保存力のもとで）完全流体においては，渦なしの初期条件での流れは，その後も渦なしであり，

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi \quad (6)$$

と表される．

- この条件下で，非圧縮条件

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (7)$$

を考慮すると，

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla \Phi) = \nabla^2 \Phi \quad (8)$$

より，速度ポテンシャルはラプラス方程式

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = 0} \quad (9)$$

## 12.2.2. 非圧縮条件下における完全流体のポテンシャル流 (2)

を満たす．つまり，この条件下における流動場の問題は，第 8 回，9 回でも扱ったが，**境界条件のもとで**このラプラス方程式を解く問題（ $\Phi$  は調和関数）に帰着する．

- さらにこれらの**速度ポテンシャルから求められる速度場に対して，Bernoulli の定理**（ $\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$ ：第 10 回参照）を与えることで，圧力が定まり，非圧縮条件下完全流体を記述する Euler 方程式の解  $(\mathbf{u}, p)$  を求めることができる．

## 12.2.3. ポテンシャル流の具体例 (一様流)

### ♣ ポテンシャル流の具体例 (一様流)

- 前節の議論をもとに、以下においては渦なしの完全流体を仮定する.
- このとき, Langrange の渦定理から, いかなる時刻においても渦が存在しない.
- その中で, ラプラス方程式の解となる, 非圧縮完全流体において実用的なポテンシャル流の具体例をいくつか扱う.

### 12.2.3. ポテンシャル流の具体例 (一様流) (2)

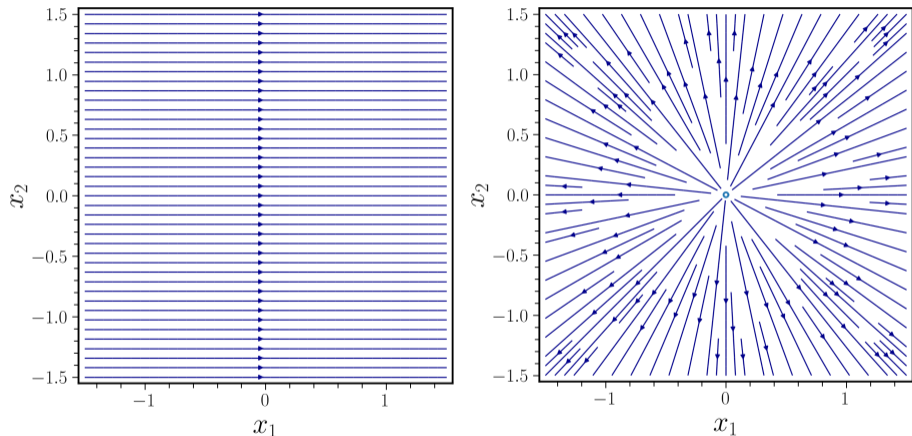


図 1: 例 1,2 の流れ：一様流と湧き出し流．なお，例 1 では  $U > 0$ ，例 2 では  $m > 0$  とする．

### 12.2.3. ポテンシャル流の具体例 (一様流) (3)

例 1: 一様流

$U$  を正定数とする速度ポテンシャル

$$\Phi = Ux_1 \quad (10)$$

を考える. この時, 流動場  $\mathbf{u}$  を求めよ. これよりどのような流れを記述するか議論せよ. さらに, ポテンシャル  $\Psi$  はラプラス方程式の解であることを確認せよ.

- この  $\Phi$  から得られる速度場は

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi = (U, 0, 0)^T \quad (11)$$

であり,  $x_1$  方向に流れる一様流を表す.

- さらに, この  $\Phi$  は,

$$\nabla^2\Phi = \nabla^2(Ux_1) = 0 \quad (12)$$

を満たすため, 非圧縮条件下におけるポテンシャル流の解となっている.

