



MASCARET v8.1

Note de principe

Copyright © 2015 EDF - CEREMA

EDF - SA au capital de 924.433.331 euros - R.C.S. Paris B 552 081 317
CEREMA - Centre d'Etudes et d'Expertise sur les Risques,
l'Environnement, la Mobilité et l'Aménagement

Résumé

Développé depuis plus de 20 ans par Electricité De France (EDF) et le Centre d'Etudes et d'Expertise sur les Risques, l'Environnement, la Mobilité et l'Aménagement (CEREMA), **MASCARET** est un code hydraulique de modélisation monodimensionnelle des écoulements à surface libre, basé sur les équations de Saint-Venant. **MASCARET** est composé de trois noyaux de calcul hydrodynamique, auxquels on peut coupler le module **CASIER**, et permet des calculs en régime :

- Fluvial et Transcritique permanent ;
- Fluvial non permanent ;
- Transcritique non permanent.

Le module **CASIER** permet de prendre en compte les zones inondables isolées du lit majeur par un ensemble de casiers interconnectés et reliés à la rivière par différentes lois d'échange : digue, seuil, chenal, siphon, orifice, vanne-clapet, etc. représentant les zones d'échange et les obstacles naturels de l'écoulement. **MASCARET** est notamment utilisé dans le cas d'étude de :

- Propagation de crues et modélisation des champs d'inondations ;
- Onde de submersion résultant de la rupture d'ouvrages hydrauliques ;
- Régulation des rivières aménagées ;
- Propagation d'onde dans les canaux (intumescences, éclusées, mise en eau).

MASCARET et ses sources sont téléchargeables librement¹. Avec son interface graphique **FUDAA-MASCARET**, le code devient un logiciel qui permet la construction et l'exploitation des modèles hydrauliques, ainsi que la visualisation des résultats de calcul. Ce rapport constitue la note de principe du code de calcul **MASCARET**. Il expose la modélisation mathématique unidimensionnelle des écoulements fluviaux et torrentiels sur laquelle repose les différents noyaux de calcul hydraulique du système **MASCARET**, ainsi que les méthodes de résolution des équations résultant de cette modélisation. Il décrit aussi la méthode de couplage et le principe de la modélisation du module **CASIER** ainsi que le principe de l'option de calage automatique.

1. www.openmascaret.org

Table des matières

1	Introduction et hypothèses générales	4
1.1	Introduction	4
1.2	Hypothèses générales	5
1.3	Définitions et notations	6
1.3.1	Définitions	6
1.3.2	Notations	8
2	Les noyaux DF permanent (SARAP) et transitoire (REZO)	10
2.1	Principe de la modélisation	10
2.1.1	Définitions et notations	10
2.1.2	Modélisation de base en lit mineur d'un bief	10
2.1.3	Modélisation en lit composé d'un bief	11
2.1.4	Traitement des zones de stockage	19
2.1.5	Traitement des apports	20
2.1.6	Traitement des nœuds	20
2.1.7	Pertes de charges singulières	23
2.1.8	Singularités	23
2.1.9	Passages en charge	27
2.2	Méthodes de résolution	27
2.2.1	Ecoulement permanent dans un bief	27
2.2.2	Ecoulement non permanent dans un bief	33
2.2.3	Traitement des nœuds en régime fluvial permanent	42
2.2.4	Traitement des nœuds en fluvial non-permanent	49
2.2.5	Traitement des singularités	50
2.2.6	Empêchement du régime torrentiel en non-permanent	52
3	Le noyau transcritique VF (MASCARET)	55
3.1	Introduction	55
3.2	Equations de Saint-Venant sous forme conservative	56
3.2.1	Ecriture générale des équations (rappel)	56
3.2.2	Ecriture sous forme conservative	58
3.2.3	Invariants de Riemann	61
3.2.4	Le ressaut	63
3.3	Résolution numérique des équations de St-Venant	67
3.3.1	Utilisation d'un schéma explicite	67
3.3.2	Utilisation d'un schéma implicite	74
3.3.3	Traitement des termes sources	82
3.3.4	Prise en compte des conditions aux limites	91
3.3.5	Traitement des zones sèches	98

3.4	Modélisation de phénomènes physiques plus complexes	99
3.4.1	Introduction d'une modélisation de lit composé	99
3.4.2	Traitement des confluent	102
3.4.3	Prise en compte des singularités	108
3.4.4	Prise en compte des barrages qui s'érodent	110
3.4.5	Lois de seuil mince et épais	112
3.4.6	Bilan sur les singularités	115
3.4.7	Prise en compte de termes non hydrostatiques	116
4	Le code CASIER	124
4.1	Introduction	124
4.2	Principe général	124
4.3	Détermination des débits d'échange	126
4.3.1	Liaison seuil déversant	126
4.3.2	Liaison chenal	126
4.3.3	Liaison siphon	129
4.3.4	Liaison orifice	130
4.3.5	Coefficient d'envolement ou coefficient de correction . .	132
4.3.6	Apport de pluie	133
4.4	Couplage avec le noyau fluvial	134
4.5	Pré-traitement des données	136
5	Le calage automatique du coefficient de Strickler	141
5.1	Introduction	141
5.2	Position du problème	142
5.3	Algorithme d'identification des coefficients de Strickler	143
5.3.1	Rappels des équations de Saint-Venant	143
5.3.2	Présentation du programme d'optimisation	144
5.4	Méthode de calage d'un lit composé	146
5.5	Validation et conclusions	146

1 Introduction et hypothèses générales

1.1 Introduction

Ce rapport expose la modélisation mathématique unidimensionnelle des écoulements fluviaux et torrentiels sur laquelle repose les différents noyaux de calcul hydraulique du système de codes **MASCARET** (3 noyaux), ainsi que les méthodes de résolution des équations résultant de cette modélisation. On présente ci-dessous la structure du système de codes **MASCARET**, ce rapport ne portant que sur la partie *hydraulique* du système.

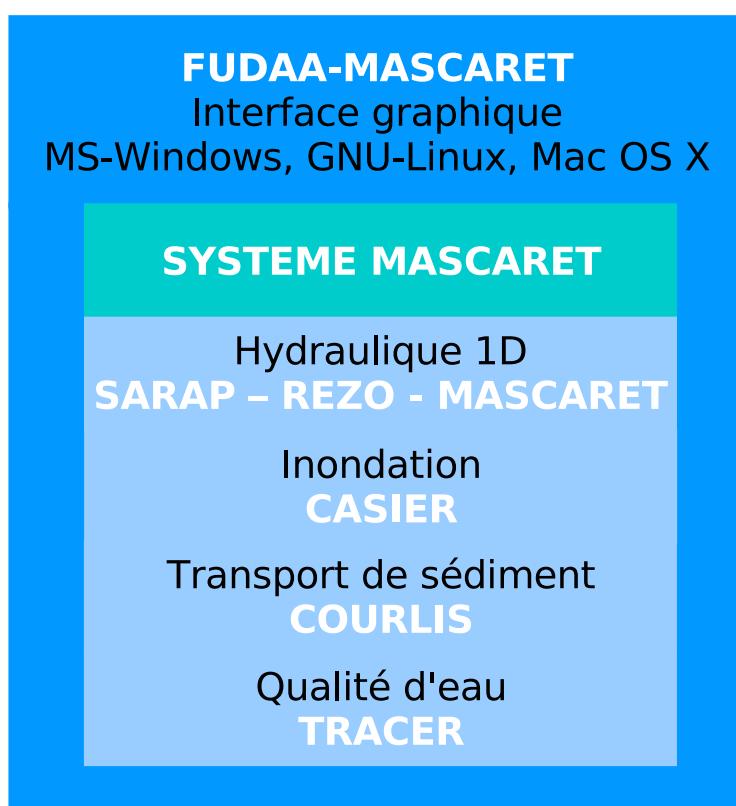


FIGURE 1 – Le logiciel **MASCARET**

Les méthodes de résolution varient suivant que les écoulements sont permanents ou non permanents, fluviaux ou torrentiels et aussi suivant le schéma du réseau hydraulique : réseau ramifié (noyau fluvial permanent) ou réseau maillé (noyau fluvial non permanent). On rappelle que les réseaux maillés autorisent un arrangement quelconque des branches, tandis que la caractéristique des réseaux ramifiés est qu'il n'existe qu'un seul chemin reliant deux

points quelconques du réseau.

1.2 Hypothèses générales

On rappelle ci-dessous les principales hypothèses justifiant la modélisation adoptée dans les 3 noyaux d'hydraulique, et notamment le choix d'un modèle monodimensionnel :

- chaque bief possède un axe privilégié d'écoulement, les vecteurs vitesse étant toujours supposés parallèles à cet axe ;
- les écoulements sont à faible courbure dans le plan horizontal ; les accélérations verticales sont négligeables, et la répartition des pressions est quasi hydrostatique ;
- la pente moyenne des écoulements est faible (le cosinus de l'angle entre l'horizontale et le fond est proche de 1) ;
- les contraintes de viscosité sur le fond et les berges sont prises en compte à l'aide des lois empiriques de frottement (loi de Strickler).

Dans chaque plan perpendiculaire à son axe, l'écoulement est alors entièrement déterminé par la connaissance de la vitesse moyenne (ou du débit total), et de la cote de la surface libre.

Quelques autres hypothèses ont été ajoutées dans la modélisation pour simplifier l'entrée des données ou se placer dans les cas les plus usuels :

- l'influence du vent est négligée ;
- lorsqu'un confluent n'est pas modélisé au moyen d'un bief spécifique, il est supposé perpendiculaire à l'axe principal de l'écoulement : sa représentation consiste à introduire un apport latéral de débit, sans apport de quantité de mouvement.

Il existe d'autres codes qui ont été développés pour s'affranchir des principales contraintes résultant de ces choix de modélisation et permettent de compléter ces noyaux :

- les écoulements bidimensionnels peuvent être traités au moyen du code `TELEMAC`[1] ;
- la géométrie des biefs est ici figée. Le code `COURLIS`, qui utilise les modules hydrauliques du système `MASCARET`, est dédié au traitement du transport solide et de ses conséquences ;

- les grandes plaines d’inondation, où les écoulements ne sont plus monodimensionnels, peuvent être modélisés à l’aide d’un système de casiers interconnectés, c’est le rôle du code **CASIER**. Associé au noyau fluvial non permanent, ce code élargit alors le champ d’application du système **MASCARET**, en traitant conjointement un réseau de biefs et des casiers de stockage associés. Cela revient à une pseudo-modélisation 2D ou modélisation 1.5D.

1.3 Définitions et notations

1.3.1 Définitions

Nous avons souligné dans l’introduction les caractéristiques de base de la modélisation. Nous nous intéressons à des écoulements fluviaux ou torrentiels dans des réseaux de biefs, chaque bief possédant un axe privilégié d’écoulement : les grandeurs calculées sont toujours relatives à une section d’écoulement perpendiculaire à cet axe, chaque section étant identifiée par son abscisse le long de cet axe.

Les sections d’écoulement sont considérées comme étant la réunion de trois sous-ensembles :

- le lit mineur, lit naturel de l’écoulement hors les périodes de crues. Ce lit peut comprendre des îles, mais dans ce cas, la cote de la surface libre sera toujours supposée identique de chaque côté . Dans le cas contraire, il faudrait recourir à une modélisation en réseau maillé ;
- le lit majeur, sections d’écoulement supplémentaires actives en période de crue, lorsque la cote de l’eau passe au dessus de la crête des berges en rive droite ou en rive gauche. Ces sections sont représentées effectivement de chaque côté du lit, les cotes des deux berges étant distinctes dans le cas général ;
- les zones de stockage, considérées comme des réservoirs se remplissant en montée de crue, et se vidant en descente de crue. Elles servent donc bien à stocker de l’eau, mais contrairement aux sections du lit majeur, elles ne participent pas à l’écoulement proprement dit, dans la mesure où les vitesses dans le sens de l’axe d’écoulement sont supposées nulles.

Si le lit mineur est généralement assez aisé à déterminer, la limite lit majeur/zones de stockage est au contraire beaucoup moins bien définie, et peut varier suivant l’importance de la crue.

Lorsque les zones de stockage sont susceptibles de générer des écoulements transversaux dans la plaine d'inondation, la présente modélisation devient insuffisante ; il est alors nécessaire de recourir au couplage avec un système de casiers.

Lorsque le modèle 1D atteint ses limites, une modélisation bidimensionnelle peut cependant être nécessaire, à la place ou en complément.

L'estimation de l'énergie dissipée en frottement est un élément fondamental de la modélisation. Elle est obtenue au moyen de la valeur du coefficient de rugosité de Strickler (voir le paragraphe suivant), à estimer séparément dans le lit mineur ou le lit majeur. Le rôle du calage est d'estimer au mieux ces coefficients, à l'aide de lignes d'eau naturelles connues. Cette recherche s'effectue surtout au moyen de méthodes essais/erreurs. Un algorithme d'optimisation a été cependant spécialement développé pour le noyau fluvial permanent, ce qui permet de réaliser un calage automatique de ces coefficients.

La figure 2 et les notations ci-dessous résument les éléments essentiels de la modélisation caractérisant une section d'écoulement.

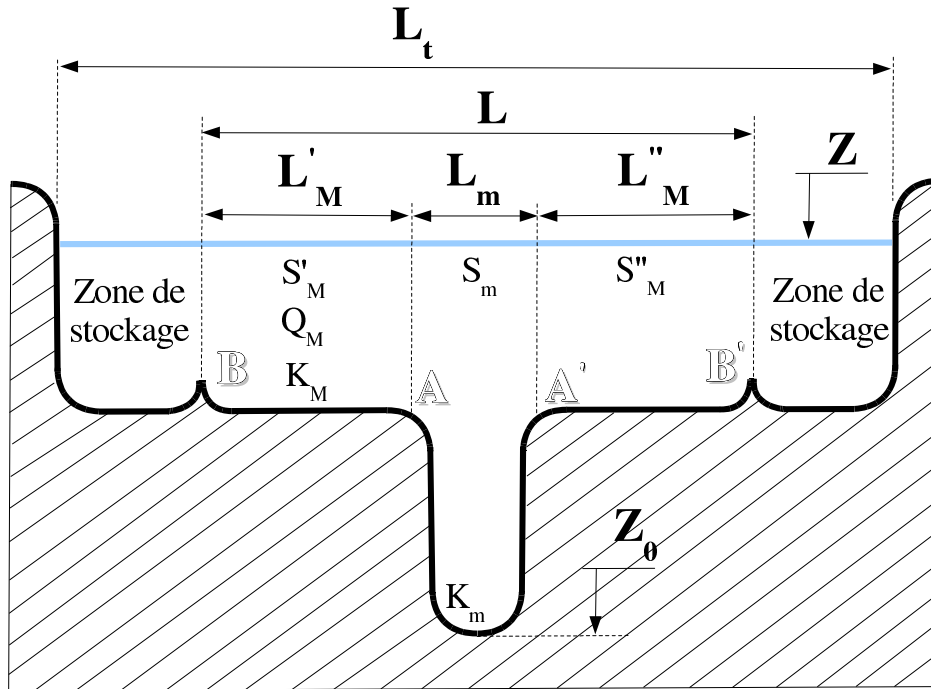


FIGURE 2 – Schématisation d'un profil - Notations

Remarque : il est important de distinguer les sections de données (ou profils) où les grandeurs géométriques seront calculées directement à partir de relevés topographiques effectués au préalable, et les sections de calcul (choisies dans le modèle), où ces grandeurs seront obtenues en interpolant, le cas échéant, les valeurs réelles à chaque profil.

1.3.2 Notations

Dans tout le document, sauf mention contraire, on note les variables suivantes (voir figure 2) :

- t le temps (s) ;
- x l'abscisse de l'axe d'écoulement principal de la rivière (m) ;
- Q_m le débit qui passe dans le lit mineur ($m^3.s^{-1}$) ;
- Q_M le débit qui passe dans le lit majeur, rive gauche et droite ($m^3.s^{-1}$) ;
- Q le débit total qui passe dans le lit actif ($m^3.s^{-1}$) : $Q = Q_m + Q_M$;
- q_l le débit d'apport latéral par mètre de longueur ($m^2.s^{-1}$) ;
- L_m la largeur au miroir du lit mineur (m) ;
- L_M la largeur au miroir du lit majeur (m) : $L_M = L'_M + L''_M$;
- L la largeur au miroir du lit actif (m) : $L = L_m + L_M$;
- L_s la largeur des zones de stockage (m) ;
- L_t la largeur au miroir du lit total avec stockage (m) ;
- S_m l'aire du lit mineur ou section mouillée (m^2) ;
- S_M l'aire du lit majeur (m^2) : $S_M = S'_M + S''_M$;
- S l'aire du lit actif (m^2) : $S = S_m + S_M$;
- S_s l'aire des zones de stockage (m^2) ;
- S_t l'aire du lit total avec stockage (m^2) ;
- K_m le coefficient de Strickler du lit mineur ;
- K_M le coefficient de Strickler du lit majeur ;
- P_m le périmètre mouillé du lit mineur (m) : $P_m = AA'$;
- P_M le périmètre mouillé du lit majeur (m) : $P_M = A'B' + AB$;
- P le périmètre mouillé du lit actif (m) : $P = P_m + P_M$;
- R_m le rayon hydraulique du lit mineur (m) : $R_m = S_m/P_m$;
- R_M le rayon hydraulique du lit majeur (m) : $R_M = S_M/P_M$;
- R le rayon hydraulique du lit actif (m) : $R = S/P$;

- V_m la vitesse de l'eau dans le lit mineur ($m.s^{-1}$) : $V_m = Q_m/S_m$;
- V_M la vitesse de l'eau dans le lit majeur ($m.s^{-1}$) : $V_M = Q_M/S_M$;
- V la vitesse moyenne de l'écoulement ($m.s^{-1}$) : $V = Q/S$;

2 Les noyaux DF permanent (SARAP) et transitoire (REZO)

2.1 Principe de la modélisation

2.1.1 Définitions et notations

Les hypothèses et notations sont données respectivement aux sections 1.3.1 et 1.3.2.

2.1.2 Modélisation de base en lit mineur d'un bief

Nous utilisons le modèle classique, bien établi, des équations de Saint-Venant :

- une équation de continuité :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = q_l \quad (1)$$

avec :

- $Q(x, t)$ le débit ($m^3.s^{-1}$) ;
- $Z(x, t)$ la cote de la surface libre (m).

- et une équation dynamique :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{S} \right) + gS \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + J \right) = \gamma_l \quad (2)$$

avec g l'accélération de la pesanteur ($m.s^{-2}$).

L'équation de continuité traduit la conservation du débit, la deuxième équation correspond à l'équation fondamentale de la dynamique : le premier membre représente l'accélération d'une *tranche d'eau*, le second la somme des forces appliquées.

Lorsqu'il n'y a pas d'apport latéral : $q_l = \gamma_l = 0$. En cas d'apport, la version 7.1.4 introduit deux choix :

- l'apport est considéré perpendiculaire à l'écoulement et : $\gamma_l = 0$
- l'apport modifie l'équation dynamique et : $\gamma_l = \frac{Q}{S} q_l$

Le terme gSJ traduit l'effet des forces de frottement : J est un nombre sans dimension, représentant le taux moyen de dissipation de l'énergie. Il

dépend du débit, des caractéristiques hydrauliques de la rivière, et bien sûr du coefficient de rugosité. Sa valeur est donnée par la loi de Strickler :

$$J = \frac{Q^2}{K_m^2 S^2 R^{4/3}} \quad (3)$$

où

$$J = \frac{Q^2}{D^2} \quad (4)$$

avec :

- K_m le coefficient de rugosité de Strickler ;
- R le rayon hydraulique ;
- D la débitance.

Le coefficient β , adimensionnel, résulte des variations de la vitesse réelle de l'écoulement en une section, variations disparaissant sinon en raison de la seule considération de la vitesse moyenne. Sa définition est :

$$\beta = \frac{S}{Q^2} \int V^2 dS \quad (5)$$

En lit unique, compte tenu des hypothèses acceptées (voir section 1.3.1), nous prenons : $\beta = 1$, c'est-à-dire que nous négligeons les variations de vitesse au sein d'une section. Cela n'est plus vrai en lit composé. Les conditions aux limites habituelles en régime fluvial sont :

- un débit imposé à l'amont ;
- une cote imposée ou (en non permanent) une relation cote/débit à l'aval.

En non permanent, il est numériquement possible d'imposer des conditions limites de tous les types (cote imposée, débit imposé ou une relation entre la cote et le débit) aussi bien à l'amont qu'à l'aval, mais elles doivent être cohérentes pour que la résolution se déroule ensuite normalement.

2.1.3 Modélisation en lit composé d'un bief

2.1.3.1 Problème à résoudre

Le problème posé résulte du fait que nous ne pouvons écrire directement un système d'équations analogue à (1)(2). Les pertes d'énergies dues au frottement ne sont pas identiques dans les deux lits, et de ce fait :

- l'hypothèse d'une vitesse uniforme dans une section, et donc, en particulier, identique dans les deux lits mineur et majeur, n'est plus acceptable ;
- nous ne savons pas définir a priori un coefficient de perte de charge J_{global} .

Il est donc nécessaire d'écrire le système (1)(2) pour chacun des deux lits mineur (indice m) et majeur (indice M), ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial S_m}{\partial t} + \frac{\partial Q_m}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_m^2}{S_m} \right) = -gS_m \frac{\partial Z}{\partial x} - gS_m J_m + \gamma_{mM} \end{cases} \quad (6)$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial S_M}{\partial t} + \frac{\partial Q_M}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q_M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_M^2}{S_M} \right) = -gS_M \frac{\partial Z}{\partial x} - gS_M J_M + \gamma_{Mm} \end{cases} \quad (7)$$

avec : $\gamma_{Mm} = -\gamma_{mM}$

En écrivant ceci, nous conservons l'hypothèse fondamentale, à savoir une cote de la surface libre Z identique dans le lit mineur et le lit majeur.

Le terme γ_{mM} représente l'interaction, inconnue a priori, des deux lits.

En sommant ces deux systèmes, et en appelant : $Q = Q_m + Q_M$ le débit total, et : $S = S_m + S_M$, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_m^2}{S_m} + \frac{Q_M^2}{S_M} \right) = -gS \frac{\partial Z}{\partial x} - g(S_m J_m + S_M J_M) \end{cases} \quad (8)$$

avec : $\sqrt{J_m} = \frac{Q_m}{D_m}$ et $\sqrt{J_M} = \frac{Q_M}{D_M}$

Les débitances mineures et majeures dépendent de la cote Z :

$$\begin{cases} D_m = K_m S_m R_m^{2/3} \\ D_M = K_M S_M R_M^{2/3} \end{cases} \quad (9)$$

Le système (8) est semblable au système (1)(2) en définissant une pente globale J au moyen de la relation :

$$SJ = S_m J_m + S_M J_M \quad (10)$$

et en choisissant un coefficient β non plus égal à 1, mais satisfaisant la relation :

$$\beta \frac{Q^2}{S} = \frac{Q_m^2}{S_m} + \frac{Q_M^2}{S_M} \quad (11)$$

soit :

$$\beta = \frac{S}{Q^2} \left(\frac{Q_m^2}{S_m} + \frac{Q_M^2}{S_M} \right) \quad (12)$$

Nous avons cependant deux inconnues supplémentaires, Q_m et Q_M . Elles s'ajoutent aux inconnues *habituelles* Q et Z .

Nous disposons déjà d'une relation simple :

$$Q_m + Q_M = Q \quad (13)$$

Pour résoudre le système (8), il faut donc, en toute généralité, écrire une équation différentielle supplémentaire, ou bien, plus simplement, connaître une relation supplémentaire liant les inconnues. Cette relation peut s'obtenir en exprimant la débitance globale D en fonction des débitances mineure et majeure D_m , D_M . La définition de la pente J s'écrit tout d'abord :

$$S \frac{Q^2}{D^2} = S_m \frac{Q_m^2}{D_m^2} + S_M \frac{Q_M^2}{D_M^2} \quad (14)$$

Une solution simple est de décider que les pentes des lignes d'énergie sont identiques dans chaque lit :

$$\frac{Q_m}{D_m} = \frac{Q_M}{D_M} \quad (15)$$

D'après la définition de J , cela revient à choisir comme débitance globale :

$$D = D_m + D_M \quad (16)$$

En raison de sa simplicité, cette solution a l'avantage d'être aisément généralisable à un lit composé quelconque c'est-à-dire de plus de deux lits (ici mineur et majeur), chaque lit correspondant à une rugosité bien caractérisée. Tout ce qui précède reste valable, et il suffit de prendre comme débitance globale la somme des débitances de chaque lit.

Cependant, cette solution néglige les interactions entre chaque lit, interactions se traduisant par le fait que les lignes d'énergie ne sont plus identiques. Pour prendre en compte cette situation nous développons l'approche suivante.

Nous définissons tout d'abord les débitances mineure et majeure généralisée D_{mg} , D_{Mg} par les relations :

$$\begin{cases} Q_m = D_{mg}\sqrt{J} \\ Q_M = D_{Mg}\sqrt{J} \end{cases} \quad (17)$$

En posant : $\eta = \frac{Q_m}{Q_M}$, et en reprenant l'expression définissant J , nous voyons que :

$$\frac{D_{mg}}{D_{Mg}} = \eta \quad (18)$$

et :

$$D_{mg}^2 = \frac{S}{\frac{S_m}{D_m^2} + \frac{1}{\eta^2} \frac{S_M}{D_M^2}} \quad (19)$$

Nous voyons donc qu'il est équivalent de se donner η , D_{mg} , ou D_{Mg} : dès que l'une de ces trois grandeurs est donnée, les deux autres sont également déterminées.

Le système (8) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{S} \right) = -gS \frac{\partial Z}{\partial x} - gSJ \end{cases} \quad (20)$$

avec :

$$\begin{cases} \beta = \left(\frac{\eta^2}{S_m} + \frac{1}{S_M} \right) \frac{S}{(1 + \eta)^2} \\ \sqrt{J} = \frac{Q}{D_{mg} + D_{Mg}} \end{cases} \quad (21)$$

Dès que l'on se donne η , D_{mg} ou D_{Mg} , les grandeurs β et J sont parfaitement définies, et le système (20) est tout à fait analogue au système (1)(2) caractéristique d'un lit simple. La résolution donne la valeur de Q , puis les relations suivantes fournissent immédiatement les valeurs de Q_m et Q_M :

$$\eta = \frac{Q_m}{Q_M} = \frac{D_{mg}}{D_{Mg}} \quad (22)$$

et :

$$Q = Q_m + Q_M \quad (23)$$

Dans ce cadre, la solution *simple* : $J_m = J_M = J$ rappelée ci-dessus revient à écrire :

$$D_{mg} = D_m \quad (24)$$

et :

$$D_{Mg} = D_M \quad (25)$$

2.1.3.2 Modélisation *Debord*

Ce modèle a été établi expérimentalement, en étudiant le régime uniforme, et en mettant en évidence une loi de répartition de débit : $\frac{Q_m}{Q_M}$ (voir [2],[3]).

L'extrapolation au régime graduellement varié est tout à fait admissible, puisque ce régime est justement défini comme proche des propriétés du régime uniforme.

Il repose sur l'observation suivante : dans les conditions énoncées ci-dessus, le débit s'écoulant dans le lit mineur en lit composé est le débit qui s'écoulerait dans un lit mineur unique identique, multiplié d'une grandeur caractéristique A avec : $A \in]0, 1[$.

A s'exprime comme une fonction des rugosités de chaque lit. Son expression exacte est donnée plus loin, l'important étant d'abord d'obtenir les expressions de D_{mg} et D_{Mg} .

La définition même de A s'écrit : $D_{mg} = AD_m$, ou encore : $Q_m^2 = A^2 D_m^2 J$.

Nous en déduisons alors D_{Mg} , en reprenant l'expression de J :

$$SJ = S_m \frac{Q_m^2}{D_m^2} + S_M \frac{Q_M^2}{D_M^2} = A^2 S_m J + S_M \frac{Q_M^2}{D_M^2} \quad (26)$$

donc :

$$J(S - A^2 S_m) = Q_M^2 \frac{S_M}{D_M^2} \quad (27)$$

soit :

$$D_{Mg}^2 = \frac{Q_M^2}{J} = D_M^2 \left(\frac{S - A^2 S_m}{S_M} \right) = D_M^2 \left(1 + \frac{S_m}{S_M} (1 - A^2) \right) \quad (28)$$

La débitance majeure généralisée est donc égale à la débitance majeure multipliée par la quantité :

$$\sqrt{1 + \frac{S_m}{S_M} (1 - A^2)}$$

Quand : $A = 1$, nous retrouvons le modèle *simpliste* rappelé précédemment. Le rapport $\eta = \frac{Q_m}{Q_M}$ s'écrit aussi :

$$\eta = \frac{A}{\sqrt{1 + \frac{S_m}{S_M} (1 - A^2)}} \frac{D_m}{D_M} \quad (29)$$

A est la constante du modèle de *Debord*. Elle est évaluée par :

$$A = \frac{1 - A_0}{2} \cos\left(\frac{\pi r}{0.3}\right) + \frac{1 + A_0}{2} \quad \text{pour } r = \frac{R_M}{R_m} \in [0, 0.3] \quad (30)$$

et :

$$A = A_0 = 0.9 \left(\frac{K_m}{K_M}\right)^{-1/6} \quad \text{pour } r > 0.3 \quad (31)$$

Cette expression résulte d'expérimentations sur modèle physique.

