数理工学実験
熱方程式の差分法

滝本亘（学籍番号 1029-33-1175）

2022 年 11 月 14 日

1　問題 1（拡散方程式の数値解）

1.1　はじめに

拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \quad (L = 10) \tag{1.1}$$

を初期条件

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-5)^2} \tag{1.2}$$

の下で数値的に解く。以下の 4 つの場合を考えよ。

(1)

オイラー陽解法

$$u_j^{n+1} - u_j^n \simeq \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) \tag{1.3}$$

で境界条件は Dirichlet 境界条件 $u_L = u_R = 0$ を用いて数値的に解け。
刻み幅は $\Delta t = 0.01$, $\Delta x = 0.5(N = 20)$ とせよ。

(2)

オイラー陽解法 (1.3) で境界条件は Neumann 境界条件 $J_L = J_R = 0$ を用いて数値的に解け。
刻み幅は $\Delta t = 0.01$, $\Delta x = 0.5(N = 20)$ とせよ。

(3)

クランク・ニコルソン法

$$u_j^{n+1} - u_j \simeq \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) \tag{1.4}$$

で境界条件は Dirichlet 境界条件 $u_L = u_R = 0$ を用いて数値的に解け。
刻み幅は $\Delta t = 0.01$, $\Delta x = 0.05(N = 200)$ とせよ。

(4)

クランク・ニコルソン法 (1.4) で境界条件は Neumann 境界条件 $J_L = J_R = 0$ を用いて数値的に解け。
刻み幅は $\Delta t = 0.01$, $\Delta x = 0.05(N = 200)$ とせよ。

いずれの場合も $t = 1, 2, 3, 4, 5(n = 100, 200, 300, 400, 500)$ における $u(x,t)$ の値を出力すること。また、得られた $u(x,t)$ の値をそれぞれ一つの図（横軸 x, 縦軸 u）に図示せよ。

1.2　原理・方法の詳細

1.2.1　オイラー陽解法

1 次元空間内での拡散を考える。微粒子の濃度を $C(x,t)$ とする。微粒子の流れを $J(x,t)$ とすると、粒子数の保存を表す連続の式は

$$\frac{\partial}{\partial t}C(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}J(x,t) \tag{1.5}$$

と書ける。また、流れ $J(x,t)$ は濃度勾配に比例すると仮定すると

$$J(x,t) = -D\frac{\partial}{\partial x}C(x,t) \tag{1.6}$$

と表される。これらから拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}C(x,t) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}C(x,t) \tag{1.7}$$

が得られる。

以下では $D=1$ とした拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \tag{1.8}$$

を考える。

拡散方程式 (1.8) を解くためには初期条件

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{1.9}$$

と境界 $x=0,L$ における境界条件を考える必要がある。代表的な境界条件には

・Dirichlet 境界条件: 境界上での u の値が指定されている。

$$u(0,t) = u_L \tag{1.10}$$

$$u(L,t) = u_R \tag{1.11}$$

・Neumann 境界条件: 境界上での u の微分の値が指定されている。

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = J_L \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = J_R \tag{1.13}$$

の 2 つがある。

ここでは、時間と空間を離散化して拡散方程式 (1.8) を数値的に解くことを考える。時間と空間の刻み幅をそれぞれ Δt,Δx とする。($L=N\Delta x$) の離散化された時空間上での平均濃度を

$$u_j^n \equiv \frac{1}{\Delta x}\int_{(j-1)\Delta x}^{j\Delta x} u(y,n\Delta t)dy \tag{1.14}$$

と書く。u_j^n は区間 $|(j-1)\Delta x, j\Delta x|$ に対して割り当てられていることに注意が必要である。また、u_0^n,u_{N+1}^n は境界条件のために用いる。方程式 (1.5) を $[n\Delta t,(n+1)\Delta t]$ で積分すると

$$u(x,(n+1)\Delta t) - u(x,n\Delta t) = -\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\frac{\partial}{\partial x}J(x,s)ds \tag{1.15}$$

となる。式 (1.15) の右辺の積分を時刻 $n\Delta t$ の値で近似すると

$$u(x,(n+1)\Delta t) - u(x,n\Delta t) \simeq -\Delta t \frac{\partial}{\partial x} J(x,n\Delta t) \tag{1.16}$$

となる。この場合

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - u_j^n &\simeq -\frac{1}{\Delta x}\int_{(j-1)\Delta x}^{j\Delta x} \Delta t \frac{\partial}{\partial y} J(y,n\Delta t) dy \\ &= -\frac{\Delta t}{\Delta x}[J(j\Delta x,n\Delta t) - J((j-1)\Delta x,n\Delta t)] \end{aligned} \tag{1.17}$$

となる。ただし式 (1.6) より

$$J(j\Delta x,n\Delta t) = -\frac{\partial u}{\partial x}(j\Delta x,n\Delta t) \tag{1.18}$$

である。この量はさらに

$$J(j\Delta x,n\Delta t) \simeq -\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \tag{1.19}$$

と近似されるので、差分方程式

$$u_j^{n+1} - u_j^n \simeq \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) \tag{1.20}$$

を得る。

式 (1.20) のような最も単純な差分方程式による数値解法がオイラー陽解法である。以下では

$$c \equiv \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \tag{1.21}$$

と書くことにする。

初期条件は $\{u_j^0\}_{j=1}^N$ と表される。また、境界条件は

・Dirichlet 境界条件:

$$u_0^n = u_L \tag{1.22}$$

$$u_{N+1}^n = u_R \tag{1.23}$$

・Neumann 境界条件:

$$u_0^n = u_1^n - J_L\Delta x \tag{1.24}$$

$$u_{N+1}^n = u_N^n + J_R\Delta x \tag{1.25}$$

と表される。

1.2.2 クランク・ニコルソン法

式 (1.15) において積分をより精度の良い台形公式で近似すると

$$u(x,(n+1)\Delta t) - u(x,n\Delta t) \simeq -\frac{\Delta t}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}J(x,(n+1)\Delta t) + \frac{\partial}{\partial x}J(x,n\Delta t)\right] \tag{1.26}$$

となる。これを用いると

$$u_j^{n+1} - u_j^n \simeq \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) \tag{1.27}$$

を得る。

式 (1.27) がクランク・ニコルソン法である。この方法はオイラー陽解法よりも精度が良くなっている。式 (1.27) を書き直すと

$$-\frac{c}{2}u_{j-1}^{n+1}+(1+c)u_j^{n+1}-\frac{c}{2}u_{j+1}^{n+1}=(1-c)u_j^n+\frac{c}{2}u_{j-1}^n+\frac{c}{2}u_{j+1}^n \tag{1.28}$$

となる。ただし、境界条件は

・Dirichlet 境界条件:$u_0^n=u_L,\ u_{N+1}^n=u_R$ より

$$(1+c)u_1^{n+1}-\frac{c}{2}u_2^{n+1} = (1-c)u_1^n+cu_L+\frac{c}{2}u_2^n \tag{1.29}$$

$$-\frac{c}{2}u_{N-1}^{n+1}+(1+c)u_N^{n+1} = (1-c)u_N^n;cu_R+\frac{c}{2}u_{N-1}^n \tag{1.30}$$