## 12.2.4. ポテンシャル流の具体例 (湧き出し・吸い込み)

### ♣ ポテンシャル流の具体例 (湧き出し・吸い込み)

例 2: 湧き出し・吸い込み

$m$  を定数とする速度ポテンシャル

$$\Phi = -\frac{m}{r} \quad (13)$$

を考える．まずこの速度ポテンシャル  $\Psi$  はラプラス方程式の解 (球対称) であることを確認せよ．この時， $\Psi$  によって与えられる流動場における動径方向の速度  $u_r$  を求めよ．これよりどのような流れを記述するか議論せよ．

## 12.2.4. ポテンシャル流の具体例 (湧き出し・吸い込み) (2)

- この  $\Phi$  もラプラス方程式

$$\nabla^2 \Phi = -\partial_i \partial_i \left( \frac{m}{r} \right) = \frac{-3mx_i^2}{r^5} + \frac{m}{r^3} \delta_{ii} = \frac{-3m}{r^3} + \frac{3m}{r^3} = 0 \quad (r \neq 0) \quad (14)$$

を満たす.

- また, 第 8 回でも扱った通り,

$$\Phi = \Phi(r) \quad (15)$$

であることから, この流れは球対称な解となる.

- 球対称な場合, ラプラス方程式は

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0 \quad (16)$$

と書ける.

## 12.2.4. ポテンシャル流の具体例 (湧き出し・吸い込み) (3)

- この方程式を積分すると,

$$r^2 \frac{d\Phi}{dr} = C \quad (17)$$

さらに積分して,

$$\Phi = -\frac{C}{r} + C_0 \quad (18)$$

を得る. ここで  $C, C_0$  は積分定数である. 定数項  $C_0$  は速度場に寄与しないため, 以下では  $C_0 = 0$  とすれば, 題意の速度ポテンシャルの形になる.

- ここで, 湧き出し (あるいは吸い込み) の総量  $Q$  を

$$Q = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (19)$$

と定義する.

## 12.2.4. ポテンシャル流の具体例 (湧き出し・吸い込み) (4)

- 半径  $r = R$  の球面上で  $Q$  を計算すると,  $u_i = \partial_i \left(-\frac{m}{r}\right) = \frac{mx_i}{r^3}$ ,  $n_i = \frac{x_i}{r}$  であるので,

$$Q = \int_S \frac{mx_i}{r^3} \frac{x_i}{r} dS = \int_S \frac{m}{r^2} dS = 4\pi r^2 \frac{m}{r^2} = 4\pi m \quad (20)$$

を得る. ここで  $x_i x_i = r^2$  である. したがって, 速度ポテンシャルから  $m$  を消去することで

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi r}, \quad (21)$$

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (22)$$

と表すことができる.

- この結果は, 点電荷のつくる電位や電場と完全に同型であり, ポテンシャル流と電磁気学との対応関係を端的に示している.

## 12.2.4. ポテンシャル流の具体例 (湧き出し・吸い込み) (5)

補足 (重要): 「湧き出し・吸い込み」は見かけ上 “非圧縮” の流れであるが、これは  $r \neq 0$  の領域に限った話である. 原点  $r = 0$  では速度場が特異となり、そこは **点源 (あるいは点吸い込み)** として扱われる. より厳密には、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = Q \delta(\mathbf{r}) \quad (23)$$

と表される. すなわち、原点を除く領域では

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (r \neq 0) \quad (24)$$

が成り立つ一方、流体の生成 (あるいは消滅) は原点に集中していることを意味する.

## 12.2.5. ポテンシャル流の具体例 (半無限物体を過ぎる流れ)

### ♣ ポテンシャル流の具体例 (半無限物体を過ぎる流れ)

例 3：半無限物体を過ぎる流れ (ランキン半体)

$U, m$  を正定数とする速度ポテンシャル

$$\Phi = Ux_1 - \frac{m}{r} \quad (25)$$

を考える．この時の流動場の振る舞いを定性的に議論せよ． $x_1$  軸負の領域に生じる淀み点の位置を求めよ．また，淀み点を通る流線が，外部流と内部流の分離境界になることを議論せよ．

- これは，一様流と湧き出しを重ね合わせたポテンシャル流であり，この流れによって形成される物体形状をランキン半体 (Rankine half-body) と呼ぶ (図 2)．
- $x_1$  軸上の無限上流，無限下流では，流れは一様流に一致する．

## 12.2.5. ポテンシャル流の具体例 (半無限物体を過ぎる流れ) (2)

- $x_1$  軸上のある点において、一様流と湧き出しの効果が釣り合い、

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (26)$$

となる点、すなわち **淀み点 (stagnation point)** が生じる (図 2 の緑点).