Notons que A varie en fonction de R_m et R_M , de manière à trouver $A = 1$ lorsque $R_M = 0$ (pas de débordement).

2.1.3.3 Modélisation *Fond-Berge*

Ce type de modélisation est introduit pour traiter les lits mineurs où il importe de distinguer la rugosité des berges de la rugosité des fonds. Nous pouvons cependant rester dans le schéma du paragraphe précédent, le lit composé résultant cette fois de l'association de la section située au-dessus du fond (à la place du lit mineur) et de la section située au-dessus des berges (à la place du lit majeur).

Le cadre théorique est l'hypothèse de Mülloffer-Einstein [3] pour la composition des rugosités. Elle suppose que :

- les pentes des lignes de charge sont les mêmes pour les deux écoulements ;
- les vitesses sont également les mêmes.

La première hypothèse conduit à la méthode simple de composition des débitances rappelée dans le paragraphe précédent. Elle suffit à résoudre le problème tel qu'il a été jusqu'ici posé, mais alors la seconde hypothèse (égalité des vitesses) n'a aucune raison d'être vérifiée. Pour l'imposer, nous devons considérer que les sections mouillées dans chaque lit sont aussi des inconnues, c'est-à-dire ne résultent pas de la seule valeur de la cote de la surface libre (cela revient à considérer que la limite entre les écoulements n'est pas donnée par les deux verticales situées au-dessus des limites du fond en rive droite et en rive gauche).

En prenant l'indice 1 pour l'écoulement *fond* et l'indice 2 pour l'écoulement *berges*, nous introduisons donc deux inconnues supplémentaires S_1 et

S_2 . Les deux relations supplémentaires sont alors :

- la surface totale : $S_1 + S_2 = S$;
- l'égalité des vitesses : $\frac{Q_1}{S_1} = \frac{Q_2}{S_2}$, que nous voulions imposer.

La débitance totale D est calculée en introduisant une rugosité équivalente k définie par :

$$D = \frac{Q}{\sqrt{J}} = kSR^{2/3} \quad (32)$$

L'égalité des lignes de charges se traduit par la relation :

$$D = D_1 + D_2 = k_1S_1R_1^{2/3} + k_2S_2R_2^{2/3} \quad (33)$$

et l'égalité des vitesses par la relation (34) : loi de Strickler appliquée à chaque écoulement dans le cadre des hypothèses retenues :

$$k_1R_1^{2/3} = k_2R_2^{2/3} \quad (34)$$

En combinant les relations (32)(33)(34) nous obtenons immédiatement :

$$kR^{2/3} = k_1R_1^{2/3} = k_2R_2^{2/3} \quad (35)$$

$$R_1 = \frac{S_1}{P_1} \quad (36)$$

$$R_2 = \frac{S_2}{P_2} \quad (37)$$

$$R = \frac{S}{P} \quad (38)$$

d'où se déduit l'expression de k caractérisant la composition des rugosités :

$$k^{3/2} = \frac{P}{\frac{P_1}{k_1^{3/2}} + \frac{P_2}{k_2^{3/2}}} \quad (39)$$

En définitive, cette méthode revient à considérer un lit unique, mais dont la rugosité est fonction de la hauteur d'eau, et donnée par la formule ci-dessus.

2.1.4 Traitement des zones de stockage

Les zones de stockage² agissent sur les écoulements en prélevant ou en restituant de l'eau, mais ne sont pas prises en compte dans les bilans énergétiques. En conséquence, dans l'équation de continuité, la section mouillée est la section totale (y compris la zone de stockage), tandis que dans l'équation dynamique la section mouillée est la seule section du lit actif (mineur et majeur). Numériquement, la section intervient souvent par l'intermédiaire de sa dérivée par rapport à la cote, c'est-à-dire la largeur au miroir L . Ce sont donc de même les largeurs au miroir totale, ou du lit actif, qui sont à utiliser suivant l'équation traitée. Notons que pour les calculs en permanent les zones de stockage sont sans effet.

L'équation de continuité s'écrit donc :

$$\frac{\partial(S + S_s)}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_l \quad (40)$$

soit :

$$(L + L_s) \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_l \quad (41)$$

ou encore :

$$L \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_l - L_s \frac{\partial Z}{\partial t} = q_l + q_s \quad (42)$$

l'indice s désignant les variables relatives au stockage.

Le stockage équivaut donc à introduire un apport latéral de débit q_s (supposé perpendiculaire). L'influence de la sinuosité du lit pourrait être prise en compte en introduisant un paramètre supplémentaire s sous la forme :

$$q_l = -s L_s \frac{\partial Z}{\partial t} \quad (43)$$

Cela n'est pas fait en raison de la difficulté d'évaluer précisément L_s .

On rappelle bien que la cote calculée dans le cadre du traitement de ce type de zones de stockage est identique à celle calculée dans le lit mineur, contrairement à la modélisation avec casiers 4.

2. Attention, il s'agit ici de zones intégrées dans les profils en travers. On peut aussi décrire les zones de stockage par des casiers dont le principe de modélisation est décrit à la section 4

2.1.5 Traitement des apports

Soit q_l un apport latéral, exprimé en $m^2.s^{-1}$ (débit par unité de longueur).

Les équations de Saint-Venant s'obtiennent à partir du système (1)(2) en ajoutant au second membre de l'équation de continuité q_l , et au second membre de l'équation dynamique $kq_l V_l$ (traduisant respectivement l'apport de masse et l'apport de quantité de mouvement).

Le coefficient k résulte du fait que l'apport de quantité de mouvement dépend des axes respectifs de l'écoulement principal et de l'apport, seule la vitesse dans le sens de l'écoulement principal étant à prendre en compte. Ainsi, pour un apport perpendiculaire à l'axe de l'écoulement, k est nul, tandis que dans le sens de l'écoulement, k est théoriquement égal à 1.

Pour éviter la donnée d'un paramètre supplémentaire la version standard de MASCARET impose par défaut : $k = 0$, en privilégiant ainsi le premier cas, le plus utile.

Cette modélisation des apports est donc plutôt réservée au cas des apports *diffus* où la quantité de mouvement relative à ces apports est de toute façon négligeable vis-à-vis de celle de l'écoulement principal. Dans les autres situations, il est préférable d'introduire explicitement un bief représentant l'apport (réseau ramifié), auquel cas le traitement effectué revient à choisir cette fois : $k = 1$.

2.1.6 Traitement des nœuds

Les équations de Saint-Venant sont appliquées seulement entre deux sections d'un même bief (voir aussi le traitement des singularités 2.2.5). A chaque nœud d'un réseau, il est donc nécessaire de trouver de nouvelles équations. Elles sont obtenues en écrivant l'égalité des cotes et la conservation des débits. C'est la généralisation du résultat pouvant être obtenu dans le cas simple (notamment sans perte de charge) présenté ci-dessous (voir figure 3)

Le nœud est constitué des trois sections no. 1, no. 2 et no. 3 situées à chacune des extrémités des biefs associés. Ces sections sont caractérisées par les variables hydrauliques (Q_1, Z_1) , (Q_2, Z_2) et (Q_3, Z_3) .

Nous pouvons établir les équations du nœud en nous plaçant dans le cas simple suivant :

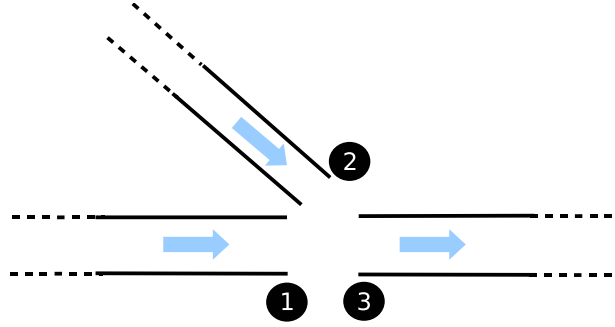


FIGURE 3 – Schéma d'un confluent à 3 biefs

- lit unique ;
- écoulement permanent ;
- sections mouillées telles que les vitesses le long de l'axe moyen du confluent soient identiques dans chaque branche ;
- frottement nul le long du confluent.

Nous pouvons écrire les équations de Saint-Venant le long de l'axe du confluent, en considérant la section no. 1 puis la section no. 3, le bief correspondant à la section no. 2 étant traité comme apport latéral (voir la section précédente 2.1.5).

L'équation de continuité donne immédiatement :

$$Q_3 - Q_1 = Q_2 \quad (44)$$

L'équation dynamique se transforme en :

$$V \frac{\partial Q}{\partial x} + gS \frac{\partial}{\partial x} \left(Z + \beta \frac{V^2}{2g} \right) = kq_l V_l \quad (45)$$

k est le coefficient de quantité de mouvement comme indiqué à la section 2.1.5.

L'hypothèse essentielle est la conservation des vitesses le long de l'axe. Elle entraîne :

$$V = kV_l \quad (46)$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{V^2}{2g} \right) = 0 \quad (47)$$

De plus :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = q_l \quad (48)$$

L'équation dynamique se réduit donc à :

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \quad (49)$$

soit :

$$Z_3 = Z_1 \quad (50)$$

En raisonnant de même en considérant cette fois les biefs correspondant aux sections no. 2 et no. 3, le bief de la section no. 1 étant traité en apport, nous obtiendrons : $Z_3 = Z_2$.

Ainsi l'équation de continuité donne la conservation des débits aux nœuds, et l'équation dynamique donne l'identité des cotes.

Dans le cas général, les hypothèses simples utilisées ici ne sont pas vérifiées, en particulier :

- les vitesses le long de l'axe sont rarement semblables ;
- si le frottement peut souvent être négligé, s'ajoute cependant une perte de charge singulière beaucoup plus importante (voir la section suivante).

Cependant, les relations simples obtenues sont conservées dans les noyaux fluviaux. Elles sont les seules à pouvoir être mises en œuvre aisément sur le plan numérique.

En pratique, la conservation des débits est toujours bien vérifiée, mais l'identité des cotes pose au contraire un problème. Pour résoudre ces difficultés, il est souhaitable :

- de choisir les sections extrêmes les plus rapprochées possibles (confluent *ponctuel*) ;

- d’introduire des pertes de charge singulières sur les branches amont des confluents, pour rendre compte de la dissipation supplémentaire d’énergie (voir le rapport sur les confluents en bibliographie et la section suivante).

2.1.7 Pertes de charges singulières

Dans l’équation dynamique, le terme J représente les pertes de charge dites régulières, résultant du frottement sur le fond et les berges. Des pertes de charge plus localisées, dites singulières, peuvent se produire en présence d’obstacles, de variations brusques de sections, de confluents. Elles sont modélisées à l’aide d’un terme J_s , s’ajoutant à J :

- pour un élargissement : $J_s = \xi_1 \frac{1}{2g} (\beta_j V_j - \beta_i V_i)^2$ avec :
 - l’indice j désignant la section amont et l’indice i la section aval ;
 - et : $\beta_j V_j < \beta_i V_i$.
- pour un obstacle situé immédiatement à l’aval de la section j :

$$J_s = \xi_2 \frac{1}{2g} \beta_j V_j^2.$$

avec ξ_1 et ξ_2 les coefficients de perte de charge.

Dans la version actuelle de **MASCARET**, la valeur de ξ_1 a été imposée à la suite d’études bibliographiques (constante égale à 0.3), elle est valable pour des élargissements progressifs (ces élargissements sont pris en compte automatiquement).

La valeur de ξ_2 est au choix de l’utilisateur et fera l’objet d’un calage. Une perte de charge singulière modélisée au moyen de ξ_2 devra être introduite aussi souvent que nécessaire, c’est-à-dire chaque fois qu’elle ne résulte pas d’un élargissement progressif³ (rétrécissement ou élargissement ponctuel : ponts, etc.).

2.1.8 Singularités

2.1.8.1 Principe général

Les singularités les plus fréquemment rencontrées sont des seuils ou des barrages de régulation. Nous traiterons cependant ce problème dans le cas

3. cette perte de charge est à indiquer à la section $i = j+1$: en fluvial, l’aval influençant l’amont, une perte de charge indiquée à la section i va augmenter la charge calculée à la section $j = i - 1$, et non diminuer la charge calculée à la section i .

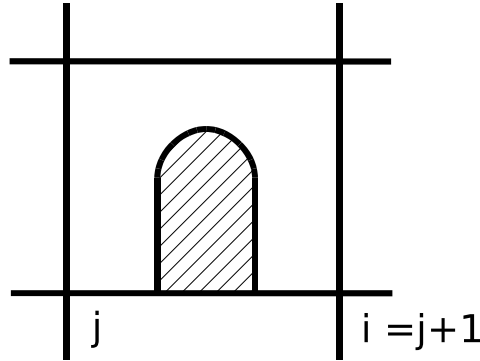


FIGURE 4 – Schéma d'une singularité

le plus général, en appelant singularité toute section de la rivière où les équations de Saint-Venant ne sont pas appliquées.

Pour mener à bien les calculs de ligne d'eau, il est alors nécessaire d'utiliser, à la place de ces équations de Saint-Venant, de nouvelles équations (relations de transfert) définissant la loi de la singularité traitée.

Nous supposons toujours que cette singularité est située entre deux sections de calcul d'indices j avec : $j + 1 = i$ (voir figure 4).

L'équation de continuité est toujours réduite à $Q_i = Q_j$, traduisant l'égalité du débit de chaque côté de la singularité. En non permanent, cela introduit un léger biais, les volumes d'eau n'étant plus rigoureusement conservés, mais ce biais est négligeable si la distance séparant les deux sections de calcul est *raisonnable*.

L'équation dynamique est spécifique à chaque type de singularité. Son expression générale est : $f(Q, Z_{amont}, Z_{aval}) = 0$. La fonction f n'est introduite que dans l'algorithme de résolution des systèmes d'équations à traiter, sous sa forme discrétisée (voir la section 2.2). Nous indiquons ci-dessous les lois considérées suivant le type de la singularité. On indique à la section 3.4.6 le bilan des différentes singularités disponibles dans MASCARET.

2.1.8.2 Seuils

Sous la forme la plus générale, la loi du seuil (voir les figures ci-après) peut être de la forme : $Q = f(Z_{amont}, Z_{aval})$, le type d'écoulement (noyé ou

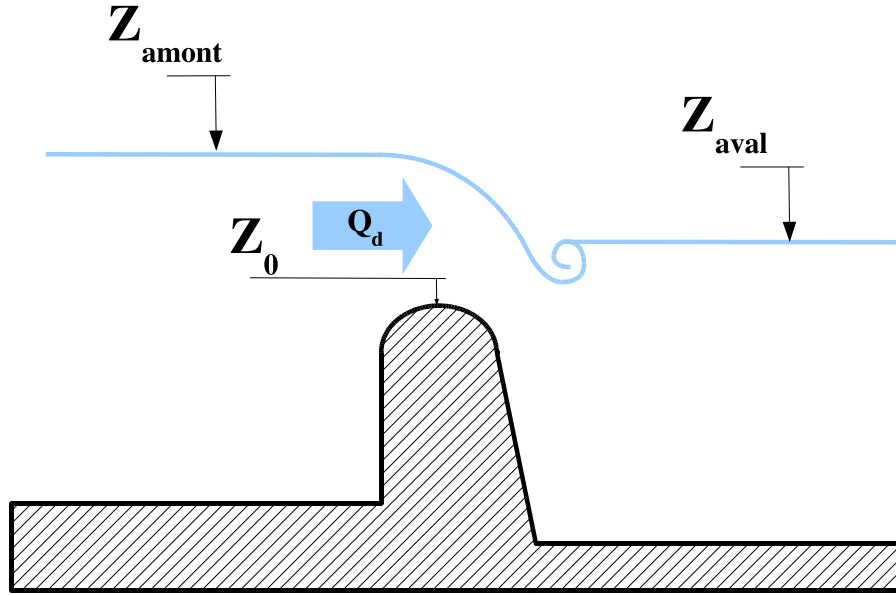


FIGURE 5 – Seuil dénoyé

dénoyé) étant intégré directement dans l'expression de la fonction f . Cette dernière est indiquée sous forme discrétisée avec une série suffisante de triplets $(Q, Z_{\text{amont}}, Z_{\text{aval}})$.

- Seuil dénoyé : le débit Q_d ne dépend que de la cote amont (voir la figure 5) ;
avec $Q = Q_d = mL\sqrt{2g}(Z_{\text{amont}} - Z_0)^{3/2}$ et :
 - m : le coefficient de débit ;
 - L : la largeur du seuil.
- Seuil noyé ; le débit Q_n est influencé par la cote aval (voir la figure 6) ;
avec $Q = Q_n = CQ_d$ et :
 - C : le coefficient noyé/dénoyé : $C = k \frac{Z_{\text{aval}} - Z_0}{Z_{\text{amont}} - Z_0}$;
 - k : une fonction à définir.

La loi du seuil peut aussi être donnée seulement en écoulement dénoyé (l'aval n'influence pas l'amont), donc sous la forme : $Q = f(Z_{\text{amont}})$, c'est-à-dire en indiquant une série suffisante de couples (Q, Z_{amont}) .

Le régime est considéré comme noyé dès que : $R = \frac{Z_{\text{aval}} - Z_s}{Z_{\text{amont}} - Z_s}$ est supérieur à une valeur test R_0 (Z_s la cote de crête est un paramètre du seuil). Une correction automatique est alors appliquée : $Q = k(R)f(Z_{\text{amont}})$. La

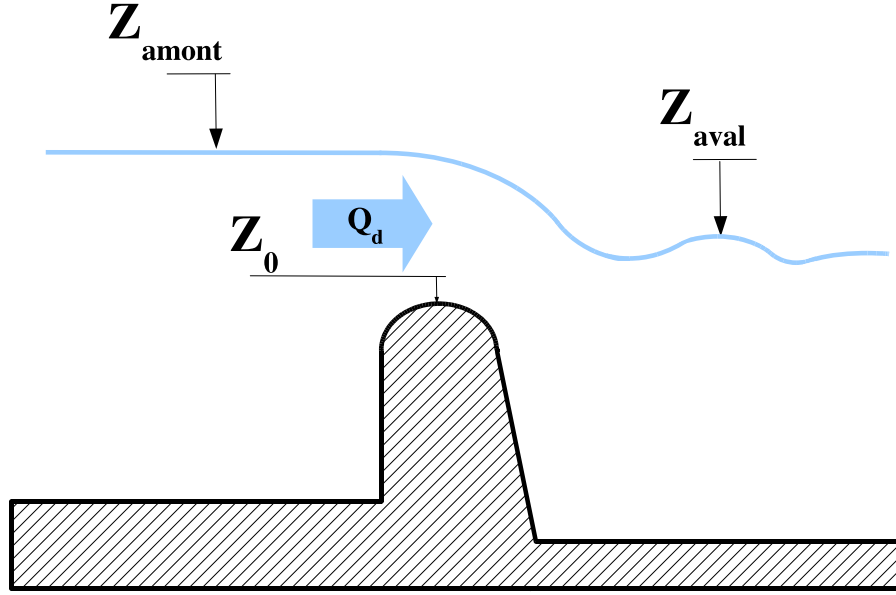


FIGURE 6 – Seuil noyé

valeur de la constante R_0 , et la forme de la fonction k , sont imposées dans MASCARET.

Dans la version actuelle de MASCARET, on distingue deux types de seuils en écoulement noyé avec une loi de seuil mince ou épais (voir la section 3.4.5). Ainsi, pour un seuil épais, R_0 est égal à 0.8, et k est une fonction parabolique définie par :

$$k(R) = -25R^2 + 40R - 15 \quad (51)$$

avec :

- $k(R_0) = 1$;
- et $k(1) = 0$.

Le seuil peut être aussi défini par la géométrie de sa crête, auquel cas la loi appliquée en écoulement dénoyé est la loi des déversoirs :

$$Q = m\sqrt{2g} \sum_k L_k (Z_{\text{amont}} - Z_k)^{3/2} \quad (52)$$

où :

- L_k est la largeur d'un élément de la crête du seuil de cote Z_k ;
- m est le coefficient de débit (paramètre du seuil).

En écoulement noyé, la correction appliquée est identique à celle définie ci-dessus pour un seuil épais.

2.1.8.3 Ouvrages de régulation

La loi de la singularité utilisée est simplement la cote amont imposée (en fonction du temps).

2.1.8.4 Sections de contrôle

La loi de la singularité est une loi quelconque du type : $Q = f(Z_{amont})$.

Une loi : $Q = f(Z_{aval})$ peut également être imposée mais cela n'a pas de sens physiquement en régime fluvial. Cette possibilité existe surtout pour pouvoir effectuer des tests dans des situations précises.

2.1.9 Passages en charge

Les passages locaux en charge (exemple : sous un pont) ne nécessitent pas de modélisation spécifique dans le code. La prise en compte de ces cas particuliers est faite au niveau de la géométrie des profils. Les sections en charge doivent être surmontées d'une fente verticale de largeur négligeable (fente de Preissmann). Si la section se trouve effectivement en charge, la cote Z calculée sera supérieure à la cote du sommet de la section, et donnera la valeur de la pression P au moyen de la relation : $P = \rho g Z$.

2.2 Méthodes de résolution

2.2.1 Ecoulement permanent dans un bief

Nous nous plaçons dans le cas usuel d'un lit composé.

Des zones de stockage peuvent être définies, mais elles n'interviennent pas dans le calcul, nous l'avons souligné précédemment. On se place ici dans le cas d'un bief unique, le traitement des réseaux ramifiés est possible pour le noyau fluvial permanent et est traité à la section 2.2.3.

2.2.1.1 Simplification des équations

L'équation de continuité se réduit à : $\frac{\partial Q}{\partial x} = q_l$, le débit est constant le long de la rivière, aux apports près.

L'équation dynamique, appelée équation de la ligne d'eau, prend la forme :

$$\frac{\partial \beta Q V}{x} + g S \left(\frac{Z}{x} + J + J_s \right) \quad (53)$$

Elle s'écrit également :

$$\frac{\beta}{g} \frac{V}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{V^2}{2g} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{V^2}{2g} + Z \right) + J + J_s = 0 \quad (54)$$

ou encore en utilisant l'équation de continuité :

$$\frac{\beta}{g} \frac{V}{S} q_l + \frac{V^2}{2g} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{V^2}{2g} + Z \right) + J + J_s = 0 \quad (55)$$

Cette équation est discrétisée le long de l'axe d'écoulement : le pas de discrétisation Δx (séparant donc deux sections de calcul consécutives) est variable. Son ordre de grandeur est la largeur de la rivière, mais il sera bien évidemment lié à la variabilité de la géométrie des sections.

2.2.1.2 Principe de résolution

Dans un premier temps, l'équation de continuité est résolue de l'amont (où le débit est imposé par la condition limite) vers l'aval, en ajoutant ou retranchant les apports et soutirages. Puis le calcul des cotes se fait pas à pas, en allant cette fois de l'aval vers l'amont. Pour le calcul d'un pas, nous disposons du débit amont Q_1 et de la cote aval Z_2 , et nous cherchons la valeur de la cote amont Z_1 (voir figure 7).

L'équation de la ligne d'eau est discrétisée entre les sections 1 et 2 sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{q_l}{2g} \left(\beta_1 \frac{V_1}{S_1} + \beta_2 \frac{V_2}{S_2} \right) + \frac{V_1^2 + V_2^2}{4g} \frac{\beta_2 - \beta_1}{\Delta x} + \frac{Z_2 - Z_1}{\Delta x} + \\ \frac{1}{\Delta x} \left(\beta_2 \frac{V_2^2}{2g} - \beta_1 \frac{V_1^2}{2g} \right) + \frac{2}{\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}} + \\ \frac{\zeta_1}{\Delta x} \frac{(\beta_1 V_1 - \beta_2 V_2)^2}{2g} + \frac{\zeta_2}{\Delta x} \beta_1 \frac{V_1^2}{2g} = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

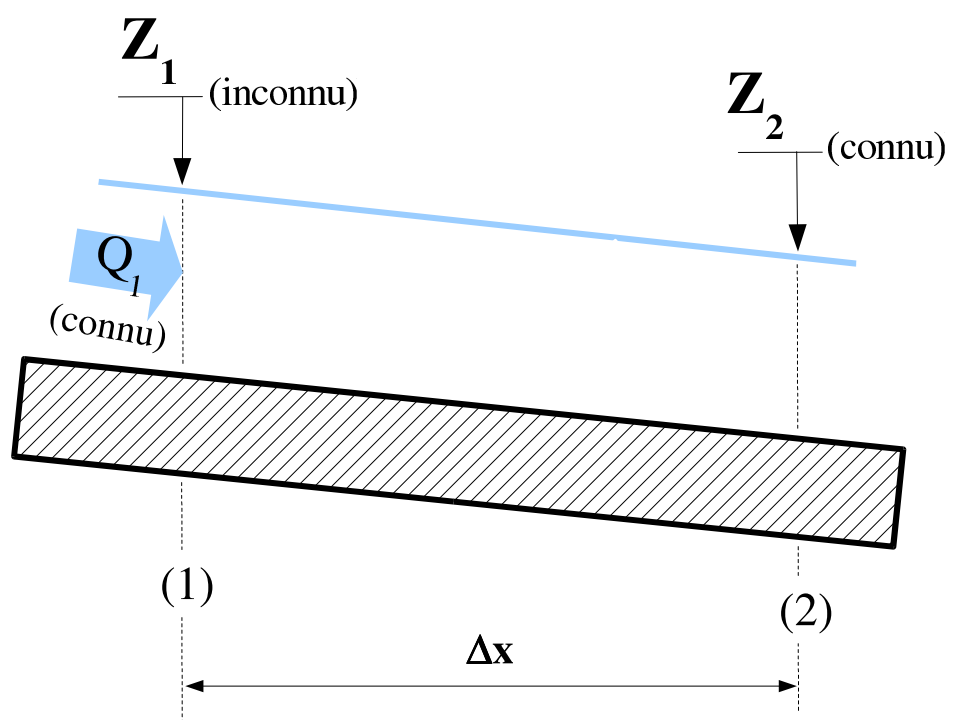


FIGURE 7 – Principe de résolution en permanent

Elle s'écrit encore :

$$Z_1 = Z_2 + JDX + JSDX + DXBETA + DXQ + DXV \quad (57)$$

avec :

$$JDX = \frac{2}{\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}} \Delta x \quad (58)$$

$$JSDX = \frac{1}{2g} (\zeta_1 (B_1 V_1 - B_2 V_2)^2 + \zeta_2 B_1 V_1^2) \quad (59)$$

$$DXBETA = \frac{1}{2g} (\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{V_1^2 + V_2^2}{2} \right) \quad (60)$$

$$DXQ = \frac{1}{2g} (Q_2 - Q_1) \left(\frac{\beta_1 V_1}{S_1} + \frac{\beta_2 V_2}{S_2} \right) \quad (61)$$

et :

$$DXV = \frac{1}{2g} (\beta_2 V_2^2 - \beta_1 V_1^2) \quad (62)$$

soit :

$$Z_1 = f(Z_1) \quad (63)$$

Il faut donc résoudre l'équation (63) d'inconnue Z_1 admettant, a priori, plusieurs solutions ; nous recherchons la solution fluviale.

La méthode consiste à déterminer les zéros de la fonction : $\varepsilon = Z_1 - f(Z_1)$.

On part de la solution approchée : $Z_1(0) = Z_2 + J_2 \Delta x$.

On calcule deux autres solutions approchées à l'aide de (63) :

$$Z_1(1) = f(Z_2(0)) \text{ d'où : } \varepsilon_0 = Z_1(0) - Z_1(1)$$

$$Z_1(2) = f(Z_1(1)) \text{ d'où : } \varepsilon_1 = Z_1(1) - Z_1(2)$$

On connaît ainsi deux point A et B du graphe ε (voir figure 8) :

A l'aide de ces deux points, on calcule une autre solution approchée X_i par la *méthode de la sécante*. L'expérience a montré qu'il n'était pas souhaitable d'utiliser cette valeur, mais plutôt la demi-somme des solutions les plus proches de l'axe des Z_1 , soit sur la figure 8 : $Z_1(3) = \frac{X_i + Z_1(1)}{2}$.

