1　課題 4.2

区間 $[a,b](a<b)$ における $n+1$ 個の分点を以下で定める:

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i \quad (i = 0, 1, \cdots, n) \tag{1.1}$$

(1)

以下に示す3つの関数 $f(x)$ に対して、分点 x_i における値を求めよ。$n = 2, 4, 8, 16$ として Lagrange 補間で n 次多項式 $P(x)$ を求め、グラフを図示せよ。

$$(a) f_1(x) = \ln(x) \quad x \in [1, 2] \quad (\ln = \log_e) \tag{1.2}$$

$$(b) f_2(x) = 1/x^3 \quad x \in [0.1, 2] \tag{1.3}$$

$$(c) f_3(x) = 1/(1 + 25x^2) \quad x \in [-1, 1] \tag{1.4}$$

ヒント: いくつかのグラフを一つの図に表示するなど比較しやすいよう工夫せよ。$P(x)$ を得る方法は次の 2 通りである。

- $P(x)$ は理論的に得られるので、gnuplot などでコードを書く。
- 分点 $\{x_i\}$ よりさらに細かい分点 $\{y_j\}$ に対して $P(y_j)$ を計算する。

(2)

区間 $x \in [a,b](a<b)$ で定義された関数 $f(x)$ の定積分

$$I(f) := \int_a^b f(x)dx \tag{1.5}$$

を考える。以下に示す 4 つの関数と積分区間に対して、理論値 $I(f_i)(i = 4, 5, 6, 7)$ を求めよ。

$$(a) f_4(x) = 1/x \quad x \in [1, 2] \tag{1.6}$$

$$(b) f_5(x) = e^{5x} \quad x \in [-1, 1] \tag{1.7}$$

$$(c) f_6(x) = 1 + \sin x \quad x \in [0, \pi] \tag{1.8}$$

$$(d) f_7(x) = 1 + \sin x \quad x \in [0, 2\pi] \tag{1.9}$$

また、定積分を分割数 $n = 2^i(i = 0, 1, \cdots, 10)$ の（複合）中点公式、台形公式、Simpson 公式により求めよ。分割数 n のとき数値積分で得た積分値を $I_n(f_i)$ をする。$I_n(f_i)$ が $n \to \infty$ で理論値 $I(f_i)$ に収束するか否か、アルゴリズム間で比較できるように図にまとめよ。$n = 2^i$ となっていることを考慮し、n 軸のスケールを線形にするか対数にするか考えよ。

(3)

課題 4.2 の 2 において、関数 f に対する数値計算結果と理論値との誤差を

$$E_n(f) = |I_n(f) - I(f)| \tag{1.10}$$

とする（絶対値に注意)。関数 $f_i(i=4,5,6,7)$ の定積分に対して、$n=2^i(i=0,1,\cdots,10)$ に対する（複合）中点公式、台形公式、Simpson 公式による誤差を求め、$E_n(f)$ の n への依存性（線形関数？指数関数？べき関数？）が明確になるよう図示せよ。それぞれの公式に対して指数（e^{an} や n^a のときの a）も求めよ。（f_7 は特殊なので注意すること）

2 課題 4.3

(1)

課題 4.2 の 2 における 4 つの関数 $f_i(i=4,5,6,7)$ の定積分を考える。分割数 $n=2^i(i=0,1,\cdots,10)$ の（複合）M 次 Gauss 型積分公式による数値積分値を $I_n(f_i)$ とし、真値との誤差を $E_n(f_i)=|I_n(f_i)-I(f_i)|$ と定義する。課題 4.2 の 3 と同様に、$E_n(f_i)$ の n への依存性が明確となるよう図示すると共に、指数の M 依存性を調べよ。ただし M とは分割した小区間内における分点の数である。表??に従い、$M=2$ および $M=3$ の Gauss 型積分公式を用いよ。

表 1: Gauss 型積分公式.(a)$M=2$.(b)$M=3$.

