

## 4 Le code CASIER

### 4.1 Introduction

Ce chapitre présente le principe de résolution d'un ensemble de casiers dans le système MASCARET.

MASCARET permet en effet de modéliser les champs d'inondation situés le long d'une rivière par des *casiers* ou *bassines*, à cote constante et vitesse nulle. Ces casiers sont reliés entre eux et à la rivière par différentes lois d'échange, fonction de la typologie de la liaison, ce qui permet de modéliser les champs d'inondation qui ne participent pas de manière active à l'écoulement dans le lit majeur. Il s'agit donc d'une amélioration de la modélisation 1D classique, qui ne remplace toutefois pas la précision d'une modélisation 2D.

Ce chapitre présente le principe d'une telle modélisation, les équations régissant les différents débits d'échanges au travers des liaisons casier — casier et rivière — casier, le couplage numérique entre le module CASIER et le noyau fluvial non permanent, la résolution du système des casiers et enfin le planimétrage de la loi cote / volume du casier.

Les tests de validation sont détaillés dans les rapports [28][29].

### 4.2 Principe général

Le système à résoudre peut se schématiser ainsi :

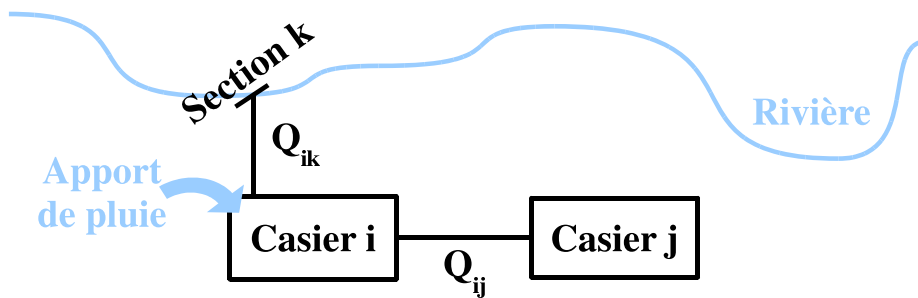


FIG. 34 – Principe Casier – Rivière

L'écoulement dans la rivière est déterminé par la résolution des équations de Saint-Venant en une dimension. Dans le système MASCARET, trois noyaux de calcul peuvent être utilisés pour cette résolution : un noyau fluvial permanent, un noyau fluvial non permanent et un noyau torrentiel non permanent.

On s'intéresse ici uniquement au couplage entre le système des casiers et le noyau fluvial non permanent. La méthode de résolution utilisée pour les écoulements fluviaux non permanents est une méthode aux différences finies, schéma implicite : les détails de cette résolution sont donnés à la section 4.4.

En ce qui concerne le système des casiers, nous avons fait les hypothèses suivantes :

- la cote de la surface libre dans les casiers est horizontale ;
- la vitesse d'écoulement dans les casiers est nulle ;
- le débit des liaisons d'échange ne dépend que de la cote de la surface libre dans les casiers et dans la rivière.

Ainsi, chaque casier est modélisé par une équation de continuité s'écrivant à chaque pas de temps  $t$  :

$$\frac{dV_i(Z_i)}{dt} = \sum_j Q_{ij}(Z_i, Z_j) + \sum_k Q_{ik}(Z_i, Z_k) + Q_{apport,i} \quad (276)$$

où :

- $i$  et  $j$  sont des indices de casier ;
- $k$  est un indice de section de calcul dans un bief ;
- $V_i$  est le volume du casier  $i$  ;
- $Z_i$  est la cote de la surface libre dans le casier  $i$ , inconnue ;
- $Z_j$  est la cote de la surface libre dans le casier  $j$ , connue au pas de temps précédent ;
- $Z_k$  est la cote de la rivière dans la section de calcul  $k$ , calculée par le noyau fluvial ;
- $Q_{ij}$  est le débit s'écoulant du casier  $j$  vers le casier  $i$ , inconnu ;
- $Q_{ik}$  est le débit s'écoulant de la section de calcul  $k$  dans la rivière vers le casier  $i$ , inconnu ;
- $Q_{apport,i}$  est le débit résultant d'éventuels apports (de pluie par exemple) dans le casier  $i$ , donnée utilisateur.

La cote dans le casier  $i$  est donc fonction des débits d'échange et d'éventuels débits d'apport.

Les débits d'échange  $Q_{ij}$  et  $Q_{ik}$  sont déterminés par la résolution des équations définissant les liaisons d'échange (voir la section 4.3).

La cote  $Z_k$  dans la rivière est calculée par le noyau fluvial. Le couplage entre le système des casiers et le noyau fluvial est décrit à la section 4.4. La

cote dans le casier  $i$  se calcule alors par résolution de l'équation de continuité des casiers, détaillée dans la section 4.5.

### 4.3 Détermination des débits d'échange

Les débits d'échange à travers les liaisons rivière - casier  $Q_{ik}$  ou casier - casier  $Q_{ij}$  dépendent du type de liaison. Le code accepte quatre types de liaisons : la liaison seuil, la liaison chenal, la liaison siphon et la liaison orifice.

#### 4.3.1 Liaison seuil déversant

Le débit est calculé à partir de la formule des déversoirs :

$$Q = Cml\sqrt{2gh}^{\frac{3}{2}} \quad (277)$$

avec :

- $Q$  le débit de la liaison ;
- $C$  le coefficient d'écoulement (distinction de l'état noyé ou dénoyé) ;
- $m$  le coefficient de débit ;
- $l$  la largeur du seuil ;
- $h = Z_{amont} - Z_{seuil}$  la hauteur d'écoulement au-dessus du seuil ( $Z_{amont}$  désigne la cote à l'amont du seuil, dans la rivière ou dans le casier, et  $Z_{seuil}$  désigne la cote de la crête du seuil). La cote à l'amont du seuil  $Z_{amont}$  est déterminée par le code.