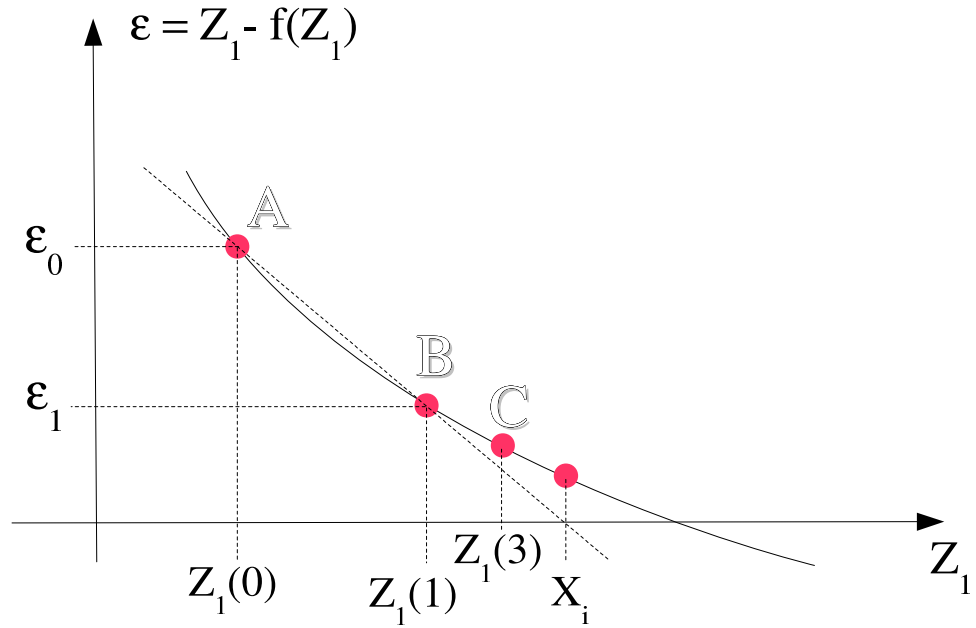


FIGURE 8 – Principe de calcul de la solution approchée

On calcule ensuite $\varepsilon(Z_1(3))$, ce qui permet de connaître un autre point du graphe $\varepsilon(Z_1)$, le point C . Le processus reprend à partir des deux points les plus proches de l'axe des Z_1 (dans notre cas : B et C).

On procède ainsi de façon itérative.

Dans le cas où $\varepsilon(Z_1)$ garde toujours le même signe, on arrête le calcul quand le critère : $\varepsilon(Z) \leq \Delta$ est satisfait avec : $\Delta = 10^{-6}$.

Dans le cas où $\varepsilon(Z)$ change de signe, on élimine, dans un premier temps, parmi les deux points qui sont du même côté de l'axe des Z_1 , celui qui en est le plus éloigné, puis, dans un second temps, on détermine une nouvelle approximation en prenant la demi-somme des points conservés.

On recommence le calcul jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit satisfait.

Remarque quant à la solution obtenue :

- en général, le calcul converge en moins de 10 itérations ;
- la solution obtenue est généralement fluviale ; dans le cas inverse le paragraphe suivant présente la procédure adoptée.

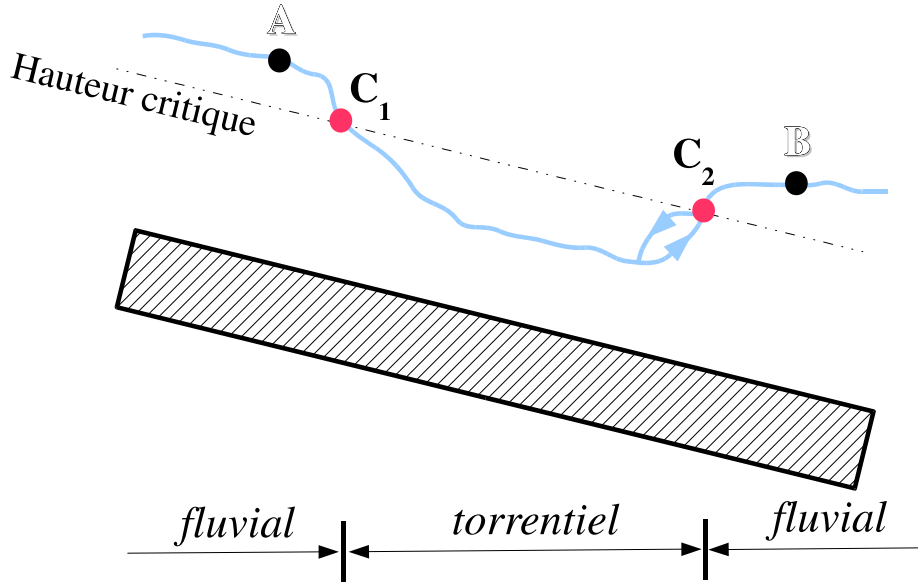


FIGURE 9 – Schéma d'un passage local en torrentiel

2.2.1.3 Résolution des zones torrentielles

Lors du balayage aval-amont pour calculer les zones fluviales, les zones torrentielles ont été détectées (figure 9). Le domaine va être balayé d'amont vers l'aval dans ce cas et pour chaque zone torrentielle, on va appliquer un schéma sur la discrétisation différences finies.

L'équation de continuité a déjà été résolue lors du balayage aval-amont. Le débit est connu en tout point de la discrétisation. L'équation de la ligne d'eau discrétisée entre les sections 1 et 2 est similaire à l'équation (56). Contrairement au traitement des zones fluviales, Z_1 est connu et on recherche Z_2 .

Elle s'écrit encore :

$$Z_2 = Z_1 - JDX - JSDX - DXBETA - DXQ - DXV \quad (64)$$

Comme précédemment, on est ramené à résoudre l'équation :

$$Z_2 = G(Z_2) \quad (65)$$

Il faut donc résoudre l'équation (65) d'inconnue Z_2 admettant, a priori, plusieurs solutions ; nous recherchons la solution torrentielle.

La méthode consiste à déterminer les zéros de la fonction : $\varepsilon = Z_2 - f(Z_2)$. Pour déterminer les zéros de la fonction précédente, nous n'utiliserons pas la méthode de la tangente car la convergence vers la solution torrentielle n'est pas assurée. La méthode retenue est une méthode de dichotomie à partir de la cote critique calculée en chaque point lors du calcul des zones fluviales. Le pas de la dichotomie est le minimum entre :

- le centième de l'écart entre la cote du fond et la cote critique ;
- et $0.01m$.

La solution est par construction torrentielle.

2.2.1.4 Validité du ressaut à l'aide des fonctions impulsion

Une fois la zone torrentielle parcourue, on s'assure que le ressaut est possible d'un point de vue énergétique en considérant le sens de l'accroissement de la fonction impulsion au droit du ressaut. En effet, les fonctions impulsion se conservent au passage du ressaut.

$$F_{imp} = \frac{Q^2}{S} + gSh_G \quad \text{avec : } h_G = \frac{1}{S} \int_0^h (h - y) dy \quad (66)$$

Si la fonction impulsion à l'amont du ressaut est supérieure à la fonction impulsion à l'aval du ressaut, le ressaut est repoussé et l'écoulement reste torrentiel.

2.2.2 Ecoulement non permanent dans un bief

2.2.2.1 Principe

Nous nous plaçons dans le cas le plus général d'un lit composé : lit mineur, lit majeur et zones de stockage. Dans un premier temps on traite de la résolution non-permanente pour un bief unique ; le cas des réseaux ramifiés et maillés, possible dans le noyau fluvial non permanent est traité à la section 2.2.4.

Rappelons les équations régissant la ligne d'eau :

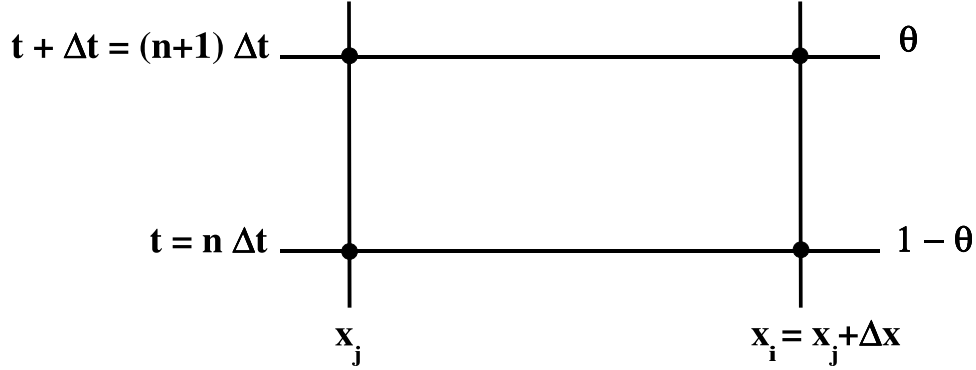


FIGURE 10 – Discrétisation en différences finies

– Equation de continuité :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + L_t \frac{\partial Z}{\partial t} = q_l \quad (67)$$

où L_t est la largeur totale au miroir de l'écoulement, incluant les largeurs des lits mineur et majeur et des zones de stockage.

– Equation dynamique :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \beta Q V}{\partial x} + g S \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + J + J_s \right) = 0 \quad (68)$$

Cette équation (68) s'écrit aussi en faisant intervenir la débitance D :

$$Q|Q| + D^2 \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + J_s + \frac{1}{S_g} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \beta Q V}{\partial x} \right) \right) = 0 \quad (69)$$

Ces équations sont résolues par une méthode de différences finies (voir figure 10), utilisant un schéma implicite. La discrétisation est de type Preissmann [36], θ est le coefficient d'implicitation. Le schéma est stable, en régime fluvial, lorsque : $\theta > 0.5$ (voir [4]).

Rappelons que la convention : $i = j + 1$, et précisons que Δx devrait en toute rigueur être noté Δx_j , le pas d'espace variant a priori dans le bief considéré.

Les dérivées en x et t sont calculées au premier ordre de la façon suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \theta \frac{f_i^{n+1} - f_j^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{f_i^n - f_j^n}{\Delta x} \quad (70)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} \right) \quad (71)$$

Les fonctions qui interviennent sans dérivée sont évaluées par :

$$f = \theta \frac{f_i^{n+1} + f_j^{n+1}}{2} + (1 - \theta) \frac{f_i^n + f_j^n}{2} \quad (72)$$

2.2.2.2 Equations discrétisées

Les équations discrétisées s'écrivent tout d'abord ainsi :

– Equation de continuité :

$$\begin{aligned} (1 - \theta) \frac{Q_i^n - Q_j^n}{\Delta x} + \theta \frac{Q_i^{n+1} - Q_j^{n+1}}{\Delta x} + \frac{1}{2} (L_{t_i}^n + L_{t_j}^n) \\ \times \frac{1}{2} \left(\frac{Z_i^{n+1} - Z_i^n}{\Delta t} + \frac{Z_j^{n+1} - Z_j^n}{\Delta t} \right) = q_{l_j}^{n+1} \end{aligned} \quad (73)$$

– Equation dynamique :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1 - \theta}{2} \right) (Q_j^{n^2} + Q_i^{n^2}) + \frac{\theta}{2} (Q_j^{n+1^2} + Q_i^{n+1^2}) \\ & + \left(\frac{1 - \theta}{2} (D_i^{n^2} + D_j^{n^2}) + \frac{\theta}{2} (D_i^{n+1^2} + D_j^{n+1^2}) \right) \\ & \times \left\{ (1 - \theta) \frac{Z_i^n - Z_j^n}{\Delta x} + \theta \frac{Z_i^{n+1} - Z_j^{n+1}}{\Delta x} + J_s(i) + J_s(j) \right. \\ & + \left(\frac{1 - \theta}{2g} \left(\left(\frac{1}{S} \right)_i^n + \left(\frac{1}{S} \right)_j^n \right) + \frac{\theta}{2g} \left(\left(\frac{1}{S} \right)_i^{n+1} + \left(\frac{1}{S} \right)_j^{n+1} \right) \right) \\ & \times \left[\frac{1}{2\Delta t} (Q_i^{n+1} - Q_i^n + Q_j^{n+1} - Q_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} \left(\beta_i^n \frac{Q_i^{n+1^2}}{S_i^{n+1}} - \beta_j^n \frac{Q_j^{n+1^2}}{S_j^{n+1}} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1 - \theta}{\Delta x} \left(\beta_i^n \frac{Q_i^{n^2}}{S_i^n} - \beta_j^n \frac{Q_j^{n^2}}{S_j^n} \right) \right] \right\} = 0 \quad (74) \end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{cases} \Delta Q_j = Q_j^{n+1} - Q_j^n \\ \Delta Q_i = Q_i^{n+1} - Q_i^n \\ \Delta Z_j = Z_j^{n+1} - Z_j^n \\ \Delta Z_i = Z_i^{n+1} - Z_i^n \end{cases} \quad (75)$$

on obtient, après linéarisation, c'est à dire en ne conservant que les termes du premier ordre en ΔZ et ΔQ :

– pour l'équation de continuité :

$$\boxed{G\Delta Q_i + H\Delta Z_i = I\Delta Q_j + J\Delta Z_j + K} \quad (76)$$

avec :

$$G = \theta \quad (77)$$

$$I = G \quad (78)$$

$$H = \frac{\Delta x}{4\Delta t}(L_{t_j}^n + L_{t_i}^n) \quad (79)$$

$$J = -H \quad (80)$$

$$K = Q_j^n - Q_i^n + q_{l_i}^{n+1} \quad (81)$$

– et pour l'équation dynamique :

$$\boxed{L\Delta Q_i + M\Delta Z_i = N\Delta Q_j + O\Delta Z_j + P} \quad (82)$$

avec :

$$L = B_2 + C_1 H_1 (E_2 + F_2) \quad (83)$$

$$M = C_1 (D_4 + H_1 F_4 + H_4 F_1) + C_4 (D_1 + H_1 F_1) \quad (84)$$

$$N = -B_3 - C_1 H_1 (E_3 + F_3) \quad (85)$$

$$O = -C_1 (D_5 + H_1 F_5 + H_5 F_1) - C_5 (D_1 + H_1 F_1) \quad (86)$$

$$P = -B_1 - C_1 (D_1 + H_1 F_1) \quad (87)$$

sachant que les divers termes de l'équation dynamique ont été linéarisés de la façon suivante (les variables non indicées correspondent au pas de temps n) :

$$Q|Q| = B_1 + B_2\Delta Q_i + B_3\Delta Q_j \quad (88)$$

$$B_1 = \frac{1}{2}(Q_i^2 \text{sign}(Q_i) + Q_j^2 \text{sign}(Q_j)) \quad (89)$$

$$B_2 = \theta|Q_i| \quad (90)$$

$$B_3 = \theta|Q_j| \quad (91)$$

*

$$D^2 = C_1 + C_4\Delta Z_i + C_5\Delta Z_j \quad (92)$$

$$C_1 = \frac{1}{2}(D_i^2 + D_j^2) \quad (93)$$

$$C_4 = \theta D_i(\alpha_{m_i} + \alpha_{M_i}) \quad (94)$$

$$C_5 = \theta D_j(\alpha_{m_j} + \alpha_{M_j}) \quad (95)$$

$$\alpha_{m_i} = \frac{K_m R_m^{2/3}}{3} \left(5L_m - 2R_m \frac{\partial P_m}{\partial z} \right)_i \quad (96)$$

$$\alpha_{m_j} = \frac{K_m R_m^{2/3}}{3} \left(5L_m - 2R_m \frac{\partial P_m}{\partial z} \right)_j \quad (97)$$

$$\alpha_{M_i} = \frac{K_M R_M^{2/3}}{3} \left(5L_M - 2R_M \frac{\partial P_M}{\partial z} \right)_i \quad (98)$$

$$\alpha_{M_j} = \frac{K_M R_M^{2/3}}{3} \left(5L_M - 2R_M \frac{\partial P_M}{\partial z} \right)_j \quad (99)$$

$$K'_m = AK_m \quad (100)$$

$$K'_M = \sqrt{1 + \frac{S_m}{S_M}(1 - A^2)} K_M \quad (101)$$

*

$$\frac{\partial Z}{\partial x} + J_s(i) + J_s(j) = D_1 + D_4 \Delta Z_i + D_5 \Delta Z_j \quad (102)$$

$$D_1 = \frac{Z_i - Z_j}{\Delta x} + J_s(i) + J_s(j) \quad (103)$$

$$D_4 = \frac{\theta}{\Delta x} \quad (104)$$

$$D_5 = \frac{\theta}{\Delta x} \quad (105)$$

*

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = E_2 \Delta Q_i + E_3 \Delta Q_j \quad (106)$$

$$E_2 = \frac{1}{2\Delta t} \quad (107)$$

$$E_3 = \frac{1}{2\Delta t} \quad (108)$$

*

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{S} \right) = F_1 + F_2 \Delta Q_i + F_3 \Delta Q_j + F_4 \Delta Z_i + F_5 \Delta Z_j \quad (109)$$

$$F_1 = \frac{1}{\Delta x} (\beta_i V_i Q_i - \beta_j V_j Q_j) \quad (110)$$

$$F_2 = \frac{2\theta}{\Delta x} \beta_i V_i \quad (111)$$

$$F_3 = -\frac{2\theta}{\Delta x} \beta_j V_j \quad (112)$$

$$F_4 = -\frac{\theta}{\Delta x} \beta_i V_i^2 L_{t_i} \quad (113)$$

$$F_5 = \frac{\theta}{\Delta x} \beta_j V_j^2 L_{t_j} \quad (114)$$

*

$$\frac{1}{Sg} = H_1 + H_4 \Delta Z_i + H_5 \Delta Z_j \quad (115)$$

$$H_1 = \frac{1}{2g} \left(\frac{1}{S_i} + \frac{1}{S_j} \right) \quad (116)$$

$$H_4 = -\frac{\theta}{2g} \frac{L_{t_i}}{S_i^2} \quad (117)$$

$$H_5 = -\frac{\theta}{2g} \frac{L_{t_j}}{S_j^2} \quad (118)$$

2.2.2.3 Résolution des équations discrétisées

Les équations (76) et (82) conduisent naturellement à la constitution d'un système matriciel :

$$\begin{pmatrix} G & H \\ L & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta Q_i \\ \Delta Z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & J \\ N & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta Q_j \\ \Delta Z_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K \\ P \end{pmatrix} \quad (119)$$

où $G, H, I, J, K, L, M, N, O$ et P sont des macro-coefficients dont l'expression dépend des variables de contrôle, des variables d'état et des paramètres du modèle (77-81) (83-87).

Dans le cas d'étude d'un seul bief, les conditions aux limites sur l'amont et l'aval font que ΔQ_1 et ΔZ_n ne sont plus des inconnues, n étant le nombre de sections de calcul. Cela correspond à un débit connu à l'amont et à une cote imposée à l'aval. Le système (119) comporte alors $2n - 2$ équations et inconnues. Il se met sous la forme générale :

$$A.x = b \quad (120)$$

où :

- le vecteur x des inconnues est la solution des variations de cote et de débit en chacune des n sections de calcul du réseau de biefs :

$$x = \begin{pmatrix} \Delta Z_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Z_2 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta Z_3 \\ \vdots \\ \Delta Z_{n-1} \\ \Delta Q_n \end{pmatrix} \quad (121)$$

[6]. Il bénéficie d'une robustesse et d'une performance établies pour les tailles de problèmes que le code REZO rencontre fréquemment. Y12M est un solveur direct avec pivotage numérique pour préserver la stabilité du calcul et le creux de la matrice factorisée en un produit $L.U$. L'emploi de ce solveur est particulièrement simple et léger du fait :

- de l'appel à une seule routine et d'un nombre de sources réduit ;
- de la gestion de la renumérotation en interne pour préserver le creux (choix du pivot avec un critère de minimisation du remplissage) ;
- que le chaînage de la matrice est renseignée au format de coordonnées (i, j) pour chaque élément non nul présent en ligne i et colonne j .

La résolution d'un problème fluvial et non-permanent par le code REZO suit les étapes algorithmiques décrites sur la figure 11.

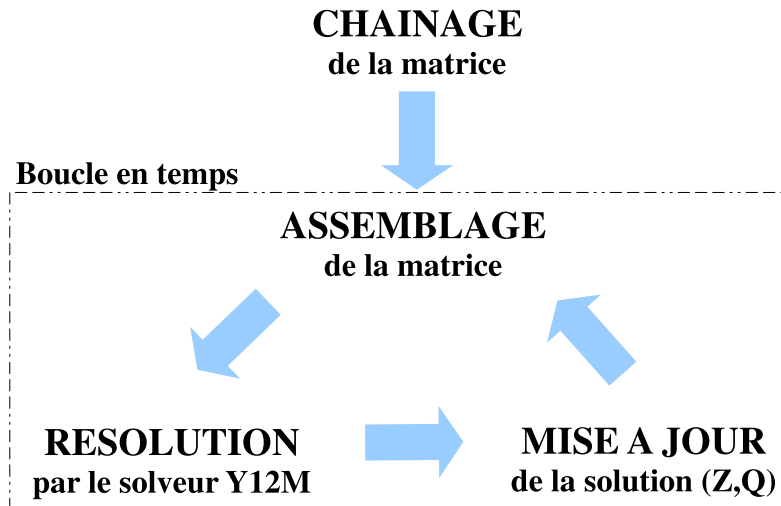


FIGURE 11 – Algorithme de REZO

Avant de rentrer dans la simulation temporelle il faut déterminer le chaînage de la matrice à partir du graphe de réseau de biefs. Ce calcul est réalisé une seule fois car la connectivité du réseau ne change pas dans le temps.

La boucle en temps comporte trois phases :

- un calcul des macro-coefficients $G, H, I, J, K, L, M, N, O$ et P et leur assemblage dans la matrice A et le second membre b ;
- un appel au solveur direct Y12M ou au solveur bande DGBSV pour résoudre le système (120) et déterminer les solutions de variations de cote et de débit $(\Delta Z_i, \Delta Q_i)$ en chaque section i ;

- une mise à jour de la ligne d'eau pour le temps courant t_k :

$$\forall i \in 1..n \begin{cases} Q_i^k = Q_i^{k-1} + \Delta Q_i \\ Z_i^k = Z_i^{k-1} + \Delta Z_i \end{cases} \quad (124)$$

2.2.3 Traitement des nœuds en régime fluvial permanent

2.2.3.1 Rappel

Les équations résolues aux nœuds sont :

- la continuité des débits ;
- l'identité des cotes dans chaque branche (voir la justification à la section 2.1.6).

Un nœud n'ajoute donc pas d'inconnue supplémentaire : les inconnues à calculer sont les inconnues (Z, Q) des sections de calcul consistant ce nœud. Ainsi, dans l'exemple ci-dessous (figure 12) :

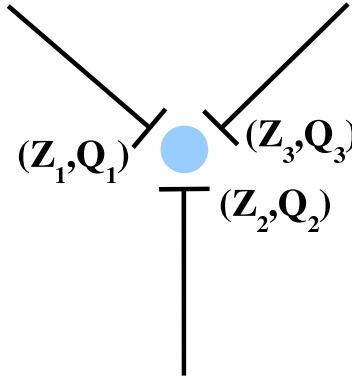


FIGURE 12 – Exemple d'un nœud à trois branches

Les inconnues sont (Z_1, Q_1) , (Z_2, Q_2) et (Z_3, Q_3) et les équations du nœud sont :

- la répartition des débits : $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$;
- l'égalité des cotes : $Z_1 = Z_2 = Z_3$.

Nous pouvons vérifier simplement que ces relations sont suffisantes pour déterminer les valeurs de (Z, Q) dans tout le réseau étudié.

Soient :

- le nombre total de sections de calcul à traiter (somme des sections de calcul de toutes les branches) : im ;
- le nombre de biefs : $nbbief$;
- le nombre d'extrémités libres : $nblimi$.

Pour tout le réseau on peut écrire $(im - nbbief)$ équations de continuité et autant d'équations dynamiques discrètes de Saint-Venant.

Les inconnues sont les $(\Delta Q, \Delta Z)$ aux sections de calcul, soient $2im$ inconnues.

Aux extrémités libres on connaît les conditions limites qui nous donnent $nblimi$ relations supplémentaires.

Pour l'ensemble des nœuds on peut écrire :

- * $nbnoeu$ équations de conservation de débit ;
- * $(2nbbief - nblimi) - nbnoeu$ équations d'égalité de cote.

En effet $(2nbbief - nblimi)$ représente le nombre d'extrémités de branches arrivant à un nœud (chaque bief doit être comptabilisé deux fois sauf ceux qui ont une limite libre). A chaque nœud, s'il arrive k branches, on n'a que $k - 1$ équations d'égalité de cote. Il faut donc au total enlever $nbnoeu$ à $2nbbief - nblimi$.

Finalement, nous disposons donc de :

$2(im - nbbief) + nblimi + nbnoeu + (2nbbief - nblimi) - nbnoeu = 2im$ équations pour $2im$ inconnues.

2.2.3.2 Principe

L'algorithme présenté ici est valable quelque soit le réseau (ramifié ou maillé) à condition de respecter les deux conditions suivantes :

- le sens de l'écoulement est connu a priori dans chaque bief ;
- pour toutes les limites libres, la condition limite est :
 - le débit s'il s'agit d'une extrémité amont ;
 - la cote s'il s'agit d'une extrémité aval.

En pratique, cet algorithme risque cependant d'être très coûteux en temps calcul dès que le réseau est complexe (défluent imbriqués, voir ci-après). Il vaudrait mieux dans ce cas, recourir au noyau fluvial non permanent (voir la

section suivante), en partant d'une ligne d'eau initiale simple, et en choisissant les conditions limites de manière à converger vers un état stationnaire correspondant à la ligne d'eau permanente recherchée.

Avant de présenter l'algorithme, il est utile de faire l'observation suivante. Le problème est très simple si le réseau ne comporte que des confluent, car en descendant depuis les limites amont, on calcule le débit en tout point du domaine, et il suffit alors de calculer les cotes des lignes d'eau en remontant de proche en proche suivant le chemin inverse, et selon le même procédé que pour un bief. Au passage de chaque nœud, l'égalité des cotes peut être imposée sans difficultés.

Le problème essentiel est donc de calculer la répartition de débit à un défluent. La solution retenue ici est une méthode itérative que nous allons expliciter dans le paragraphe suivant. Ce caractère itératif a comme conséquence que l'algorithme général est lui-même itératif, les itérations étant imbriquées de la même manière que les défluents (voir les figures 13 et 14). Précisons de plus que :

- *descendre un bief* signifie calculer le débit à chaque section de calcul successivement, dans le sens amont/aval ;
- *remonter le bief* signifie calculer la cote à chaque section de calcul successivement, dans le sens aval/amont.

La figure 13 expose l'algorithme de résolution, tandis que la figure 14 l'illustre sur le cas d'un réseau maillé comprenant deux défluents imbriqués. Cet exemple peut être considéré comme représentatif des cas les plus complexes pouvant être traités dans un temps raisonnable grâce à cet algorithme. Au delà , comme nous l'avons signalé, il est recommandé d'utiliser l'algorithme de résolution d'un réseau en non permanent du code REZO.

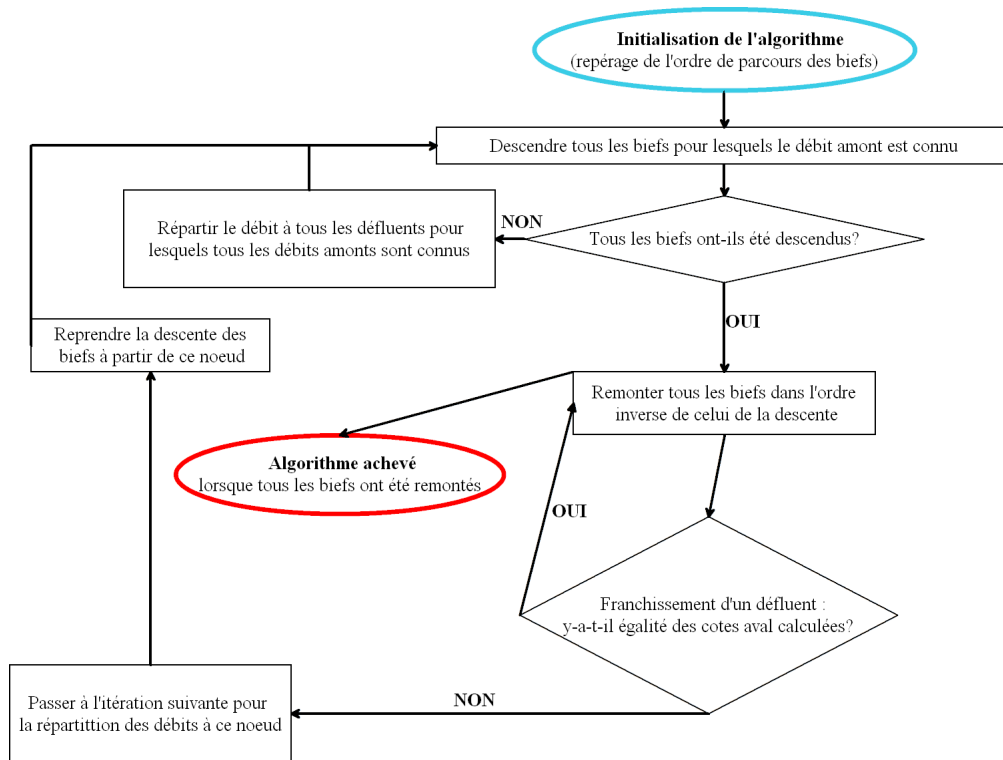


FIGURE 13 – Algorithme de résolution d'un réseau en permanent

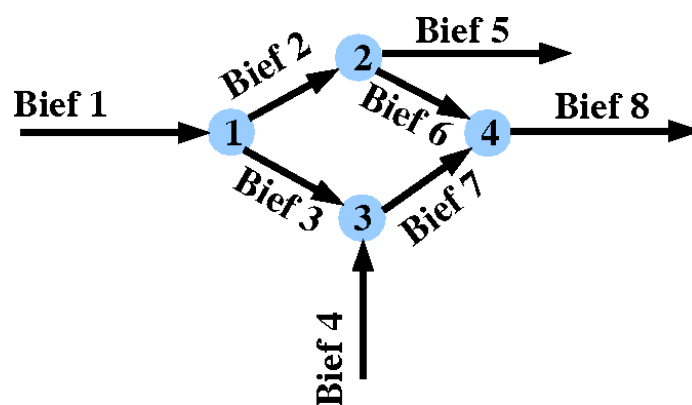


FIGURE 14 – Exemple d'un réseau pour un calcul permanent

ALGORITHME (VOIR FIGURE 14) :

- * Descendre Bief 1
 - * Descendre Bief 4
 - * $n = 1$
 - * **(1)** Répartir le débit au nœud 1 (itération n)
 - Descendre Bief 2
 - Descendre Bief 3
 - Descendre Bief 7
 - $p = 1$
 - **(2)** Répartir le débit au nœud 2 (itération $n.p$)
 - Descendre Bief 5
 - Descendre Bief 6
 - Descendre Bief 8
-
- Remonter Bief 8
 - Remonter Bief 6
 - Remonter Bief 5
 - Egalité des cotes aval au nœud 2 ?
 - si non : $p = p + 1$, revenir à l'étape **(2)**
 - si oui : poursuivre
 - Remonter Bief 7
 - Remonter Bief 3
 - Remonter Bief 2
 - Egalité des cotes aval au nœud 1 ?
 - si non : $n = n + 1$, revenir à l'étape **(1)**
 - si oui : poursuivre
 - Remonter Bief 4
 - Remonter Bief 1

2.2.3.3 Répartition du débit à un défluent

Première itération

Nous avons à choisir une répartition de débit vérifiant :

$$Q_{amont} + \sum_{i=1}^{n_{aval}} Q_i \quad (125)$$

où n_{aval} est le nombre de branches à l'aval.

$$Q_i = D_i J_i^{1/2} \quad (126)$$

La solution retenue est l'égalité des pentes des lignes de charges :

$$J_i = J = \left(\frac{Q_i^2}{D_i} \right) \quad (127)$$

ou encore :

$$\frac{Q_i}{D_i} = \frac{Q_j}{D_j} = cte = J^{1/2} \quad (128)$$

En reportant dans l'équation de continuité, nous obtenons :

$$\frac{Q_{amont}}{J^{1/2}} = \sum_{i=1}^{n_{aval}} D_i \quad (129)$$

Cette somme des débitances ne dépend que de la géométrie et de la rugosité des biefs aval et est une fonction de la cote qui dans le cas général monotone croissante.