・Neumann 境界条件:$u_0^n=u_1^n-J_L\Delta x,\ u_{N+1}^n=u_N^n+J_R\Delta x$ より

$$\left(1+\frac{c}{2}\right)u_1^{n+1}-\frac{c}{2}u_2^{n+1} = \left(1-\frac{c}{2}\right)u_1^n-cJ_L\Delta x+\frac{c}{2}u_2^n \tag{1.31}$$

$$-\frac{c}{2}u_{N-1}^{n+1}+\left(1+\frac{c}{2}\right)u_N^{n+1} = \left(1-\frac{c}{2}\right)u_N^n+cJ_R\Delta x+\frac{c}{2}u_{N-1}^n \tag{1.32}$$

である。これらの連立方程式を解く際には LU 分解という方法が用いられる。

式 (1.28) と境界条件 (1.29),(1.30) あるいは (1.31),(1.32) を合わせた連立方程式は $\boldsymbol{x}\equiv(u_1^{n+1},...,u_N^{n+1})^T$ と既知な量を成分とするベクトル $\boldsymbol{z}$ 及び、ある行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z} \tag{1.33}$$

のように表される。$\boldsymbol{A}$ は Dirichlet 境界条件では

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1+c & -\frac{c}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{c}{2} & 1+c & -\frac{c}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{c}{2} & 1+c & -\frac{c}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{c}{2} & 1+c \end{pmatrix} \tag{1.34}$$

Neumann 境界条件では

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1+\frac{c}{2} & -\frac{c}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{c}{2} & 1+c & -\frac{c}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{c}{2} & 1+c & -\frac{c}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{c}{2} & 1+\frac{c}{2} \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

となる。また、$\boldsymbol{z}$ は Dirichlet 境界条件では

$$\begin{aligned} z_1 &= (1-c)u_1^n+cu_L+\frac{c}{2}u_2^n \\ z_j &= (1-c)u_j^n+\frac{c}{2}u_{j-1}^n+\frac{c}{2}u_{j+1}^n \quad (2\le j\le N-1) \\ z_N &= (1-c)u_N^n+cu_R+\frac{c}{2}u_{N-1}^n \end{aligned} \tag{1.36}$$

Neumann 境界条件では

$$
\begin{aligned}
z_1 &= (1-\frac{c}{2})u_1^n + cJ_L\Delta x + \frac{c}{2}u_2^n \\
z_j &= (1-c)u_j^n + \frac{c}{2}u_{j-1}^n + \frac{c}{2}u_{j+1}^n \quad (2 \le j \le N-1) \\
z_N &= (1-\frac{c}{2})u_N^n + cJ_R\Delta x + \frac{c}{2}u_{N-1}^n
\end{aligned} \tag{1.37}
$$

である。式 (1.33) から $\boldsymbol{x}$ を求めるのが目標である。

LU 分解とは $\boldsymbol{A}$ を上三角行列 U と下三角行列 L の積 $\boldsymbol{A} = LU$ 分解することである。今、$\boldsymbol{A}$ を

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}
a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\
c_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & c_{N-2} & a_{N-1} & b_{N-1} \\
0 & \cdots & 0 & c_{N-1} & a_N
\end{pmatrix} \tag{1.38}
$$

のように書く。

$$
L = \begin{pmatrix}
\alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
c_1 & \alpha_2 & 0 & \ddots & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & c_{N-2} & \alpha_{N-1} & 0 \\
0 & \cdots & 0 & c_{N-1} & \alpha_N
\end{pmatrix} \tag{1.39}
$$

$$
U = \begin{pmatrix}
1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & 0 & 1 & \beta_{N-1} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \tag{1.40}
$$

と置くと、

$$
LU = \begin{pmatrix}
\alpha_1 & \alpha_1\beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\
c_1 & \alpha_2 + c_1\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \ddots & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & c_{N-2} & \alpha_{N-1} + c_{N-2}\beta_{N-2} & \alpha_{N-1}\beta_{N-1} \\
0 & \cdots & 0 & c_{N-1} & \alpha_N + c_{N-1}\beta_{N-1}
\end{pmatrix} \tag{1.41}
$$

となる。式 (1.38) と式 (1.41) を比較すると

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= a_1 \\
\beta_1 &= \frac{b_1}{\alpha_1} \\
\alpha_2 &= a_2 - c_1\beta_1 \\
\beta_2 &= \frac{b_2}{\alpha_2} \\
&\vdots \\
\alpha_{N-1} &= a_{N-1} - c_{N-2}\beta N - 2 \\
\beta_{N-1} &= \frac{b_{N-1}}{\alpha_{N-1}} \\
\alpha_N &= a_N - c_{N-1}\beta_{N-1}
\end{aligned}
\tag{1.42}
$$

のように昇順に L と U を求められる。

次に LU 分解を用いて連立方程式 (1.33) を解く。$LU\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$ において $U\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{y}$ とおくと

$$
L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} \tag{1.43}
$$

となる。この式から $\boldsymbol{y}$ を求め、$U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ から $\boldsymbol{x}$ を求める。まず $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$ は

$$
\begin{pmatrix}
\alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
c_1 & \alpha_2 & 0 & \ddots & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & c_{N-2} & \alpha_{N-1} & 0 \\
0 & \cdots & 0 & c_{N-1} & \alpha_N
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \\ z_N \end{pmatrix}
\tag{1.44}
$$

より、$\boldsymbol{y}$ は昇順に

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{z_1}{\alpha_1} \\
y_2 &= \frac{z_2 - c_1 y_1}{\alpha_2} \\
&\vdots \\
y_{N-1} &= \frac{z_{N-1} - c_{N-2} y_{N-2}}{\alpha_{N-1}} \\
y_N &= \frac{z_N - c_{N-1} y_{N-1}}{\alpha_N}
\end{aligned}
\tag{1.45}
$$

のように決まる。次に $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ は

$$
\begin{pmatrix}
1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & 0 & 1 & \beta_{N-1} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix}
\tag{1.46}
$$

より、$\boldsymbol{x}$ は降順に

$$
\begin{aligned}
x_N &= y_N \\
x_{N-1} &= y_{N-1} - \beta_{N-1} x_N \\
&\vdots \\
x_2 &= y_2 - \beta_2 x_3 \\
x_1 &= y_1 - \beta_1 x_2
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

のように求まる。

1.3 実験方法

この問題では式 (1.14) のように u_j^n に区間 $[(j-1)\Delta x, j\Delta x]$ を割り当てるという離散化を行っている。従って、初期条件は

$$
u_j^0 = \frac{1}{2}[u_0((j-1)\Delta x) + u_0(j\Delta x)] \tag{1.48}
$$

であると考える。また、$\left\{u_j^n\right\}$ をプロットする場合は、各 j に対応する座標として $x = (j-1/2)\Delta x$ を採用する。

(1)

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define N 20
#define M 500

double u0(double x){
    return exp(-0.5*(x-5)*(x-5))/sqrt(2*M_PI);
}

double FE(double dx, double dt){

    double c = dt/(dx*dx);
    double u[M+1][N+2];

    for(int j=1; j<=N; j++){
        u[0][j] = (u0((j-1)*dx)+u0(j*dx))/2;
    }

    u[0][0] = 0;
    u[0][N+1] = 0;

    for(int i=0; i<M; i++){

        for(int j=1; j<=N; j++){
            u[i+1][j] = u[i][j] + c*(u[i][j-1]-2*u[i][j]+u[i][j+1]);
        }

        u[i+1][0] = 0;
        u[i+1][N+1] = 0;
    }

    FILE *fp;
    fp = fopen("1-1","w");

```

```
    for(int j=1; j<=N; j++){
        printf("%.2f", j*dx-0.25);
        fprintf(fp, "%.2f", j*dx-0.25);

        for(int k=1; k<=5; k++){
            printf("&%.8f", u[100*k][j]);
            fprintf(fp, " %.8f", u[100*k][j]);
        }

        printf("\\\\\n");
        fprintf(fp,"\n");
    }

    fclose(fp);
}

int main(void){
    double dt = 0.01;
    double dx = 0.5;