Ainsi, pour traiter ce type de liaison, il est nécessaire de connaître la largeur du seuil, sa cote (hauteur moyenne représentative) et son coefficient de débit.

On essaiera de ne faire porter le calage que sur l'estimation du coefficient de débit, les autres grandeurs étant égales aux valeurs physiques réelles associées.

Remarque : le coefficient d'écoulement  $C$  permet de représenter la physique de l'écoulement en tenant compte du régime noyé ou dénoyé mais il permet également de stabiliser le calcul numérique lorsque le dénivelé entre les casiers tend vers 0. C'est pourquoi il est aussi appelé coefficient correcteur.

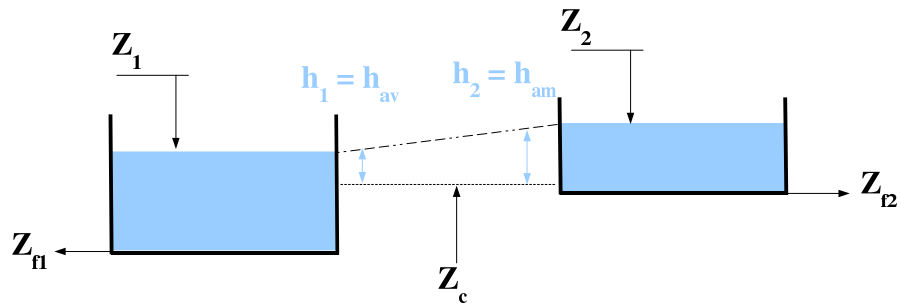
#### 4.3.2 Liaison chenal

Le débit est calculé à partir de la formule de Strickler, caractéristique des écoulements à surface libre, avec vérification de la hauteur d'eau réelle à

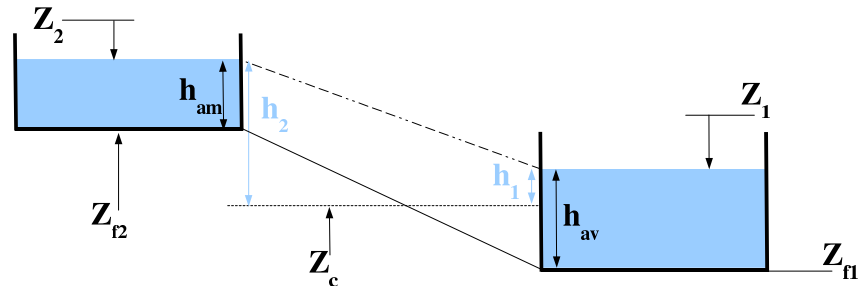
l'amont de la liaison.

On distingue deux cas :

- **Cas no. 1** : cas où la cote moyenne du fond du chenal est au dessus des deux cotes de fond des casiers ou de la rivière (cas d'un chenal horizontal par exemple) ;



- **Cas no. 2** : cas où la cote moyenne du fond du chenal est inférieure à l'une des cotes de fond des casiers (cas du chenal avec pente uniforme).



où :

- $Z_1$  et  $Z_2$  sont les cotes de la surface libre dans les casiers ou dans la rivière ;
- $Z_{f1}$  et  $Z_{f2}$  sont les cotes de fond des casiers ou de la rivière ;
- $Z_c$  est la cote moyenne du fond du chenal ;
- $h_1$  et  $h_2$  correspondent aux hauteurs d'eau relative à la cote moyenne du fond du chenal ( $h_1 = Z_1 - Z_c$  et  $h_2 = Z_2 - Z_c$ ). Elles permettent de déterminer le sens de l'écoulement et de distinguer l'amont de l'aval (sur nos schémas, l'amont est à l'indice 2 car :  $h_2 > h_1$ ) ;
- $h_{am}$  et  $h_{av}$  correspondent aux tirants d'eau réels à l'amont et à l'aval physique de la liaison. Dans le cas 1, elles sont calculées par rapport à la cote moyenne du fond du chenal et sont donc égales aux valeurs  $h_1$  et  $h_2$ . Dans le cas 2, elles sont calculées par rapport aux cotes de fond des casiers ou de la rivière ( $h_{am} = Z_2 - Z_{f2}$  et  $h_{av} = Z_1 - Z_{f1}$ ).

La détermination de ces valeurs est nécessaire pour tester la présence d'eau à l'amont de la liaison. Ainsi, si  $h_{am} = 0$  (alors que  $h_2 > 0$ ), le débit d'échange sera nul.

Le débit d'échange est ensuite calculé en fonction de  $\Delta Z = |h_1 - h_2|$  à partir de la formule de Strickler, caractéristique des écoulements à surface libre :

$$Q = KSR_h^{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{\Delta Z}{L}} \quad (278)$$

avec :

- $Q$  le débit de la liaison ;
- $S$  la section mouillée de la liaison ;
- $R_h$  le rayon hydraulique de la liaison ;
- $L$  la longueur de la liaison ;
- $K$  le coefficient de Strickler de la liaison ( $m^{1/3}.s^{-1}$ ) ;
- $\Delta Z$  le dénivelé entre les deux casiers ou dénivelé entre le casier et la rivière.

La hauteur d'eau sur le chenal  $h$  est la moyenne de  $h_{am}$  et  $h_{av}$ . On suppose que la hauteur d'eau  $h$  est très inférieure à la largeur  $l$  de la liaison et que le rayon hydraulique  $R_h$  peut être approché par la hauteur d'eau, autrement dit :  $h \ll l$  et  $R_h \simeq h$ .