Pour une valeur de J donnée, il est possible de calculer une cote satisfaisant cette relation, puis pour cette cote, calculer les D_j puis les Q_j .

Dans la version actuelle, la solution adoptée pour ce premier itéré est de prendre pour J la moyenne des pentes des fonds des branches aval.

Itérations suivantes

Le problème à résoudre est de déterminer les meilleures corrections de débit à apporter, par rapport à la répartition choisie à l'itération précédente,

pour s'approcher le plus possible de l'égalité des cotes aux sections origine des biefs aval.

L'idée est de déterminer la correction de débit en considérant comme données les pentes des lignes d'énergie J (égales à celles de la précédente itération), pour tendre vers l'égalité des cotes en continuant à respecter strictement la continuité des débits.

Pour chacune des sections origines des branches aval, on peut écrire (pour une cote donnée) :

$$Q_i^2 = J_i D_i^2 \quad (130)$$

où :

$$Q_i = J_i^{1/2} D_i \quad (131)$$

l'indice i correspondant au numéro de la branche aval.

En différenciant entre les itérations n et $n + 1$ et en expliquant le terme $J_i^{1/2}$, il vient :

$$\delta Q_i = (J_i^{1/2})_n \left(\frac{\partial D_i}{\partial Z_i} \right)_n \delta Z_i \quad (132)$$

n désignant le numéro de l'itération,

avec :

$$(J_i^{1/2})_n = \left(\frac{Q_i}{D_i} \right)_n \quad (133)$$

$$\text{où : } \delta Q_i = Q_i^{n+1} - Q_i^n \quad \text{et : } \delta Z_i = Z_i^{n+1} - Z_i^n$$

La relation de continuité des débits s'écrit, si n_{aval} est le nombre de branches aval :

$$Q_{amont} = \sum_{i=1}^{n_{aval}} Q_i \quad (134)$$

où :

$$\sum_{i=1}^{n_{aval}} \delta Q_i = 0 \quad (135)$$

La correction de débit se fait de façon à tendre vers l'égalité des cotes au nœud, on veut donc :

$$Z_i^{n+1} = cte = Z \quad (136)$$

ce qui donne :

$$\delta Z_i = Z - Z_i^n \quad (137)$$

les Z_i^n étant les résultats de l'itération précédente.

On a donc :

- n_{aval} relations (132) ;
- 1 relation (135) ;
- n_{aval} relations (137).

soient $2n_{aval} + 1$ relations pour $2n_{aval} + 1$ inconnues ($\delta Q_i, \delta Z_i$ et Z).

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta Z_i = Z - Z_i^n \\ \sum_{i=1}^{n_{aval}} \delta Q_i = 0 \\ \delta Q_i = \left(\frac{Q_i}{D_i} \right)_n \left(\frac{\partial D_i}{\partial Z_i} \right)_n \delta Z_i \end{array} \right. \quad (138)$$

d'où l'on tire :

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n_{aval}} \left(\frac{Q_i}{D_i} \right)_n \left(\frac{\partial D_i}{\partial Z_i} \right)_n Z_i}{\sum_{i=1}^{n_{aval}} \left(\frac{Q_i}{D_i} \right)_n \left(\frac{\partial D_i}{\partial Z_i} \right)_n} \quad (139)$$

puis :

$$\delta Z_i = Z - Z_i^n \quad (140)$$

et finalement :

$$\delta Q_i = \sum_{i=1}^{n_{aval}} \left(\frac{Q_i}{D_i} \right)_n \left(\frac{\partial D_i}{\partial Z_i} \right)_n \delta Z_i \quad (141)$$

2.2.4 Traitement des nœuds en fluvial non-permanent

La matrice A (122) décrit une solution apportée aux équations de Saint-Venant 1D dans le cas d'étude d'un seul bief. Si plusieurs biefs existent, la représentation des confluent ou défluent nécessite des équations supplémentaires. Il n'y a pas d'équations dynamique (2) ou de continuité (1) entre les

sections appartenants à un même nœud 3. Pour chaque du réseau fluvial, il faut prendre en compte les deux contraintes suivantes :

- égalité des cotes de chaque section de l'extrémité des biefs connectés au même nœud. Dans le cas d'un nœud à trois branches 3, il faut rajouter deux équations impliquant l'égalité des cotes d'un pas de temps sur l'autre :

$$\begin{cases} Z_1 + \Delta Z_1 = Z_2 + \Delta Z_2 \\ Z_1 + \Delta Z_1 = Z_3 + \Delta Z_3 \end{cases} \quad (142)$$

soit :

$$\begin{cases} \Delta Z_1 - \Delta Z_2 = Z_2 - Z_1 \\ \Delta Z_1 - \Delta Z_3 = Z_3 - Z_1 \end{cases} \quad (143)$$

Il faut donc rajouter à la matrice A (122) deux lignes de coefficients $+1$ et -1 sur les variations de cote. Le vecteur de second membre b (123) est enrichi de deux différences de cote.

- conservation des débits, le volume d'eau total arrivant en un nœud étant égal à l'ensemble des volumes d'eau quittant le nœud :

$$Q_1 + \Delta Q_1 + Q_2 + \Delta Q_2 = Q_3 + \Delta Q_3 \quad (144)$$

soit :

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 - \Delta Q_3 = Q_3 - Q_2 - Q_1 \quad (145)$$

De la même manière que précédemment, la matrice A est enrichie d'une ligne de coefficients $+1$ et -1 . On ajoute au second membre une somme algébrique des débits des sections rattachées.

Le parcours de graphe pour la solution des équations discrétisées n'est plus de mise. La complexité de la résolution est laissée au solveur de système linéaire employé, ici Y12M [6] ou LAPACK-DGBSV.

2.2.5 Traitement des singularités

Nous avons défini dans la section 2.1.8 le principe de la modélisation des singularités : elles sont supposées se situer entre deux sections de calcul j et $i = j + 1$. L'équation de continuité est remplacée par l'égalité des débits pour ces sections, et l'équation dynamique est remplacée par la loi de la singularité, de la forme suivante une fois discrétisée :

$$A_{sing}\Delta Q + B_{sing}\Delta Z_{amont} + C_{sing}\Delta Z_{aval} = D_{sing} \quad (146)$$

avec :

$$\text{si } Q > 0 \quad \begin{cases} Z_{amont} = Z_j \\ Z_{aval} = Z_i \end{cases} \quad (147)$$

et :

$$\text{si } Q < 0 \quad \begin{cases} Z_{amont} = Z_i \\ Z_{aval} = Z_j \end{cases} \quad (148)$$

Notons que A_{sing} peut être nul, mais que B_{sing} et C_{sing} ne peuvent l'être simultanément sans quoi le système est indéterminé.

Exemples :

– Seuil de loi générale : $Q = f(Z_{amont}, Z_{aval})$;

$$A_{sing} = -1 \quad ; \quad B_{sing} = + \frac{\partial f}{\partial Z_{amont}} \quad ;$$

$$C_{sing} = + \frac{\partial f}{\partial Z_{aval}} \quad ; \quad D_{sing} = 0$$

Si ce seuil est dénoyé, alors : $C_{sing} = 0$

– Barrage dont la loi de la retenue : $Z_{amont} = f(t)$ est connue a priori ;

$$A_{sing} = 0 \quad ; \quad B_{sing} = 1 \quad ;$$

$$C_{sing} = 0 \quad ; \quad D_{sing} = f(t + \Delta t) - f(t)$$

2.2.5.1 Résolution en permanent

Nous devons déterminer la cote à l'amont de la singularité, connaissant le débit et la cote à l'aval. La résolution est de ce fait toujours très simple. Dans plusieurs cas (loi de seuil générale, régulation, section de contrôle), la discrétisation de la loi de la singularité donne directement le résultat. Sinon, la seule difficulté réside dans le coefficient noyé/dénoyé, dont la valeur suppose déjà connue la cote amont objet du calcul. Dans ce dernier cas, la cote amont est d'abord calculée en supposant le régime dénoyé, puis, si ce n'est pas le cas avec la solution ainsi obtenue, la cote amont est progressivement augmentée jusqu'à ce que la loi du régime dénoyé soit bien vérifiée. Notons que, pour un seuil, la charge est assimilée à la hauteur au-dessus du seuil pour la section amont.

2.2.5.2 Résolution en non-permanent

L'équation de continuité (76) est réduite à l'égalité des débits en amont et en aval de la singularité, ce qui implique :

$$\begin{cases} H = 0 \\ J = 0 \\ G = 1 \\ I = 1 \end{cases} \quad (149)$$

L'équation dynamique (82) est spécifique à chaque type de singularité. Néanmoins, cette équation est modifiée de la sorte :

$$\begin{cases} L = 0 \\ N = -A_{sing} \\ O = -B_{sing} \\ M = C_{sing} \\ P = D_{sing} \end{cases} \quad (150)$$

où les coefficients A_{sing} , B_{sing} , C_{sing} et D_{sing} dépendent principalement de la nature du seuil et de l'état de son régime noyé ou dénoyé. Ils sont calculés a priori pour chaque pas de temps par des fonctions externes et servent à la constitution de la matrice des coefficients A (122). Les débits calculés sur les seuils par la solution de l'équation (120) sont corrigés a posteriori par ces mêmes fonctions.

2.2.6 Empêchement du régime torrentiel en non-permanent

2.2.6.1 Introduction

Jusqu'à la version 7.1.3, l'apparition d'un régime super-critique en fluvial non-permanent avait pour conséquence l'arrêt du calcul avant la fin de la simulation car le code ne pouvait traiter le problème du point sonique et, a fortiori, d'un choc.

Les modifications apportées par la version 7.1.4 visent à permettre la poursuite du calcul même en présence de tels phénomènes sans prétendre les représenter. Elles se basent sur une atténuation graduelle des termes d'accélération convective au fur et à mesure que le régime d'écoulement s'approche de la criticité.

Ces modifications existent déjà dans des codes 1D renommés internationalement. Elles améliorent la robustesse du code et donc le confort de

l'utilisateur sans dégrader de manière notable les résultats en régime fluvial.

Cependant elles ne permettent pas la représentation des phénomènes torrentiels et l'utilisateur doit garder en conséquence un œil critique sur les résultats si de tels régimes ont toutes les raisons d'apparaître naturellement.

L'empêchement du régime torrentiel reste une option de calcul qui n'est pas activée par défaut dans la version 7.1.4 du code.

2.2.6.2 Modélisation fluviale

A l'origine, le schéma numérique de Preissmann ne peut résoudre le problème des équations de Saint-Venant en cas d'événements critiques car il devient intrinsèquement mal posé [37].

Au point sonique (passage en torrentiel), le système est localement sous-déterminé car il n'y a qu'une seule caractéristique entrante sur la section concernée. En revanche, à l'endroit du choc (passage en fluvial), le système est sur-déterminé en raison de trois caractéristiques entrantes au lieu de deux.

Divers auteurs ont proposé une modification du schéma afin de pouvoir modéliser plus ou moins fidèlement les écoulements torrentiels à faible valeur du nombre de Froude [38][39]. Ces modifications locales font apparaître une complexité algorithmique supplémentaire qui peine à se justifier en comparaison d'autres schémas plus modernes et performant pour la modélisation des régimes fortement torrentiels [40].

2.2.6.3 Modification des équations

Le but des modifications apportées au code `REZO` est d'empêcher toute apparition du régime transcritique en modifiant les équations de Saint-Venant quand l'écoulement accélère trop.

Ainsi ce n'est plus exactement l'équation (2) qui est résolue par une discrétisation consistante mais une forme altérée où les termes de convection sont atténués par un coefficient α .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{S} \right) \rightarrow \alpha \times \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{S} \right) \quad (151)$$

avec : $\alpha \in [0, 1]$

Le choix de la valeur du coefficient α est une heuristique qui va dépendre du nombre de Froude calculé localement. Pour des valeurs faibles de ce nombre, α doit être proche de 1 afin de résoudre fidèlement l'équation dynamique.

A contrario, pour un nombre de Froude se rapprochant de la criticité, α doit tendre vers 0 afin supprimer progressivement toute accélération spatiale.

La formule choisie pour ce coefficient est une fonction régulière [41] :

$$\alpha = \max(0, 1 - F_r^2) \quad (152)$$

L'atténuation des termes de convection commence très tôt avec cette formule.

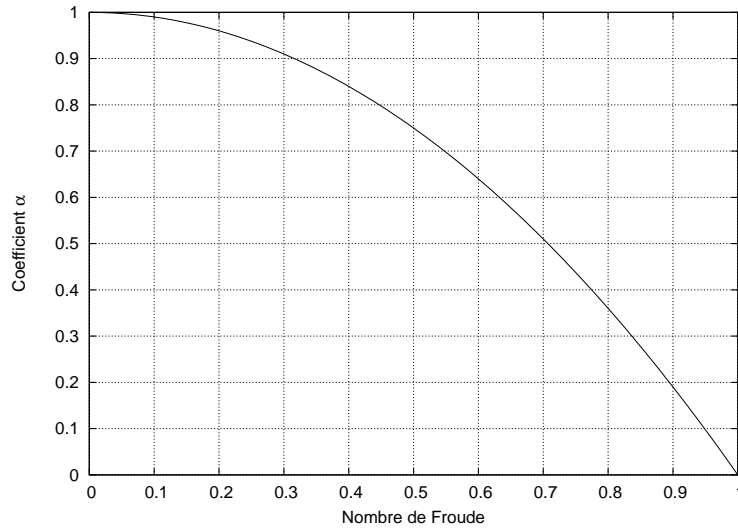


FIGURE 15 – Evolution du coefficient α en fonction du nombre de Froude

Avec cette modification, le code **REZO** est maintenant dans son champ d'application : celui du régime fluvial. Cela robustifie l'usage du code dans diverses situations. En contrepartie, les phénomènes rapides ne sont pas représentés. Ils sont remplacés par le calcul d'une ligne d'eau fictive qui n'a pas de réalité physique. Par conséquent, l'utilisateur doit garder à l'esprit l'erreur commise par le code dans les zones d'écoulement naturellement torrentielles.

3 Le noyau transcritique VF (MASCARET)

3.1 Introduction

L'origine du développement du noyau transcritique était de disposer d'un code permettant de réaliser des études d'onde de submersion, répondant aux critères de qualité et de performance associés.

Le noyau transcritique avait donc pour objectifs initiaux de permettre le calcul :

- d'écoulement dans des vallées avec des pentes du fond pouvant atteindre 10% sur des zones d'emprise limitée et de fortes variations de largeur (gorges encaissées, verrou rocheux, etc...);
- des écoulements très rapides avec présence de discontinuités ;
- de la propagation sur zones sèches ;
- de lignes d'eau dans des vallées pouvant atteindre plusieurs centaines de km avec présence d'affluents ;
- de ligne d'eau avec des passages torrentiels et le traitement des écoulements permanents pour des applications telles que des vidanges de retenue.

Les diverses contraintes énumérées ci-dessus se sont traduites au niveau numérique par l'adoption d'un schéma conservatif (schéma de Roe avec traitement décentré des termes sources) admettant des solutions discontinues.

Dans la première partie de cette section 3, on rappelle les équations de Saint-Venant monodimensionnelles, écrites sous forme conservative.

La seconde partie est consacrée à la résolution numérique du problème homogène et des termes sources pour un bief simple. On présente à la section 3.3 la méthode de résolution utilisé dans le noyau transcritique de **MASCARET** avec un schéma *volumes finis* explicite ou implicite en temps.

Le schéma explicite permet d'aborder des problèmes fortement instationnaires tels que les ondes de submersion. Les résultats numériques sont satisfaisants mais la contrainte sur le pas de temps due au schéma explicite est très contraignante pour des écoulements peu instationnaires et fluviaux, ce qui a conduit à impliciter linéairement le schéma initial.

Dans la troisième partie 3.4, sont présentés des développements physiques plus complexes tels que la modélisation des lits composés, des singularités

(barrages aval, seuil, etc) et des confluent.

3.2 Equations de Saint-Venant sous forme conservative

3.2.1 Ecriture générale des équations (rappel)

L'écoulement dans une rivière peut généralement être considéré comme monodimensionnel, c'est-à-dire fonction d'une seule variable d'espace, l'abscisse curviligne x du lit de la rivière.

Les variables de l'écoulement sont alors le débit Q et la section mouillée S fonctions de x et du temps t et définis dans chacune des sections verticales de la rivière.

Pour obtenir les équations de Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes, on suppose que l'angle entre le fond et l'horizontale est toujours petit. Néanmoins, dans les applications pratiques, on est amené à traiter des zones à très forte pentes, mais d'emprise limitée.

Dans l'hypothèse où la pression au sein du fluide est hydrostatique et où les effets visqueux internes sont négligeables devant les frottements sur les parois du lit de la rivière, Q et S sont solutions des équations de Saint-Venant qui s'écrivent [7] [8] :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_a \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta(x, S) Q^2}{S} \right) + g S \frac{\partial Z}{\partial x} = g S J \end{cases} \quad (153)$$

où :

- Z est la cote de la surface libre (m) ;
- S est la surface mouillée (m^2) ;
- g est l'accélération de la gravité ($m.s^{-2}$) ;
- J est la perte de charge linéaire par frottement. J est évaluée par la formule de Strickler :

$$J = \frac{Q^2}{K^2 S^2 R_h^{4/3}} \quad (154)$$

avec R_h le rayon hydraulique et K le coefficient de Strickler.

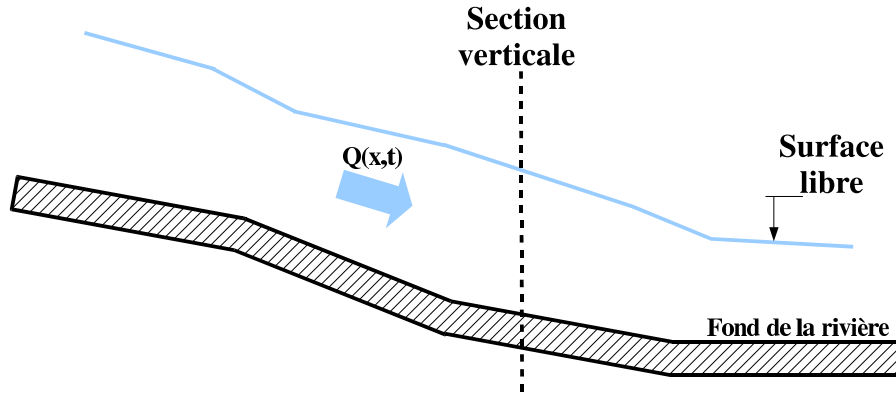


FIGURE 16 – Vue longitudinale

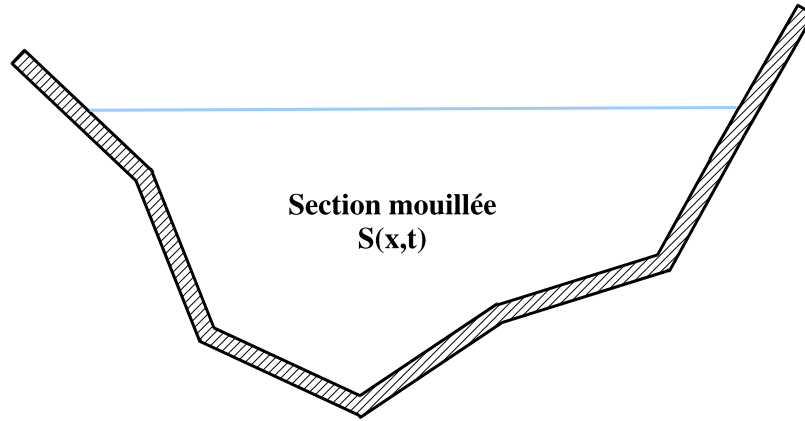


FIGURE 17 – Vue latérale

Le coefficient β , adimensionnel, résulte des variations de la vitesse réelle de l'écoulement en une section :

$$\beta(x, S) = \frac{S}{Q^2} \int V^2 dS \quad (155)$$

Dans le cas d'un lit unique, compte-tenu des hypothèses prises pour établir les équations de Saint-Venant, nous prenons β égal à 1, c'est-à-dire que nous négligeons les variations de vitesse au sein d'une section. Ceci ne sera plus vrai en lit composé.

Ce système d'équations (153) s'obtient en exprimant la conservation de la masse pour la première équation et la conservation de la quantité de mou-

vement pour la seconde.

3.2.2 Ecriture sous forme conservative

Un système d'équations conservatif peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div} F(W) = B(W) \quad (156)$$

où :

- W est le vecteur d'état ;
- $F(W)$ est le flux ;
- $B(W)$ le terme source.

Ou encore s'il n'y a qu'une dimension d'espace :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = B \quad (157)$$

Cette écriture est intéressante car elle contient, au sens des distributions, les relations de saut en cas de choc.

Pour écrire la forme conservative des équations à partir de (153), il nous faut donc transformer dans l'équation dynamique le terme : $gS \frac{\partial Z}{\partial x}$. Les deux premiers termes de l'équation dynamique : $\frac{\partial Q}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{S} \right)$ correspondent à la variation de la quantité de mouvement. Celle-ci est égale à l'action des forces extérieures, c'est-à-dire la force de frottement sur le radier modélisée par : $-gSJ$ et les forces de pesanteur et de pression, qui sont prises en compte par : $gS \frac{\partial Z}{\partial x}$.

Le terme $gS \frac{\partial Z}{\partial x}$ peut se transformer en faisant apparaître le terme de pression : $P = g \int_0^{r_y} S dy$ où : $y = Z - Z_f$, Z étant la cote de la surface libre et Z_f la cote du fond.

En effet :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = gS \frac{\partial y}{\partial x} + g \int_0^y \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) dy \quad (158)$$

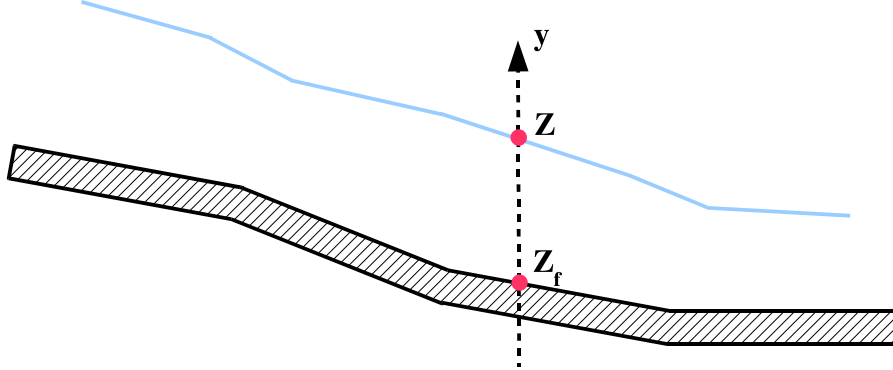


FIGURE 18 – Vue longitudinale : les cotes

soit :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = gS \frac{\partial Z}{\partial x} + g \int_0^y \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_y dy - gS \frac{\partial Z_f}{\partial x} \quad (159)$$

L'équation dynamique peut se réécrire en :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{S} + P \right) = g \int_0^y \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_y dy - gS \frac{dZ_f}{dx} - gSJ \quad (160)$$

On note que le terme source lié à la géométrie de l'équation dynamique peut également s'écrire : $\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{z=cte}$.

Le terme source de cette nouvelle équation ne dépend que des variables Q et S de la géométrie de la rivière mais pas des dérivées par rapport à x ou t de Q et S . En effet, la dérivée : $\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_y$ est purement géométrique (S désigne ici la section géométrique et non la section mouillée). Cette équation est bien sous forme conservative.

L'écriture conservative des équations du système (153) est donc (avec : $q_a = 0$) :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{S} + P \right) = g \int_0^y \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_y dy - gS \frac{dZ_f}{dx} - gSJ \end{cases} \quad (161)$$

avec : $P = g \int_0^y S dy$

Ce qui est effectivement de la forme :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = B \quad (162)$$

avec :

$$W = \left(\frac{S}{Q} \right) \quad (163)$$

$$F = \left(\begin{array}{c} Q \\ \frac{Q^2}{S} + P \end{array} \right) \quad (164)$$

et :

$$B = \left(\begin{array}{c} 0 \\ g \int_0^y \left(\frac{S}{x} \right)_y dy - gS \frac{dZ_f}{dx} - gSJ \end{array} \right) \quad (165)$$

Remarques :

- Le flux dépend non seulement de W mais aussi de x . La connaissance seule de W ne suffit pas pour calculer F . En effet, le terme de pression P apparaissant dans F ne peut être évalué que si la section mouillée et la loi de variation de la section en fonction du tirant d'eau sont connues. Or cette dernière loi de variation dépend de la géométrie de la rivière. Elle ne peut donc être connue que si l'abscisse x est donnée. On verra l'importance de cette remarque dans la recherche des invariants de Riemann du système d'équations (161) ;

- Les variables Q et S peuvent être discontinues (dans le cas d'un res-saut). Les dérivées apparaissant dans (161) doivent alors être comprises au sens des distributions. Le système (161) est d'ailleurs dans ce cas le seul système d'équations correct puisque dans (153) le terme : $gS\frac{\partial Z}{\partial x}$ n'a plus de signification tant au sens classique qu'au sens des distribu-tions.

3.2.3 Invariants de Riemann

Le système (161) est hyperbolique. La matrice jacobienne de $F : \left(\frac{\partial F}{\partial W}\right)_x$ admet deux valeurs propres réelles et distinctes : λ^+ et λ^- :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial W}\right)_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{Q^2}{S^2} + \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_x & \frac{2Q}{S} \end{pmatrix} \quad (166)$$

$$\begin{cases} \lambda^+ = \frac{Q}{S} + C \\ \lambda^- = \frac{Q}{S} - C \end{cases} \quad (167)$$

avec :

$$C = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_x} \quad (168)$$

La célérité C n'est fonction que de S et x .

En utilisant les propriétés des systèmes hyperboliques [9][8], (161) peut se réécrire sous la forme de deux équations de convection des invariants de Riemann.

Nous ne donnons pas ici les détails des calculs (voir [9] et [8]).

On obtient finalement le système (169) :

$$\begin{cases} \frac{df^-}{dt} = -\lambda^- \int_0^S \frac{1}{S} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_S dS - g \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_S + \frac{dZ_f}{dx} + J \right) \\ \frac{df^+}{dt} = +\lambda^+ \int_0^S \frac{1}{S} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_S dS - g \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_S + \frac{dZ_f}{dx} + J \right) \end{cases} \quad (169)$$

où :

$$\begin{aligned} -\frac{df^-}{dt} &= \frac{\partial f^-}{\partial t} + \lambda^- \frac{\partial f^-}{\partial x} \text{ est la dérivée de l'invariant de Riemann : } f^- = \frac{Q}{S} - K \text{ (avec } K = \int_0^S \frac{C}{S} dS \text{ le long de la courbe caractéristique } C^- \text{ de} \\ &\text{pente : } \frac{dx}{dt} = \lambda^- ; \\ -\frac{df^+}{dt} &= \frac{\partial f^+}{\partial t} + \lambda^+ \frac{\partial f^+}{\partial x} \text{ est la dérivée de l'invariant de Riemann : } f^+ = \frac{Q}{S} + K \text{ le long de la courbe caractéristique } C^+ \text{ de pente : } \frac{dx}{dt} = \lambda^+. \end{aligned}$$

Nous appellerons : caractéristique fluviale la courbe C^+ et caractéristique torrentielle la courbe C^- .