    FE(dx, dt);
}
```

(2)

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define N 20
#define M 500

double u0(double x){
    return exp(-0.5*(x-5)*(x-5))/sqrt(2*M_PI);
}

double FE(double dx, double dt){

    double c = dt/(dx*dx);
    double u[M+1][N+2];

    for(int j=1; j<=N; j++){
        u[0][j] = (u0((j-1)*dx)+u0(j*dx))/2;
    }

    u[0][0] = u[0][1];
    u[0][N+1] = u[0][N];

    for(int i=0; i<M; i++){

        for(int j=1; j<=N; j++){
            u[i+1][j] = u[i][j] + c*(u[i][j-1]-2*u[i][j]+u[i][j+1]);
        }

        u[i+1][0] = u[i+1][1];
        u[i+1][N+1] = u[i+1][N];
    }

    FILE *fp;
    fp = fopen("1-2","w");

    for(int j=1; j<=N; j++){
        printf("%.2f", j*dx-0.25);
        fprintf(fp, "%.2f", j*dx-0.25);

        for(int k=1; k<=5; k++){
            printf("&%.8f", u[100*k][j]);
```

```
                fprintf(fp, " %.8f", u[100*k][j]);
            }

            printf("\\\\\n");
            fprintf(fp,"\n");
        }

        fclose(fp);
}

int main(void){
        double dt = 0.01;
        double dx = 0.5;

        FE(dx, dt);
}
```

(3)

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#define N 200
#define M 500

double u0(double x){
        return exp(-0.5*(x-5)*(x-5))/sqrt(2*M_PI);
}

double CK(double dx, double dt){

        double c = dt/(dx*dx);
        double u[M+1][N+2];

        for(int j=1; j<=N; j++){
            u[0][j] = (u0((j-1)*dx)+u0(j*dx))/2;
        }

        u[0][0] = 0;
        u[0][N+1] = 0;

        double a_n[N];
        double b_n[N-1];
        double c_n[N-1];

        for(int j=0; j<N-1; j++){
            a_n[j]=1+c;
            b_n[j]=-c/2;
            c_n[j]=-c/2;
        }
        a_n[N-1]=1+c;

        double a[N];
        double b[N-1];

        a[0]=a_n[0];
        for(int j=1; j<N; j++){
            b[j-1]=b_n[j-1]/a[j-1];
            a[j]=a_n[j]-c_n[j-1]*b[j-1];
        }

        for(int i=0; i<M; i++){

            double z[N];

            z[0]=(1-c)*u[i][1]+(c/2)*u[i][2];
```

```
        for(int j=1; j<N-1; j++){
            z[j]=(1-c)*u[i][j+1]+(c/2)*u[i][j]+(c/2)*u[i][j+2];
        }
        z[N-1]=(1-c)*u[i][N]+(c/2)*u[i][N-1];

        double y[N];

        y[0]=z[0]/a[0];
        for(int j=1; j<N; j++){
            y[j]=(z[j]-c_n[j-1]*y[j-1])/a[j];
        }

        u[i+1][N]=y[N-1];
        for(int j=N-1; j>0; j--){
            u[i+1][j]=y[j-1]-b[j-1]*u[i+1][j+1];
        }
        u[i+1][0] = 0;
        u[i+1][N+1] = 0;

    }

    FILE *fp;
    fp = fopen("1-3","w");

    for(int j=1; j<=N; j++){
        printf("%.3f", j*dx-0.025);
        fprintf(fp, "%.3f", j*dx-0.025);

        for(int k=1; k<=5; k++){
            printf("&%.8f", u[100*k][j]);
            fprintf(fp, " %.8f", u[100*k][j]);
        }

        printf("\\\\\n");
        fprintf(fp,"\n");
    }

    fclose(fp);
}

int main(void){
    double dt = 0.01;
    double dx = 0.05;

    CK(dx, dt);
}
```

(4)

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#define N 200
#define M 500

double u0(double x){
    return exp(-0.5*(x-5)*(x-5))/sqrt(2*M_PI);
}

double CK(double dx, double dt){

    double c = dt/(dx*dx);
    double u[M+1][N+2];

    for(int j=1; j<=N; j++){
        u[0][j] = (u0((j-1)*dx)+u0(j*dx))/2;
```

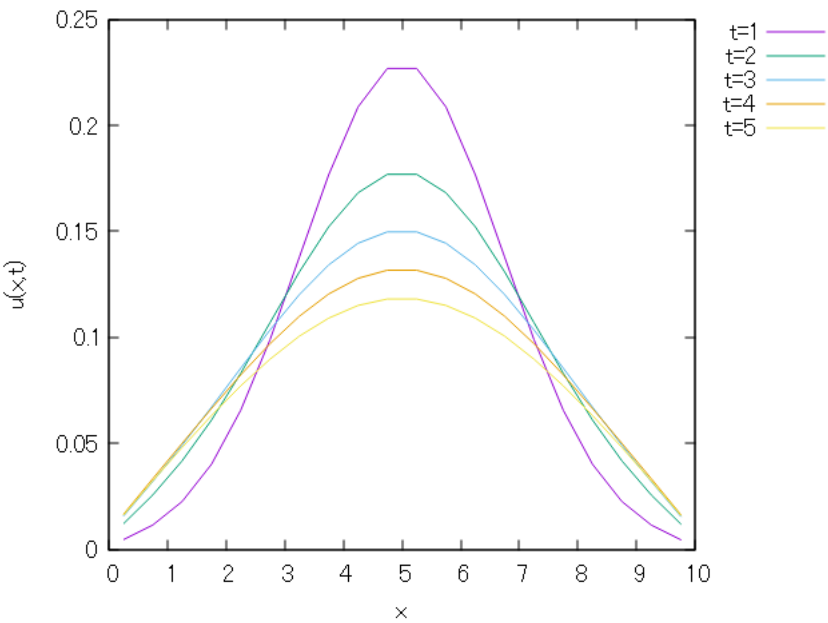
```c
    }

    u[0][0] = u[0][1];
    u[0][N+1] = u[0][N];

    double a_n[N];
    double b_n[N-1];
    double c_n[N-1];

    for(int j=0; j<N-1; j++){
        a_n[j]=1+c;
        b_n[j]=-c/2;
        c_n[j]=-c/2;
    }
    a_n[0]=1+c/2;
    a_n[N-1]=1+c/2;

    double a[N];
    double b[N-1];

    a[0]=a_n[0];
    for(int j=1; j<N; j++){
        b[j-1]=b_n[j-1]/a[j-1];
        a[j]=a_n[j]-c_n[j-1]*b[j-1];
    }

    for(int i=0; i<M; i++){

        double z[N];

        z[0]=(1-c/2)*u[i][1]+(c/2)*u[i][2];
        for(int j=1; j<N-1; j++){
            z[j]=(1-c)*u[i][j+1]+(c/2)*u[i][j]+(c/2)*u[i][j+2];
        }
        z[N-1]=(1-c/2)*u[i][N]+(c/2)*u[i][N-1];

        double y[N];

        y[0]=z[0]/a[0];
        for(int j=1; j<N; j++){
            y[j]=(z[j]-c_n[j-1]*y[j-1])/a[j];
        }

        u[i+1][N]=y[N-1];
        for(int j=N-1; j>0; j--){
            u[i+1][j]=y[j-1]-b[j-1]*u[i+1][j+1];
        }
        u[i+1][0] = 0;
        u[i+1][N+1] = 0;

    }

    FILE *fp;
    fp = fopen("1-4","w");

    for(int j=1; j<=N; j++){
        printf("%.3f", j*dx-0.025);
        fprintf(fp, "%.3f", j*dx-0.025);

        for(int k=1; k<=5; k++){
            printf("&%.8f", u[100*k][j]);
            fprintf(fp, " %.8f", u[100*k][j]);
        }

        printf("\\\\\n");
        fprintf(fp,"\n");
    }