- 以下、淀み点の位置を求める.  $x_1$  軸上では  $r = |x_1|$  であり、速度の  $x_1$  成分は

$$u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = U + m \frac{x_1}{|x_1|^3} \quad (27)$$

となる.

## 12.2.5. ポテンシャル流の具体例 (半無限物体を過ぎる流れ) (3)

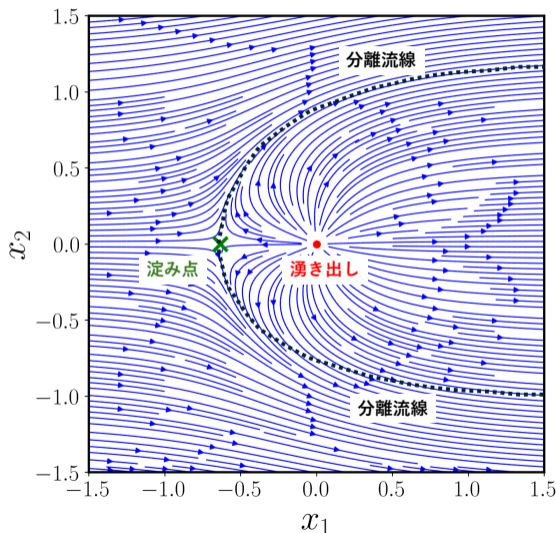


図 2: 例 3 の流れ：ランキン半体 (Rankine half-body). 一様流と湧き出しを重ね合わせたポテンシャル流である. [\[動画リンク\]](#) ここでは, 分離境界の外側に粒子を流したときの様子. 一切の粒子が境界内部に入らない.

## 12.2.5. ポテンシャル流の具体例 (半無限物体を過ぎる流れ) (4)

- 淀み点は  $u_1 = 0$  を満たす位置  $x_1 = x_s (< 0)$  であり,

$$x_s^2 = \frac{m}{U} \quad (28)$$

を得る．よって,

$$x_s = -\sqrt{\frac{m}{U}} \quad (29)$$

となる．

- 湧き出しによって生じた流れは、淀み点を通る流線によって囲まれた領域の内部を流れる．この流線が、外部流と内部流を分ける半無限大円筒状の 分離境界 となる．(図 2 の点線)
- この結果、流れ場は上記の領域の内外に分かれ、それぞれで流れの定性的性質が異なる．両領域の流体が混じり合うことはない．
- この内部領域を **分離境界を表面にもつ固体の物体** と置き換えても、外部の流動は変わらない．(完全流体では固体表面に沿って **滑りが許されるため**)

## 12.2.6. ポテンシャル流の具体例（ランキン卵形）

### ♣ ポテンシャル流の具体例（ランキン卵形）

例 4：ランキン卵形（**Rankine oval**）

$(-a, 0, 0)$  における強さ  $m(> 0)$  の湧き出しと  $(a, 0, 0)$  における強さ  $-m$  の吸い込みを重ね合わせた速度ポテンシャル：

$$\Phi = Ux_1 - \frac{m}{r_+} + \frac{m}{r_-} \quad (30)$$

を考える．ここで  $r_+ = \sqrt{(x_1 + a)^2 + x_2^2 + x_3^2}$ ， $r_- = \sqrt{(x_1 - a)^2 + x_2^2 + x_3^2}$  である．また， $U, m, a$  は定数である．この時，湧き出しと吸い込みの流れの内外を分ける分離境界上にある淀み点を求めよ．またこの分離境界の形状を議論せよ．

- この流れによって形成される物体形状を，**ランキン卵形（Rankine oval）** と呼ぶ．

## 12.2.6. ポテンシャル流の具体例（ランキン卵形） (2)

- $x_1$  軸上の 2 点において,

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (31)$$

となる **淀み点** が生じる.

