

# 連続体力学 第 11 回

## 高 Reynolds 数流体：渦と循環

川崎猛史

大阪大学 D3 センター / 大学院理学研究科物理学専攻

Last update : January 3, 2026

# 第 11 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 渦と循環

- 渦度
- Kelvin の循環定理
- 渦線と渦管
- Helmholtz の渦定理
- Lagrange の渦定理

## 3 まとめ

# 第 11 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 渦と循環

- 渦度
- Kelvin の循環定理
- 渦線と渦管
- Helmholtz の渦定理
- Lagrange の渦定理

## 3 まとめ

## 11.1. 講義のスケジュール

- |   |                         |    |                      |
|---|-------------------------|----|----------------------|
| 1 | 10/6：第 1 回              | 9  | 12/15：第 9 回          |
| 2 | 10/20：第 2 回             | 10 | 12/22：第 10 回         |
| 3 | 10/27：第 3 回             | 11 | 1/5：第 11 回           |
| 4 | 11/5(水)：第 4 回           | 12 | 1/15(木)：休講           |
| 5 | 11/17：第 5 回 (11/10 は休講) | 13 | 1/19：第 12 回          |
| 6 | 11/26(水)：第 6 回          | 14 | 1/26：第 13 回          |
| 7 | 12/1：第 7 回              | 15 | 2/2：第 14 回 期末試験 (予定) |
| 8 | 12/8：第 8 回              |    |                      |

# 第 11 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 渦と循環

- 渦度
- Kelvin の循環定理
- 渦線と渦管
- Helmholtz の渦定理
- Lagrange の渦定理

## 3 まとめ

## 11.2. 渦と循環

- 前回の講義では、完全流体におけるエネルギー保存則に対応する Bernoulli の定理を扱った.
- 本講義では、これに対応する角運動量保存則について扱う.
- とりわけ、角運動量をもつ流動場、すなわち渦に関する諸定理を、完全流体を対象として議論する.

## 11.2.1. 渦度

### ♣ 渦度

- 我々がイメージする渦とは，ある点周りで流線が閉じたものを指すことが多いが，実際には，流線が閉じていなくても渦としての特徴を，定量化することができる．
- これを微視的に特徴づける量が渦度である：

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}} \quad (1)$$

- 有限の  $\boldsymbol{\omega}$  をもつことをソレノイド性を有するとも表現される．
- 以下，いくつかの流れ場のソレノイド性を具体的に見ていく (例 1-3)．

## 11.2.1. 渦度 (2)

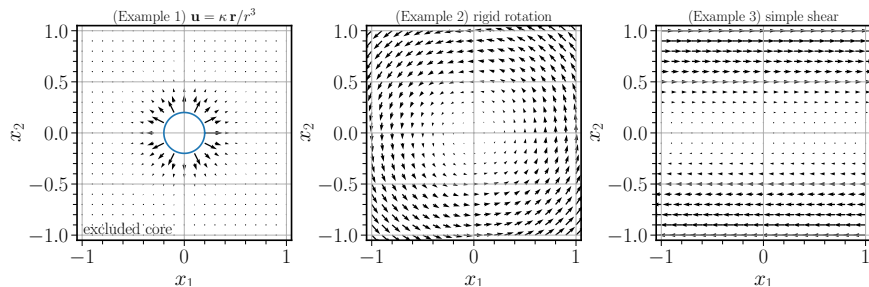


図 1: 例 1-3 の流動場. ただし, 例 1 に関しては, 円を付した  $r = 0$  付近は除外している.



## 11.2.1. 渦度 (3)

(例 1) 原点における湧き出し場

$$\mathbf{u} = \kappa \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \kappa \left( \frac{x_1}{r^3}, \frac{x_2}{r^3}, \frac{x_3}{r^3} \right)^T, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

を考える．このとき，渦度  $\omega$  を求めよ．

(解答)

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k \quad (\partial_j \equiv \partial / \partial x_j) \quad (2)$$

ここで

$$u_k = \kappa \frac{x_k}{r^3}$$

## 11.2.1. 渦度 (4)

であるから,

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \left( \kappa \frac{x_k}{r^3} \right) = \kappa \varepsilon_{ijk} \left( \frac{\delta_{jk}}{r^3} - \frac{3x_j x_k}{r^5} \right)$$

を得る.