Exprimer (161) sous forme d'équations le long des courbes caractéristiques revient à considérer l'écoulement dans deux repères mobiles se déplaçant le long des caractéristiques. Le débit et la section mouillée en un point du canal à un instant donné sont déterminées par l'information amenée par les caractéristiques C^+ et C^- qui se coupent en ce point.

Connaissant f^+ et f^- calculées à l'aide de l'information véhiculée par les caractéristiques en M , on en déduit Q et S .

Formuler sous forme de caractéristiques le système (161) permet aussi lors du traitement numérique de *coller* au problème physique. Nous en verrons une application intéressante lors du traitement des conditions aux limites (voir la section 3.3.4).

Le système (169) n'est cependant équivalent au système (161) que lorsque l'écoulement ne présente pas de discontinuité, le développement de la dérivée $\frac{\partial F}{\partial x}$ utilisée pour obtenir le système (169) n'est plus possible.

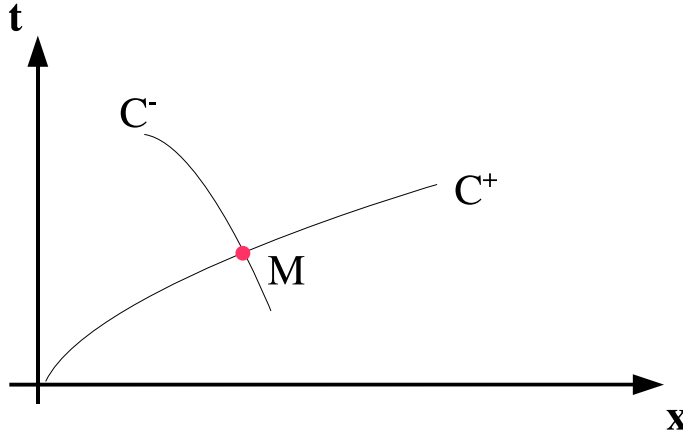


FIGURE 19 – Deux caractéristiques

3.2.4 Le ressaut

Nota : nous utilisons indifféremment la dénomination *ressaut* ou *choc* pour désigner une discontinuité.

Un choc apparaît dans un écoulement quand deux caractéristiques d'une même famille se coupent. Il existe deux types de choc :

- l'un dû à l'intersection de caractéristiques C^- : choc C^- ;
- l'autre dû à la rencontre de caractéristiques C^+ : choc C^+ .

Au point où les caractéristiques se coupent, deux valeurs de f^- (pour un choc C^-) ou deux valeurs de f^+ (pour un choc C^+) sont apportées en plus de l'information provenant de l'autre famille de caractéristiques. Cette surabondance d'information inacceptable mathématiquement se traduit par une discontinuité au point d'intersection ; d'un point de vue physique elle se traduit par la mise en place d'un processus dissipatif : le ressaut.

La trajectoire du choc est constituée par l'ensemble des points où les caractéristiques d'une même famille se coupent.

A gauche et à droite du choc, la matrice $\left(\frac{\partial F}{\partial W}\right)_x$ est bien définie, il en va de même pour ses valeurs propres qu'on note $(\lambda_g^+, \lambda_g^-)$ à gauche et $(\lambda_d^+, \lambda_d^-)$ à droite.

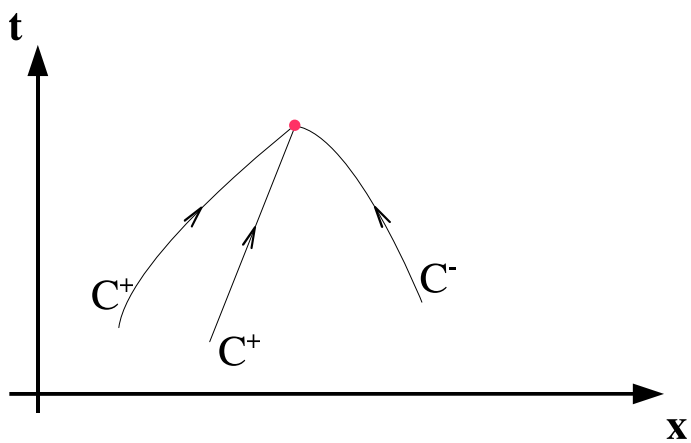


FIGURE 20 – Exemple d'un choc C^+

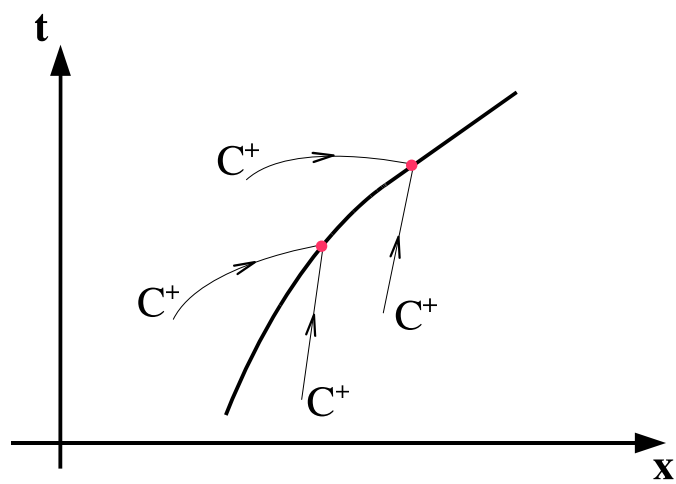


FIGURE 21 – Trajectoire d'un choc C^+

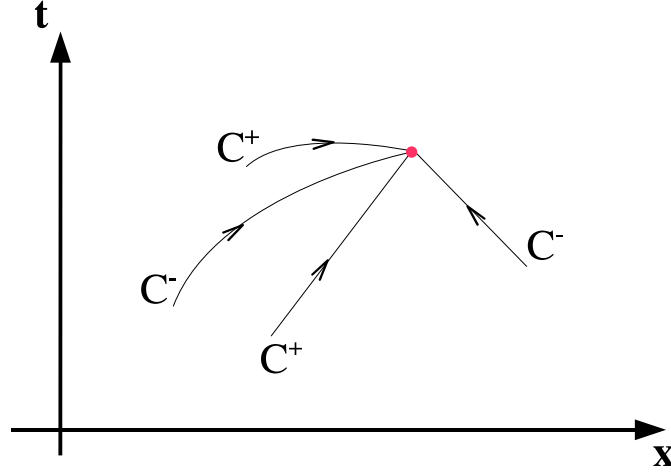


FIGURE 22 – Schéma de caractéristiques impossible

La vitesse s^- d'un choc C^- vérifie :

$$\begin{cases} \lambda_d^- < s^- < \lambda_g^- (< \lambda_g^+) \\ s^- < \lambda_d^+ \end{cases} \quad (170)$$

et la vitesse s^+ d'un choc C^+ vérifie :

$$\begin{cases} (\lambda_d^- <) \lambda_d^+ < s^+ < \lambda_g^+ \\ \lambda_g^- < s^+ \end{cases} \quad (171)$$

En effet, les caractéristiques qui créent le choc le rattrapent par l'amont (ici à gauche) et sont rattrapées par lui à l'aval (ici à droite), c'est la signification des premières inégalités pour les chocs C^- et les chocs C^+ : la vitesse du choc est intermédiaire entre celles des caractéristiques qui le créent. La signification des deuxièmes inégalités est qu'il ne peut y avoir en un même point un choc C^- et un choc C^+ : la vitesse du choc ne peut être comprise entre les vitesses des caractéristiques qui ne participent pas à sa création.

Le schéma suivant ne se rencontre donc jamais celui de la figure 22

Ces inégalités sont tout ce que les caractéristiques fournissent comme renseignements sur le choc. Issues d'une formulation non conservative des équations, elles ne conduisent pas à une description quantitative des chocs. Les états à gauche et à droite du choc ne peuvent pas être déterminés à partir des invariants de Riemann apportés par les caractéristiques se coupant sur le

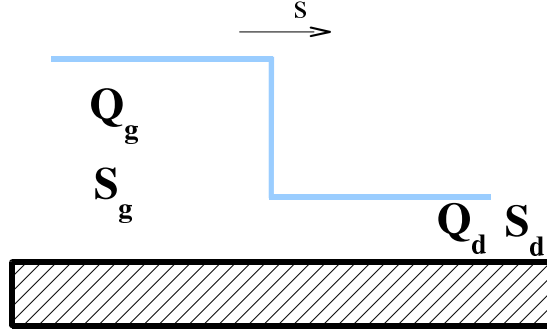


FIGURE 23 – Vitesse du ressaut

choc (sauf pour les chocs faibles, auquel cas la vitesse du choc est la moyenne des vitesses λ_g et λ_d des caractéristiques qui le créent [10][11]).

Le seul moyen, de décrire correctement les chocs est de revenir aux équations écrites sous forme conservative. En effet, quand l'écoulement présente un ressaut, le système hyperbolique homogène interprété au sens des distributions permet de relier les états à gauche et à droite du ressaut [9].

Les relations ainsi obtenues sont les conditions de saut (elles sont aussi parfois appelées conditions de Rankine-Hugoniot). Elles s'écrivent si s est la vitesse du ressaut :

$$\begin{cases} s(S_d - S_g) = Q_d - Q_g \\ s(Q_d - Q_g) = \left(\frac{Q_d^2}{S_d} + P_d \right) - \left(\frac{Q_g^2}{S_g} + P_g \right) \end{cases} \quad (172)$$

Remarques :

- Les conditions de Rankine-Hugoniot ne sont que la forme particulière des équations du système (161). Pour s'en convaincre il suffit de faire un bilan de masse et de quantité de mouvement sur une tranche de fluide incluant le ressaut. Dans l'équation de quantité de mouvement, le terme source disparaît en faisant tendre l'épaisseur de la tranche vers zéro ;
- Dans le repère du ressaut (en translation à la vitesse s), la discontinuité sépare toujours un écoulement torrentiel d'un écoulement fluvial. En effet dans le repère du ressaut : $s = 0$, donc : $Qd = Qg = Q_{rel}$ débit relatif.

La fonction : $f(S, x) = \frac{Q_{rel}^2}{S} + P$ a même valeur de part et d'autre du

ressaut.

En outre f admet un minimum pour S tel que : $\left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)_x = 0$, c'est-à-

dire : $Q_{rel} = CS$. La valeur de : $S = \frac{Q_{rel}}{C}$ correspond à un écoulement critique (Froude égal à 1). Deux valeurs de S donnant la même valeur de f (condition de Rankine-Hugoniot) sont donc situées de part et d'autre de la section critique.

3.3 Résolution numérique des équations de St-Venant

3.3.1 Utilisation d'un schéma explicite

Dans cette partie, nous allons décrire les méthodes numériques utilisées dans MASCARET pour résoudre le système d'équations (161). Un premier schéma explicite a été développé puis le noyau transcritique a été implicité, en laissant le choix de l'utilisation de l'un ou l'autre des deux schémas à l'utilisateur.

3.3.1.1 Position du problème

Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} W = (S, Q) \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W, x)}{\partial x} = B(x, W) \quad (x, t) \in [a, b] \times [0, T] \end{cases} \quad (173)$$

avec :

$$F(x, W) = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{S} + P(x, S) \end{pmatrix} \quad (174)$$

et :

$$B(x, W) = \begin{pmatrix} 0 \\ g \int_0^y \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_y dy - gS \frac{dZ_f}{dx} - gSJ \end{pmatrix} \quad (175)$$

Pour que ce problème soit bien posé, il est nécessaire de rajouter une condition initiale et des conditions aux limites.

Le problème (173) à résoudre est un système strictement hyperbolique avec un terme source prépondérant dans le calcul de l'écoulement (voir la section précédente). Le domaine d'applications du code **MASCARET** étant prioritairement le calcul des ondes de submersion, ceci implique :

- géométrie avec très fortes pentes (pouvant atteindre localement 10%) et fortes variations de largeurs ;
- écoulement très rapides (vitesses supérieures à $10m/s$) ;
- propagation d'onde sur zones sèches ;
- très long domaines de calcul.

En plus des calculs d'onde de submersion, on a souhaité pouvoir aborder tout écoulement présentant un régime torrentiel tel que les vidanges de retenues et les écoulements permanents dans des torrents. Ceci ajoute une contrainte supplémentaire qui est que le terme source doit être bien calculé pour obtenir une convergence correcte vers des écoulements permanents. L'objectif a été de rechercher un schéma respectant le mieux possible ces différentes contraintes (qui peuvent être contradictoires).

Dans un premier temps, on s'intéresse uniquement à la résolution numérique du problème homogène. Une autre section 3.3.3 est consacré au traitement des termes sources.

3.3.1.2 Résolution du problème homogène

Le problème homogène à résoudre s'écrit :

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial t} = 0 \quad (176)$$

Ce problème homogène est très proche des équations d'Euler isentropiques. La principale différence réside dans le fait que le flux ne dépend pas uniquement des variables d'état que sont la section mouillée et le débit mais également de la variable d'espace x et de plus le terme de pression n'est pas connu analytiquement mais est une variable tabulée.

L'espace $[0, T]$ sera discretisé par une série d'intervalles $[t_n, t_{n+1}]$ avec : $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ où Δt est le pas de temps.

Le domaine de calcul sera discrétisé par N intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ avec : $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

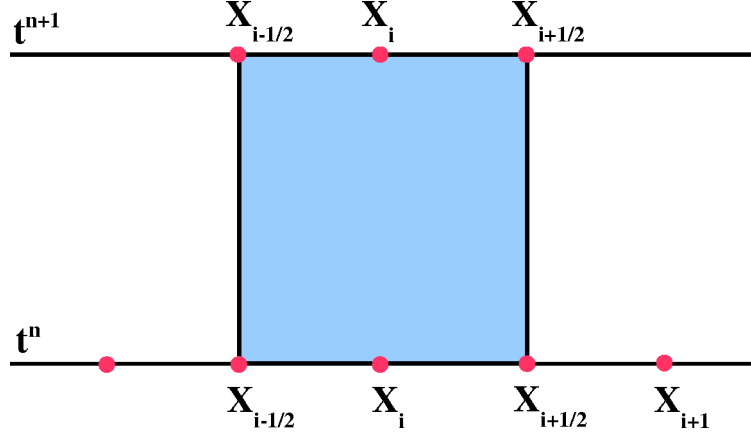


FIGURE 24 – Cellule Volume Fini

On notera $x_{i+1/2}$ le point milieu de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

Le schéma utilisé est un schéma volumes finis basés sur l'écriture intégrale du bilan de masse et de quantité de mouvement sur une cellule $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ (voir figure 24).

Notons : $\underline{W}_h = \left\{ \Psi_h \in L^2(\Omega), \Psi_h|_{[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]} = \text{constante}, i = 1..N \right\}$

Une formulation variationnelle du problème (173) s'écrit :
trouver $W_h(S_h, Q_h) \in \underline{W}_h$ tel que :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_a^b \left(\frac{\partial W_h}{\partial t} + \frac{\partial F(x, W_h)}{\partial x} \right) \Psi_h dx dt = 0 \quad \forall \Psi_h \in \underline{W}_h \quad (177)$$

Chaque fonction Ψ_h de \underline{W}_h est déterminée de manière unique par :

$$\Psi_h = \sum_{i=1}^n \Psi(a_i) \phi_i \quad (178)$$

avec $\{\phi_i\}_{i=1,N}$ qui forme une base de \underline{W}_h . En fait, les fonctions de base ϕ_i sont les fonctions caractéristiques de l'intervalle $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$.

En écrivant la formulation variationnelle (177) pour chaque fonction de base et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W_h^{n+1} dx &= \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W_h^n dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(x_{i+1/2}, W_{i+1/2}) dt \\
&\quad - \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(x_{i-1/2}, W_{i-1/2}) dt
\end{aligned} \tag{179}$$

W_h^{n+1} étant recherché dans l'espace des fonctions constantes par cellule, l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned}
W_i^{n+1} &= W_i^n + \frac{1}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \\
&\times \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} F(x_{i+1/2}, W_{i+1/2}) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(x_{i-1/2}, W_{i-1/2}) dt \right)
\end{aligned} \tag{180}$$

Le problème se ramène alors à l'évaluation du flux numérique à chaque interface. De plus, W_{n+1} étant une fonction constante par cellule, le calcul du flux numérique fera appel à chaque interface à la résolution d'un problème de Riemann.

Ainsi à chaque pas de temps et à chaque interface de cellule, on résoudra le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial W_h}{\partial t} + \frac{\partial F(x_{i+1/2}, W_h)}{\partial x} = 0 \\ W_h^n = \begin{cases} W_i^n & \text{si } x < x_{i+1/2} \\ W_{i+1}^n & \text{si } x > x_{i+1/2} \end{cases} \end{cases} \tag{181}$$

Pour résoudre ce problème, il est naturel d'envisager un schéma de Godunov qui est basé sur la résolution exacte du problème de Riemann à chaque interface. Néanmoins, l'intérêt de cette résolution exacte est contrebalancée d'une part par le fait que la projection sur chaque cellule peut faire perdre la qualité due à la résolution exacte et d'autre part qu'un solver exact est coûteux. C'est pourquoi, il a été choisi des schémas du même type mais résolvant des problèmes de Riemann approchés. Plus particulièrement, nous avons retenu le schéma de Roe que nous allons présenter dans le paragraphe suivant. De plus, une des raisons qui a dicté notre choix vers un schéma de Roe est que ce dernier est très largement utilisé pour résoudre les équations d'Euler et de Saint-Venant [12][13][14][15].

3.3.1.3 Linéarisée de Roe

Le but est de définir un problème de Riemann *proche* de (181) mais dont la solution est plus simple à calculer. Pour ce faire, nous appliquerons la technique de linéarisation de Roe. Cette méthode est bien connue et largement utilisée. Nous rappelons les principales références où on peut trouver les détails du calcul de la linéarisée de Roe [16][17].

Le principe de la linéarisation de Roe repose sur le fait qu'il existe une matrice A (appelée linéarisée de Roe) vérifiant :

- * $F(W_g) - F(W_d) = A(W_g, W_d)(W_g - W_d)$;
- * $A(W, W) = DF_w(W)$;
- * la matrice $A(W, W)$ a ses valeurs propres réelles et les vecteurs propres engendrent l'espace complet.

Remarque : la linéarisée de Roe définie précédemment n'est valable que pour les cas où le flux F ne dépend que des variables d'état. Cette méthode a été néanmoins appliquées à notre cas.

Le schéma de Roe ne sera pas applicable si on ne peut pas trouver de matrices vérifiant ces 3 propriétés. Dans notre cas, la difficulté est liée au fait que le flux dépend de x et des variables d'état.

Pour calculer la matrice de Roe, on s'est directement inspiré de ce qui a été fait pour les équations d'Euler isentropiques. C'est-à-dire qu'on cherche un état moyen de sorte que la matrice de Roe soit la jacobienne du flux prise en cet état.

Dans notre cas, la moyenne de Roe \tilde{W} est donnée par :

$$\tilde{W} = \frac{W_g \sqrt{S_g} + W_d \sqrt{S_d}}{\sqrt{S_g} + \sqrt{S_d}} \quad (182)$$

où :

- $W_g \begin{pmatrix} S_g \\ V_g \end{pmatrix}$ désigne l'état à gauche ;
- et $W_d \begin{pmatrix} S_d \\ V_d \end{pmatrix}$ l'état à droite ;

La matrice de Roe $\tilde{A}(x, W_g, W_d)$ est la jacobienne $A(x, W)$ calculée en cet

état.

$$A(x, \tilde{W}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\tilde{Q}^2}{\tilde{S}^2} + \frac{\partial P(x, \tilde{S})}{\partial S} & 2\frac{\tilde{Q}}{\tilde{S}} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \tilde{W}(\tilde{S}, \tilde{Q}) \quad (183)$$

Le problème de Riemann se ramène à la résolution à chaque interface du problème linéarisé suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \tilde{A}(x_{i+1/2}, W_g, W_d) \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} = 0 \\ W(x, t^n) = \begin{cases} W_g & \text{si : } x < x_{i+1/2} \\ W_d & \text{si : } x > x_{i+1/2} \end{cases} \end{cases} \quad (184)$$

avec : $\tilde{A}(x_{i+1/2}, W_g, W_d) = A(x_{i+1/2}, \tilde{W})$

La résolution du problème linéaire (184) va permettre l'écriture complète du schéma de Roe. Remarque : la matrice de Roe est évaluée à l'interface $x_{i+1/2}$.

3.3.1.4 Solveur de Roe

La résolution du problème (184) est simple. Elle consiste en 3 états constants séparés par des sauts à travers les caractéristiques définies par :

$$\frac{x}{t} = \lambda_{1,2} \quad (185)$$

avec :

$$\lambda_1(x, S, Q) = \frac{Q}{S} - C(x, S) \quad (186)$$

$$\lambda_2(x, S, Q) = \frac{Q}{S} + C(x, S) \quad (187)$$

et :

$$C(x, S) = \frac{\partial P(x, S)}{\partial S} \quad (188)$$

En effet, si on note :

$$\begin{cases} W_g = \sum_{i=1,2} \alpha_{ig}(W_g, W_d) r_i(W_g, W_d) \\ W_d = \sum_{i=1,2} \alpha_{id}(W_g, W_d) r_i(W_g, W_d) \end{cases} \quad (189)$$

où r_i sont les vecteurs propres à droites associés à la valeur propre λ_i .

En supposant $\lambda_1 < \lambda_2$, la solution s'écrit :

$$W\left(\frac{x}{t}, W_g, W_d\right) = \begin{cases} W_g & \text{si : } \frac{x}{t} < \lambda_1(x, W_g, W_d) \\ W_m & \text{si : } \lambda_1 < \frac{x}{t} < \lambda_2 \\ W_d & \text{si : } \frac{x}{t} > \lambda_2(x, W_g, W_d) \end{cases} \quad (190)$$

avec : $W_m = \alpha_{1d} r_1(W_d, W_g) + \alpha_{2g} r_2(W_d, W_g)$

Soit A la matrice jacobienne de F qui est diagonalisable dans la base de vecteurs propres X . A est donc égale à : $X\Lambda X^{-1}$

Soit $|\Lambda|$ la matrice diagonale de terme générique $|\Lambda_i|$, Λ^+ et Λ^- définies respectivement par :

$$\begin{cases} \Lambda_{i,j}^+ = \lambda_i^+ \delta_{i,j} \\ \Lambda_{i,j}^- = \lambda_i^- \delta_{i,j} \end{cases} \quad (191)$$

De même A^+ , A^- et $|A|$ sont définies par :

$$\begin{cases} A^+ = X\Lambda^+ X^{-1} \\ A^- = X\Lambda^- X^{-1} \\ |A| = X|\Lambda|X^{-1} \end{cases} \quad (192)$$

Le flux numérique de Roe prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} F(x_{i+1/2}, W_g, W_d) &= \frac{1}{2} (F(x_{i+1/2}, W_g) + F(x_{i+1/2}, W_d)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left| \tilde{A}(x_{i+1/2}, W_g, W_d) \right| (W_d - W_g) \\ &= F(x_{i+1/2}, W_d) - \tilde{A}^+(x_{i+1/2}, W_d, W_g)(W_d - W_g) \\ &= F(x_{i+1/2}, W_g) + \tilde{A}^-(x_{i+1/2}, W_d, W_g)(W_d - W_g) \end{aligned} \quad (193)$$

A partir de la définition du flux, le schéma est alors parfaitement défini. Ce schéma est d'ordre 1 en espace et en temps. De plus, ce schéma est stable si le nombre de Courant est inférieur à 1.

3.3.1.5 Correction entropique

L'inconvénient majeur du schéma de Roe est qu'il n'est pas entropique et peut donc admettre des discontinuités stationnaires non entropiques au voisinage des points soniques, c'est-à-dire là où une valeur propre associée à un champ vraiment non linéaire de matrice jacobienne change de signe de part et d'autre d'une interface. Pour éviter ce problème, il est donc nécessaire de modifier le calcul des flux au voisinage des points où une valeur propre $\lambda_{m=1,2}(\tilde{W})$ est proche de zéro.

Plusieurs modifications de la valeur propre $\lambda_m(\tilde{W})$ sont envisageables. Nous avons retenu la correction entropique définie par Lévêque [18]. $\lambda_m(\tilde{W})$ est remplacé par : $\lambda_m(W_d) \left(\frac{\lambda_m(\tilde{W}) - \lambda_m(W_g)}{\lambda_m(W_d) - \lambda_m(W_g)} \right)$

Remarque : un schéma d'ordre 2 en temps permet de s'affranchir de la correction entropique.

3.3.2 Utilisation d'un schéma implicite

3.3.2.1 Introduction

Ce paragraphe est consacré à la description du schéma implicite développé dans le code **MASCARET**. Le but de ce développement était de lever la contrainte sur le pas de temps liée à la condition de CFL pour un schéma explicite (voir la section 3.3.1). Les études visées par ce développement sont essentiellement les applications fluviales (propagation de crues moyennes) pour lesquelles la contrainte numérique sur le pas de temps est très pénalisante en terme de temps calcul.

Ce schéma est basé sur une implicitation linéaire du schéma volumes finis de type Roe. Le système linéaire est résolu par une méthode directe qui permet d'éviter les problèmes de convergence d'une méthode itérative lorsque la matrice est mal conditionnée. La méthode directe est une méthode de décomposition *LU* adaptée aux matrices tridiagonales par blocs.

Les résultats obtenus avec le schéma implicite sur des cas de validation sont présentés en détail dans la note [19]. Les cas étudiés comprennent à la fois des tests analytiques et des tests plus complexes représentatifs d'études réelles : propagation de crues, vidange de retenues et onde de submersion.

3.3.2.2 Rappel et intérêt de l'implication

On rappelle que le problème à résoudre, dont l'obtention est détaillée à la section 3.2 (équations de St-Venant écrites sous forme conservative), est un système strictement hyperbolique avec un terme source prépondérant dans le calcul de l'écoulement :

$$\begin{cases} W = (S, Q) \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W, x)}{\partial x} = B(x, W) \quad (x, t) \in [a, b] \times [0, T] \end{cases} \quad (194)$$

avec :

$$F(W, x) = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{S} + P(x, S) \end{pmatrix} \quad (195)$$

et :

$$B(x, W) = \begin{pmatrix} 0 \\ g \int_0^y \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_y dy - gS \frac{\partial Z_f}{\partial x} - gSJ \end{pmatrix} \quad (196)$$

Le schéma numérique utilisé pour résoudre ce problème est détaillé à la section précédente : le schéma utilisé est un schéma volumes finis basé sur l'écriture intégrale du bilan de masse et de quantité de mouvement sur une cellule $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ (voir la section 3.3.1.2).

Après une discrétisation en temps et en espace du schéma, et si la solution discrète est recherchée dans l'espace des fonctions constantes par cellule, le problème (194) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} &= W_i^n - \frac{1}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \\ &\quad \times \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} F(x_{i+1/2}, W_{i+1/2}) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(x_{i-1/2}, W_{i-1/2}) dt \right) \\ &\quad + B_{i+1/2}^n - B_{i-1/2}^n \end{aligned} \quad (197)$$

avec :

- Δt le pas de temps et : $t_{n+1} = t_n + \Delta t$;
- $\Delta x = x_{i+1} - x_i$;
- $x_{i+1/2}$ le point milieu de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

Le problème se ramène alors à l'évaluation du flux numérique F à chaque interface ; ce qui a été fait par un schéma de Roe (voir 3.3.1.3), rappelé ci-dessous. Les termes sources sont évalués par un traitement mixte centré et décentré qui est détaillé à la section suivante.

Soit la matrice jacobienne A de la fonction F qui est diagonalisable dans la base de vecteurs propres X . A est donc égale à $X\Lambda X^{-1}$.

Notons \tilde{A} la matrice de Roe : $\tilde{A} = \tilde{X}\tilde{\Lambda}\tilde{X}^{-1}$

Soit $|\Lambda|$ la matrice diagonalisable de terme générique $|\Lambda_i|$, Λ^+ et Λ^- sont définis respectivement par : $\Lambda_{i,j}^+ = \lambda_i^+ \delta_{i,j}$ et $\Lambda_{i,j}^- = \lambda_i^- \delta_{i,j}$.

De même \tilde{A}^+ , \tilde{A}^- et $|\tilde{A}|$ sont définis par : $\tilde{A}^+ = \tilde{X}\tilde{\Lambda}^+\tilde{X}^{-1}$, $\tilde{A}^- = \tilde{X}\tilde{\Lambda}^-\tilde{X}^{-1}$ et $|\tilde{A}| = \tilde{X}|\tilde{\Lambda}|\tilde{X}^{-1}$.