```

```
    fclose(fp);
}

int main(void){
    double dt = 0.01;
    double dx = 0.05;

    CK(dx, dt);
}
```

1.4 結果

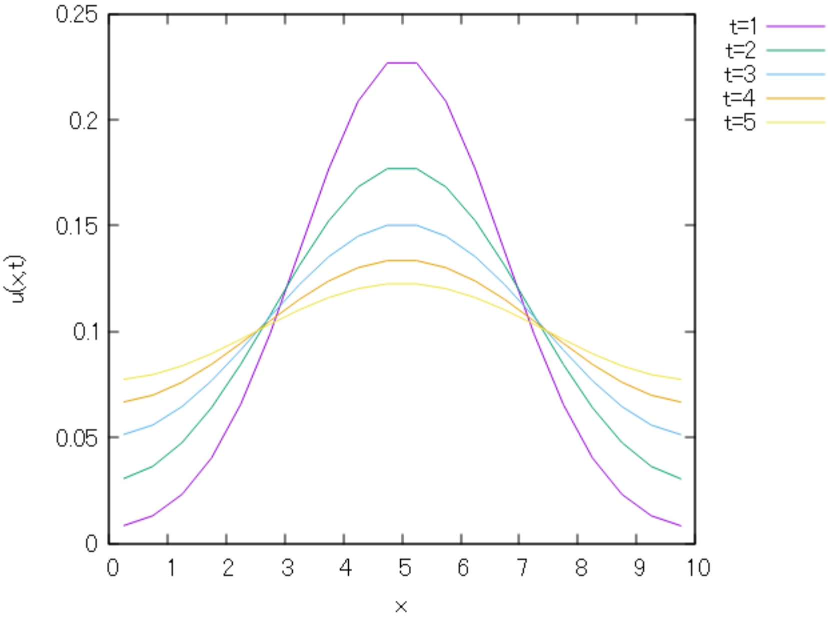
(1)

x	$u(x,1)$	$u(x,2)$	$u(x,3)$	$u(x,4)$	$u(x,5)$
0.25	0.00473066	0.01218549	0.01580967	0.01670326	0.01630477
0.75	0.01155420	0.02576286	0.03210569	0.03342273	0.03242227
1.25	0.02266471	0.04185003	0.04920762	0.05009837	0.04813450
1.75	0.04020099	0.06102650	0.06713057	0.06653366	0.06316955
2.25	0.06567331	0.08310940	0.08550295	0.08236481	0.07719194
4.75	0.22675697	0.17685005	0.14972974	0.13170493	0.11810794
5.25	0.22675697	0.17685005	0.14972974	0.13170493	0.11810794
5.75	0.20863758	0.16819439	0.14438659	0.12787507	0.11507050
6.25	0.17667996	0.15213539	0.13422978	0.12047838	0.10914272
6.75	0.13778451	0.13087046	0.12021757	0.10999903	0.10059968
7.25	0.09903642	0.10702863	0.10355947	0.09706705	0.08980993
7.75	0.06567331	0.08310940	0.08550295	0.08236481	0.07719194
8.25	0.04020099	0.06102650	0.06713057	0.06653366	0.06316955
8.75	0.02266471	0.04185003	0.04920762	0.05009837	0.04813450
9.25	0.01155420	0.02576286	0.03210569	0.03342273	0.03242227
9.75	0.00473066	0.01218549	0.01580967	0.01670326	0.01630477



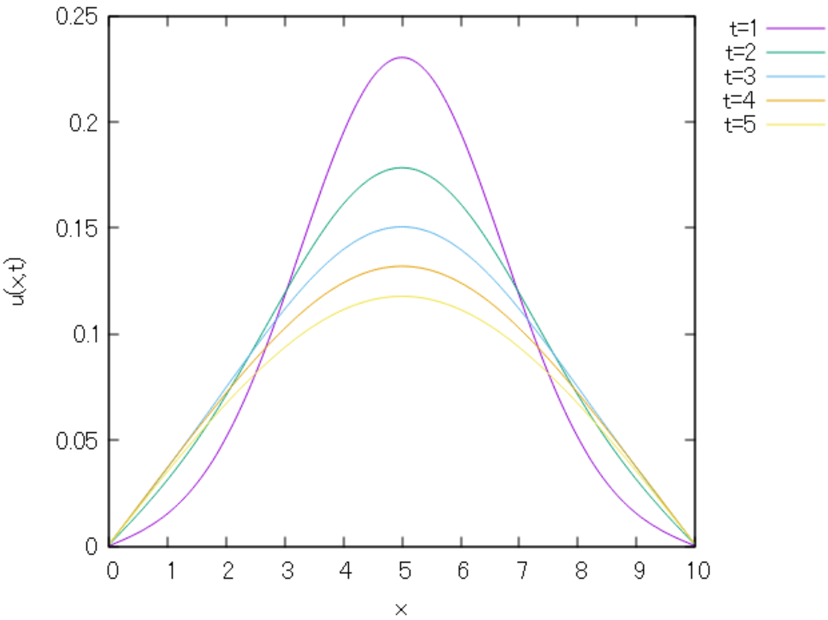
(2)

x	$u(x,1)$	$u(x,2)$	$u(x,3)$	$u(x,4)$	$u(x,5)$
0.25	0.00850960	0.03066739	0.05144589	0.06682939	0.07751347
0.75	0.01312011	0.03640481	0.05596939	0.07002702	0.07970402
1.25	0.02327120	0.04770836	0.06466083	0.07612812	0.08387473
1.75	0.04042091	0.06411173	0.07681084	0.08456593	0.08962388
2.25	0.06574809	0.08466488	0.09137206	0.09454500	0.09639525
2.75	0.09906029	0.10778001	0.10700755	0.10510737	0.10353006
3.25	0.13779168	0.13121876	0.12218764	0.11521915	0.11032989
3.75	0.17668199	0.15229131	0.13533900	0.12387171	0.11612510
4.25	0.20863813	0.16826426	0.14503179	0.13018755	0.12034186
4.75	0.22675714	0.17688763	0.15017416	0.13351791	0.12256087
5.25	0.22675714	0.17688763	0.15017416	0.13351791	0.12256087
5.75	0.20863813	0.16826426	0.14503179	0.13018755	0.12034186
6.25	0.17668199	0.15229131	0.13533900	0.12387171	0.11612510
6.75	0.13779168	0.13121876	0.12218764	0.11521915	0.11032989
7.25	0.09906029	0.10778001	0.10700755	0.10510737	0.10353006
7.75	0.06574809	0.08466488	0.09137206	0.09454500	0.09639525
8.25	0.04042091	0.06411173	0.07681084	0.08456593	0.08962388
8.75	0.02327120	0.04770836	0.06466083	0.07612812	0.08387473
9.25	0.01312011	0.03640481	0.05596939	0.07002702	0.07970402
9.75	0.00850960	0.03066739	0.05144589	0.06682939	0.07751347



