レポート課題3-3

2022 年 5 月 23 日

- 課題は問題 1 から問題 6 まである。各週に一題出題する。（最初の週だけ二題出題。残りの週は 1 題ずつ。）
- レポートは PDF にして PandA で 6 月 13 日までに提出。その際、レポート課題のために作成したソースコードも一緒に提出。全てを zip 等でまとめても良い。
- 問題のために作成し用いたソースコードには、コメントを十分つけて、何を行っているかを詳細に説明すること。コメントを付けたソースコードはレポートの中にも記載すること。

問題 4 (常微分方程式の数値解法)

次の常微分方程式を考える。初期条件は $(x(0), y(0)) = (1, 1)$ とする。

$$\dot{x}(t) = y(t) \quad (1)$$

$$\dot{y}(t) = -x(t) \quad (2)$$

1. この微分方程式の解析解を求めよ。
2. オイラー法を用いて $t \in [0, 10]$ の範囲でこの解を数値的に求めるプログラムを作成せよ。次に、時間刻み幅 Δt が 0.16, 0.04 0.01 の 3 つの場合で、作成したプログラムを用いて数値解 $[x(t), y(t)]_{t=0}^{10}$ を求めよ。Δt が小さくなるにつれて、得られた数値解が 1 で求めた解析解に漸近していく様子をグラフで示せ。（例：横軸に t、縦軸に $x(t)$ の解析解、及び 3 つの数値解を一緒にプロットしたグラフ。別の図に $y(t)$ についても同様のグラフを作る。）
3. オイラー法では、得られた数値解の誤差が刻み幅 Δt に比例する。このため、数ある数値解法の中でもオイラー法の精度は悪い。より精度の高い方法としてルンゲ＝クッタ法がある。この方法では、$d\mathbf{z}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t))$ という微分方程式に対して、

$$\mathbf{z}(t + \Delta t) = \mathbf{z}(t) + \frac{\Delta t}{6}\left[\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4\right], \quad (3)$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t)), \quad (4)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(\mathbf{z}(t) + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{k}_1\right), \quad (5)$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(\mathbf{z}(t) + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{k}_2\right), \quad (6)$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}\left(\mathbf{z}(t) + \Delta t \mathbf{k}_3\right) \quad (7)$$

と時間発展させる。ルンゲ＝クッタ法の誤差は刻み幅 Δt の 4 乗に比例するため、オイラー法よりも正確である。ルンゲ＝クッタ法を用いて 2 と同様なグラフを作成し、ルンゲ＝クッタ法とオイラー法の精度を比較してみよ。