Sous ces hypothèses, l'équation précédente devient :

$$Q = Klh^{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{\Delta Z}{L}} \quad (279)$$

D'autre part, lorsque le dénivelé  $\Delta Z$  tend vers 0, cette formulation présente des difficultés (la dérivée du débit par rapport au dénivelé tend vers l'infini). Numériquement, ce problème a été résolu en introduisant un coefficient correcteur  $C$ . Ce coefficient est calculé automatiquement par le code. Le débit devient alors :

$$Q = CKlh^{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{\Delta Z}{L}} \quad (280)$$

Pour traiter ce type de liaison, il est donc nécessaire de connaître la cote moyenne du fond du chenal, sa largeur, sa longueur ainsi que son coefficient

de rugosité. Ces paramètres sont renseignés dans le fichier *cas* des paramètres du calcul.

On essaiera de ne faire porter le calage que sur l'estimation du coefficient de rugosité, les autres grandeurs étant égales aux valeurs physiques réelles associées.

### 4.3.3 Liaison siphon

Le débit est calculé à partir de la formule universelle de perte de charge, caractéristique des écoulements en charge :

$$Q = \sqrt{\frac{2g}{\lambda L} \Delta Z} \times S^{\frac{5}{4}} \quad (281)$$

avec :

- $Q$  le débit de la liaison ;
- $S$  la section du siphon ;
- $L$  la longueur du siphon ;
- $\Delta Z$  le dénivelé entre les deux casiers ou dénivelé entre le casier et la rivière, calculé par le code ;
- $\lambda$  le coefficient de perte de charge relatif aux parois du tunnel (abaque de Moody).

Le siphon est considéré comme étant en charge dès l'instant où l'une de ses extrémités est recouverte d'eau. Dans le cas où le siphon n'est pas en charge (écoulement à surface libre), la liaison siphon est traitée comme une liaison chenal, avec comme largeur, la racine carrée de la section et comme coefficient de Strickler le coefficient suivant :

$$K = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} S^{\frac{1}{6}} \quad (282)$$

Lorsque le dénivelé  $\Delta Z$  tend vers 0, la formulation du débit d'échange devient instable [28]. Comme dans le cas de la liaison chenal, il a été nécessaire d'introduire un coefficient correcteur  $C$ . La formulation du débit devient alors :

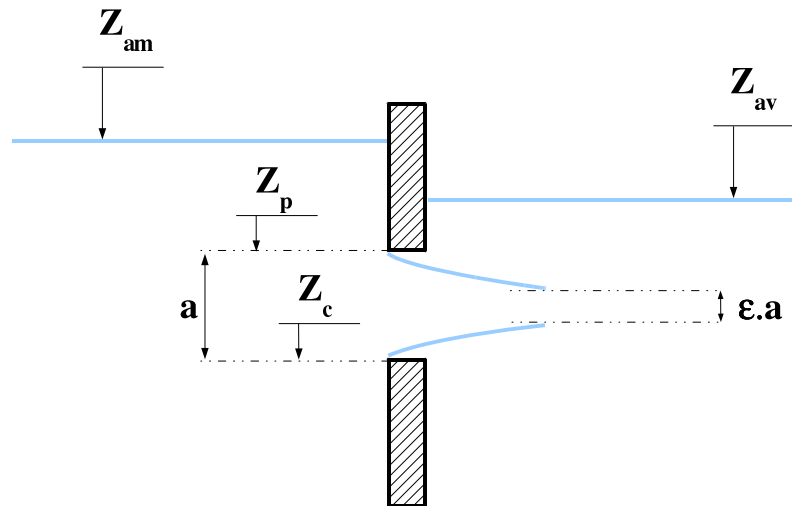
$$Q = C \sqrt{\frac{2g}{\lambda L} \Delta Z} \times S^{\frac{5}{4}} \quad (283)$$

Ainsi, pour traiter les liaisons de type siphon, il est nécessaire de connaître la cote moyenne du fond du siphon, sa longueur et sa section ainsi que le coefficient de perte de charge  $\lambda$ . Ces coefficients sont renseignés dans le fichier cas du calcul.

On essaiera de ne faire porter le calage que sur l'estimation du coefficient  $\lambda$ , les autres grandeurs étant égales aux valeurs physiques réelles associées.

#### 4.3.4 Liaison orifice

La figure ci-dessous présente le schéma de principe de ce type de liaison :



où :

- $Z_c$  est la cote du radier ;
- $Z_p$  la cote du fond ;
- $a = Z_p - Z_c$  la hauteur de l'orifice ;
- $Z_{am}$  la cote à l'amont de la liaison avec  $h_{am}$  la hauteur d'eau associée :  
 $h_{am} = Z_{am} - Z_c$  ;
- $Z_{av}$  la cote à l'aval de la liaison et  $h_{av}$  la hauteur d'eau associée :  
 $h_{av} = Z_{av} - Z_c$  ;
- $\epsilon$  le coefficient de contraction verticale.

La liaison est aussi définie par :

- $B$  la largeur de l'orifice ;
- $S$  la section de l'orifice :  $S = aB$  ;
- $m$  le coefficient de débit ;
- un type particulier de clapet :
  - type 1 : correspond à un débit possible dans les 2 sens ;

- type 2 : correspond à un clapet avec débit possible uniquement dans le sens casier origine  $\rightarrow$  casier fin (soit casier amont  $\rightarrow$  casier aval ou casier  $\rightarrow$  rivière) ;
- type 3 : correspond à un clapet avec débit possible dans le sens casier fin  $\rightarrow$  casier origine (soit casier aval  $\rightarrow$  casier amont ou rivière  $\rightarrow$  casier).

Les valeurs  $Z_c$ ,  $B$ ,  $S$  et  $m$  ainsi que le type de clapet sont renseignés par l'utilisateur dans le fichier *cas*. Les paramètres  $a$  et  $Z_p$  sont calculés par le code :  $a = \frac{S}{B}$  et  $Z_p = Z_c + a$ .