(a)

m	1	2
y_m	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
w_m	1	1

(b)

m	1	2	3
m	$-\sqrt{3/5}$	0	$-\sqrt{3/5}$
w_m	5/9	8/9	5/9

(2)

以下の定積分を考える

$$A=\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx \simeq 1.49364826562 \tag{2.1}$$

以下では積分区間を $n=2^i(i=0,1,\cdots,10)$ 等分して、M 次 Gauss 型積分公式を用いる。得られた数値積分値を A_n とし、真値との誤差を $E_n=|A_n-A|$ とする。$M=2$ に対して、次に示す 3 通りの方法における精度の違いとその理由について議論せよ。台形公式や Simpson 公式が適用できるかについても議論せよ。

(方法 1) 積分表式 $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ を用いる。

(方法 2) 積分表式 $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ から $t=\sqrt{x}$ と変数変換した積分表式を用いる。

(方法 3) 定積分 A を

$$A=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{\sqrt{x}}dx \tag{2.2}$$

と変形する。右辺第 1 項の積分を理論的に求め、第 2 項を数値積分で求める。

3 課題 4.4

1 次元 Strum-Liouville 型境界値問題

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{d\tilde{u}}{dx}(x)\right)-6e^{-x^2}\tilde{u}(x)=0,\quad (0<x<1) \tag{3.1}$$

$$\tilde{u}(0)=0,\quad \tilde{u}(1)=-4 \tag{3.2}$$

を考える。区間 $[0,1]$ を $x_i(i=0,\cdots,n);\ x_0=0,\ x_n=1$ で n 等分し、有限要素法で解くコードを作成しよう。

(1)

$\tilde{u}(x)=8x^3-12x$ が解であることを確かめよ。

(2)

$u=\tilde{u}+4x$ と変数変換し、境界値問題 (1) を次の形に変形せよ。

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}(x)\right)+q(x)u(x)=f(x),\quad (0<x<1) \tag{3.3}$$

$$u(0)=u(1)=0 \tag{3.4}$$

$p(x)$,$q(x)$,$f(x)$ を明記すること。

(3)

関数 $t_i(x)(i=1,\cdots,n-1)$ を

$$t_i(x)=\begin{cases}\frac{x-x_{i-1}}{h_i} & (x_{i-1}\le x<x_i)\\ \frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}} & (x_i\le x<x_{i+1})\quad h_i=x_i-x_{i-1}\\ 0 & (\text{その他})\end{cases} \tag{3.5}$$

で定義する。$\frac{dt_i}{dx}(x)$ を求めよ。

(4)

関数がなすベクトル空間の部分空間 $\mathrm{Span}t_1,\cdots,t_{n-1}$ において境界値問題 (2) の弱解 u を求める。u を t_i の線形結合で

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n-1}c_it_i(x) \tag{3.6}$$

と書く。$c=(c_1,\cdots,c_{n-1})^T$（T は転置）を決定する方程式は

$$Ac=b \tag{3.7}$$

であり、サイズ $n-1$ の正方行列 $A=(A_{ij})$ とベクトル $b=b(b_i)$ は

$$A_{ij}=\int_0^1\left[p(x)\frac{dt_i}{dx}\frac{dt_j}{dx}+q(xt_it_j)\right]dx,\quad (i,j=1,\cdots,n-1) \tag{3.8}$$

$$b_i=\int_0^1 f(x)t_i(x)dx\quad (i=1,\cdots,n-1) \tag{3.9}$$

と定義される。行列 A は対称三重対角行列 (∗) であることを確認せよ。行列 A とベクトル b の要素を求める際、積分区間を $[0.1]$ から縮小できることを議論せよ。
(∗) 三重対角行列とは、対角成分とその上下に隣接する対角線上の成分以外は零なる行列

(5)

有限要素法のコードを作り理解を求めよ。$M = 3$ の Gauss 型積分公式を用いよ。得られた解を、分割数 n への依存性に注意しながら厳密解 $u = 8x(x^2 - 1)$ と比較・議論せよ。
ヒント: 方程式 $Ac = b$ は Gauss の消去表などで解けばよい。