(3)

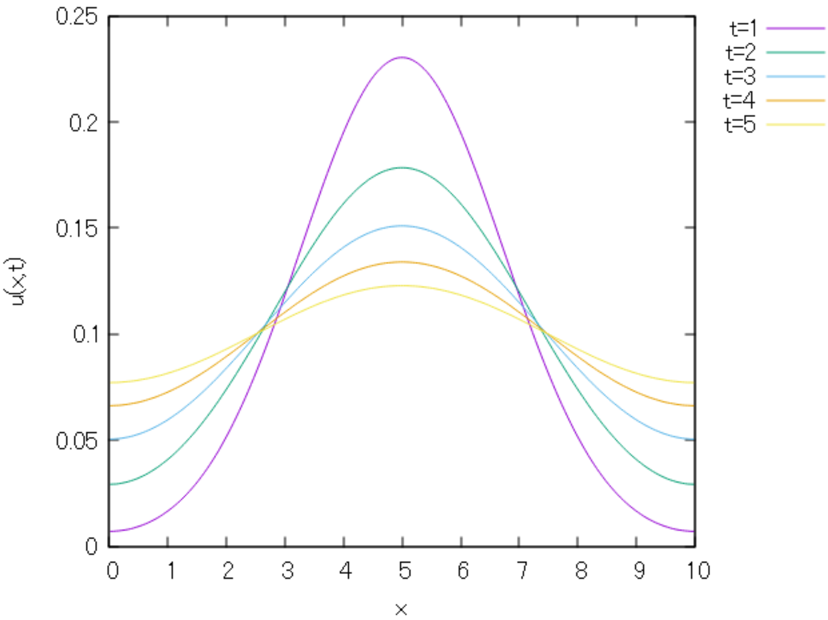
x	$u(x,1)$	$u(x,2)$	$u(x,3)$	$u(x,4)$	$u(x,5)$
0.025	0.00057443	0.00143559	0.00178272	0.00182558	0.00174313
0.075	0.00115145	0.00287264	0.00356582	0.00365107	0.00348597
0.125	0.00173364	0.00431263	0.00534969	0.00547636	0.00522825
0.175	0.00232361	0.00575702	0.00713472	0.00730134	0.00696969
0.225	0.00292393	0.00720726	0.00892127	0.00912593	0.00871000
0.275	0.00353721	0.00866477	0.01070971	0.01095000	0.01044890
0.325	0.00416605	0.01013098	0.01250042	0.01277345	0.01218610
0.375	0.00481304	0.01160728	0.01429372	0.01459617	0.01392132
0.425	0.00548078	0.01309505	0.01608996	0.01641804	0.01565426
0.475	0.00617188	0.01459561	0.01788946	0.01823893	0.01738465
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
4.775	0.22838511	0.17749266	0.15000733	0.13160517	0.11752154
4.825	0.22914769	0.17784863	0.15022643	0.13176369	0.11764889
4.875	0.22972130	0.17811607	0.15039094	0.13188268	0.11774445
4.925	0.23010451	0.17829458	0.15050070	0.13196205	0.11780818
4.975	0.23029635	0.17838391	0.15055561	0.13200175	0.11784005
5.025	0.23029635	0.17838391	0.15055561	0.13200175	0.11784005
5.075	0.23010451	0.17829458	0.15050070	0.13196205	0.11780818
5.125	0.22972130	0.17811607	0.15039094	0.13188268	0.11774445
5.175	0.22914769	0.17784863	0.15022643	0.13176369	0.11764889
5.225	0.22838511	0.17749266	0.15000733	0.13160517	0.11752154
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9.525	0.00617188	0.01459561	0.01788946	0.01823893	0.01738465
9.575	0.00548078	0.01309505	0.01608996	0.01641804	0.01565426
9.625	0.00481304	0.01160728	0.01429372	0.01459617	0.01392132
9.675	0.00416605	0.01013098	0.01250042	0.01277345	0.01218610
9.725	0.00353721	0.00866477	0.01070971	0.01095000	0.01044890
9.775	0.00292393	0.00720726	0.00892127	0.00912593	0.00871000
9.825	0.00232361	0.00575702	0.00713472	0.00730134	0.00696969
9.875	0.00173364	0.00431263	0.00534969	0.00547636	0.00522825
9.925	0.00115145	0.00287264	0.00356582	0.00365107	0.00348597
9.975	0.00057443	0.00143559	0.00178272	0.00182558	0.00174313



0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
u(x,t)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x
t=1
t=2
t=3
t=4
t=5

(4)

x	$u(x,1)$	$u(x,2)$	$u(x,3)$	$u(x,4)$	$u(x,5)$
0.025	0.00715622	0.02930336	0.05057466	0.06632318	0.07723021
0.075	0.00719989	0.02936193	0.05062108	0.06635593	0.07725258
0.125	0.00728734	0.02947905	0.05071390	0.06642140	0.07729730
0.175	0.00741879	0.02965469	0.05085304	0.06651953	0.07736433
0.225	0.00759457	0.02988880	0.05103838	0.06665022	0.07745359
0.275	0.00781512	0.03018134	0.05126978	0.06681336	0.07756501
0.325	0.00808100	0.03053221	0.05154707	0.06700879	0.07769848
0.375	0.00839284	0.03094134	0.05187001	0.06723634	0.07785386
0.425	0.00875142	0.03140860	0.05223836	0.06749578	0.07803101
0.475	0.00915757	0.03193386	0.05265181	0.06778689	0.07822976
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4.775	0.22838517	0.17752672	0.15049100	0.13366513	0.12261136
4.825	0.22914775	0.17788149	0.15070122	0.13380095	0.12270168
4.875	0.22972136	0.17814803	0.15085911	0.13390295	0.12276951
4.925	0.23010456	0.17832596	0.15096447	0.13397100	0.12281476
4.975	0.23029640	0.17841498	0.15101718	0.13400504	0.12283740
5.025	0.23029640	0.17841498	0.15101718	0.13400504	0.12283740
5.075	0.23010456	0.17832596	0.15096447	0.13397100	0.12281476
5.125	0.22972136	0.17814803	0.15085911	0.13390295	0.12276951
5.175	0.22914775	0.17788149	0.15070122	0.13380095	0.12270168
5.225	0.22838517	0.17752672	0.15049100	0.13366513	0.12261136
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9.525	0.00915757	0.03193386	0.05265181	0.06778689	0.07822976
9.575	0.00875142	0.03140860	0.05223836	0.06749578	0.07803101
9.625	0.00839284	0.03094134	0.05187001	0.06723634	0.07785386
9.675	0.00808100	0.03053221	0.05154707	0.06700879	0.07769848
9.725	0.00781512	0.03018134	0.05126978	0.06681336	0.07756501
9.775	0.00759457	0.02988880	0.05103838	0.06665022	0.07745359
9.825	0.00741879	0.02965469	0.05085304	0.06651953	0.07736433
9.875	0.00728734	0.02947905	0.05071390	0.06642140	0.07729730
9.925	0.00719989	0.02936193	0.05062108	0.06635593	0.07725258
9.975	0.00715622	0.02930336	0.05057466	0.06632318	0.07723021



1.5　考察

図より、$x = 5$ について対象な結果が得られたことが分かる。これは方程式と初期条件の対称性によるものである。

2 問題 2（Fisher 方程式）

2.1 はじめに

拡散方程式に非線形項 $f(u) = u(1-u)$ を加えた偏微分方程式（Fisher 方程式）

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(1-u) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