Le coefficient de contraction verticale  $\epsilon$  est calculé par le code en fonction de la hauteur de l'orifice et de la charge ( $h_{am}$ ) :

- \* si  $0 \leq \frac{a}{h_{am}} < 0.55$  :  $\epsilon = 0.65$  ;
- \* si  $0.55 \leq \frac{a}{h_{am}} < 0.9$  :  $\epsilon = 0.5 + 0.268 \frac{a}{h_{am}}$  ;
- \* si  $0.9 \leq \frac{a}{h_{am}} \leq 1$  :  $\epsilon = 0.745 + 0.255 \left( \frac{a}{h_{am}} - 0.9 \right)$ .

Le calcul du débit d'échange dépend alors du type d'écoulement :

- **écoulement à surface libre** :  $Z_{am} < Z_p$

L'orifice se comporte comme un seuil. On utilise alors la formule de la liaison seuil en imposant le coefficient d'activation  $\alpha$  à 0,2 (voir la section 4.3.5). La cote de crête du seuil est prise égale à  $Z_c$ , sa largeur à  $B$ . Son coefficient de débit est lu dans le fichier *cas*. L'utilisateur doit donc renseigner deux valeurs de coefficient de débit : le coefficient de débit pour une loi de seuil et le coefficient de débit pour une loi d'orifice ;

- **écoulement submergé (en charge) noyé** :  $Z_{am} > Z_p$  et  $h_{av} > \frac{a}{2}$

Le débit est calculé par la formule suivante :

$$Q = m\epsilon S \sqrt{2g(h_{am} - h_{av})} \quad (284)$$

- **écoulement submergé (en charge) dénoyé** :  $Z_{am} > Z_p$  et  $h_{av} < \frac{a}{2}$

Le débit est calculé par la formule suivante :

$$Q = m\epsilon S \sqrt{2g(h_{am} - \frac{a}{2})} \quad (285)$$

Enfin, le calcul de la vitesse d'échange distingue le cas où l'orifice est submergé et libre :



– dans le cas submergé :

$$V_{ech} = \frac{Q_{ech}}{S} \quad (286)$$

– dans le cas où l’orifice n’est pas en charge :

$$V_{ech} = \frac{Q_{ech}}{S_m} \quad (287)$$

où  $S_m = B.(Z_{moy} - Z_c)$  est la surface mouillée moyenne au-dessus de la liaison. Le calcul du niveau d’eau moyen  $Z_{moy}$  est donné par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} - \text{ si } Z_{av} < Z_c \text{ alors } Z_{moy} &= \frac{Z_{am} + Z_c}{2} ; \\ - \text{ si } Z_{av} > Z_c \text{ alors } Z_{moy} &= \frac{Z_{am} + Z_{av}}{2} . \end{aligned}$$

#### 4.3.5 Coefficient d’ennoiement ou coefficient de correction

##### 4.3.5.1 Nécessité d’un coefficient correcteur

Dans le cas de la liaison seuil, lorsque le régime devient noyé, il est nécessaire de faire intervenir la cote aval dans l’expression du débit. Cette cote aval est introduite par l’intermédiaire du coefficient d’ennoiement  $C$ .

La validation du code [28] a montré que, lorsque le dénivelé entre les casiers ou entre un casier et la rivière tend vers 0, des instabilités numériques se produisent quelque soit le type de liaison. Le coefficient d’ennoiement est donc également utilisé pour stabiliser le calcul. C’est pourquoi on l’appelle également coefficient correcteur.

Ainsi, dans le cas des liaisons seuil, le coefficient d’ennoiement sert également de coefficient correcteur. Par contre, dans le cas des liaisons chenal et siphon, comme il n’y a pas lieu de faire intervenir de coefficient d’ennoiement, seul le coefficient correcteur est appliqué et sa définition est conforme à celle retenue pour la liaison seuil.

##### 4.3.5.2 Définition de la fonction $C$

Dans le noyau de calcul fluvial non permanent, les seuils noyés sont traités à l’aide d’un coefficient d’ennoiement  $C$  fonction de la variable  $R$  :

$$R = \frac{Z_{aval} - Z_{seuil}}{Z_{amont} - Z_{seuil}} \quad (288)$$

avec  $Z_{seuil}$  la cote de crête du seuil. L'allure de la fonction  $C$  est parabolique. La dérivée de cette fonction n'est pas continue en 1. Or, dans la résolution du système des casiers la dérivée du débit intervient explicitement dans les calculs [30]. Il est donc nécessaire que la fonction  $C$  ainsi que sa dérivée soit continue.

D'autre part, la fonction  $C$  dépend d'un paramètre  $\alpha$  appelé coefficient d'activation qui définit la période d'activation de la fonction  $C$ . Ainsi  $C$  n'est défini que pour :  $R > \alpha$ . Dans le cas d'une liaison seuil noyée, le coefficient  $\alpha$  correspond au critère d'ennoiement.

Finalement, le choix standard retenu est que la fonction polynomiale  $C(R, \alpha)$  satisfasse les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} C(R = \alpha) &= 1 \quad \text{et} \quad C(R = 1) = 0 \\ \frac{dC}{dR}(R = \alpha) &= 0 \quad \text{et} \quad \frac{dC}{dR}(R = 1) = 0 \\ \frac{d^2C}{dR^2}(R = \frac{1 + \alpha}{2}) &= 0 \end{aligned} \tag{289}$$

On obtient alors une fonction du troisième degré au lieu de la fonction parabolique retenue pour les vrais seuils en rivière dans le noyau fluvial. Outre la continuité des dérivées, cette formulation entraîne une décroissance plus rapide du débit lorsque les niveaux des deux casiers ainsi connectés se rejoignent.