第 1 項については

$$\varepsilon_{ijk} \delta_{jk} = 0$$

が成り立つ. また第 2 項については,  $x_j x_k$  が  $j, k$  に関して対称であるのに対し,  $\varepsilon_{ijk}$  は反対称であるため,

$$\varepsilon_{ijk} x_j x_k = 0$$

となる.

したがって,

$$\omega_i = 0 \tag{3}$$

## 11.2.1. 渦度 (5)

すなわち

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

を得る．つまり，原点を除く領域において，湧き出し場は渦度をもたないポテンシャル流である．

## 11.2.1. 渦度 (6)

(例 2) 流動場が

$$\mathbf{u} = (-\Omega x_2, \Omega x_1, 0)^T$$

のとき、渦度  $\omega$  を求めよ.

(解答)

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k \quad (\partial_j \equiv \partial / \partial x_j) \quad (5)$$

ここで  $\mathbf{u} = (-\Omega x_2, \Omega x_1, 0)^T$  より

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \varepsilon_{1jk} \partial_j u_k = \varepsilon_{123} \partial_2 u_3 + \varepsilon_{132} \partial_3 u_2 = \partial_2(0) - \partial_3(\Omega x_1) = 0 \\ \omega_2 &= \varepsilon_{2jk} \partial_j u_k = \varepsilon_{213} \partial_1 u_3 + \varepsilon_{231} \partial_3 u_1 = -\partial_1(0) + \partial_3(-\Omega x_2) = 0 \\ \omega_3 &= \varepsilon_{3jk} \partial_j u_k = \varepsilon_{312} \partial_1 u_2 + \varepsilon_{321} \partial_2 u_1 = \partial_1(\Omega x_1) - \partial_2(-\Omega x_2) = 2\Omega \end{aligned} \quad (6)$$

## 11.2.1. 渦度 (7)

したがって

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\Omega \end{pmatrix} \quad (7)$$

を得る．これは剛体回転に対応する流れであり，空間一様な渦度をもつ．

## 11.2.1. 渦度 (8)

(例 3) 流動場が単純剪断

$$\mathbf{u} = (\dot{\gamma}x_2, 0, 0)^T$$

のとき, 渦度  $\omega$  を求めよ.

(解答)

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k \quad (\partial_j \equiv \partial/\partial x_j) \quad (8)$$

ここで  $u_1 = \dot{\gamma}x_2$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = 0$  であるから,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \varepsilon_{123} \partial_2 u_3 + \varepsilon_{132} \partial_3 u_2 = 0 \\ \omega_2 &= \varepsilon_{213} \partial_1 u_3 + \varepsilon_{231} \partial_3 u_1 = 0 \\ \omega_3 &= \varepsilon_{312} \partial_1 u_2 + \varepsilon_{321} \partial_2 u_1 = -\partial_2(\dot{\gamma}x_2) = -\dot{\gamma} \end{aligned} \quad (9)$$

## 11.2.1. 渦度 (9)

したがって

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\gamma} \end{pmatrix} \quad (10)$$

を得る.

すなわち、一見すると回転が顕在化していない単純剪断流においても、渦度は有限であり、流れは回転性を有する．実際、剪断流中に剛体を置くと回転運動が生じることから、渦の存在を確認することができる．

## 11.2.2. Kelvin の循環定理

### ♣ Kelvin の循環定理

- 流体とともに運動する任意の閉曲線  $C$  を取る．このとき， $C$  に沿って定義される以下の量を循環と呼ぶ：

$$\Gamma(C) = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} \quad (11)$$

- さらに，Stokes の定理を用いると，循環は次のように書き換えられる：

$$\Gamma(C) = \int_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS \quad (12)$$