Le flux numérique de Roe prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned}
F(x_{i+1/2}, W_g, W_d) &= \frac{1}{2} (F(x_{i+1/2}, W_g) + F(x_{i+1/2}, W_d)) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left| \tilde{A}(x_{i+1/2}, W_g, W_d) \right| (W_d - W_g) \\
&= F(x_{i+1/2}, W_d) - \tilde{A}^+(x_{i+1/2}, W_d, W_g)(W_d - W_g) \\
&= F(x_{i+1/2}, W_g) + \tilde{A}^-(x_{i+1/2}, W_d, W_g)(W_d - W_g)
\end{aligned} \tag{198}$$

Ce schéma est d'ordre 1 en espace et en temps. Il est stable sous la condition de CFL suivante :

$$\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) \frac{\Delta t}{\min_{i=2, N-1} (x_{i+1} - x_i)} < 0.5 \tag{199}$$

En théorie, le nombre de Courant est limité à 0.5 mais en pratique on le limite à 0.9.

Cette condition implique que le pas de calcul sur tout le domaine est contraint d'une part par la plus grande des 2 valeurs propres et la zone de maillage la plus fine. Cela signifie que, si on diminue localement le pas d'espace, le pas de temps global est réduit d'autant.

L'intérêt de l'implicitation est d'une part de faire des calculs avec des nombres de Courant nettement supérieurs à 1 et d'autre part d'éviter l'effet local dû à un raffinement de maillage, même si globalement le nombre de Courant n'est pas très élevé.

3.3.2.3 Description du schéma implicite

Dans la partie précédente, le schéma explicite avec un solveur de Roe a donné satisfaction en terme de qualité de résultats pour des écoulements à la fois fortement instationnaires et fluviaux. Mais dans le cas d'écoulements fluviaux, la contrainte sur le pas de temps est très pénalisante car le nombre de Courant est déterminé par la plus grande des valeurs propres qui est directement liée à la célérité, c'est-à-dire que pour le cas extrême d'une retenue au repos, le pas de temps est contraint par la hauteur d'eau.

Pour lever cette condition de CFL, le schéma *Volumes Finis* a été implicité linéairement.

Dans notre cas d'application, cette implicitation ne concerne que les termes de flux de masse et de quantité de mouvement. Par contre, le flux des termes sources n'est pas modifié (voir la section 3.3.3). L'implicitation est donc présentée sur un système homogène pour en simplifier l'écriture. De façon générale, le schéma *Volumes Finis* implicite s'écrit :

$$h_i(W_i^{n+1} - W_i^n) + \Delta t (F_{i+1/2}(W_i^{n+1}, W_{i+1}^{n+1}) - F_{i-1/2}(W_{i-1}^{n+1}, W_i^{n+1})) = 0 \quad (200)$$

La fonction $F_{i+1/2}$ n'étant pas linéaire, nous allons la linéariser à l'aide d'un développement limité :

$$\begin{aligned} F_{i+1/2}(W_i^{n+1}, W_{i+1}^{n+1}) &= F_{i+1/2}(W_i^n, W_{i+1}^n) \\ &+ \Delta t \frac{\partial F_{i+1/2}^n}{\partial W_i} \delta W_i \\ &+ \Delta t \frac{\partial F_{i+1/2}^n}{\partial W_{i+1}} \delta W_{i+1} + O(\Delta t) \end{aligned} \quad (201)$$

où : $\delta W_{i+1} = W_{i+1}^{n+1} - W_{i+1}^n$

Dans le cadre d'un schéma de Roe, la fonction de flux F s'écrit :

$$\begin{aligned} F_{i+1/2}^{n+1}(W_i^{n+1}, W_{i+1}^{n+1}) &= \frac{1}{2}(F(W_i^{n+1}) + F(W_{i+1}^{n+1})) \\ &\quad - \frac{1}{2}|\tilde{A}(x_{i+1/2}, W_i, W_{i+1})|(W_{i+1} - W_i) \quad (202) \end{aligned}$$

Avec cette définition de la fonction flux numérique, le développement limité de $F_{i+1/2}$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned} F_{i+1/2}(W_i^{n+1}, W_{i+1}^{n+1}) &\approx F_{i+1/2}(W_i^n, W_{i+1}^n) \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F(W_i)}{\partial W_i} + |\tilde{A}(x_{i+1/2}, W_i, W_{i+1})|\delta W_i \right) \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F(W_{i+1})}{\partial W_{i+1}} - |\tilde{A}(x_{i+1/2}, W_i, W_{i+1})|\delta W_{i+1} \right) \quad (203) \end{aligned}$$

Le schéma complet prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} &h_i(W_i^{n+1} - W_i^n) + \Delta t (F_{i+1/2}(W_i^n, W_{i+1}^n) - F_{i-1/2}(W_i^n, W_{i-1}^n)) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial F(W_{i+1})}{\partial W_{i+1}} - |\tilde{A}(x_{i+1/2}, W_i, W_{i+1})|\delta W_{i+1} \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial F(W_{i-1})}{\partial W_{i-1}} + |\tilde{A}(x_{i-1/2}, W_i, W_{i-1})|\delta W_{i-1} \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \left(|\tilde{A}(x_{i+1/2}, W_i, W_{i+1})| + |\tilde{A}(x_{i-1/2}, W_i, W_{i-1})| \right) \delta W_i = 0 \quad (204) \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[\frac{\partial F(W_{i-1})}{\partial W_{i-1}} + |\tilde{A}(x_{i-1/2}, W_i, W_{i-1})| \right] \delta W_{i-1} \\
& + \left[\frac{h_i}{\Delta t} + \frac{1}{2} |\tilde{A}(x_{i+1/2}, W_i, W_{i+1})| + \frac{1}{2} |\tilde{A}(x_{i-1/2}, W_i, W_{i-1})| \right] \delta W_i \\
& + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial F(W_{i+1})}{\partial W_{i+1}} - |\tilde{A}(x_{i+1/2}, W_i, W_{i+1})| \right] \\
& = - \frac{F_{i+1/2}(W_i^n, W_{i+1}^n) - F_{i-1/2}(W_i^n, W_{i-1}^n)}{\Delta t} \quad (205)
\end{aligned}$$

Ce qui se traduit par la résolution d'un système linéaire qui s'écrit :

$$P_{i,i-1} \delta W_{i-1} + Q_{i,i} \delta W_i + R_{i,i+1} \delta W_{i+1} = S_i \quad \forall i = 2..N-1 \quad (206)$$

avec :

$$\begin{cases} P_{i,i-1} = -\frac{1}{2} (A(W_{i-1}) + |\tilde{A}(x_{i-1/2}, W_i, W_{i-1})|) \\ Q_{i,i} = \frac{h_i}{\Delta t} \frac{1}{2} (|\tilde{A}(x_{i+1/2}, W_i, W_{i+1})| + |\tilde{A}(x_{i-1/2}, W_i, W_{i-1})|) \\ R_{i,i+1} = \frac{1}{2} (A(W_{i+1}) - |\tilde{A}(x_{i+1/2}, W_i, W_{i+1})|) \end{cases} \quad (207)$$

Le système numérique à résoudre est alors un système tridiagonal par blocs de dimension 2 (taille du système physique). Plus précisément, le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} I_d & 0 & & & \\ 0 & P_{2,1} & Q_{2,2} & R_{2,3} & \\ & & & & \\ & & & \dots & \\ & & & P_{i,i-1} & Q_{i,i} & R_{i,i+1} & \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & & 0 & I_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \\ W_{i-1} \\ W_i \\ W_{i+1} \\ \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \\ S_2 \\ \\ S_i \\ S_{n-1} \\ W_n \end{pmatrix} \quad (208)$$

où : $W_i = (\delta S_i, \delta Q_i)^T$

Le second membre S prend en compte la partie explicite des flux de quantité de mouvement et de masse et les flux liés aux termes sources.

Les états *conditions aux limites* W_1 et W_n sont calculés à l'aide des invariants de Riemann ou de la résolution explicite de l'équation de continuité. Il est important de noter que le calcul à l'aide de l'équation de continuité est explicite et n'est applicable que pour des nombres de Courant au plus égaux à 1.

Pour obtenir une matrice mieux conditionnée, les premières et dernières équations du système précédent sont supprimées et les seconds membres S_2 et S_{n-1} sont modifiés en conséquence.

La résolution du système linéaire a tout d'abord été réalisée avec une méthode itérative de type équation normale, méthode robuste et appropriée à tout système linéaire ne présentant pas de propriétés particulières ; ce qui est le cas pour cette matrice.

Les premiers tests avec une méthode itérative ont montré d'une part que les résultats obtenus avec un schéma implicite étaient corrects mais que le

gain en temps calcul était négligeable car plus le nombre de Courant était important, plus la matrice était mal conditionnée. Par conséquent, le gain en temps calcul espéré avec des nombres de Courant supérieurs à 1 était perdu par la mauvaise convergence de la méthode itérative.

Pour pallier à ce problème, on a substitué une méthode directe à la méthode itérative. La méthode directe est une décomposition LU appliquée à une matrice tridiagonale par blocs.

Ainsi, le temps calcul d'un pas de temps est complètement indépendant du conditionnement de la matrice et donc du nombre de Courant.

3.3.2.4 Conclusion

Les simulations avec le schéma implicite peuvent être réalisées soit avec un pas de temps constant soit avec un pas de temps variable correspondant à un nombre de Courant supérieur à 1. Il faut noter que le schéma explicite ne permet pas de réaliser une simulation réelle avec un pas de temps constant car il faudrait connaître à priori le pas de temps vérifiant la condition de CFL à chaque itération temporelle.

L'implication linéaire du schéma Volumes Finis de MASCARET permet donc de lever la contrainte sur les pas de temps tout en gardant des résultats de qualité analogue à ceux du schéma explicite (sauf pour les cas raides de rupture sur fond sec sans frottement).

La validation du schéma implicite a montré que :

- pour des applications fluviales telles que le passage d'une crue moyenne sur un bief du Rhône, on pouvait obtenir un gain de 20 en temps calcul entre le schéma explicite et le schéma implicite ;
- pour des études telles que les ondes de submersion qui initialement n'était pas visé par ce développement, on pouvait obtenir un gain de 3 à 4 sur le temps calcul.

Néanmoins, le schéma implicite n'est pas inconditionnellement stable car :

- les flux des termes sources sont explicites ;
- le traitement des conditions aux limites est également explicite.

3.3.3 Traitement des termes sources

3.3.3.1 Présentation générale

Les termes sources ont un rôle prépondérant dans les équations de Saint-Venant. Ce sont eux qui gouvernent en grande partie l'évolution de l'écoulement. C'est pourquoi il est apparu nécessaire lors du développement du code **MASCARET** d'étudier finement la discrétisation de ces termes. En effet, un mauvais traitement peut nuire de manière importante à la qualité des résultats. Par exemple, un plan d'eau horizontal initialement au repos dans un canal présentant des gradients de fond et/ou des variations de largeur peut se mettre artificiellement en mouvement.

Les équations de Saint-Venant présentent trois termes sources distincts (voir la section 3.2) :

- **les apports de débit** : q_a ;
- **le terme source lié à la géométrie** : il contient en fait les gradients de fond et les variations de largeur (spécifique au 1D). Il peut s'écrire sous la forme synthétique et globale :

$$\left(\frac{\partial P(x, S)}{\partial x} \right)_{z=cte} = \left(\frac{\partial P(x, S)}{\partial x} \right)_{S=cte} + \frac{\partial P(x, S)}{\partial S} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_{z=cte} \quad (209)$$

Il est important de noter que ce terme est composé d'une première partie (variation de la pression en fonction de la géométrie et non des variables d'état) et d'une seconde partie qui est le produit du carré de la célérité (donc dépendant des variables d'état) et des variations de la section mouillée géométrique ;

- **le frottement** : $-gSJ$ où J est modélisé par la formule de Strickler.

La discrétisation des termes sources est une étape importante du schéma global. Elle doit vérifier les contraintes suivantes :

- nécessité de conserver un plan d'eau horizontal au repos stable ;
- bonne convergence en temps vers un état permanent en rivière à débit constant ne présentant pas d'oscillations à l'interface lorsqu'il y a du frottement ;
- prise en compte correcte du frottement pour les écoulements à faible hauteur d'eau (zone du front pour les calculs d'onde de submersion).

Remarque : Le traitement des termes sources est identique dans le cas du choix du schéma explicite ou du schéma implicite.

Le problème non homogène à résoudre s'écrit :

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial t} = B(x, W) \quad (210)$$

Après une discrétisation classique Volumes Finis, le problème s'écrit alors :

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n) + \int_{\Delta t} \int_{\Delta x} B(x, W^n) dx dt \quad (211)$$

Le problème qui se pose est comment discrétiser le terme :

$$\int_{\Delta t} \int_{\Delta x} B(x, W^n) dx dt$$

?

On peut utiliser une discrétisation centrée, c'est-à-dire que le terme source $B(x, W)$ est approché en milieu de cellule et ensuite intégré en temps et en espace mais ceci ne permet pas de vérifier les deux premières contraintes. En fait, une des façons efficaces de résoudre ce problème est de décentrer les termes sources. C'est-à-dire : $\int_{\Delta t} \int_{\Delta x} B(x, W^n) dx dt$ est approchée par : $\frac{\Delta t}{2} (B_{j+1/2}^n + B_{j-1/2}^n)$

avec :

$$\begin{cases} B_{j+1/2}^n = \int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+1}} \Psi_d(x_j, x_{j+1}, W_j^n, W_{j+1}^n) \\ B_{j-1/2}^n = \int_{x_j}^{x_{j+1/2}} \Psi_g(x_j, x_{j-1}, W_j^n, W_{j-1}^n) \end{cases} \quad (212)$$

Il s'est avéré au cours du développement que seuls les termes sources contenant les variables d'état au premier ordre devaient être décentrés. Les autres termes purement géométriques sont traités de façon centrée.

3.3.3.2 Décentrement des termes sources

Dans la littérature, on a trouvé peu d'articles traitant du problème spécifique des termes sources dans les systèmes hyperboliques. Une des seules méthodes adaptées lorsque le problème homogène est résolu par un schéma de Roe, est celle proposée par M. E. Vázquez Cendón [13]. Dans un premier temps, nous avons appliqué cette méthode au terme source de gradient de fond pour la résolution des équations de Saint-Venant bidimensionnelles [20] avec un schéma de Roe. Les résultats obtenus ayant été satisfaisants, nous avons appliqué cette méthode à certains des termes sources des équations de Saint-Venant monodimensionnelles. Nous allons maintenant présenter cette méthode en détail.

La base numérique donnée par Vázquez Cendón est décrite ci-dessous. On cherche à résoudre l'équation avec terme source défini dans la section précédente.

En reprenant les notations du chapitre précédent, on a : A la matrice jacobienne de F qui est diagonalisable dans la base de vecteurs propres à droite X . A est donc égal à : $X\Lambda X^{-1}$.

Soit $|\Lambda|$ la matrice diagonale de terme générique $|\Lambda_i|$.

Λ^+ et Λ^- définies respectivement par : $\Lambda_{i,j}^+ = \lambda_i^+ \delta_{i,j}$ et $\Lambda_{i,j}^- = \lambda_i^- \delta_{i,j}$.

Dans un premier temps et dans le cas continu, on fait l'hypothèse que toutes les valeurs propres de A sont non nulles. Dans ce cas A^{-1} et Λ^{-1} existent.

Le terme source $B(x, W)$ est projeté sur les vecteurs propres de A :

On note $\sigma(W)$ les composantes du terme source dans cette base.

$$\begin{aligned}
 B(x, W) &= X(W) \cdot \sigma(W) \\
 &= X(W) \cdot (\Lambda \cdot \Lambda^{-1}) \cdot \sigma(W) \\
 &= X(W) \cdot (\Lambda^+ + \Lambda^-) \cdot \Lambda^{-1} \cdot \sigma(W) \\
 &= X(W) \cdot \Lambda^+ \cdot \Lambda^{-1} \cdot \sigma(W) + X(W) \cdot \Lambda^- \cdot \Lambda^{-1} \cdot \sigma(W) \quad (213)
 \end{aligned}$$

En tenant compte des relations qui existent entre Λ^+ , Λ^- et $|\Lambda|$, l'expression suivante peut se transformer en :

$$\begin{aligned}
X(W).\Lambda^+.\Lambda^{-1}.\sigma(W) &= \frac{1}{2}X(W).(\Lambda.\Lambda^{-1} + |\Lambda|.\Lambda^{-1}).\sigma(W) \\
&= \frac{1}{2}(B(x, W) + |A|.A^{-1}.X(W).\sigma(W)) \\
&= \frac{1}{2}(I + |A|.A^{-1}).B(x, W) \\
&= X(W).\left[\frac{1}{2}(I + \Lambda.\Lambda^{-1})\right].X^{-1}(W).B(x, W) \\
X(W).\Lambda^{-}.\Lambda^{-1}.\sigma(W) &= X(W).\left[\frac{1}{2}(I - \Lambda.\Lambda^{-1})\right].X^{-1}(W).B(x, W)
\end{aligned} \tag{214}$$

Dans le cas discret à présent, on est ramené à définir par analogie deux fonctions Ψ_g et Ψ_d de chaque côté du nœud considéré.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_g(x, y, U, V) = \gamma.X(W(U, V)) \times \\ \quad \left(\frac{1}{2}(I + |\Lambda(U, V)|\Lambda^{-1}(U, V))X^{-1}(W(U, V))\tilde{B}(x, y, u, V) \right) \\ \Psi_d(x, y, U, V) = \gamma.X(W(U, V)) \times \\ \quad \left(\frac{1}{2}(I - |\Lambda(U, V)|\Lambda^{-1}(U, V))X^{-1}(W(U, V))\tilde{B}(x, y, u, V) \right) \end{array} \right. \tag{215}$$

avec :

$$\tilde{B}(x, y, u, V) = B\left(\frac{x+y}{2}, \tilde{W}(U, V)\right) \tag{216}$$

où $\tilde{W}(U, V)$ est la moyenne de Roe.

Dans le cas où une valeur propre est nulle, la projection sur le vecteur propre associé est considérée sous forme centrée ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\gamma}{2}(I + |\Lambda(U, V)|\Lambda^{-1}(U, V)) \right)_i = \frac{\gamma}{2} \\ \left(\frac{\gamma}{2}(I - |\Lambda(U, V)|\Lambda^{-1}(U, V)) \right)_i = \frac{\gamma}{2} \end{array} \right. \tag{217}$$

La valeur du paramètre γ se trouve en exprimant une relation de consis-

tance [13].

$$\frac{\Psi_g(x, x, W, W) + \Psi_d(x, x, W, W)}{2} = B(x, W) \quad (218)$$

ce qui donne : $\gamma = 2$.

La contribution des termes sources sera donc évaluée dans chaque moitié de cellule par les relations :

- à gauche de l'interface, dans la moitié aval de la cellule i :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \Psi_d(i, i+1) dx ;$$
- à droite de l'interface, dans la moitié amont de la cellule $i+1$:

$$\int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1}} \Psi_g(i, i+1) dx.$$

Il est intéressant de calculer explicitement la contribution d'un terme source noté TS de l'équation de quantité de mouvement.

Soit \tilde{U} la moyenne de Roe de la vitesse et \tilde{c} la célérité de Roe. On définit le nombre de Froude de Roe à l'interface par la relation :

$$\tilde{F}_r = \frac{|\tilde{u}|}{\tilde{c}} \quad (219)$$

De manière analogue, on trouve que suivant les valeurs de \tilde{F}_r et le signe de \tilde{u} (supposé > 0 par souci de simplicité), les fonctions Ψ_g et Ψ_d prennent les valeurs :

* $\tilde{F}_r < 1$ (Cas fluvial)

$$\Psi_g = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{TS}}{\tilde{c}} \\ (1 - \tilde{F}_r).TS \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Psi_d = \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{TS}}{\tilde{c}} \\ (1 + \tilde{F}_r).TS \end{pmatrix} \quad (220)$$

* $\tilde{F}_r > 1$ (Cas torrentiel)

$$\Psi_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Psi_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.\tilde{TS} \end{pmatrix} \quad (221)$$

avec : $\tilde{TS} = TS(\frac{x+y}{2}, \tilde{W}(U, V))$

Ce traitement des termes sources entraîne donc une contribution non nulle sur l'équation de masse uniquement en régime fluvial. Dans ce cas, le décentrement pour la quantité de mouvement est proportionnel au nombre de Froude.

Lorsque \tilde{F}_r augmente la contribution du terme source augmente dans la moitié amont d'une cellule (à droite de l'interface, terme Ψ_d) et diminue dans la moitié aval (à gauche de l'interface, terme Ψ_g). Ceci est logique, puisque l'information dans la cellule a tendance à provenir préférentiellement de l'amont. Le cas extrême est le régime torrentiel où le décentrement est total : dans une cellule, le seul terme source qui compte est celui qui provient de l'interface amont ; d'ailleurs c'est de là que vient toute l'information.

Remarque : le décentrement d'un terme source requiert l'évaluation de ce dernier à chaque interface et pour la moyenne de Roe.

3.3.3.3 Traitement des différents termes sources

Il s'est avéré au cours du développement que seuls les termes sources contenant les variables d'état au premier ordre devaient être décentrés. Les autres termes purement géométriques sont traités de façon centrée.

A) Termes sources liés à la géométrie

Ce terme s'écrit $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_z$ et prend en compte les gradients de fond et de variation de largeur. Il se décompose comme indiqué par (209).

On va examiner de façon séparée le traitement de chacun de ces deux termes.

$$\Rightarrow \text{Traitement de } \frac{\partial P(x, S)}{\partial S} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{z=cte} :$$

Ce terme peut également s'écrire : $C^2(x, S) \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{x=cte}$ où C est la célérité. Ce terme dépend des variables d'état. Pour être cohérent avec l'écriture du flux, ce terme est approché à l'interface puis décentré selon la méthode présentée à la section précédente.

Approximation à l'interface entre la cellule i et $i + 1$:

Pour approcher la partie purement géométrique $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{z=cte}$, on se place d'abord à la cote z_i , la section mouillée vaut à gauche S_i , à droite S_{i+1}^* . De même à la cote z_{i+1} la section mouillée vaut à gauche S_i^* , à droite S_{i+1} .

La discrétisation de $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{z=cte}$ a donc pour expression :

$$\frac{1}{2\Delta x} (S_{i+1}^* - S_i + S_{i+1} - S_i^*)$$

Le terme $\frac{\partial P(x, S)}{\partial S} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{z=cte}$ s'écrira donc :

$$\frac{C_{i+1/2}^2(\tilde{S})}{2\Delta x} (S_{i+1}^* - S_i + S_{i+1} - S_i^*)$$

\Rightarrow Traitement du terme $\left(\frac{\partial P(x, S)}{\partial x}\right)_{S=cte}$

Ce terme source ne dépend pas des variables d'état mais uniquement de la géométrie. Il représente les variations de la pression due à la géométrie. De plus, la pression n'est définie en x qu'aux interfaces (voir discrétisation de la quantité de mouvement). La dérivée du terme $P(x, S)$ à section mouillée constante n'a donc de sens qu'à l'intérieur de la cellule. Ce terme sera donc traité de façon centrée.

En milieu de cellule, la section mouillée ainsi que la cote de la surface sont constantes, la fonction $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_z$ est approximée par la relation :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_z = \frac{P_{i+1/2}(S_i) - P_{i-1/2}(S_i)}{\Delta x}$$

La discrétisation présentée ci-dessus nous a permis de conserver un plan d'eau horizontal au repos.

Remarque : le terme discrétisé en milieu de cellule est non nul quand la géométrie présente des variations de largeur uniquement. Dans le cas d'un

canal rectangulaire n'ayant que des gradients de fond, ce terme sera donc nul.

B) Terme de frottement

Ce terme s'exprime comme on l'a vu précédemment sous la forme $-gSJ$ où J est donné par la formule de Strickler :

$$J = \frac{Q|Q|}{K^2 S^2 R_h^{4/3}} \quad (222)$$

\Rightarrow Calcul explicite du frottement

Dans un premier temps la modélisation qui en est faite est décentrée selon la méthode décrite précédemment. Ce terme est alors discrétisé de manière naturelle à l'interface ; chacune des variables est alors prise égale à la moyenne entre les deux cellules qui ont cette interface pour frontière.

Ce terme est ensuite décentré par la méthode décrite à la section 3.3.3.2. Sa contribution se fera sur la moitié aval de la cellule i et la moitié amont de la cellule $i + 1$. Cette méthode permet d'avoir un traitement du terme de frottement cohérent avec des gradients de fond. Notamment, la convergence vers un débit constant en espace lorsqu'un état permanent est recherché est obtenue. Le deuxième objectif est donc atteint.

Cependant, ce traitement pose problème lors d'un calcul pour des faibles hauteurs d'eau avec des coefficients de Strickler faibles. Le traitement explicite du frottement peut provoquer des changements de direction non physiques pendant un pas de temps.

Un traitement implicite du frottement s'impose donc pour le type particulier d'applications qu'est la propagation d'une onde de submersion sur fond sec. De plus l'implication du terme de frottement présente l'avantage de stabiliser le schéma pour les écoulements raides comme les ondes de submersion. Mais cette méthode implicite ne permettait pas de converger vers un état stationnaire, il a donc été décidé de proposer aux utilisateurs le choix entre les deux types de discrétisation. Dans le paragraphe suivant, nous allons décrire le traitement implicite du frottement.

\Rightarrow Calcul implicite du frottement

Calculer la contribution du frottement de manière implicite peut se faire en appliquant une méthode de pas fractionnaires [12]. Dans une première étape, l'état $U^{n+1/2}$ est calculée en tenant en compte de tous les termes des équations sauf le terme de frottement. Dans un second temps, le frottement est pris en compte.

Il est important de noter que seul le débit sera modifié par cette étape, le frottement n'apparaissant pas dans l'équation de continuité. L'équation à résoudre sur le débit s'écrit (puisque $S^{n+1} = S^{n+1/2}$) :

$$\frac{Q_i^{n+1} - Q_i^{n+1/2}}{\Delta t} = -g \frac{Q_i^{n+1} |Q_i^{n+1}|}{K_i^2 S_i^{n+1} R_i^{n+14/3}} \quad (223)$$

C'est une équation du deuxième degré en Q_i^{n+1} de forme différente suivant son signe. La résolution de celle-ci donne une solution unique du même signe que $Q_i^{n+1/2}$:

$$Q_i^{n+1} = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{1 + 4aQ_i^{n+1/2}}}{2a} & \text{si } Q_i^{n+1/2} > 0 \\ \frac{-1 - \sqrt{1 - 4aQ_i^{n+1/2}}}{2a} & \text{si } Q_i^{n+1/2} < 0 \end{cases} \quad (224)$$

avec :

$$a = \frac{g\Delta t}{K_i^2 S_i^{n+1} R_i^{n+14/3}} \quad (225)$$

Remarque : le traitement implicite du frottement pourrait être effectué de manière décentrée. Cette solution n'a pas été retenue car elle impliquait la résolution d'un système linéaire qui diminuait les performances en temps calcul du code.

C) Débits d'apport

Les débits d'apports dans l'équation de conservation de la masse sont des apports linéiques. En réalité, ces apports représentent généralement des affluents, donc une injection de débit considérée comme ponctuelle. La modélisation suivante est réalisée : l'injection de débit est supposée située à une interface $i + 1/2$ entre deux cellules. Un débit d'apport linéique supposé

constant sur la moitié aval de la cellule i et la moitié amont de $i + 1$ est évaluée par la relation :

$$q_{a_{i+1/2}} = \frac{q_a}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \quad (226)$$

Ce terme est ensuite décentré suivant la méthode exposée à la section 3.3.3.2.

3.3.4 Prise en compte des conditions aux limites

3.3.4.1 Analyse à l'aide des caractéristiques

La théorie des caractéristiques appliquées aux équations de Saint-Venant permet de connaître le nombre exact de conditions limites à imposer pour que le problème initial soit bien posé. Examinons les quatre cas possibles suivant la nature de l'écoulement en entrée et en sortie.

A) Écoulement fluvial à l'amont

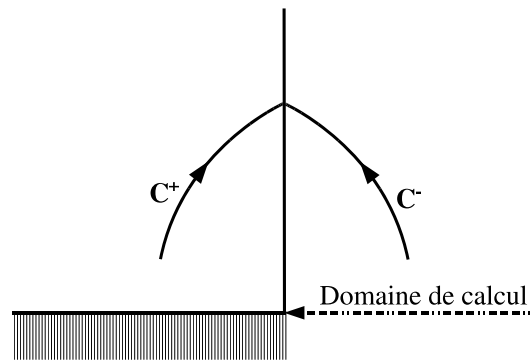


FIGURE 25 – Amont fluvial

Une seule caractéristique provient de l'extérieur du domaine. L'autre caractéristique (la caractéristique C^- dans le cas présent) provient de l'intérieur du domaine et transporte une information à la limite du domaine. Donc, il est nécessaire d'imposer la cote ou le débit mais pas les deux variables.

B) Écoulement torrentiel à l'amont

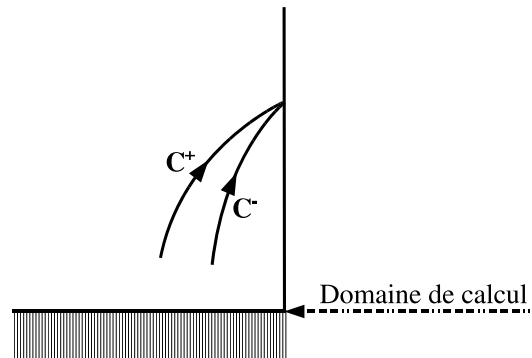


FIGURE 26 – Amont torrentiel

Les deux caractéristiques proviennent de l'extérieur du domaine. Dans ce cas il est nécessaire d'imposer la cote et le débit.