La fonction retenue est définie ainsi :

- en régime dénoyé et sans correction :  $R < \alpha$  et  $C = 1$  ;
- en régime noyé et/ou avec correction :  $R \geq \alpha$  ( $R < 1$  dans tous les cas) et :

$$C = -2 \left( \frac{1 - R}{1 - \alpha} \right)^3 + 3 \left( \frac{1 - R}{1 - \alpha} \right)^2 \tag{290}$$

Le paramètre  $\alpha$  a été fixé à 0.95 pour les liaisons chenal et siphon et varie entre 0.2 et 0.8 pour les liaisons seuil. Il est fixé par l'utilisateur en fonction du type de seuil.

La variable  $R$  est calculée par rapport à la cote  $Z_{seuil}$  qui désigne la cote de crête du seuil ou la cote moyenne du fond du chenal ou du siphon.

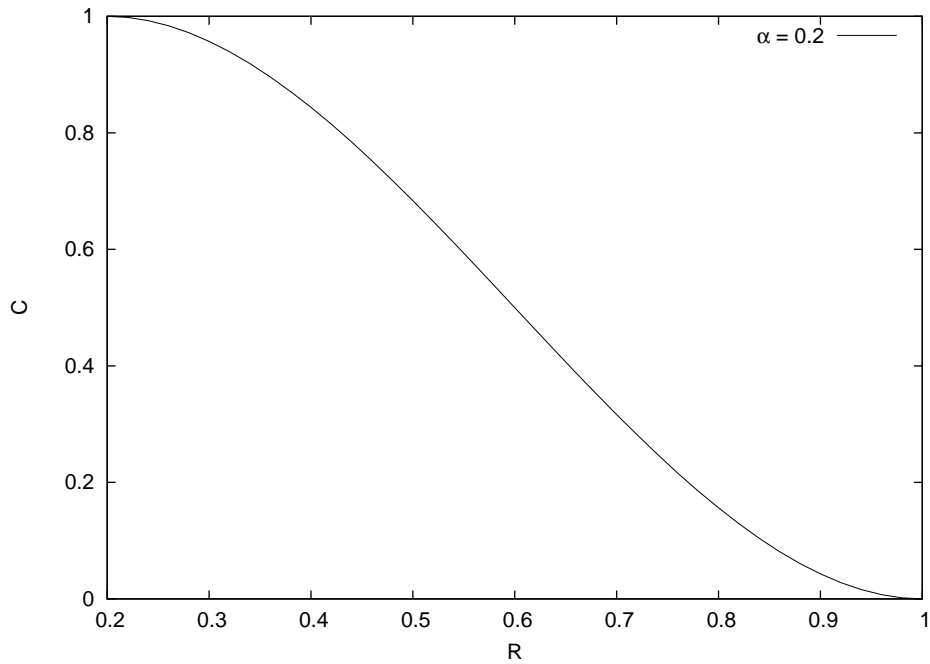


FIG. 35 – fonction  $C = f(R)$

#### 4.3.6 Apport de pluie

Les débits d'apport de pluie sont fournis par l'utilisateur à travers la définition d'un hydrogramme  $Q(t)$ . Le débit au temps  $t$  est une valeur moyenne du débit à l'instant  $t$  et du débit à l'instant  $t - dt$ . L'interpolation des débits à partir de l'hydrogramme est linéaire.

### 4.4 Couplage avec le noyau fluvial

L'articulation du système des casiers avec le noyau fluvial est illustrée sur le diagramme 36 :

A chaque pas de temps  $t$ , il y a donc une boucle de couplage entre les deux noyaux, repérée par l'indice  $n$ . On sort de la boucle de couplage lorsque  $n$  atteint le nombre maximal d'itérations NMAX souhaitées par l'utilisateur (une convergence effective risquant d'être très coûteuse en temps, et pas vraiment nécessaire au niveau de la précision des résultats, un nombre imposé d'itérations est effectué à chaque pas de temps).

Numériquement, le couplage réside dans le calcul des débits des liaisons rivière — casier, introduits comme débits d'apports  $Q_{ak}$  dans l'équation de continuité résolue par le noyau fluvial. Ces débits d'apport sont calculés de la façon suivante :

$$Q_{ak,n} = \sum_i Q_{ik,n=0} + \sum_{i,j,n} \left( \theta_2 \frac{\partial Q_{ik}}{\partial Z_k} \Delta Z_{k,n} + \theta_2 \frac{\partial Q_{ik}}{\partial Z_i} (\Delta Z_{i,n} - \Delta Z_{i,n-1}) \right) \quad (291)$$

avec les notations suivantes :

- $\Delta Z_{k,n} = \Delta Z_k^n - \Delta Z_k^{n-1}$  désigne la variation de cote dans la rivière à la section de calcul  $k$  pendant une itération  $n$  avec :
- $\Delta Z_k^{n-1}$  la variation calculée à l'itération  $n - 1$  ;
- $\Delta Z_k^n$  la variation estimée à l'itération  $n$  :  $\Delta Z_k^n = (1 - \theta_3) \Delta Z_k^{n-1} + \theta_3 \Delta Z_{k,n-1}^t$  ;
- $\Delta Z_{k,n-1}^t$  est la variation de cote dans la rivière à l'itération  $n - 1$  par rapport au pas de temps précédent calculée de la façon suivante (en utilisant les débits d'apports calculés à cette itération) :  $\Delta Z_{k,n-1}^t = Z_{k,n-1}^t - Z_{k,NMAX}^{t-1}$  ;
- $Z_{k,NMAX}^{t-1}$  est la cote dans la rivière à la section de calcul  $k$  convergée au pas de temps précédent et  $Z_{k,n-1}^t$  est la cote dans la rivière à la section  $k$  calculée à l'itération  $n - 1$  par le noyau fluvial ;
- $\theta_3$  est un coefficient d'implication appelé coefficient d'implication du couplage.