を考える。この方程式は遺伝学における優性遺伝子の空間伝播を表現するために提案された。初期条件

$$u_0(x) = \frac{1}{(1+e^{bx-5})^2} \tag{2.2}$$

境界条件 $(L = 200)$

$$u(0,t) = 1 \tag{2.3}$$

$$u(L,t) = 0 \tag{2.4}$$

の下で $b = 0.25, 0.5, 1.0$ の場合に Fisher 方程式をオイラー陽解法

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = f(u_j^n) + \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} \tag{2.5}$$

を用いて数値的に解け。ただし、刻み幅は $\Delta x = 0.05 (N = 4000)$, $\Delta t = 0.001$ とし、$t = 10, 20, 30, 40, (n = 10000, 20000, 30000, 40000)$ の $u(x,t)$ の値を出力すること。また、得られた $u(x,t)$ の値を b の値ごとに一枚の図（横軸 x, 縦軸 u）に図示せよ。

また、得られた結果について考察せよ。（例えば b の値を様々に変えたときに振る舞いはどのように変わるかを見るなど。）

2.2 実験方法

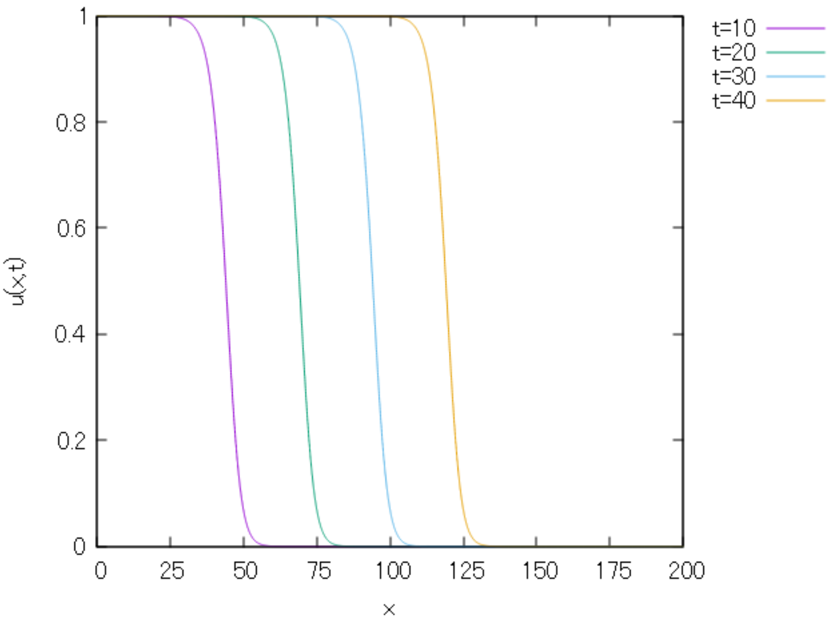
```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define N 4000
#define M 40000
#define L 10000

double u0(double x){
    return 1/((1+exp(0.25*x-5))*(1+exp(0.25*x-5)));
}

double fu(double u){
    return u*(1-u);
}

double FE(double dx, double dt){

    double c = dt/(dx*dx);

    double u[N+2];

    for(int j=1; j<=N; j++){
        u[j] = (u0((j-1)*dx)+u0(j*dx))/2;
    }

    u[0]=1;
    u[N+1]=0;
```

```

    double x[N+2];
    double ux[4][N];

    for(int i=1; i<=M; i++){
        for(int j=1; j<=N; j++){
            x[j] = u[j] + c*(u[j-1]-2*u[j]+u[j+1]) + fu(u[j])*dt;
        }

        for(int j=1; j<=N; j++){
            u[j] = x[j];
        }

        for(int k=1; k<=4; k++){
            if(i==k*L){
                for(int j=1; j<=N; j++){
                    ux[k-1][j-1]=u[j];
                }
            }
        }
    }

    FILE *fp;
    fp = fopen("2-1-025","w");

    for(int j=1; j<=N; j++){
        printf("%.3f", j*dx-0.025);
        fprintf(fp, "%.3f", j*dx-0.025);

        for(int k=1; k<=4; k++){
            printf("&%.8f", ux[k-1][j-1]);
            fprintf(fp, " %.8f", ux[k-1][j-1]);
        }

        printf("\\\\\n");
        fprintf(fp,"\n");
    }
}

int main(void){
    double dt = 0.001;
    double dx = 0.05;

    FE(dx, dt);
}
```

2.3 結果

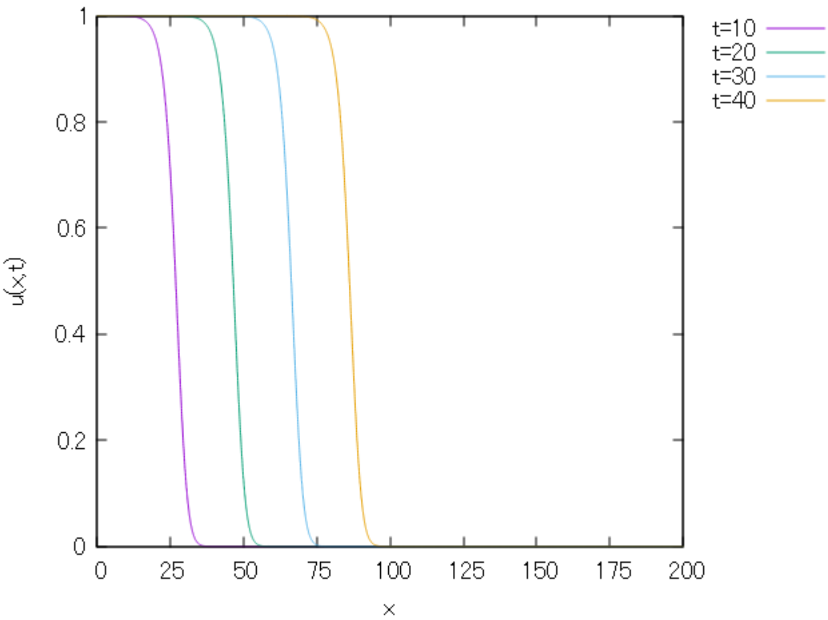
b=0.25

x	$u(x,10)$	$u(x,20)$	$u(x,30)$	$u(x,40)$
0.025	0.99999997	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.075	0.99999994	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.125	0.99999991	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.175	0.99999988	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.225	0.99999985	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.275	0.99999982	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.325	0.99999979	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.375	0.99999975	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.425	0.99999972	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.475	0.99999969	1.00000000	1.00000000	1.00000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
99.775	0.00000000	0.00000034	0.07722454	0.99900476
99.825	0.00000000	0.00000033	0.07556180	0.99898715
99.875	0.00000000	0.00000032	0.07393028	0.99896923
99.925	0.00000000	0.00000031	0.07232959	0.99895099
99.975	0.00000000	0.00000031	0.07075930	0.99893243
100.025	0.00000000	0.00000030	0.06921901	0.99891354
100.075	0.00000000	0.00000029	0.06770830	0.99889432
100.125	0.00000000	0.00000028	0.06622677	0.99887476
100.175	0.00000000	0.00000028	0.06477400	0.99885485
100.225	0.00000000	0.00000027	0.06334959	0.99883459
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
199.525	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.575	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.625	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.675	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.725	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.775	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.825	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.875	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.925	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.975	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000