C) Écoulement fluvial à l'aval

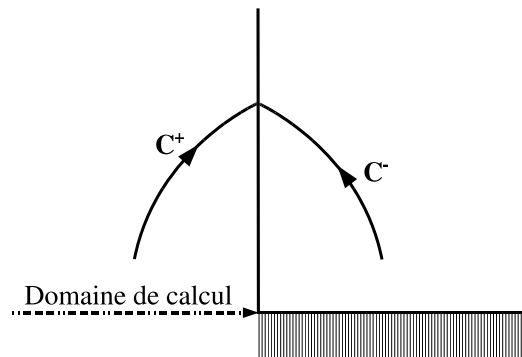


FIGURE 27 – Aval fluvial

On est dans la même conditions qu'un écoulement fluvial en entrée de domaine. On doit donc imposer une seule information (cote ou débit). En pratique, on choisit le plus souvent d'imposer la cote.

D) Ecoulement torrentiel à l'aval

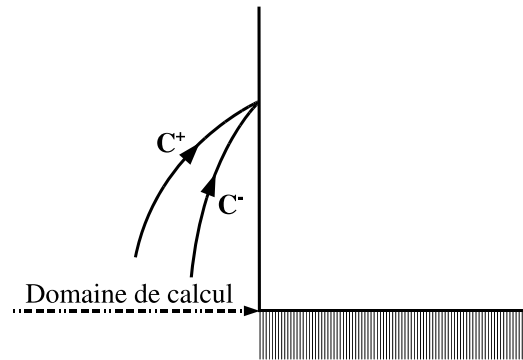


FIGURE 28 – Aval torrentiel

Les deux caractéristiques proviennent de l'intérieur du domaine. Aucune information supplémentaire n'est nécessaire.

Le tableau suivant résume les situations décrites précédemment.

TABLE 1 – Type d'écoulement et CL amont/aval

	Fluvial	Torrentiel
Amont	Cote ou Débit	Cote et Débit
Aval	Cote ou Débit	rien

3.3.4.2 Traitement numérique des conditions aux limites

Le schéma numérique tel qu'il a été défini à la section 3.3.1.2 suppose que l'on connaisse en chaque pas de temps les valeurs des deux variables aux bornes du domaine. Or, d'après ce qui précède, ceci peut être contradictoire avec la théorie des caractéristiques.

Dans un premier temps, on suppose que les conditions aux limites sont parfaitement connues et on va s'intéresser à leur prise en compte dans le schéma global.

Considérons l'amont du domaine avec un débit donné en entrée.

Supposons que toutes les variables sont connues au pas de temps n .

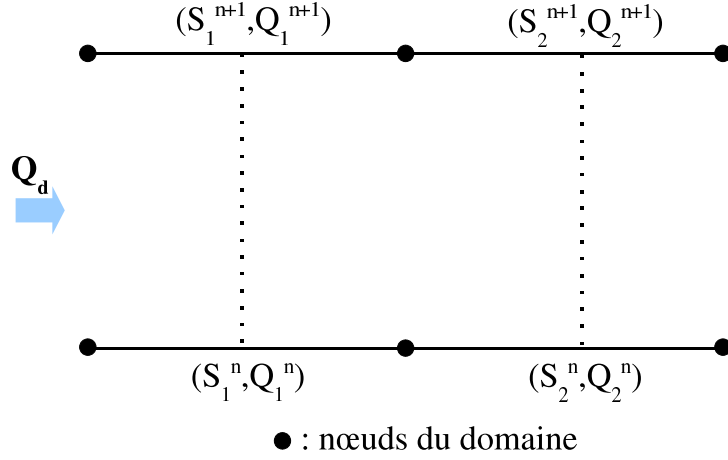


FIGURE 29 – Aval torrentiel

Le Schéma de Roe nous permet d'évaluer toutes les variables en tous les nœuds sauf les conditions aux limites au pas de temps $n + 1$. Pour calculer (S_1^{n+1}, Q_1^{n+1}) , on peut envisager deux possibilités :

- (S_1^{n+1}, Q_1^{n+1}) est calculé à l'aide du schéma de Roe, l'état gauche étant donné par les conditions aux limites (Q_d, S_d) . Il est important de noter que la section mouillée S_d n'est pas fournie par l'utilisateur mais calculée. La façon de calculer l'information manquante sera exposée dans le paragraphe suivant ;
- on ne considère pas la première moitié de cellule comme une cellule au sens volumes finis. On impose alors à (S_1^{n+1}, Q_1^{n+1}) d'être égal à la condition limite (Q_d, S_d) . De même que pour le cas précédent, la section mouillée sera calculée par ailleurs.

On a choisi la méthode no. 2 pour traiter les conditions aux limites car elle permet à l'utilisateur de retrouver au premier noeud de son maillage les valeurs qu'il a imposées. Ce qui n'est absolument pas assuré par la première méthode.

Nous allons maintenant présenter les différentes méthodes disponibles dans MASCARET pour compléter l'information aux conditions limites indépendamment du schéma volumes finis.

A) Calcul des CL à l'aide des invariants de Riemann

Le principe de ce calcul est très simple et basé sur l'écriture non conser-

vative des équations de Saint-Venant. Il suppose que la solution est continue à proximité immédiate des conditions aux limites. On va différencier les 4 cas possibles (voir le tableau 1) selon la nature de l'écoulement et suivant que l'on est en entrée ou en sortie de domaine.

\implies ENTRÉE DE DOMAINE

\rightarrow Régime torrentiel

Les deux caractéristiques entrent dans le domaine : il faut donc fournir la valeur de la section mouillée et du débit.

\rightarrow Régime fluvial

La caractéristique C^- sort du domaine et transporte une information de l'intérieur du domaine vers la condition à la limite amont. Cette information, c'est-à-dire l'invariant de Riemann f^- sera utilisée pour compléter la donnée (section mouillée ou débit) que devra fournir l'utilisateur.

Nous allons détailler ce calcul.

Q_1^{n+1} ou S_1^{n+1} connu (fourni en entrée de donnée) nous donne une première relation.

L'invariant de Riemann f_1^+ est constant le long de la courbe caractéristique C^- issue de l'amont du modèle. Ceci nous fournit une seconde relation.

On est amené à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} Q_1^{n+1} \quad \text{ou} \quad S_1^{n+1} \quad \text{connu} \\ \frac{Q_1^{n+1}}{S_1^{n+1}} + K(S_1^{n+1}) = f_1^+ \end{cases} \quad (227)$$

– Débit imposé : pour déterminer S_1^{n+1} , on multiplie par S_1^{n+1} la seconde équation. On obtient alors :

$$S_1^{n+1} K(S_1^{n+1}) - f_1^+ S_1^{n+1} + Q_1^{n+1} = 0 \quad (228)$$

Cette dernière équation est résolue à l'aide d'une méthode de Newton.

- Cote imposée : la calcul est beaucoup plus simple.

$$Q_1^{n+1} = -S_1^{n+1}K(S_1^{n+1}) + f_1^+ S_1^{n+1} \quad (229)$$

\Rightarrow SORTIE DE DOMAINE

\rightarrow Régime torrentiel

Les deux caractéristiques sortent du domaine donc aucune information n'est nécessaire. On résout le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{Q_N^{n+1}}{S_N^{n+1}} + K(S_N^{n+1}) = f_N^+ & \text{avec } f_N^+ \text{ connu} \\ \frac{Q_N^{n+1}}{S_N^{n+1}} - K(S_N^{n+1}) = f_N^- & \text{avec } f_N^- \text{ connu} \end{cases} \quad (230)$$

\rightarrow Régime fluvial

On se ramène au cas fluvial en entrée de domaine.

Remarque : Le calcul des conditions aux limites à l'aide des invariants de Riemann est satisfaisant et respecte bien la théorie des caractéristiques. Mais il s'est avéré au cours d'études que cette méthode donnait des erreurs importantes pour des écoulements à faible nombre de Froude. Ceci est dû au fait que le terme prédominant dans l'équation est alors $SK(S)$ où $K(S)$ est une fonction non linéaire qui a dû être planimétrée. pour pallier cet inconvénient majeur pour le calcul d'écoulement fluviaux, on a utilisé d'autres méthodes basées sur une discrétisation différences finies de l'équation de continuité ou de quantité de mouvement.

B) Calcul des CL à l'aide de Saint-Venant

On ne traite dans ce cas que les écoulements fluviaux.

\Rightarrow ENTRÉE DE DOMAINE

- Débit imposé : prenons l'équation de continuité et discrétisons-là le plus simplement possible en différences finies, on obtient :

$$Q_1^{n+1} = Q_d \quad (231)$$

et :

$$\frac{S_1^{n+1} - S_1^n}{\Delta t} + \frac{Q_2^n - Q_1^n}{\Delta x} = 0 \quad (232)$$

A l'aide de l'équation précédente, on calcule S_1^{n+1} .

- Cote imposée : on discrétise l'équation de quantité de mouvement d'une manière analogue à celle utilisée pour discrétiser l'équation de continuité.

\Rightarrow SORTIE DE DOMAINE

Pour la sortie du domaine, il n'y a pas de difficulté supplémentaire. Le raisonnement est analogue.

Le choix entre les différents modes de calcul des conditions aux limites se fait à l'aide d'un paramètre appelé *Froude limite* imposé par l'utilisateur (cf. manuel d'utilisation). Si le nombre de Froude en entrée ou en sortie de domaine est supérieur à ce paramètre, on calcule alors les informations manquantes pour les conditions limites à l'aide des invariants de Riemann.

C) Modélisation d'une loi hauteur-débit

Jusqu'à présent, on a envisagé les cas les plus simples de cote ou débit imposés. Mais pour les application réelle, une condition limite très utile est la condition de type *courbe de tarage* : la cote ou le débit ne sont pas connus explicitement mais déterminés l'un par rapport à l'autre avec une loi $Z = f(Q)$. Pour obtenir la valeur du débit et de la cote aux bornes du domaine, on résout un système de deux équations à deux inconnues. La seule différence avec les cas précédents est que la première n'est plus triviale.

D) Modélisation d'une sortie libre

Les méthodes exposées précédemment permettent de calculer l'information manquante dans le cas d'écoulements fluviaux mais il est néanmoins nécessaire de fournir au moins une information soit la cote ou le débit. Ceci pose des difficultés pour les calculs d'onde de submersion. Il est impossible à l'utilisateur de connaître la cote ou le débit à la condition limite aval du domaine. Pour pallier cette difficulté, on a essayé de modéliser une *sortie libre*. C'est-à-dire que l'utilisateur ne fournit aucune condition à la limite, cette dernière étant calculée uniquement à l'aide du pas de temps précédent. Il est clair au regard de la théorie des caractéristiques appliquées aux équations de Saint-Venant que cette modélisation n'est pas correcte. Cette modélisation

n'a pas pour but de fournir un écoulement correct au niveau de la condition limite mais de laisser l'onde de submersion sortir du domaine sans trop influencer l'écoulement dans le domaine.

Pour réaliser une *sortie libre*, on transporte les deux variables sections mouillées et débit à la vitesse de l'écoulement.

Pour les calculs d'onde de submersion, il est recommandé de positionner la condition aval de son domaine de calcul au moins 30 *km* en aval du point d'arrêt du calcul afin de ne pas perturber les caractéristiques au niveau de ce point. Ce type de condition à la limite est fortement déconseillé pour tout autre type de calcul.

3.3.5 Traitement des zones sèches

Pour des applications telles que les ondes de submersion, il est nécessaire de pouvoir traiter des zones sèches et la propagation d'un front sur zones sèches. Au niveau numérique, ceci soulève les problèmes suivants :

- définition d'un état dans la zone sèche car la vitesse n'est pas définie ;
- propagation d'un front sur zone sèche.

Notre but principal pour traiter ce problème a été d'obtenir une bonne vitesse de propagation du front car cette information est essentielle pour les calculs d'onde de submersion.

Pour aborder ce problème avec le schéma de Roe, on a dû introduire un seuil sur la hauteur d'eau. Ceci a permis sur des cas-tests simples pour lesquels on dispose d'une solution analytique de retrouver la bonne vitesse de propagation [21]. La contrepartie à cette technique de seuil est qu'on perd la parfaite conservativité des volumes finis. Pour les études d'onde de submersion, on a conservé le schéma de Roe mais ceci implique un contrôle strict de la conservativité.

Au niveau du groupe de travail AIRH sur les modèles numériques utilisés pour calculer les ondes de submersion, toutes les équipes utilisant des schémas de type Roe ont les mêmes difficultés. Un des seuls schémas à ne pas avoir ce problème est le schéma dit schéma équilibre, développé à l'université de Bordeaux par l'équipe du professeur Leroux [22][23].

Il faudra envisager dans l'avenir d'autres solutions que celle du seuil mais elle permet néanmoins pour l'instant de traiter les études de façon satisfai-

sante.

3.4 Modélisation de phénomènes physiques plus complexes

3.4.1 Introduction d'une modélisation de lit composé

Le noyau transcritique de MASCARET traite les écoulements dans les lits composés formés d'un lit mineur et d'un lit majeur, mais les zones de stockage ne sont pas prises en compte.

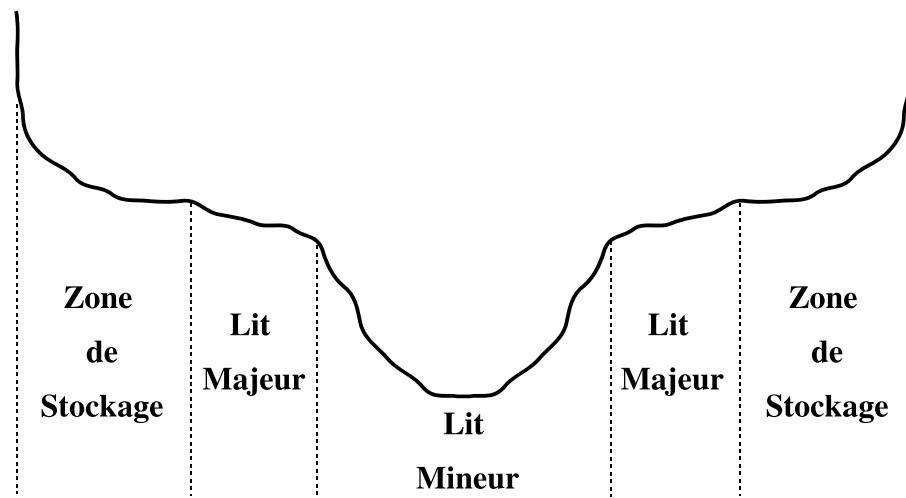


FIGURE 30 – Lits et zones de stockage

La formulation *Debord* a été choisie pour modéliser la composition des lits mineurs et majeur pour que les noyaux fluviaux et transcritique soient le plus compatibles possible.

3.4.1.1 Rappel sur les équations

Le système d'équations à résoudre s'écrit à présent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_l - \frac{\partial S_s}{\partial t} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_m^2}{S_m} + \frac{Q_M^2}{S_M} + P \right) \\ = g \int_0^y \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_y dy - gS \frac{dZ_f}{dx} - g(S_m J_m + S_M J_M) \end{array} \right. \quad (233)$$

avec :

- q_l le débit d'apport et S_s la section de stockage ;
- $S = S_m + S_M$ et $Q = Q_m + Q_M$;
- $\sqrt{J_m} = \frac{Q_m}{D_m}$ et $\sqrt{J_M} = \frac{Q_M}{D_M}$;
- $D_m = K_m S_m R_m^{2/3}$ et $D_M = K_M S_M R_M^{2/3}$ sont les débitances mineures et majeures fonction de la cote de la surface libre.

Ce système est semblable aux équations de Saint-Venant en lit unique en définissant la pente globale J au moyen de la relation :

$$SJ = S_m J_m + S_M J_M \quad (234)$$

et en choisissant le coefficient β non plus égal à 1 (comme en lit mineur), mais satisfaisant la relation :

$$\beta \frac{Q^2}{S} = \frac{Q_m^2}{S_m} + \frac{Q_M^2}{S_M} \quad (235)$$

Remarque : le coefficient β est supérieur ou égal à 1.

3.4.1.2 Modélisation *Debord*

Le système d'équations (233) n'est pas complet et une relation de fermeture est nécessaire. Différentes solutions ont été proposées pour modéliser la composition des deux lits. La modélisation *Debord* a finalement été retenue pour être compatible avec le noyau fluvial (voir 2.1.3.2) et à la suite du retour d'expérience effectué sur les différentes utilisations de celui-ci.

Soit :

$$\eta = \frac{Q_m}{Q_M} \quad (236)$$

La modélisation *Debord* permet d'écrire :

$$\eta = \frac{A}{\sqrt{1 + \frac{S_m}{S_M}(1 - A^2)}} \frac{D_m}{D_M} \quad (237)$$

où A est la constante du modèle *Debord*, évaluée par la relation :

$$\begin{cases} A = \frac{1 - A_0}{2} \cos\left(\frac{\pi r}{0.3}\right) + \frac{1 + A_0}{2} & \text{pour } r = \frac{R_M}{R_m} \in [0, 0.3] \\ A = A_0 = 0.9 \left(\frac{K_m}{K_M}\right)^{-1/6} & \text{pour } r > 0.3 \end{cases} \quad (238)$$

3.4.1.3 Mise en œuvre dans le noyau transcritique

Les équations en lits composés ne diffèrent de celles en lit simple que par le terme β et la forme du terme source lié au frottement. La résolution de ce système est donc formellement identique à celui traité précédemment.

La formulation *Debord* permet d'écrire β sous la forme $\beta(S, x)$. Ceci donne une fonction inconnue supplémentaire.

Pour des raisons de simplicité, la fonction β sera prise en compte de façon explicite. L'équation de quantité de mouvement à résoudre à l'instant $n + 1$ est donc :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta^n \frac{Q^2}{S} + P \right) = g \int_0^y \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_y dy - gS \frac{dZ_f}{dx} - gSJ \quad (239)$$

C'est donc une équation aux dérivées partielles dont le coefficient β est variable dans le temps.

Le système convectif est inconditionnellement hyperbolique car β est supérieur ou égal à 1. Le problème de Riemann est résolu de manière analogue à celui lié aux équations de Saint-Venant en lit simple ; seules les valeurs propres du système sont modifiées. Elles deviennent : $\beta u + c'$ et $\beta u - c'$ avec : $c' = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial S} + u^2(\beta^2 - \beta)}$. Les variables de Roe sont inchangées.

La prise en compte du frottement est formellement identique au cas du lit simple ; la débitance généralisée qui tient compte à la fois du lit mineur et majeur pouvant être planimétrée de manière analogue à la débitance mineure.

Nota 1 : le fait de considérer le terme β comme une fonction de forçage variant à chaque pas de temps simplifie nettement la mise en œuvre de la méthode. Ceci est en partie justifié par le fait que les écoulements en lit composés sont généralement lentement variables.

Nota 2 : le traitement des lits composés a fait perdre une propriété de consistance qui permettait de converger vers un état permanent à débit constant. Dans les cas étudiés jusqu'à présent, des variations de débit de l'ordre de 2 à 3% du débit total ont été observées lorsqu'un état stationnaire est atteint.

3.4.2 Traitement des confluent

Une méthode nouvelle a été développée pour traiter le cas des confluent. Sa description détaillée ainsi que des éléments de validation ont fait l'objet du rapport [24]. Une synthèse de la méthode est présentée ici.

On peut estimer que localement, dans la zone de confluence, les équations de Saint-Venant 2D se substituent à celles 1D pour représenter l'écoulement. L'idée est alors de considérer que le domaine total (vallée principale + affluent) est le recouvrement de deux sous domaines. Le premier sous domaine est constitué par les trois biefs 1D ; les équations de Saint-Venant monodimensionnelles y sont supposées valables. Le second sous domaine est la zone de confluence et ce sont les équations bidimensionnelles qui sont supposées valables. Traiter le problème du confluent revient en fait à réaliser un couplage 1D-2D entre les deux sous domaines. La résolution de Saint-Venant 2D se fait à l'aide d'un module volumes finis équivalent à celui utilisé en 1D (schéma de Roe). Ce module possède des schémas numériques semblables à ceux de MASCARET. Ce dernier point ainsi que le caractère explicite de ces schémas a l'avantage de faciliter l'opération de couplage.

Un modèle bidimensionnel demande généralement une discrétisation fine de la géométrie. Il n'est pas concevable lors d'une étude d'onde de submersion que chaque confluent d'une vallée nécessite la fabrication d'un modèle 2D local, avec saisie de la géométrie et maillage (fin) du domaine. En fait, un modèle simple et automatique à mettre en oeuvre est souhaité. C'est donc le logiciel monodimensionnel qui crée le domaine 2D représentatif du confluent et le maillage qui va avec. Un maillage à 12 cellule a été retenu.

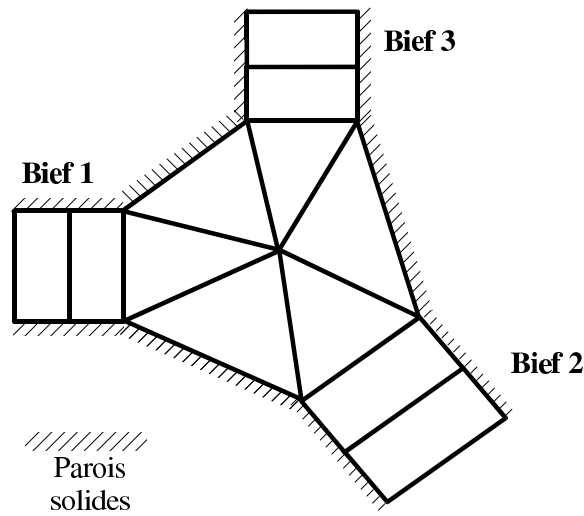


FIGURE 31 – Confluent 2D

3.4.2.1 Couplage 1D-2D

En se plaçant du côté du modèle monodimensionnel, le point qui nous intéresse est de calculer la valeur de (S_1, Q_1) aux limites de chaque bief 1D arrivant dans le confluent. Cela revient à définir le couplage 1D-2D.

Le couplage se fait par recouvrement de domaines. Par exemple, les points limites du modèle 2D sont à l'intérieur du modèle 1D. pour être précis, la figure suivante donne le recouvrement entre le modèle 2D et les trois biefs 1D.

On suppose que les extrémités du modèle 1D aux biefs B_1 , B_2 , B_3 , sont représentées dans le modèle 2D par les cellules A , B , C respectivement. Les cellules a , b , c extrémités du modèle 2D représentent quant à elles les cellules voisines aux extrémités de chaque bief 1D. le couplage 1D-2D se fait alors

par échange d'états limites.

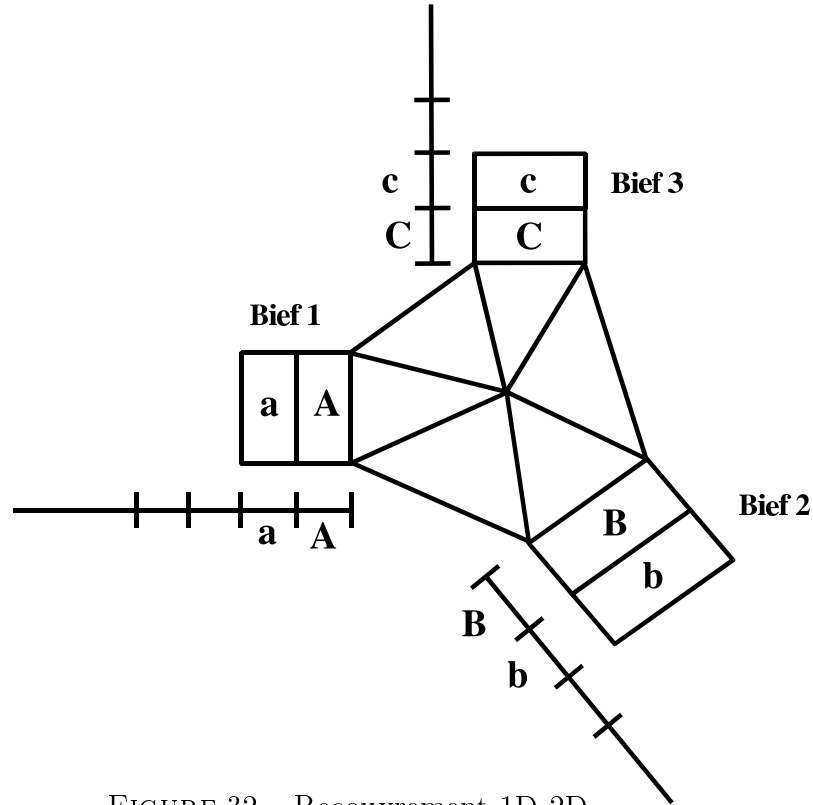


FIGURE 32 – Recouvrement 1D-2D

Un calcul peut être décrit de la façon suivante :

On suppose connu l'état dans chaque 1D, B_1 , B_2 , B_3 et dans le confluent 2D à l'instant n . La détermination de l'état $n + 1$ se fait en quatre étapes :

- **Etape 1** : calcul de l'état à l'intérieur du confluent (hors des trois cellules limites a , b et c). Cette étape est réalisée avec un schéma de Roe 2D. Le schéma étant explicite, nul besoin de l'état limite à l'instant $n + 1$, mais uniquement de l'état n dans son entier ;
- **Etape 2** : calcul de l'état à l'intérieur de chaque bief (hors cellules limites A , B , C). Ceci est fait avec un schéma de Roe 1D pour les mêmes raisons et de la même façon que précédemment ;
- **Etape 3** : calcul de S_1 , Q_1 dans chaque bief. Ce sont les valeurs de S et Q en A , B , C . Ces valeurs ont été calculées lors de l'étape 1. La surface libre est conservée d'un modèle à l'autre. Cependant, les valeurs calculées de débit sont bidimensionnelles ; on projette donc le vecteur débit le long de la normale à la frontière libre pour obtenir la valeur

monodimensionnelle.

- **Etape 4** : calcul de l'état limite du modèle 2D. C'est l'état déterminé dans la deuxième étape dans les cellules adjacentes aux extrémités de chaque bief. De façon analogue au point précédent, le niveau de la surface libre est conservé du modèle 1D vers le modèle 2D. De plus, afin d'avoir un débit bidimensionnel, on suppose que celui-ci a la direction de la normale à la frontière libre.

Au final, l'état complet du modèle monodimensionnel (les biefs B_1 , B_2 , B_3) et du modèle bidimensionnel (le confluent) à l'instant $n + 1$ est calculé.

L'utilisation d'un schéma volumes finis dans le modèle 2D permet a priori d'avoir un traitement conservatif de la zone de confluence. En fait ceci n'est pas totalement vérifié, car pour passer de l'état 2D vers l'état 1D une projection du débit est réalisée. Ceci est une source de non conservation de la quantité de mouvement.

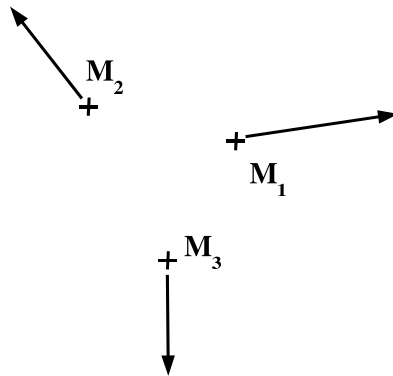
3.4.2.2 Adaptation de la géométrie 1D au modèle 2D

A présent que la méthode de couplage est définie, il ne reste plus qu'à décrire le modèle 2D chois pour représenter la confluence. Dans un premier temps, le cas simple de canaux rectangulaires est traité. Puis la méthode est étendue à des géométries réelles.

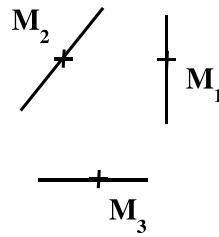
⇒ Canaux rectangulaires

La géométrie du confluent est discrétisée par douze cellules de manière à être la plus proche possible de la géométrie réelle.