Théoriquement, ce calcul converge lorsque :  $\Delta Z_k^n = \Delta Z_{k,n}^t$ , la valeur estimée a priori est bien égale à la valeur calculée a posteriori. Pratiquement, il y a convergence lorsque  $n$  atteint le nombre maximal d'itérations de couplage NMAX.

$\Delta Z_{i,n}$  désigne la variation de cote dans le casier  $i$  pendant l'itération  $n$  qui est solution de l'équation (276) et qui se résout selon le schéma présenté à la section suivante. La cote dans le casier  $i$  n'est recalculée qu'à l'issue du couplage ( $n = \text{NMAX}$ ). Elle est donc constante pendant toute la boucle de

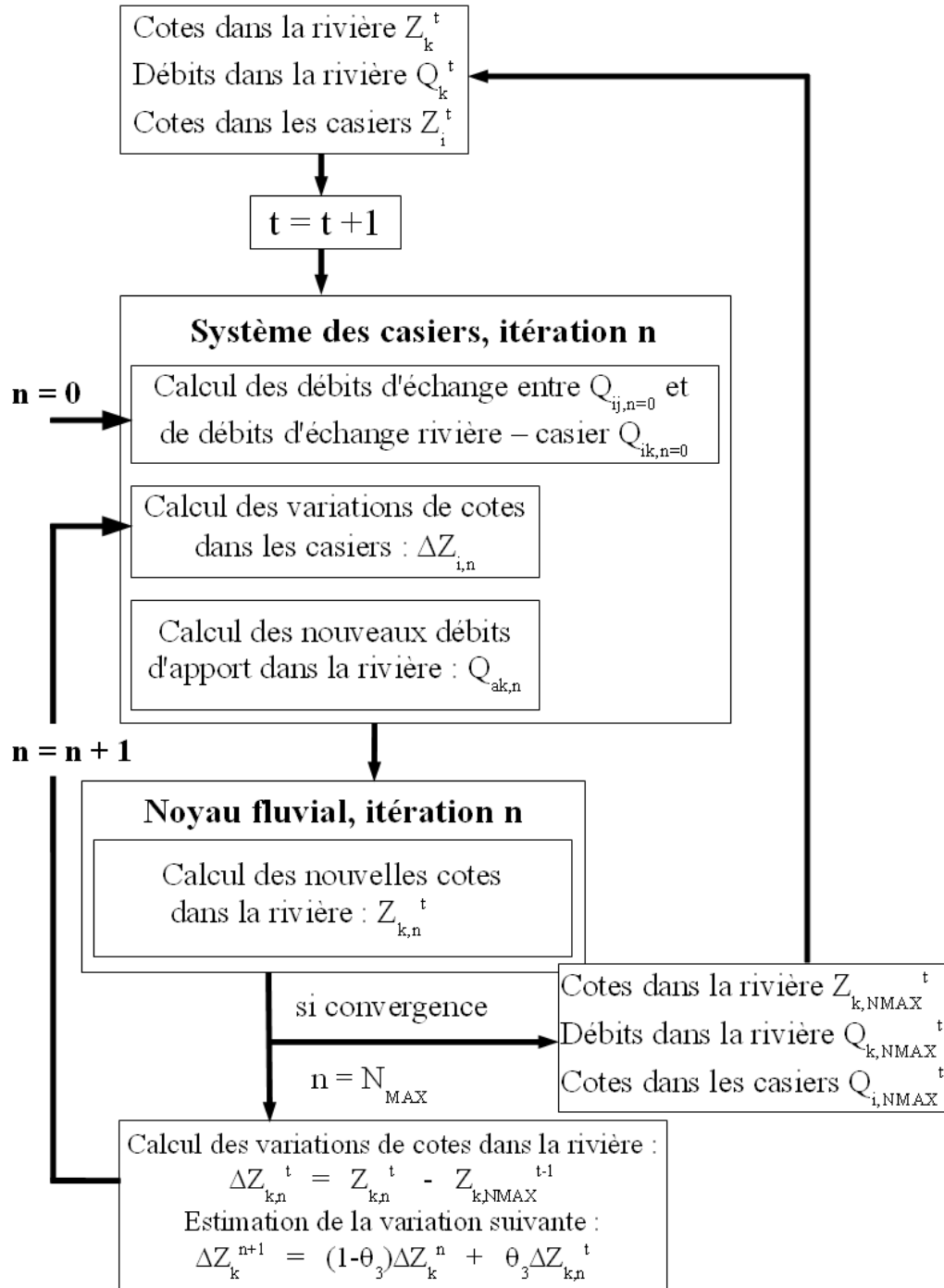


FIG. 36 – Algorithme de couplage

couplage contrairement à la cote dans la rivière qui est recalculée à chaque itération par le noyau fluvial.

On a montré sur quelques cas test de validation que la valeur de NMAX n'améliorait pas la qualité des résultats. Afin de limiter les temps calcul, il peut donc être préférable de prendre :  $NMAX = 1$ .

## 4.5 Résolution de l'équation de continuité des casiers

### 4.5.1 Discrétisation

Discrétisée entre le pas de temps  $t$  et le pas de temps  $t + \Delta t$  suivant un schéma aux différences finies implicite, l'équation de continuité (276) des casiers s'écrit :

$$\begin{aligned}
 S_i \frac{\Delta Z_{i,n}}{\Delta t} = & \sum_j \left( Q_{ij}(t) + \theta_2 \frac{\partial Q_{ij}(t)}{\partial Z_i} \Delta Z_{i,n} + \theta_2 \frac{\partial Q_{ij}(t)}{\partial Z_j} \Delta Z_{j,n-1} \right) \\
 & + \sum_{k,n} \left( Q_{ik}(t) + \theta_2 \frac{\partial Q_{ik}(t)}{\partial Z_i} \Delta Z_{i,n} + \theta_2 \frac{\partial Q_{ik}(t)}{\partial Z_k} \Delta Z_{k,n} \right) \\
 & + Q_{apport,i}
 \end{aligned} \tag{292}$$

$\theta_2$  est un coefficient d'implication destiné à tenir compte des variations de  $Q_{ij}$  et de  $Q_{ik}$  entre les instant  $t$  et  $t + \Delta t$ . On l'appelle coefficient d'implication du système des casiers.