u(x,t)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
25
50
75
100
125
150
175
200
x
t=10
t=20
t=30
t=40

b=0.5

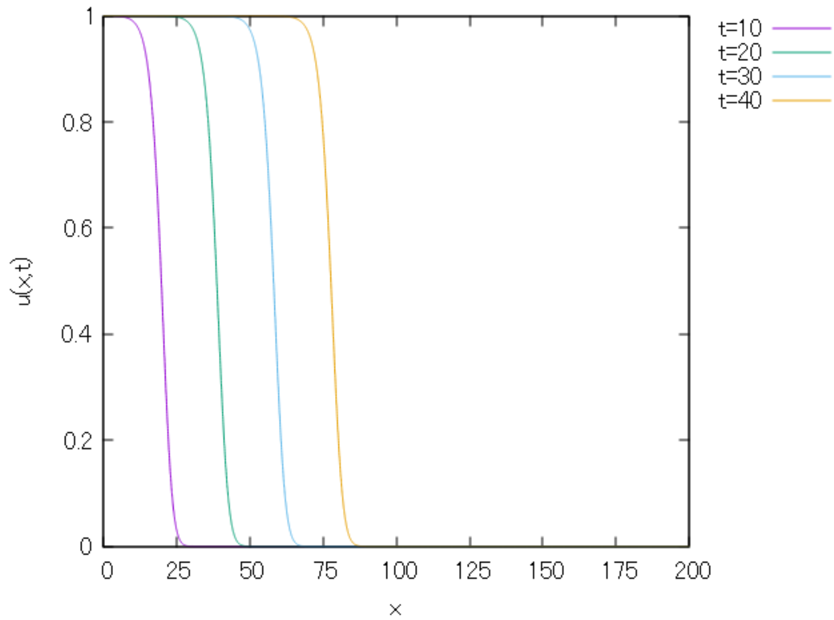
x	$u(x,10)$	$u(x,20)$	$u(x,30)$	$u(x,40)$
0.025	0.99999970	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.075	0.99999940	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.125	0.99999910	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.175	0.99999879	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.225	0.99999849	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.275	0.99999819	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.325	0.99999788	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.375	0.99999758	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.425	0.99999727	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.475	0.99999696	1.00000000	1.00000000	1.00000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
99.775	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00003740
99.825	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00003569
99.875	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00003406
99.925	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00003251
99.975	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00003102
100.025	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00002960
100.075	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00002825
100.125	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00002695
100.175	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00002572
100.225	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00002454
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
199.525	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.575	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.625	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.675	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.725	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.775	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.825	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.875	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.925	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.975	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000



t=10
t=20
t=30
t=40
u(x,t)
x
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
25
50
75
100
125
150
175
200

b=1.0

x	$u(x,10)$	$u(x,20)$	$u(x,30)$	$u(x,40)$
0.025	0.99999612	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.075	0.99999225	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.125	0.99998837	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.175	0.99998448	0.99999999	1.00000000	1.00000000
0.225	0.99998058	0.99999999	1.00000000	1.00000000
0.275	0.99997666	0.99999999	1.00000000	1.00000000
0.325	0.99997274	0.99999999	1.00000000	1.00000000
0.375	0.99996880	0.99999999	1.00000000	1.00000000
0.425	0.99996483	0.99999999	1.00000000	1.00000000
0.475	0.99996085	0.99999998	1.00000000	1.00000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
99.775	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
99.825	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
99.875	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
99.925	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
99.975	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
100.025	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
100.075	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
100.125	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
100.175	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
100.225	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
199.525	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.575	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.625	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.675	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.725	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.775	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.825	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.875	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.925	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
199.975	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000



2.4 考察

b, t の値によらず、$u(x,t)$ は $u(0,t) = 1$ から $u(L,t) = 0$ へと単調に減少している。
b の値が大きく、t の値が小さくなるほど、減少のスピードが速くなっている。

3　問題3（1次元調和振動子のSchrödinger方程式）

3.1　はじめに

量子力学において、1次元調和振動子のダイナミクスは、次のSchrödinger方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{2}x^2\right)\psi(x,t) \tag{3.1}$$

に従う。$\psi(x,t) = \psi_R(x,t) + i\psi_I(x,t)(\psi_R, \psi_I \in \mathbb{R})$ のように波動関数を実部と虚部に分けると、それぞれの従う方程式は

$$\hbar\frac{\partial\psi_R}{\partial t}(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{2}x^2\right)\psi_I(x,t) \tag{3.2}$$

$$-\hbar\frac{\partial\psi_I}{\partial t}(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{2}x^2\right)\psi_R(x,t) \tag{3.3}$$

となり、2つの拡散型方程式の組で表される。この際、粒子の位置の確率密度は $P(x,t) \equiv |\psi(x,t)|^2 = \psi_R(x,t)^2 + \psi_I(x,t)^2$ で与えられる。

今、パラメータを $\hbar = 1,\ m = 1,\ k = 1$ とし、初期条件

$$\psi(x,0) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{\frac{1}{4}}}e^{-2(x-5)^2} \tag{3.4}$$

の下でSchrödinger方程式を数値的に解くことを考える。ただし、空間領域は $[-L/2, l/2]$ とし、境界条件は周期境界条件

$$\psi\left(\frac{L}{2}, t\right) = \psi\left(-\frac{L}{2}, t\right) \tag{3.5}$$

とする。

数値的に解く際にはVisscherのスキーム [3] と呼ばれる、実部と虚部の時間発展を半ステップだけずらして解く陽解法を用いる。即ち、離散化された波動関数の実部、虚部をそれぞれ $\{R_j^n\},\{I_j^n\}$ と書くと、$1 \le j \le N(L = N\Delta x)$ に対して時間発展は

$$R_j^{n+1} = R_j^n + \Delta t\left(-\frac{1}{2}\frac{I_{j-1}^n - 2I_j^n + I_{j+1}^n}{\Delta x^2} + \frac{1}{2}x_j^2 I_j^n\right) \tag{3.6}$$

$$I_j^{n+1} = I_j^n - \Delta t\left(-\frac{1}{2}\frac{R_{j-1}^{n+1} - 2R_j^{n+1} + R_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{1}{2}x_j^2 R_j^{n+1}\right) \tag{3.7}$$

と記述される。ただし、

$$x_j \equiv \left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta x - \frac{L}{2} \tag{3.8}$$

であり、境界条件は全ての n で

$$R_0^n = R_N^n \tag{3.9}$$

$$R_{N+1}^n = R_1^n \tag{3.10}$$

$$I_0^n = I_N^n \tag{3.11}$$

$$I_{N+1}^n = I_1^n \tag{3.12}$$

と表される。また、初期条件は $1 \leq j \leq N$ で

$$
\begin{aligned}
R_j^0 &= \frac{1}{2}\left[\psi\left((j-1)\Delta x - \frac{L}{2}, 0\right) + \psi\left(j\Delta x - \frac{L}{2}, 0\right)\right] && (3.13)\\
I_j^0 &= -\Delta t\left(-\frac{1}{2}\frac{R_{j-1}^0 - 2R_j^0 + R_{j+1}^0}{\Delta x^2} + \frac{1}{2}x_j^2 R_j^0\right) && (3.14)
\end{aligned}
$$

と表される。$N = 400,\ \Delta x = 0.05(L = 20),\ \Delta t = 0.001$ の下でこの系を数値的に解き、$t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (n = 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000)$ における確率密度 $\left(R_j^n\right)^2 + I_j^n I_j^{n-1} (1 \leq j \leq N)$ の値を出力せよ。また、得られた確率密度 $\left(R_j^n\right)^2 + I_j^n I_j^{n-1}$ の値を一つの図（横軸は x_j）に図示せよ。