## 12.2.6. ポテンシャル流の具体例（ランキン卵形） (3)

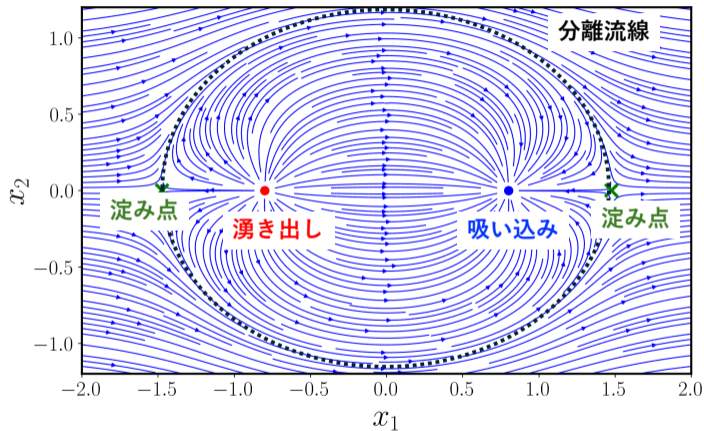


図 3: 例 4：ランキン卵形（Rankine oval）．楕円型の分離境界を生じる．

## 12.2.6. ポテンシャル流の具体例（ランキン卵形） (4)

- 淀み点を  $x_1 \equiv \pm x_s$  ( $x_s > 0$ ) とする.  $x_1$  軸上では速度の  $x_1$  成分は

$$u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = U + m \frac{x_1 + a}{|x_1 + a|^3} - m \frac{x_1 - a}{|x_1 - a|^3} \quad (32)$$

であり、淀み点では  $u_1 = 0$  が成立する.

- いま右側の淀み点  $x_1 = x_s > a$  を考えると,  $|x_s \pm a| = x_s \pm a$  であるから,

$$U + \frac{m}{(x_s + a)^2} - \frac{m}{(x_s - a)^2} = 0 \quad (33)$$

を得る.

- これを整理すると,

$$\frac{4amx_s}{(x_s^2 - a^2)^2} = U \quad (34)$$

が成り立つ.

## 12.2.6. ポテンシャル流の具体例（ランキン卵形） (5)

- 一般にはこれは  $x_s$  に関する 4 次方程式であり，解析的に解くことは煩雑である．しかし，淀み点が湧き出し・吸い込みから十分離れている  $x_s \gg a$  の極限では，

$$x_s \simeq \left( \frac{4am}{U} \right)^{1/3} \quad (35)$$

が得られる．左側の淀み点是对称性から  $x_1 = -x_s$  で与えられる．

- これら 2 つの淀み点を結ぶ流線が，外部流と内部流を分ける 分離境界 となる．
- 先の例と同様にこの分離境界の内側を分離境界（楕円体）を表面にもつ固体の物体と置き換えても外部の流動は変わらない．

## 12.2.7. ポテンシャル流の具体例 (ランキン卵形 of 双極子近似: 球の周りの流れ)

### ♣ ポテンシャル流の具体例 (ランキン卵形 of 双極子近似: 球の周りの流れ)

例 5: ランキン卵形 of 双極子近似 (球の周りの流れ)

例 4 のランキン卵形 of ポテンシャル流において, 原点と淀み点までの距離  $|x_s|$  に対して  $a \ll |x_s|$  が成り立つとき,  $r \gg a$  とみなすことができ, 以下の双極子近似

$$\Phi = Ux_1 + \frac{2amx_1}{r^3} \quad (36)$$

が成立することを示せ. また, このときの分離境界は球面となることを示せ.