On rappelle que les notations sont les suivantes :

- $i$  et  $j$  sont des indices de casier ;
- $k$  est un indice de section de calcul dans un bief ;
- $Z_{i,n}$  est la cote de la surface libre dans le casier  $i$  à l'itération  $n$  ;
- $Z_{j,n-1}$  est la cote de la surface libre dans le casier  $j$  à l'itération  $n - 1$  ;
- $Z_k$  est la cote de la rivière dans la section de calcul  $k$  ;
- $Q_{i,j}$  est le débit s'écoulant du casier  $j$  vers le casier  $i$  ;
- $Q_{i,k}$  est le débit s'écoulant de la section de calcul  $k$  dans la rivière vers le casier  $i$  ;
- $S_i$  est la surface du casier  $i$  indépendante du temps  $t$ .

#### 4.5.2 Linéarisation

Afin d'obtenir un système linéaire, nous avons regroupé les termes dans trois coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$ . L'équation (292) devient ainsi :

$$A(i)\Delta Z_{i,n} + \sum_j B(i,j)\Delta Z_{j,n-1} = C(i,n) \quad (293)$$

avec :

$$A(i) = S_i - \theta_2 \Delta t \sum_j \frac{\partial Q_{ij}}{\partial Z_i} - \theta_2 \Delta t \sum_k \frac{\partial Q_{ik}}{\partial Z_i} \quad (294)$$

$$B(i,j) = -\theta_2 \Delta t \frac{\partial Q_{ij}}{\partial Z_j} \quad (295)$$

et :

$$C(i,n) = \Delta t \left( \sum_j Q_{ij} + \sum_k Q_{ik} + Q_{apport,i} \right) + \theta_2 \Delta t \sum_{k,n} \frac{\partial Q_{ik}}{\partial Z_k} \Delta Z_{k,n} \quad (296)$$

La valeur  $Z_{k,n}$  est définie précédemment.

#### 4.5.3 Résolution du système

L'ensemble des équations (293) pour chacun des  $N$  casiers forme un système linéaire de  $N$  équations aux  $N$  inconnues  $\Delta Z_{i,n}$  de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_{1,2} & \dots & \dots & \dots & B_{1,N} \\ B_{2,1} & A_2 & \dots & \dots & \dots & B_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & B_{i,j} & \dots & \dots \\ B_{j,1} & \dots & B_{j,i} & A_j & \dots & B_{j,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & B_{N-1,N} \\ B_{N,1} & \dots & B_{N,j} & \dots & B_{N,N-1} & A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta Z_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \Delta Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta C_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} \quad (297)$$

Soit :  $[A_{mat}].X = D$

Avant résolution, la matrice  $A_{mat}$  est normée de façon que les éléments sur la diagonale soient égaux à l'unité.

On peut remarquer que la matrice  $A_{mat}$  n'a aucune propriété particulière : elle n'est ni positive, ni symétrique, par contre elle possède de nombreux

éléments nuls. En effet, le casier  $i$  n'est pas souvent relié aux  $N - 1$  autres casiers. La matrice  $A_{mat}$  s'écrira donc plutôt sous la forme :

$$A_{mat} = \begin{pmatrix} A_1 & B_{1,2} & 0 & B_{1,j} & 0 & B_{1,N} \\ B_{2,1} & A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ B_{j,1} & 0 & 0 & A_j & 0 & B_{j,N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_{N,1} & 0 & 0 & B_{N,j} & 0 & A_N \end{pmatrix} \quad (298)$$

en supposant ici que le casier 1 est relié aux casiers 2,  $j$  et  $N$  et que le casier  $N$  est relié au casier  $j$ .

Pour résoudre ce système, nous avons donc utilisé une méthode de Gauss – Seidel avec relaxation. L'expérience a montré qu'un coefficient de surrelaxation de 1,2 permet dans la majorité des cas de converger rapidement à condition de partir d'une solution plausible que nous avons prise égale à celle du temps précédent. Si la convergence n'est toujours pas assurée après 100 itérations, la résolution est stoppée et l'on garde alors la dernière valeur calculée.

La résolution du système 297 donne donc, pour chaque casier  $i$ , la variation de cote entre deux itérations de couplage  $n$  et  $n + 1$  :  $\Delta Z_{i,n}$  qui permet alors de résoudre l'équation (291).

## 4.6 Pré-traitement des données

Le noyau de calcul du système des casiers nécessite de connaître, pour chaque cote  $Z$  de la surface libre dans un casier, la surface au miroir  $S(Z)$  et le volume  $V(Z)$  correspondant. Pour cela, il est nécessaire de définir des lois  $S(Z)$  et  $V(Z)$  qui associent à une cote donnée la surface et le volume correspondant. Ces lois doivent être discrétisées ; ce ne sont donc pas des fonctions continues. Elles ont un nombre de couples  $(S, Z)$  et  $(V, Z)$  bien défini et l'écart entre les cotes est constant. Cette opération de discrétisation s'appelle le planimétrage. L'écart entre les cotes est appelé pas de discrétisation ou encore pas de planimétrage.

L'utilisateur a la possibilité de renseigner ces lois  $S(Z)$  et  $V(Z)$  discrétisées *à la main*, c'est-à-dire directement dans le fichier de géométrie des casiers. Cependant, ces lois sont souvent difficiles à déterminer et l'utilisa-



teur peut alors les faire calculer automatiquement par le code, après avoir défini les points frontières et les points intérieurs caractéristiques du casier.

