1　課題 3

常微分方程式の初期値問題

$$u' = u, \quad u(0) = 1 \tag{1.1}$$

を考える。ステップ幅を Δt として $t = n\Delta t$ における数値解 $u(t, \Delta t)$ とする。また $t = 1$ における数値解と厳密解 $u_{exact}(t)$ を

$$E(\Delta t) = |u(1, \Delta t) - u_{exact}(1)| \tag{1.2}$$

とする。以下に示す 5 つのアルゴリズムに対して、$E(\Delta t)$ の関数形（指数関数？ベキ関数？）がわかるような図を作り、その指数（e^{at} や t^a の a のこと）を理論的な予測とともに表にまとめよ。アダムス・バッシュフォース法では必要な初期値は厳密解を使うこと。なお n 次のアルゴリズムは、1 ステップ Δt における数値解と厳密解の差は $O(\Delta t^{n+1})$ であることは使ってよい。前進オイラー法は 1 次である。図の説得力が上がるように、Δt の値を適切にサンプリングせよ（等間隔の点が望ましい)。

・前進オイラー (Forward Euler) 法 (FE)
・2 次アダムス・バッシュフォース (Adams-Bashforth) 法 (AB2)
・3 次アダムス・バッシュフォース法 (AB3)
・2 次ルンゲ・クッタ (Runge-Kutta) 法 (RK2)（あるいはホイン法）
・4 次ルンゲ・クッタ法 (RK4)

2　課題 4

常微分方程式

$$u' = -\alpha u + \beta, \quad u(0) = u_0, \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

を考える。2 つのアルゴリズム
・クランク・ニコルソン (Crank-Nicolson) 法 (CN)
・2 次ルンゲ・クッタ法 (RK2)（あるいはホイン法）
において、ステップ幅 Δt に対するアルゴリズムの安定性を理論的に調べよ。さらに、$u_0 = 1$, $\alpha = 10$, $\beta = 1$ として数値計算により理論結果を確認せよ。安定・不安定の双方につき数値実験せよ。

3　課題 5

微分方程式

$$u' = -2u + 1 \tag{3.1}$$

の厳密解を求め、任意の初期値に対して $t \to \infty$ で有限値に収束することを確認せよ。アルゴリズム

$$u_n = u_{n-2} + 2\Delta t f(t_{n-1}, u_{n-1}) \tag{3.2}$$

では数値解を得ることが不可能であることを安定性の観点から理論的に示せ。また $u(0) = 1$ として数値計算を実行し、理論予測を確認せよ。

4　課題 7

ローレンツ方程式

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases} \tag{4.1}$$

を考える。初期値を $(x(0), y(0), z(0)) = (1 + \epsilon, 0, 0)$ とし、定数を $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$ とする。以下ではステップ幅 $\Delta t = 0.01$ の 4 次ルンゲ・クッタ法を用い、時間区間 $t \in [0, 100]$ における軌道を求めるものとする。

4.0.1

$\epsilon = 0$ とする。$x(t)$ を t の関数として図示せよ。また軌道 $(x(t), y(t), z(t))$ を xyz 空間に図示せよ。

4.0.2

ϵ を変化させたときの解をそれぞれ

$$\epsilon = 0 \text{ の解：} \quad x_0(t) = (x_0(t), y_0(t), z_0(t)) \tag{4.2}$$

$$\epsilon = 10^{-n} \text{の解：} \quad x_n(t) = (x_n(t), y_n(t), z_n(t))(n = 1, 2, ...) \tag{4.3}$$

とする。x の初期値が ϵ だけ異なる $x_0(t)$ と $x_n(t)$ の差

$$\Delta_n(t) = \|x_n(t) - x_0(t)\|(n = 1, 2, ...) \tag{4.4}$$

を考える。$\|\cdot\|$ はユークリッド距離である。$n = 2, 4, 6$ を取った時、$\Delta_n(t)$ について以下のことが分かっているとする；

ー $\log_{10} \Delta_n(t)$ を t の関数としてプロットしたとき、十分大きい t を取ると、ある値（漸近値）の近くで変動する。

ー漸近値に至る少し前の時間帯（初期値付近ではない）では $\Delta_n(t)$ の関数系（指数関数かベキ関数）と指数は $n = (2, 4, 6)$ に依存しない。

このとき、片対数表示の図と両対数表示の図を作成・比較しながら、漸近値に至る少し前の時間帯における $\Delta_n(t)$ の関数系と指数を定めよ。指数はおおよその値で構わない。また観測結果から分かることを議論せよ。