## 12.2.7. ポテンシャル流の具体例 (ランキン卵形 of 双極子近似: 球の周りの流れ) (2)

- まず, 例 4 のランキン卵形における湧き出し・吸い込みに由来する項は

$$-\frac{m}{r_+} + \frac{m}{r_-} = m \left( \frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) = m \frac{r_+ - r_-}{r_+ r_-} \quad (37)$$

と書ける.

## 12.2.7. ポテンシャル流の具体例 (ランキン卵形 of 双極子近似: 球の周りの流れ) (3)

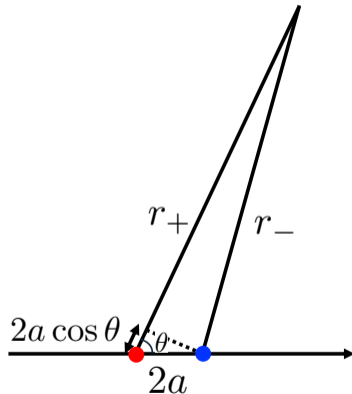


図 4: 例 5 の設定

## 12.2.7. ポテンシャル流の具体例 (ランキン卵形 of 双極子近似: 球の周りの流れ) (4)

- 図 4 より

$$r_+ - r_- = 2a \cos \theta \quad (38)$$

が成り立つ.

- 次に  $a \ll r$  のもとでは

$$r_+ r_- \simeq r^2 \quad (39)$$

と近似できる.

## 12.2.7. ポテンシャル流の具体例 (ランキン卵形 of 双極子近似: 球の周りの流れ) (5)

- したがって、式 (38) および (39), さらに  $x_1 = r \cos \theta$  を用いると

$$-\frac{m}{r_+} + \frac{m}{r_-} \simeq m \frac{2a \cos \theta}{r^2} = \frac{2am}{r^2} \frac{x_1}{r} = \frac{2amx_1}{r^3} \quad (40)$$

となり,

$$\Phi \simeq Ux_1 + \frac{2amx_1}{r^3} \quad (41)$$

を得る. すなわち, この流れは, 双極子モーメント  $2am$  をもつ双極子流と速さ  $U$  をもつ一様流との重ね合わせとして表される.

- 次に, このポテンシャル流において, 分離境界が球面となることを示す.

## 12.2.7. ポテンシャル流の具体例 (ランキン卵形 of 双極子近似: 球の周りの流れ) (6)

- $x_1 = r \cos \theta$  を用いてポテンシャルを書き換えると

$$\Phi = Ur \cos \theta + \frac{2am}{r^2} \cos \theta = \left( Ur + \frac{2am}{r^2} \right) \cos \theta \quad (42)$$

となり,  $\Phi$  は  $(r, \theta)$  のみの関数として表される.

- 一方, 分離境界では非貫入条件として動径方向速度  $u_r = 0$  が成立する.
- 軸対称流れ ( $\partial/\partial\phi = 0$ ) における  $\nabla$  の極座標表示

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (43)$$

を用いると, 動径方向速度は

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \cos \theta \left( U - \frac{4am}{r^3} \right) \quad (44)$$

と計算される.

## 12.2.7. ポテンシャル流の具体例 (ランキン卵形 of 双極子近似: 球の周りの流れ) (7)

- ここで, 前節で求めた淀み点までの距離  $r = R = |x_s|$  を代入すると

$$u_r(R) = \cos \theta \left( U - \frac{4am}{R^3} \right) = 0 \quad (45)$$

が成り立つ.

- したがって, 半径  $R$  をもつ球面  $r = R$  上では, 全方位にわたって非貫入条件が満たされる. すなわち, この分離境界は球面であることが分かる (図 5).