3.2 実験方法

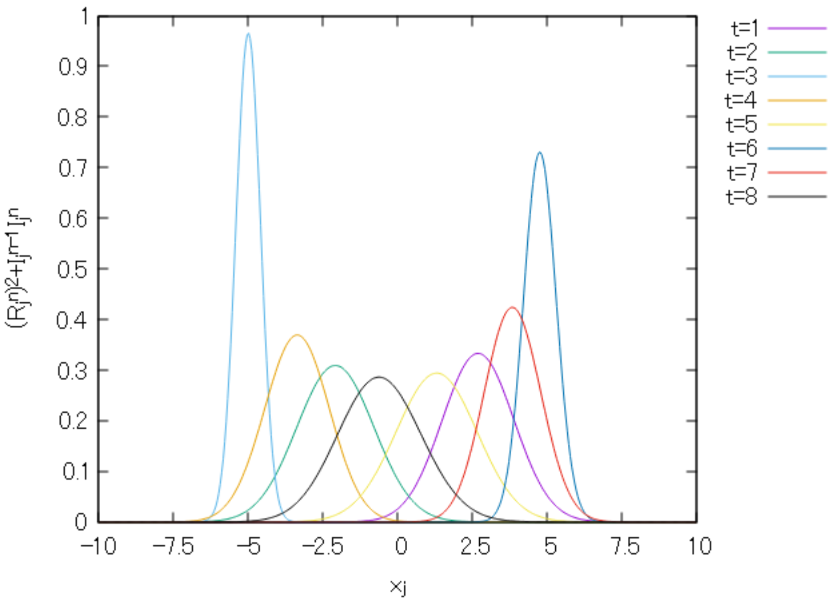
```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define N 400
#define M 8000
#define L 1000

double u0(double x){
    return sqrt(2)*exp(-2*(x-5)*(x-5))/pow(M_PI,0.25);
}

double FE(double dx, double dt){

    double R[N+2];
    double I[N+2];
    double Ix[N+2];

    for(int j=1; j<=N; j++){
        R[j]=(u0((j-1)*dx-10)+u0(j*dx-10))/2;
    }

    R[0]=R[N];
    R[N+1]=R[1];

    for(int j=1; j<=N; j++){
        Ix[j]=-dt*(-(R[j-1]-2*R[j]+R[j+1])/(2*dx*dx)+((j-1/2)*dx-10)*((j-1/2)*dx-10)
            *R[j]/2);
    }

    Ix[0]=Ix[N];
    Ix[N+1]=Ix[1];

    double u[8][N];

    for(int i=1; i<=M; i++){
        for(int j=1; j<=N; j++){
            R[j] = R[j]+dt*(-(Ix[j-1]-2*Ix[j]+Ix[j+1])/(2*dx*dx)+((j-1/2)*dx-10)*((j
                -1/2)*dx-10)*Ix[j]/2);
        }

        R[0]=R[N];
        R[N+1]=R[1];

        for(int j=1; j<=N; j++){
            I[j]=Ix[j]-dt*(-(R[j-1]-2*R[j]+R[j+1])/(2*dx*dx)+((j-1/2)*dx-10)*((j-1/2)*
                dx-10)*R[j]/2);
        }

        for(int k=1; k<=8; k++){
```

```
                if(i==k*L){
                    for(int j=1; j<=N; j++){
                        u[k-1][j-1]=R[j]*R[j]+I[j]*Ix[j];
                    }
                }
            }

            for(int j=1; j<=N; j++){
                Ix[j]=I[j];
            }

            Ix[0]=Ix[N];
            Ix[N+1]=Ix[1];
        }

        FILE *fp;
        fp = fopen("3-1","w");

        for(int j=1; j<=N; j++){
            printf("%.3f", j*dx-10-0.025);
            fprintf(fp, "%.3f", j*dx-10-0.025);

            for(int k=1; k<=8; k++){
                printf("&%.8f", u[k-1][j-1]);
                fprintf(fp, " %.8f", u[k-1][j-1]);
            }

            printf("\\\\\n");
            fprintf(fp,"\n");
        }
}

int main(void){
    double dt = 0.001;
    double dx = 0.05;

    FE(dx, dt);
}
```

3.3 結果

x	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
-9.975	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
-9.925	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
-9.875	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
-9.825	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
-9.775	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
-9.725	0.00000000	0.00000001	0.00000000	0.00000000
-9.675	0.00000000	0.00000001	0.00000000	0.00000001
-9.625	0.00000000	0.00000001	0.00000000	0.00000001
-9.575	0.00000000	0.00000001	0.00000000	0.00000001
-9.525	0.00000000	0.00000001	0.00000000	0.00000002
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-0.225	0.01633562	0.11035893	0.00000000	0.00464261
-0.175	0.01811764	0.10431692	0.00000000	0.00401205
-0.125	0.02005686	0.09845669	0.00000000	0.00345861
-0.075	0.02216260	0.09278542	0.00000000	0.00297398
-0.025	0.02444420	0.08730984	0.00000000	0.00255042
0.025	0.02691097	0.08203553	0.00000000	0.00218105
0.075	0.02957211	0.07696619	0.00000000	0.00185985
0.125	0.03243664	0.07210351	0.00000000	0.00158156
0.175	0.03551332	0.06744752	0.00000000	0.00134141
0.225	0.03881055	0.06299738	0.00000000	0.00113491
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9.525	0.00000003	0.00000000	0.00000000	0.00000000
9.575	0.00000002	0.00000000	0.00000000	0.00000000
9.625	0.00000002	0.00000000	0.00000000	0.00000000
9.675	0.00000001	0.00000000	0.00000000	0.00000000
9.725	0.00000001	0.00000000	0.00000000	0.00000000
9.775	0.00000001	0.00000000	0.00000000	0.00000000
9.825	0.00000001	0.00000000	0.00000000	0.00000000
9.875	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
9.925	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
9.975	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000

x	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	$t = 8$
-9.975	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
-9.925	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
-9.875	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
-9.825	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
-9.775	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
-9.725	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
-9.675	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
-9.625	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
-9.575	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
-9.525	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-0.225	0.15539137	0.00000000	0.00001176	0.27506562
-0.175	0.16183354	0.00000000	0.00001550	0.27213079
-0.125	0.16832138	0.00000000	0.00002044	0.26888925
-0.075	0.17483898	0.00000000	0.00002694	0.26535228
-0.025	0.18136903	0.00000000	0.00003535	0.26153081
0.025	0.18789313	0.00000000	0.00004604	0.25743667
0.075	0.19439242	0.00000000	0.00005951	0.25308386
0.125	0.20084809	0.00000000	0.00007645	0.24848899
0.175	0.20724157	0.00000000	0.00009783	0.24367063
0.225	0.21355435	0.00000000	0.00012488	0.23864801
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9.525	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
9.575	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
9.625	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
9.675	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
9.725	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
9.775	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
9.825	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
9.875	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
9.925	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
9.975	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000



3.4　考察

図より、t の値に拠らずグラフの概形は同じである。いずれも場合も $(R^n_{-10})^2 + I^{n-1}_{-10} I^n_{-10} = (R^n_{10})^2 + I^{n-1}_{10} I^n_{10} = 0$ であり、その間で 1 つ極大値を持っている。t の値により、極大値も極大値をとる x_j も異なる。