すなわち，循環は閉曲線  $C$  を張る任意の曲面  $S$  を貫く渦度のフラックスとして表され，循環と渦度は密接に関係している．



## 11.2.2. Kelvin の循環定理 (2)

- 次に、循環の Lagrange 微分を考える：

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{s} + \oint_C \mathbf{u} \cdot \frac{dD\mathbf{s}}{Dt} \quad (13)$$

ここで、第 2 項は閉曲線  $C$  が流体とともに変形・移動することによる寄与を表す。

## 11.2.2. Kelvin の循環定理 (3)

- まず最終辺第 1 項について、密度一定の完全流体における Euler 方程式

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{\Psi}{\rho} \right) \quad (14)$$

を用いると,

$$\oint_C \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{s} = - \oint_C \nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{\Psi}{\rho} \right) \cdot d\mathbf{s} = - \oint_C d \left( \frac{p}{\rho} + \frac{\Psi}{\rho} \right) \Big|_{\mathbf{s} \text{ 方向}} = \left[ \frac{p}{\rho} + \frac{\Psi}{\rho} \right]_C \quad (15)$$

を得る．ここで  $[\cdots]_C$  は、閉曲線  $C$  を一周したときの括弧内の量の差を表す．前回も出てきたが、公式  $\nabla f \cdot d\mathbf{r} = df|_{\mathbf{r} \text{ 方向}}$  を用いた．

## 11.2.2. Kelvin の循環定理 (4)

- 次に最終辺第 2 項について考える．流体とともに運動する線素  $d\mathbf{s}$  は

$$\frac{dD\mathbf{s}}{Dt} = d\left(\frac{D\mathbf{s}}{Dt}\right) = d\mathbf{u} \quad (16)$$

と書けるため，

$$\oint_C \mathbf{u} \cdot \frac{dD\mathbf{s}}{Dt} = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} = \left[\frac{1}{2}\mathbf{u}^2\right]_C \quad (17)$$

となる．

## 11.2.2. Kelvin の循環定理 (5)

- 以上より,

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \left[ \frac{p}{\rho} + \frac{\Psi}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right]_C \quad (18)$$

を得る. ここで, 各物理量は **一価関数** (同時刻において位置以外の独立変数をもたない/周回しても値が変わらない) であるため, 閉曲線に沿った差はゼロとなり,

$$\boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = 0} \quad (19)$$

が成り立つ.

- すなわち, **流体とともに運動する任意の閉曲線に沿った循環は保存される**. これが **Kelvin の循環定理** である (図 2).

## 11.2.2. Kelvin の循環定理 (6)

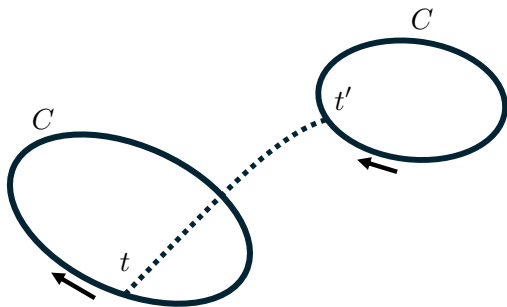


図 2: 流体とともに運動する任意の閉曲線に沿った循環は保存される (Kelvin の循環定理)

## 11.2.3. 渦線と渦管

### ♣ 渦線と渦管

- 前節では，循環が保存されることを示した．この結果は，渦度の幾何学的構造が時間発展のもとで特別な性質をもつことを示唆している．そこで以下では，渦度場の幾何学的描像として，渦線および渦管を導入する．
- 速度場  $\mathbf{u}$  に沿った曲線を **流線** と定義した．これと同様に，渦度場  $\boldsymbol{\omega}$  に沿った曲線を **渦線** (vortex line) と定義することができる．すなわち，渦線は各点から渦度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  に沿った曲線である (図 3 左)．