## 12.2.7. ポテンシャル流の具体例 (ランキン卵形 of 双極子近似: 球の周りの流れ) (8)

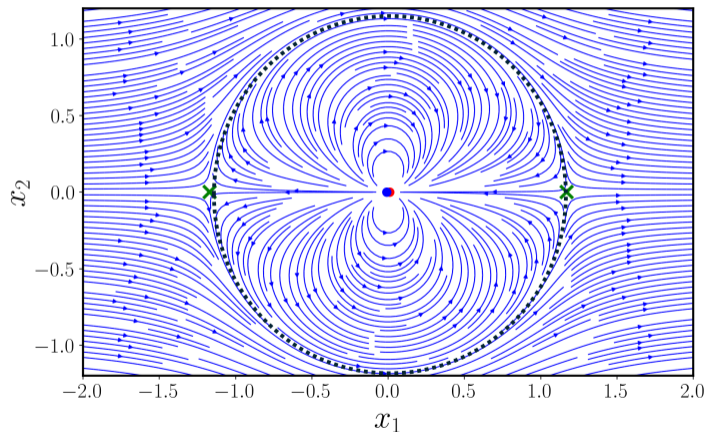


図 5: 例 5 の流動場. 双極子近似により, 分離境界が球になる.

## 12.2.7. ポテンシャル流の具体例 (ランキン卵形 of 双極子近似: 球の周りの流れ) (9)

- 最後に, この分離境界の半径  $R$  を用いてポテンシャルを書き直すと,  $4am = R^3U$  であるから, 式 (41) を以下のように変形できる

$$\Phi = Ux_1 + \frac{2amx_1}{r^3} = Ux_1 + \frac{Ux_1R^3}{2r^3} = U \left( r + \frac{R^3}{2r^2} \right) \cos \theta \quad (46)$$

## 12.2.8. 非粘性ポテンシャル流から球に働く力

### ♣ 非粘性ポテンシャル流から球に働く力

- 完全流体（粘性をもたない流体）では，応力テンソル  $(P)_{ij} = P_{ij}$  は圧力成分のみからなり，

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (47)$$

と表される．したがって，物体表面  $S$  に働く力（合力）は

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_S p \mathbf{n} dS \quad (48)$$

で与えられる．

- いま，半径  $R$  の球のまわりの**定常ポテンシャル流**（一様流速  $U$ ）を考える．このとき，第10回で扱った Bernoulli の定理より，球表面における圧力は

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2} (U^2 - |\mathbf{u}|^2) \quad (49)$$

で与えられる（ここでは重力などの外力は無視している）．

## 12.2.8. 非粘性ポテンシャル流から球に働く力 (2)

- 球のまわりのポテンシャル流は、非貫入条件  $u_r(R, \theta) = 0$  を満たし、前節で示したように

$$\Phi = U \left( r + \frac{R^3}{2r^2} \right) \cos \theta \quad (50)$$

で与えられる (式 46 を参照). このとき、極座標表示における速度成分は

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = U \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -U \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin \theta \quad (51)$$

となる (極座標における勾配の表式は式 43).

## 12.2.8. 非粘性ポテンシャル流から球に働く力 (3)

- 球表面  $r = R$  では、非貫入条件により  $u_r = 0$  であり、

$$u_\theta(R, \theta) = -\frac{3}{2}U \sin \theta, \quad |\mathbf{u}(R, \theta)|^2 = \frac{9}{4}U^2 \sin^2 \theta \quad (52)$$

が成り立つ．これを式 49 に代入すると、表面圧力分布として

$$p(\theta) = p_\infty + \frac{\rho}{2}U^2 \left(1 - \frac{9}{4}\sin^2 \theta\right) \quad (53)$$

を得る．

- 次に、合力の  $x_1$  成分（流れ方向成分）を計算する．球面上では外向き法線ベクトルは  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$  であり、 $n_1 = \cos \theta$ 、面素は  $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  である．したがって

$$F_1 = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta p(\theta) \cos \theta R^2 \sin \theta \quad (54)$$