Le principe du planimétrage automatique est le suivant.

### ⇒ Calcul des cotes

Les cotes des points intérieurs sont rangées dans l'ordre croissant dans un tableau que l'on nommera ZINT.

Ainsi, le tableau ZINT est tel que :

$$Z_{INT}(i-1) \leq Z_{INT}(i) \text{ pour } i = 2.. \text{nombre de points intérieurs.}$$

Le tableau des cotes de planimétrage est le tableau  $Z$ .

La première cote de planimétrage est la plus petite cote des points intérieurs :

$$Z(1) = \min(Z(i), i = 1.. \text{nombre de points intérieurs}) = Z_{INT}(1).$$

Les cotes sont ensuite rangées par ordre croissant avec :

$$Z(i+1) - Z(i) = \text{pas de planimétrage.}$$

Le nombre de cotes est égal au nombre de pas de planimétrage  $N_{planim}$  souhaité.

La dernière cote est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Z(N_{planim}) &= Z(1) \\ &+ (N_{planim} - 1) \\ &\times \text{pas de planimétrage} \end{aligned}$$

### ⇒ Calcul des surfaces

Les points frontière permettent de définir la surface maximale du casier ( $S_{max}$ ) : cette surface est calculée à partir de la définition de l'aire d'un polygone. Dans le cas où l'utilisateur a choisi l'option de calcul permettant de définir une surface indépendante de la cote, la surface du casier est égale à  $S_{max}$  quelque soit la cote dans le casier.

Dans l'autre cas, la première surface est calculée de la façon suivante :

$S(1) = S_{max} \times (\text{nombre de points intérieurs ayant pour cote de référence } Z(1)) / (\text{nombre de points intérieurs})$

Nous appellerons  $Z_{max}$  la plus grande cote des points intérieurs :

$$\begin{aligned} Z_{max} &= \text{Max}(Z(i), i = 1..\text{nombre de points intérieurs}) \\ &= Z_{INT}(\text{nombre de points intérieurs}) \end{aligned}$$

Tant que cette cote n'est pas atteinte, le calcul de  $S(i)$  est le suivant :

soit  $k$  tel que :  $Z_{int}(k-1) \leq Z(i) < Z_{INT}(k)$

$$S_1 = \frac{k-1}{\text{size}(Z_{INT})} S_{max} \quad (299)$$

où  $\text{size}(Z_{INT})$  désigne la taille du tableau  $Z_{INT}$ .

$$S_2 = \frac{k}{\text{size}(Z_{INT})} S_{max} \quad (300)$$

$$\alpha = \frac{Z(i) - Z_{INT}(k-1)}{Z_{INT}(k) - Z_{INT}(k-1)} \quad (301)$$

$$S(i) = (1 - \alpha) \times S_1 + \alpha \times S_2 \quad (302)$$

Enfin, une fois que la cote  $Z_{max}$  est dépassée ou égalée, la surface est égale à la surface maximale du casier :  $S(i) = S_{max}$ .

### $\Rightarrow$ Calcul des volumes

En ce qui concerne les volumes, le premier volume est nul :  $V(1) = 0$ . En effet, il correspond à la cote du fond du casier, donc à un casier vide. Les autres sont définis par la relation :

$$V(i) = V(i-1) + [(S(i-1) + S(i))/2] \times \text{pas de planimétrage}$$

### EXEMPLE :

Dans cet exemple (figure 37), on présente une vue de dessus d'un casier avec la position des points intérieurs cotés. Les positions sont repérées par leurs coordonnées  $(X, Y)$ .

TAB. 3 – Tableau récapitulatif des lois  $S(Z)$  et  $V(Z)$

Cote $Z$	Surface $S$	Volume $V$
$Z(1) = Z_{INT}(1)$	$S(1) = S_{max} \times$ (nombre de points intérieurs ayant pour cote de référence $Z(1)$ ) / (nombre de points intérieurs)	$V(1) = 0$
$Z(i) = Z(i-1) +$ pas de planimétrage	$S(i) = S(i-1) + \Delta S$ $\Delta S = (1 - \alpha)S_1 + \alpha S_2$	$V(i) = V(i-1) +$ $(S(i-1) + S(i))/2 \times$ pas de planimétrage
$Z(i) \geq Z_{INT}$ (nombre de points intérieurs)	$S(i) = S_{max}$	$V(i) = V(i-1) +$ $(S(i-1) + S(i))/2 \times$ pas de planimétrage
$Z$ (nombre de pas de planimétrage) = $Z(1)$ + (nombre de pas de planimétrage - 1) $\times$ pas de planimétrage	$S$ (nombre de pas de planimétrage) = $S_{max}$	$V(i) = V(i-1) +$ $(S(i-1) + S(i))/2 \times$ pas de planimétrage

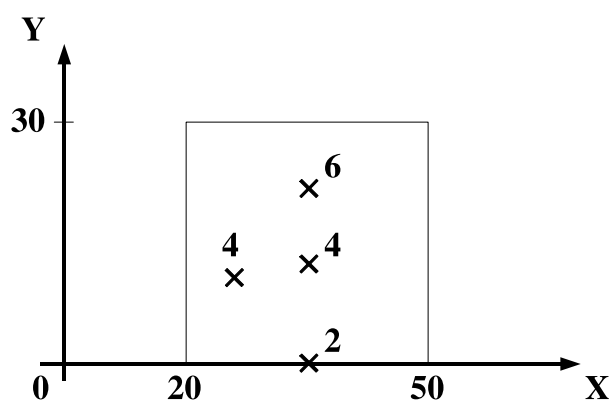


FIG. 37 – Exemple de planimétrage d'un casier