1　課題 1

次の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考える。

$$f(x) := x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \tag{1.1}$$

Python を用いて、以下の課題に取り組め。

(a) 関数 f を $-10 \le x \le 10, -10 \le y \le 10$ の範囲で描写せよ。

(b) 二分法により関数 f の全ての零点を求めよ。ただし、二つの異なる初期点は、(a) で描写した関数 f の概形を参考にして適切に設定せよ。

(c) ニュートン法により関数 f の全ての零点を求めよ。ただし、(a) で描写した関数 f の概形を参考にして、零点の近くに初期点を設定せよ。

2　課題 2

関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を以下で定義する。

$$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{5}{3} \tag{2.1}$$

Python を用いて

(a) 最急降下法を実装し、関数 f の停留点を求めよ。ただし、初期点は $x_0 := 1/2$ と設定し、各反復 $k \in \mathbb{N} \cup 0$ において、ステップサイズは $t_k := 1/(k+1)$ を採用せよ。

(b) ニュートン法を実装し、関数 f の停留点を求めよ。ただし、初期点は $x_0 := 5$ と設定し、各反復 $k \in \mathbb{N} \cup 0$ において、ステップサイズは $t_k := 1$ を採用せよ。

3　課題 3

次の 2 次元の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} &minimize \qquad f(x) := x_0^2 + e^{x_0} + x_1^4 + x_1^2 - 2x_0x_1 + 3 && (3.1) \\ &subject \quad to \qquad x := (x_0, x_1)^T \in \mathbb{R}^2 && (3.2) \end{aligned}$$

Python を用いて、

(a) 点 x が与えられたとき、目的関数の値 $f(x)$ を出力する関数を作成せよ。

(b) 点 x が与えられたとき、勾配ベクトル $\nabla f(x)$ を出力する関数を作成せよ。

(c) 点 x が与えられたとき、ヘッセ行列 $\nabla^2 f(x)$ を出力する関数を作成せよ。

4 課題 4

(a) バックトラック法を用いた最急降下法を実装することで課題 3 の最適化問題を解き、最適解、最適値、あよび反復回数を与えよ。ただし、初期点は $x^0 = (1,1)^T$ と設定し、またバックトラック法における ξ, ρ, $\bar{t}$ は、それぞれ $\xi = 10^{-4}$, $\rho = 0.5$, $\bar{t} = 1$ と設定せよ。

(b) バックトラック法を用いたニュートン法を実装することで課題 3 の最適化問題を解き、最適解、最適値、および反復回数を与えよ。ただし、初期点は $x^0 = (1,1)^T$ と設定し、またバックトラック法における ξ, ρ, $\bar{t}$ は、それぞれ $\xi = 10^{-4}$, $\rho = 0.5$, $\bar{t} = 1$ と設定せよ。

5 課題 5

Python を用いて、最急降下法およびニュートン法を実装することで次の最適化問題を解き、最適解および各手法の反復回数を与えよ。ただし、初期点は $x^0 = [2,0]^T$ と設定し、またバックトラック法における ξ, ρ, $\bar{t}$ は、それぞれ $\xi = 10^{-4}$, $\rho = 0.5$, $\bar{t} = 1$ と設定せよ。

$$minimize \qquad f(x) := \sum_{i=0}^{2} f_i(x)^2 \tag{5.1}$$

$$subject \quad to \qquad x \in \mathbb{R}^2 \tag{5.2}$$

ただし、$f_i(x) := y_i - [x]_0(1 - [x]_1^{i+1})(i = 0,1,2)$ と定義し、$y_0 = 1.5$, $y_1 = 2.25$, $y_2 = 2.625$ である。