### 11.2.3. 渦線と渦管 (2)

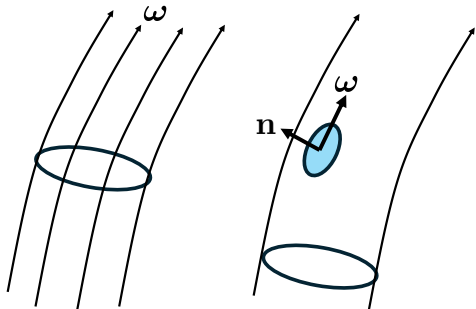


図 3: 左：渦線と渦管．右：渦面（水色領域）における渦度ベクトル  $\omega$  と法線ベクトル  $n$  の関係．渦管の側面上では，渦度ベクトル  $\omega$  は常に管に沿っていることを表す．

- 次に，一つの閉曲線上（図 3 における円環）の各点を通る渦線によって形成される曲面を考える．
- このようにして得られる管状の曲面を渦管（vortex tube）と呼ぶ（図 3 右）．

### 11.2.3. 渦線と渦管 (3)

- 渦管の側面上では，渦度ベクトル  $\omega$  は常に管に沿っており，渦管の面上の任意の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  に対して

$$\omega \perp \mathbf{n} \quad (20)$$

が成り立つ．すなわち，渦度ベクトルは渦管の側面を貫くことはなく，渦管内部に沿って流れる．



## 11.2.4. Helmholtz の渦定理

### ♣ Helmholtz の渦定理

- 完全流体かつ保存力のもとで、さらに圧力が密度の関数  $p = p(\rho)$  で与えられる（あるいは密度が一定である）と仮定すると、Kelvin の循環定理が成立し、流体とともに運動する任意の閉曲線に沿った循環は保存される。
- この事実を出発点とすることで、渦管の時間発展に関する以下の重要な定理に到達する。
- **Helmholtz の渦定理**：渦管は常に一本の渦管として保たれ、その強さ（渦管の断面の循環）は時間および位置によらず一定である。

## 11.2.4. Helmholtz の渦定理 (2)

### ♣ Helmholtz の渦定理の証明

- 図のように，渦管の側面（渦面）上に任意の閉曲線  $C$  を取る（図 4 における渦管の側面）。
- 前節で述べたように，渦管の側面では渦度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  は常に管に沿っており，この面の任意の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  と直交する．したがって

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (21)$$

が成り立つ．

- この閉曲線  $C$  に沿った循環は，Stokes の定理より

$$\Gamma(C) = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (22)$$

となる．

## 11.2.4. Helmholtz の渦定理 (3)

- さらに、閉曲線  $C$  に沿った線積分を、図 4 に示すように 4 つの経路に分割する (図 4) :

$$\Gamma(C) = \int_{AA'A'} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + \int_{A''B} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + \int_{BB'B''} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + \int_{B''A} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}. \quad (23)$$

## 11.2.4. Helmholtz の渦定理 (4)

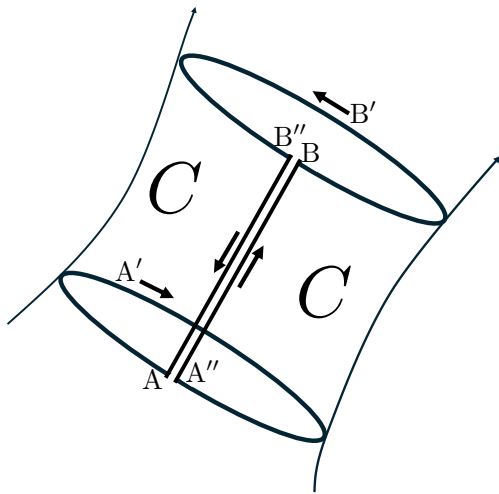


図 4: 閉曲線  $C$  とその縁の経路.

