

レポート課題3-4

2022 年 5 月 30 日

- 課題は問題 1 から問題 6 までである。各週に一題出題する。(最初の週だけ二題出題。残りの週は 1 題ずつ。)
- レポートは PDF にして PandA で 6 月 13 日までに提出。その際、レポート課題のために作成したソースコードも一緒に提出。全てを zip 等でまとめても良い。
- 問題のために作成し用いたソースコードには、コメントを十分つけて、何を行っているかを詳細に説明すること。コメントを付けたソースコードはレポートの中にも記載すること。

問題 5 (べき乗法とマルコフ過程)

A さんは以下のルールに従ってジャンケンをする：

- もしもグーを出したら、次にグー、チョキ、パーを出す確率はそれぞれ 0.1, 0.3, 0.6
- もしもチョキを出したら、次にグー、チョキ、パーを出す確率はそれぞれ 0.3, 0.2, 0.5
- もしもパーを出したら、次にグー、チョキ、パーを出す確率は 0.5, 0.1, 0.4

A さんが何を出すかの確率は、一つ前に A さんが何を出したかによって決まる。このようなルールはマルコフ過程と呼ばれる。以下の問いに答えよ。

1. A さんのジャンケンを数値的にシミュレーションし、A さんが 100 回ジャンケンをした後にグー、チョキ、パーを出す確率を求めよ。数値シミュレーションを行う際は、まず A さんの初期条件を固定し (例えばグー)、その後、上の確率に従ってグー、チョキ、パーを選ぶ。それを 100 回続ければ、A さんが 100 回ジャンケンをした後に何を出すかがシミュレーションできる。なお確率に従ってグー、チョキ、パーを選ぶ際は、一様乱数 (付録 D) を用いる。(例えば 0 から 1 までの一様乱数の値が 0.1 よりも小さければグー、0.1 から 0.4 までであればチョキ、0.4 以上であればパーといった感じに。) 実際にシミュレーションをすれば分かるが、100 回ジャンケン後に A さんが何を出すかは一意に決まらない (確率的に決まる)。この確率を求めるために、次にこの 100 回ジャンケンシミュレーションを 10000 回繰り返す。得られた 100 回ジャンケン後のグー、チョキ、パーの数をそれぞれ 10000 で割ると、求めたい「A さんが 100 回ジャンケンをした後にグー、チョキ、パーを出す確率」が計算出来る。ちなみに、得られた確率は A さんの初期条件によらない。この確率はマルコフ過程の定常分布と呼ばれる。
2. A さんのジャンケンのルールを以下のように行列を使って表してみた：

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.6 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで、この行列の各成分 $A_{i,j}$ が、一つ前に j を出した条件のもと、現在 i を出す確率に対応する ($i = 1, 2, 3$ はそれぞれグー、チョキ、パーに対応する。 j についても同様。) このよ

うな行列のことを確率行列という。この確率行列の最大固有値、対応する固有ベクトルをべき乗法（反復数を 100）を使って数値的に求めるプログラムを作成せよ。A の最大固有値は 1 になり、また対応する固有ベクトルは 1 で求めた定常分布に比例するがそれを確認せよ。

3. 2 で得られた固有ベクトルが、1 で得られた定常分布に比例するのはなぜか？理由を議論せよ。（ヒント：べき乗法ではあるベクトルに A を次々とかけていくが、マルコフ過程の文脈ではこれは何をしていることに対応するだろうか？）