となる．

## 12.2.8. 非粘性ポテンシャル流から球に働く力 (4)

- ここで、圧力  $p(\theta)$  は  $\sin^2 \theta$  のみの関数であるため、被積分関数  $p(\theta) \cos \theta \sin \theta$  は変換  $\theta \rightarrow \pi - \theta$  に対して符号が反転する．その結果、積分区間  $[0, \pi]$  で完全に相殺し、

$$F_1 = 0 \quad (55)$$

を得る．同様の議論により  $F_2 = F_3 = 0$  である．したがって最終的に

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{0}} \quad (56)$$

が成り立つ (d'Alembert のパラドックス)．

- この結果は、完全流体では物体に働く抗力がゼロになることを意味する．しかし、実在流体では粘性に起因するエネルギー散逸が存在し、有限の抵抗力が生じる．この乖離は、粘性項の導入が本質的であることを示している．

## 12.2.9. ポテンシャル流のまとめ

### ♣ ポテンシャル流のまとめ

- 本講義では、非圧縮かつ渦なしの流れが式 (5) および式 (9) によって記述されることを学んだ．すなわち，流体の問題が **ラプラス方程式の問題** に還元される．
- 一様流，湧き出し・吸い込み，双極子といった基本要素の重ね合わせにより，多様な流れ場を構成できることを見た．（ランキン半体，ランキン卵形，双極子流）
- この考え方を拡張すると，基本要素の数を増やし，その強さと配置を調整することで，より複雑な形状の物体まわりの流れをポテンシャル流として近似的に記述できる．
- 実際には，物体表面での境界条件

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (57)$$

を満たすように，湧き出しや双極子を分布させることで，物体まわりの流れ場を構成することができる．

## 12.2.9. ポテンシャル流のまとめ (2)

- 一方、ポテンシャル流は粘性を含まない理想化である。しかし、第8回・第9回で学んだ **粘性流** と対比することで、どの現象が 粘性の効果であり、どれが 境界条件や幾何学だけで決まる効果なのかを切り分けて理解できる。
- この意味で、ポテンシャル流は現実の流体を考えるうえでの **基準となる理論** として重要な役割を果たす。

# 第 12 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 渦なし流れとポテンシャル運動

- Helmholtz 分解
- 非圧縮条件下における完全流体のポテンシャル流
- ポテンシャル流の具体例 (一様流)
- ポテンシャル流の具体例 (湧き出し・吸い込み)
- ポテンシャル流の具体例 (半無限物体を過ぎる流れ)
- ポテンシャル流の具体例 (ランキン卵形)
- ポテンシャル流の具体例 (ランキン卵形の双極子近似：球の周りの流れ)
- 非粘性ポテンシャル流から球に働く力
- ポテンシャル流のまとめ

## 3 まとめ

## 12.3. まとめ

- 粘性を無視した Euler 方程式で記述される流れでは, Lagrange の渦定理より, 初期条件として渦なし条件を課せば, その後の時間発展においても流れは常に渦なしに保たれる. さらに, 速度場に対する Helmholtz 分解を用いることで, 渦なし条件のもとでは, 流体の運動は速度ポテンシャルを求める問題へと帰着する.
- 各種ポテンシャルから生じる具体的な流動場として, 一様流, 湧き出し, 吸い込み, 双極子流などを紹介した. これらを適切に重ね合わせることで, 流れの中に **分離境界**を形成できることを示した. 特に, Euler 方程式の場合, 境界の滑りを許すため, 分離境界の内側を**分離境界を表面にもつ固体の物体**と置き換えても, 外部の流動場が変化しないことから, 複雑な形状の物体まわりの流れを, 比較的単純なポテンシャルの重ね合わせによって表現できることを学んだ.
- さらに, 非粘性流体において, 球が一様流から受ける力を計算すると合力が 0 となる, いわゆる **d'Alembert のパラドックス**を確認した. この結果は, 抵抗力の発現には粘性によるエネルギー散逸が本質的であることを示している.

次回: 複素関数論をもちいた 2 次元完全流体の流動解析