## 11.2.4. Helmholtz の渦定理 (5)

- このうち、直線経路  $A''B$  と  $B''A$  は、互いに逆向きで同一の流体線素に沿っているため、それらに沿った循環は相殺される：

$$\int_{A''B} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + \int_{B''A} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (24)$$

- したがって、式 (22) と式 (24) より、残る二つのループ経路について

$$\int_{AA'A'} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + \int_{BB'B''} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (25)$$

が成り立つ．

## 11.2.4. Helmholtz の渦定理 (6)

- ここで,  $BB'B''$  は断面を回る向きが  $AA'A''$  と逆であることに注意すると,

$$\int_{BB'B''} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{B''B'B} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} \quad (26)$$

である. これを式 (25) に代入することで,

$$\boxed{\int_{AA'A'} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_{B''B'B} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}} \quad (27)$$

を得る.

- このように, 渦管を取り巻く循環を **渦管の強さ** と定義する. 式 (27) は, この渦管の強さが渦管に沿った位置によらず一定であることを示している.

## 11.2.4. Helmholtz の渦定理 (7)

- また,  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  より  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$  が常に成り立つため, 渦管は流体内部で始まったり終わったりすることはできない.
- この結果は, Kelvin の循環定理と合わせることで, 渦管が途中で分岐・消滅することなく, 常に一本の渦管として保たれることを意味する.
- したがって, 渦管は途切れることなく流体中を境界 (あるいは無限遠) まで伸びるか, あるいは輪をつくり自ら閉じた構造をとる. このように自ら閉じた渦管を 渦輪 (vortex ring) と呼ぶ.

## 11.2.4. Helmholtz の渦定理 (8)

- さらに，断面内で渦度がほぼ一様である場合には，渦管強さは概念的に  $\kappa \sim \omega S$  ( $\omega$ ：代表的な渦度， $S$ ：渦管断面積) と見なすことができる．したがって，渦管の断面積  $S$  が変化すると，それに応じて渦度  $\omega$  が変化する．
- 特に，断面積  $S$  が小さくなると渦度  $\omega$  は大きくなる（渦管が補足なると回転速度が上がる）．



## 11.2.5. Lagrange の渦定理

### ♣ Lagrange の渦定理

- Helmholtz の渦定理より，完全流体かつ保存力のもとでは，渦は時間発展の過程で保存され，消滅することはないことが示される．
- 同時に，この結果は上記の条件下では，新たな渦が流体内部で自発的に生成されることはないことを意味している．
- これら二つの性質，すなわち「渦は消滅せず，また新たに生成もされない」という主張をまとめたものを，Lagrange の渦定理と呼ぶ．

## 11.2.5. Lagrange の渦定理 (2)

- 一般的に、流体の速度場は、Helmholtz 分解により

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (28)$$

と表される．ここで  $\Phi$  はスカラーポテンシャル， $\mathbf{A}$  はベクトルポテンシャルである．

- **Lagrange の渦定理から**，完全流体においては，**渦なしの初期条件**を用意できれば，その後も常に渦なしとなる．
- この時，

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (29)$$

より， $\nabla \times \mathbf{A} = \nabla\phi$  などとかけるので，このような条件下においては，流動場は，スカラーポテンシャルで統一して

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi \quad (30)$$

と表すことができる（**ポテンシャル流**）．

- 一見するとこれらの結果（渦の保存則）は，我々の日常的な経験と矛盾しているように思われる．しかし，実在流体においては粘性の影響が存在するため，渦は時間とともに減衰し，最終的には消滅することが知られている．

# 第 11 回講義資料目次

## 1 講義のスケジュール

## 2 渦と循環

- 渦度
- Kelvin の循環定理
- 渦線と渦管
- Helmholtz の渦定理
- Lagrange の渦定理

## 3 まとめ

## 11.3. まとめ

- 完全流体の Euler 方程式を出発点として，流体とともに運動する任意の閉曲線に沿った循環が保存されること，すなわち Kelvin の循環定理を示した．
- Kelvin の循環定理から，渦管が途中で分岐・消滅することなく，常に一本の渦管として保たれ，その強さが保存されることを主張する Helmholtz の渦定理を導いた．
- さらに，Kelvin の循環定理と Helmholtz の渦定理を合わせることで，完全流体かつ保存力のもとでは，渦は消滅せず，また新たに生成もされないという，Lagrange の渦定理を得た．

次回：完全流体におけるポテンシャル流