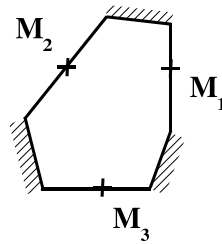
- * Pour chaque affluent, sont fournis les coordonnées du point limite sur l'axe hydraulique ainsi que l'angle que fait ce bief 1D par rapport à une direction fixe. Ce sont les seules données externes spécifiques au confluent. Leur détermination se fait uniquement à partir de critères géométriques seuls ;



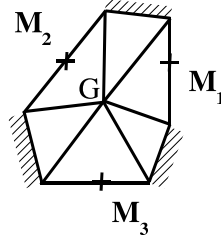
- * à chaque affluent i , un segment peut être tracé de longueur L_i , (la largeur du canal, donnée indépendante de la définition du confluent et qui provient de la géométrie du modèle 1D). Sa direction est la normale à l'angle fixé précédemment ;



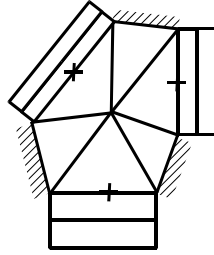
- * ces segments sont ensuite rejoints par des parois. Les trois segments précédents ainsi que les parois forment l'hexagone de confluence ;



- * soit G le centre de gravité de l'hexagone. A l'intérieur de ce dernier, six triangles sont formés ayant G pour sommet commun ;



- * les cellules de recouvrement 1D-2D sont des rectangles dont un côté a pour longueur L_i et l'autre DX_i , la taille de la cellule 1D dans chaque bief ;



- * Enfin, la cote du fond dans chaque cellule est fixée de la manière suivante :
 - pour les six cellules de recouvrement, c'est la cote de la cellule 1D, Z_{f1D} ;
 - à l'intérieur de l'hexagone, la cote de G (Z_{fG}), est supposée être la moyenne arithmétique des trois cellules de recouvrement 1D-2D voisines. Les trois cellules ayant une frontière commune avec celles de recouvrement (donc pas de parois) ont une cote Z_{f2D} définie par : $Z_{f2D} = \frac{2Z_{f1D} + Z_{fG}}{3}$ où Z_{f1D} est la cote de la cellule 1D adjacente ;
 - pour chacune des trois autres cellules, la cote du fond est supposée être la moyenne entre celles des deux cellules adjacentes.

Cette description a l'avantage de ne nécessiter que peu de paramètres spécifiques : les coordonnées des points M_i et la direction relative de chaque bief. Ce sont des paramètres purement géométriques qui sont simples à déterminer. Le reste des informations provient directement de la description 1D (géométrie des profils en travers) et de l'état de chaque bief.

La géométrie ainsi définie tient compte :

- de l'importance de l'emprise de la zone de confluence, celle-ci étant liée à la position relative des trois points M_i ;
- de la direction de chaque bief, via les angles fournis en M_i ;
- de la largeur de chaque canal, puisque celle-ci est reportée dans le modèle 2D à partir de l'état 1D ;
- des gradients de fond, puisque la cote des cellules de recouvrement est celle des cellules 1D. A l'intérieur de l'hexagone, ces cotes du fond varient de la façon la plus régulière possible.

\Rightarrow Géométrie réelle

Une difficulté nouvelle apparaît dans le cas d'une géométrie réelle. En effet, pour le modèle 2D choisi, un profil en travers n'est discrétisé que par une unique cellule, qui présente donc un profil rectangulaire (avec la discrétisation P_0 retenue, le fond d'une cellule est forcément plat). Ce point était évidemment sans conséquences dans le cas précédent, mais doit être traité spécifiquement à présent.

Il s'agit donc de trouver la géométrie rectangulaire équivalente à la géométrie réelle, dans le sens où les écoulements représentés dans chacun des modèles doivent être les plus proches possibles. Une transformation 1D-2D doit être définie et le choix suivant a été retenu :

- cote du fond Z_f conservée ;
- cote de la surface libre Z conservée (donc, Y , le tirant d'eau aussi) ;
- débit Q conservé ;
- vitesse V conservée.

Il faut donc conserver la section mouillée S . Le tirant d'eau étant fixé par les deux premiers points, la largeur s'en déduit par :

$$L_{2D} = \frac{S_{1D}}{Y} \quad (240)$$

Cette largeur de cellule est susceptible d'évoluer lorsque le tirant d'eau varie. Cela nécessite donc de réactualiser le maillage de manière régulière à chaque pas de temps.

3.4.3 Prise en compte des singularités

Lorsqu'on propage une onde de submersion dans une vallée réelle, on doit pouvoir prendre en compte d'autres barrages situés en aval du barrage principal. Ces ouvrages peuvent avoir plusieurs comportements possibles : rupture

instantanée lorsque l'onde arrive ou déversement pendant un certain temps au dessus de la crête de l'ouvrage. Dans le second cas, deux modélisations du barrage sont possibles :

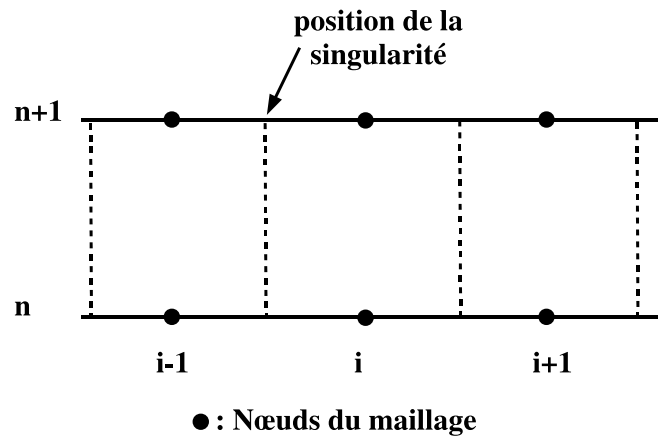
- représenter le barrage dans la géométrie. Mais, étant donné les pentes des parements amont et aval, il est nécessaire d'avoir un maillage très fin au droit de cet ouvrage. ce qui contraint fortement le pas de temps pour tout le domaine de calcul ;
- modéliser l'ouvrage par un singularité. c'est-à-dire que le barrage ne sera pas traité comme un point courant du schéma numérique mais on utilisera une relation spécifique pour relier l'amont et l'aval du barrage.

Dans la suite de ce paragraphe, on va définir comment on a choisi de modéliser une singularité dans le cadre d'un schéma volumes finis.

On admet qu'une singularité est définie par une relation liant le débit transitant Q_s par cette singularité aux cotes amont et aval. Cette relation dépend des caractéristiques physiques et hydrauliques de l'ouvrage.

Ci-dessous est représentée une partie du domaine.

Une singularité sera nécessairement positionnée à l'interface entre 2 cellules. Le débit transitant à travers cette interface est défini par : $Q_s = f(Z_{i-1}, Z_i)$.



Dans le cadre d'un schéma Volumes Finis, l'état hydraulique dans la cellule i et $i-1$ au temps $n+1$ dépend des flux à l'interface de chacune des deux cellules.

Pour la cellule i (resp. $i - 1$), le flux à droite (resp. à gauche) sera le flux calculé par le schéma défini au paragraphe n ; par contre le flux de masse et de quantité de mouvement à l'interface entre la cellule i et la cellule $i - 1$ ne sera pas le flux de Roe mais le flux analytique calculé explicitement à l'aide de la relation définissant la singularité.

Pour la cellule i

Flux de masse à gauche : $Q_s = f(Z_{i-1}^n, Z_i^n)$

Flux de quantité de mouvement à gauche : $\frac{Q_s^2}{S_i^n} + P(S_i^n)$

Pour la cellule $i - 1$

Flux de masse à droite : $Q_s = f(Z_{i-1}^n, Z_i^n)$

Flux de quantité de mouvement à droite : $\frac{Q_s^2}{S_{i-1}^n} + P(S_{i-1}^n)$

Remarque :

- on a gardé ainsi la conservation de la masse. Par contre, on a perdu la conservation sur la quantité de mouvement ;
- en tout début de déversement, la section mouillée est très faible à l'aval de la singularité. Ce qui implique de très fortes vitesses et par conséquent des problèmes numériques (instabilités). Dans cette configuration, on conserve uniquement le terme de pression dans le flux de quantité de mouvement ;
- cette modélisation permet de prendre en compte tous les types de singularités. Il suffit de se donner la fonction reliant le débit aux cotes amont et aval.

3.4.4 Prise en compte des barrages qui s'érodent

Le noyau transcritique de MASCARET offre la possibilité de traiter l'érosion par surverse des barrages poids situés à l'aval du barrage principal.

La modélisation retenue s'inspire directement de celle mise en oeuvre dans le code EROSIF [25]. Ce dernier calcule l'évolution d'une brèche dans une retenue ainsi que l'hydrogramme à l'aval qui résulte de cette rupture progressive.

Dans le cadre de MASCARET, un barrage qui s'érode par surverse est traité

comme un barrage qui déverse mais avec une cote de déversement variable dans le temps.

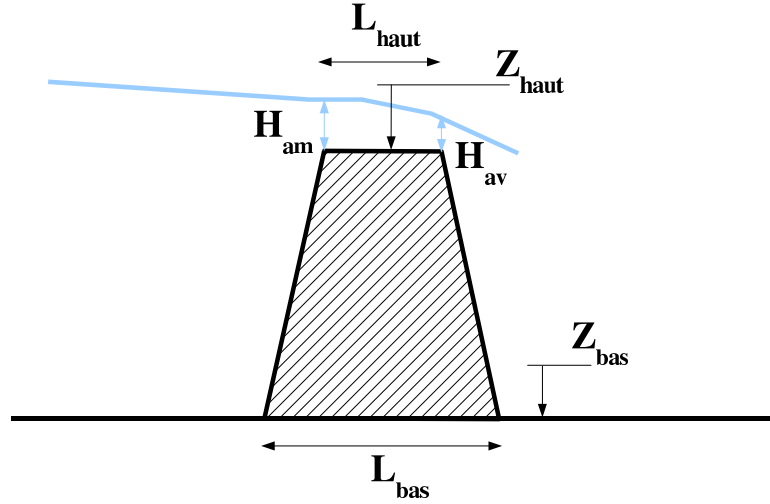


FIGURE 33 – Principe de la modélisation

A l'amont, les conditions hydrauliques sont supposées égales à celles calculées par le noyau transcritique dans la cellule immédiatement en amont du barrage à l'instant précédent.

A l'aval, une condition de criticité est imposée. Le débit sur l'ensemble de l'ouvrage est supposé égal au débit amont.

L'évolution de la cote de la crête du barrage est donnée par l'équation :

$$(1 - p) \frac{dZ_{haut}}{dt} = - \frac{dQ_s}{dx} = - \frac{Q_{s_{aval}} - Q_{s_{amont}}}{L_{haut}} \quad (241)$$

où p est la porosité du matériau (généralement prise égale à 0,4), $Q_{s_{amont}}$ et $Q_{s_{aval}}$ sont respectivement les débits solides à l'amont et à l'aval du chenal d'érosion calculés par la formule de Meyer Peter Muller, soit :

$$Q_s = \frac{8}{g\sqrt{\rho}(\rho_s - \rho)} (\tau - \tau_c)^{1.5} \quad (242)$$

avec :

- τ la contrainte hydrodynamique totale (formule de Manning Strickler) ;
- τ_c la contrainte critique de début de cisaillement : $0.05 \cdot (\rho_s - \rho) \cdot g \cdot d_{50}$;
- ρ_s la masse volumique du sédiment ;

- ρ la masse volumique de l'eau ;
- d_{50} le diamètre médian du matériau.

L'ensemble de ces équations permet donc de calculer Z_{haut} , cote du déversement. L'érosion est limitée vers le bas par la cote Z_{bas} .

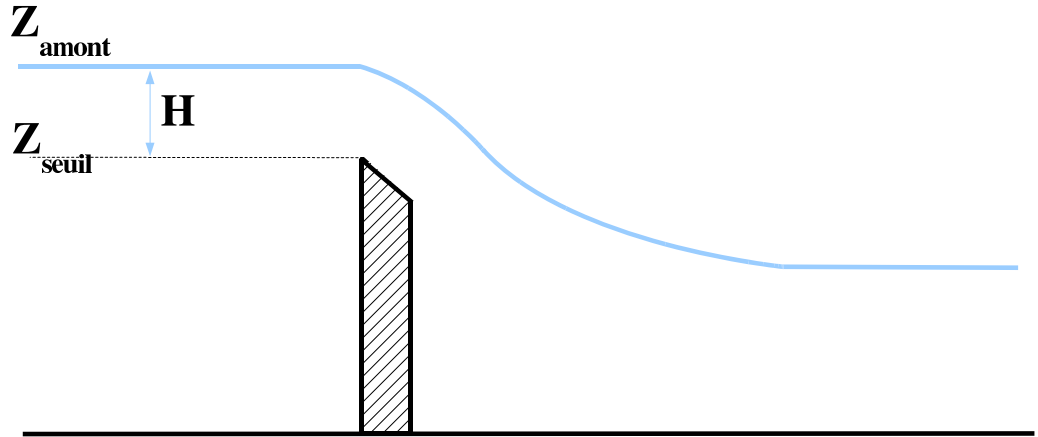
3.4.5 Lois de seuil mince et épais

Nous présentons ici le principe de modélisation des singularités de type seuil épais ou mince, implémentés dans les noyaux transcritique et fluviaux. Pour les autres singularités, le couple (débit, cote) est directement déterminé par interpolation d'une abaque discrétisée, fournie par l'utilisateur.

Les lois de seuil modélisées dans les noyaux fluviaux et transcritique permettent de choisir parmi deux types de seuil : une loi de seuil épais ou mince. Ces deux lois diffèrent uniquement en cas d'enneigement, en particulier sur les conditions et le coefficient d'enneigement.

On se reportera à [26] pour le détail des tests de validation dans le cas du seuil mince.

3.4.5.1 Seuil dénoyé (mince ou épais)



Le débit au dessus d'un seuil mince ou épais dénoyé s'exprime de la façon suivante :

$$Q = CLH\sqrt{2gH} \quad (243)$$

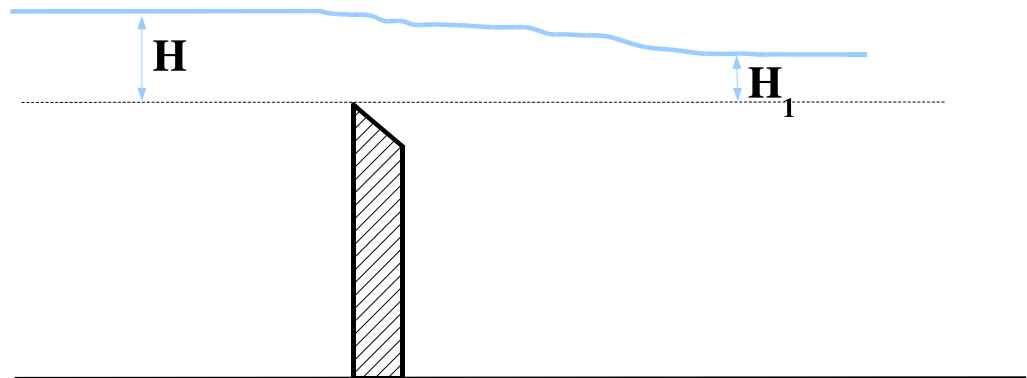
où :

- H est la hauteur d'eau à l'amont du seuil (on néglige la vitesse d'approche) : $H = Z_{amont} - Z_{seuil}$;
- g la gravité ;
- L la largeur du seuil ;
- C un coefficient de débit qui dépend des effets de contraction et des approximations faites dans l'établissement de la formule (243) : par exemple la non-prise en compte de la vitesse d'approche. Ce coefficient C est à déterminer par l'utilisateur et peut résulter d'un calage.

Pour plus de détails sur l'établissement de la formule précédente, nous renvoyons le lecteur à [27].

Tant que les seuils ne sont pas noyés, les lois sont identiques. Par contre, en cas d'ennoiement, les lois diffèrent selon le type de seuil (conditions et coefficient d'ennoiement).

3.4.5.2 Seuil noyé



Un seuil est dit noyé quand le niveau amont est influencé par le niveau aval. Pour un seuil mince ou épais noyé, le débit s'exprime de façon analogue au cas du seuil dénoyé. Seul le coefficient de débit C est modifié pour prendre en compte l'influence de l'aval sur la débitance du seuil. On définit alors le coefficient d'ennoiement K par :

$$K = \frac{Q_{\text{noyé}}}{Q_{\text{dénoyé}}} \quad (244)$$

Le débit sur le seuil noyé est donc donné par :

$$Q = KCLH\sqrt{2gH} \quad (245)$$

avec :

- K un coefficient dépendant du rapport $\frac{H_1}{H}$ et du type de seuil ;
- $H = Z_{amont} - Z_{seuil}$ et $H_1 = Z_{aval} - Z_{seuil}$;
- C le coefficient de débit défini en régime dénoyé.

\Rightarrow Seuil épais noyé

Pour un seuil épais, tant que H_1 est inférieur à $0.8H$, le niveau aval n'influence pas le débit déversé (bien que la cote aval puisse être plus haute que la crête du déversoir). Ceci est dû à l'existence d'une section critique au niveau du seuil.

Le coefficient d'enneioement K à prendre en compte dans la formule (245) est celui classiquement utilisé pour les seuils épais. Il s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{cases} K = -25 \left(\frac{H_1}{H} \right)^2 + 40 \left(\frac{H_1}{H} \right) - 15 & \text{si } \frac{H_1}{H} > 0.8 \\ K = 1 & \text{si } \frac{H_1}{H} < 0.8 \end{cases} \quad (246)$$

\Rightarrow Seuil mince noyé

Pour un seuil mince :

- si $H_1 < 0$, $K = 1$: le niveau aval n'influence pas le débit déversé ;
- si $H_1 > 0$, soit dès que la cote à l'aval est supérieure à la cote de crête du déversoir, on a :

$$K = \left(1 - \left(\frac{H_1}{H} \right)^{1.5} \right)^{0.385} \quad (247)$$

La figure 34 donne la forme des coefficients d'enneioement en fonction de $\frac{H_1}{H}$ pour un seuil épais et mince.

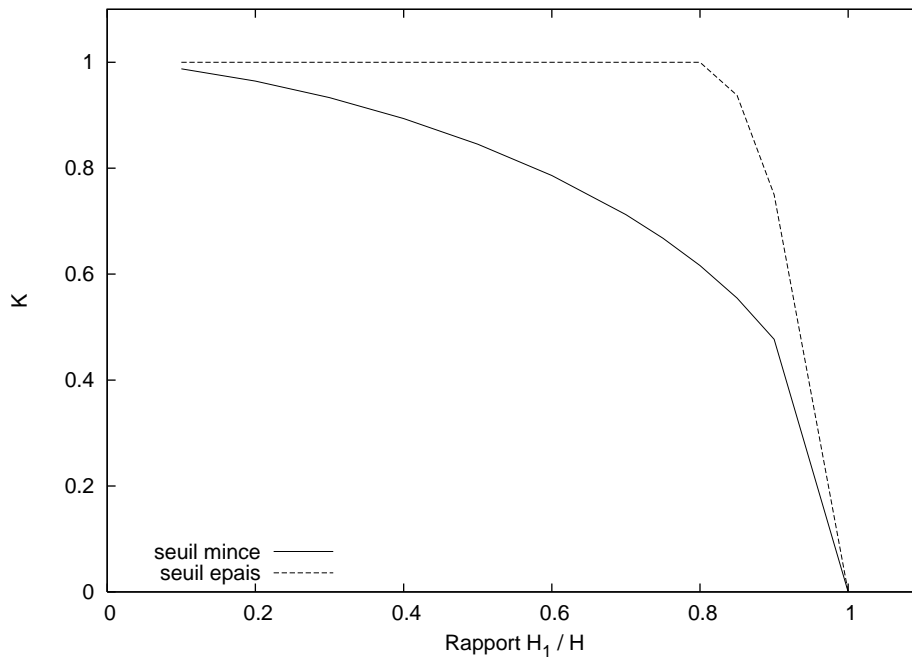


FIGURE 34 – Coefficient d'ennoiement

3.4.6 Bilan sur les singularités

Dans une rivière, on peut rencontrer des zones où les équations de Saint-Venant ne s'appliquent pas car les hypothèses de validité (répartition uniforme des vitesses le long de la verticale par exemple) ne sont plus valables. On peut citer, à titre d'exemple, des écoulements au-dessus des seuils, de vannes etc...

Les relations entre la cote et le débit au droit des singularités sont alors décrites par des lois explicites. Les noyaux fluviaux du code **MASCARET** peuvent traiter les singularités telles que les seuils et des vannes dans la rivière lorsque ceux-ci sont explicitement modélisés par des lois hydrauliques reliant le débit transitant, les cotes amont et aval et les caractéristiques de la singularité. Un certain nombre de singularités sont implantées mais ne sont pas toutes disponibles pour le noyau transcritique. Dans le tableau suivant, sont résumées les différentes singularités et leur disponibilité vis à vis des noyaux fluviaux et transcritiques.

Les singularités suivantes sont disponibles dans **MASCARET** :

TABLE 2 – Les possibilités de modélisation des singularités dans MASCARET

Type de singularités	Noyau fluvial	Noyau torrentiel
$Q = f(Z_{av})$	oui	non
$Q = f(Z_{am})$	oui	oui
Loi de seuil épais	oui	oui
Loi de seuil mince	oui	oui
$Z_{am} = f(Q)$	oui	non
$Z_{am} = f(Z_{av}, Q)$	oui	non
Seuil avec crête définie par points	oui	non
$Z_{am} = f(t)$	oui	non
Loi de vannes	oui	non

3.4.7 Prise en compte de termes non hydrostatiques

Dans cette partie, nous nous intéressons à une extension des équations de Saint-Venant qui considère certains des termes apparaissant lorsqu'on prend en compte des effets non hydrostatiques. Le but est de modéliser des phénomènes physiques tels que les ondes de Favre. Les limites de validité de ce développement sont les écoulements fluviaux, transitoires avec faible pente de fond. Ces développements sont tirés des travaux de BRISTEAU et al. [34].

Nous décrirons les termes supplémentaires et leur modélisation dans le cadre unique du schéma numérique du noyau transcritique MASCARET (Schéma volumes finis de type Roe). Ce développement peut également s'appliquer sans difficulté majeure au noyau REZO dédié aux écoulements fluviaux. Ce développement a fait l'objet d'une publication dans laquelle le lecteur trouvera toutes les justifications nécessaires [34].

Les équations de Saint-Venant sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes en faisant les hypothèses suivantes :

- ondes longues (shallow-water) ;
- pression hydrostatique ;
- répartition uniforme des vitesses selon la verticale.

Pour lever la contrainte de pression hydrostatique, nous allons partir des équations d'Euler à 2 dimensions (x, z) où z représente l'axe vertical et x l'axe horizontal. Pour des raisons de simplicité, nous négligeons le frottement.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (248)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (249)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = -g \quad (250)$$

avec : $t > t_0$, $x \in \mathbb{R}$ et $Z_f(x) \leq z \leq Z(x, t)$

$Z(x, t)$ représente la cote de la surface libre, $\mathbf{u} = (u, w)^T$ le vecteur vitesse et p la pression.

La hauteur d'eau est : $h = Z - Z_f$.

Nous considérons la cote du fond Z_f qui varie en fonction de l'abscisse curviligne de la rivière x .

Le système d'équations (248) à (250) est complété par les conditions limites suivantes. Définissons les normales à la surface libre n_s et au fond n_f :

$$n_s = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial z}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (251)$$

et

$$n_f = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_f}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial z_f}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (252)$$

3.4.7.1 A la surface libre

La condition limite à la surface libre est une condition cinématique classique :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + u_s \frac{\partial Z}{\partial x} - w_s = 0 \quad (253)$$

où l'indice s indique la valeur de la quantité à la surface libre.

3.4.7.2 Au fond

$$u_f \frac{\partial z_f}{\partial x} - w_f = 0 \quad (254)$$

où l'indice f indique la variable considérée prise au fond.

Nous rappelons les notations pour les variables moyennées déjà introduites à la section précédente présentant le noyau transcritique de MASCARET.

$$S(x, t) = \int_{l_1}^{l_2} h(x, y, t) dy \quad (255)$$

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{S(x, t)} \int_{l_1}^{l_2} \int_{z_f}^{Z(x, t)} u(x, y, z, t) dz dy \quad (256)$$

$$Q(x, t) = S(x, t) \bar{u}(x, t) \quad (257)$$

L'intégration de l'équation de continuité (248) le long de la verticale en tenant compte des conditions aux limites définies par (253) et (254) nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (258)$$

L'intégration de l'équation (250) fournit l'expression de la pression.

$$p(x, z, t) = p^a + g(Z(x, t) - z(x, t)) + \int_z^Z \frac{\partial w}{\partial t} dz \quad (259)$$

Si on considère que la pression est hydrostatique, le terme dépendant de la vitesse verticale n'est pas pris en compte. On remarque également que seul le terme correspondant à la dérivée temporelle de la vitesse verticale est pris en compte. Les termes convectifs sont ici négligés. L'intégration le long de la verticale de l'équation de quantité de mouvement (249) fournit l'équation suivante :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q^2}{\partial x} + g \int_{l_1}^{l_2} h \frac{\partial Z}{\partial x} dy + D = 0 \quad (260)$$

Les termes de frottement sont négligés. D représente une partie des termes non hydrostatiques que nous allons développer dans le paragraphe suivant.

3.4.7.3 Développement des termes non hydrostatiques

$$D = \int_{l_1}^{l_2} \int_{Z_f}^{Z(t)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_z^{Z(t)} \frac{\partial w}{\partial t} dz_1 \right) dz \quad (261)$$

La vitesse vérifie une divergence nulle (248) et en utilisant les conditions d'imperméabilité au fond, on obtient :

$$w(z) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^z u dz_1 \quad (262)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} ((z - Z_f) \bar{u}) \quad (263)$$

$$= -(z - Z_f) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial Z_f}{\partial x} \bar{u} \quad (264)$$

Si on reporte l'expression de la vitesse verticale dans le terme D représentant une partie des termes non hydrostatiques, nous obtenons la relation suivante en appliquant la règle de Leibnitz à (261) :

$$D = \int_{l_1}^{l_2} \int_{Z_f}^{Z(t)} \left(\int_z^{Z(t)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} dz + \frac{\partial Z(t)}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_s \right) dz dy \quad (265)$$

Le développement est continué en remplaçant la vitesse verticale par son expression (264).

$$\begin{aligned}
D &= -\frac{1}{2} \int_{l_1}^{l_2} \int_{Z_f}^{Z(t)} [h^2 - (z - Z_f)^2] dz dy \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} \\
&+ 2 \int_{l_1}^{l_2} \int_{Z_f}^{Z(t)} (Z - z) \frac{\partial Z_f}{\partial x} dz dy \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} \\
&+ \int_{l_1}^{l_2} \int_{Z_f}^{Z(t)} (Z - z) \frac{\partial^2 Z_f}{\partial^2 x} dz dy \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \\
&+ \int_{l_1}^{l_2} \int_{Z_f}^{Z(t)} h \frac{\partial Z}{\partial x} dz dy \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} \\
&+ \int_{l_1}^{l_2} \int_{Z_f}^{Z(t)} \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial Z_f}{\partial x} dz dy \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{266}$$

Tous les termes précédents ne seront pas pris en compte dans le noyau transcritique de **MASCARET**. Seul sera conservé le terme dominant où n'apparaissent pas les gradients de fond :

$$-\frac{1}{2} \int_{l_1}^{l_2} \int_{Z_f}^{Z(t)} [h^2 - (z - z_f)^2] dz dy \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} \tag{267}$$

L'intégrale double s'exprime de la façon suivante :

$$= \int_{Z_f}^{Z(t)} \left(\int_{l_1(z)}^{l_2(z)} [h^2 - (z - Z_f)^2] dy \right) dz \tag{268}$$

$$= h^2 \int_{Z_f}^{Z(t)} L(z) dz - \int_{Z_f}^{Z(t)} ((z - Z_f)^2) L(z) dz \tag{269}$$

$$= h^2 S(x, t) - \int_{Z_f}^{Z(t)} ((z - Z_f)^2) L(z) dz \tag{270}$$

Dans le cas d'un canal à section rectangulaire, le terme précédent est égal à $\frac{2}{3} L h^3$.

Pour modéliser une partie des termes hydrostatiques, on doit ajouter à l'équation de quantité de mouvement du système de Saint-Venant :

$$\left(h^2 S(x, t) - \int_{Z_f}^{Z(t)} ((z - Z_f)^2) L(z) dz \right) \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} \tag{271}$$

Le système des équations de Saint-Venant en 1D et géométrie réelle avec prise des termes hydrostatiques dominants lorsque les termes convectifs dans l'expression de la dérivée de la pression par rapport à z sont négligés (ce qui se justifie en faisant un développement asymptotique voir article [34]).

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (272)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q^2}{\partial x} + g \int_{l_1}^{l_2} h \frac{\partial Z}{\partial x} dy + D(x, t, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}) = 0 \quad (273)$$

$$\begin{aligned} D(x, t, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}) &= \\ \left(h^2 S(x, t) - \int_{Z_f}^{Z(t)} ((z - Z_f)^2) L(z) dz \right) \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} \\ &= \alpha(x, t) \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} \end{aligned} \quad (274)$$

3.4.7.4 Discrétisation des termes non hydrostatiques

Cette partie est consacrée à la discrétisation du système des équations de Saint-Venant avec ajout du terme défini D par l'équation (274).

Nous y présentons comment à partir d'un schéma numérique de type Volumes Finis, nous pouvons intégrer relativement simplement les termes non hydrostatiques qui font apparaître des dérivées temporelles et spatiales d'ordre 3 de la vitesse avec un schéma de type prédictor-correcteur.

La partie prédiction correspond aux équations de Saint-Venant classiques et fournira la section mouillée au temps $t^n + 1$ qui sera ensuite utilisée dans l'étape de correction sur le débit qui tient compte du terme non hydrostatique. Le schéma Volumes Finis développés dans le chapitre est utilisé pour la partie Saint-Venant des équations.

Nous supposons que le domaine de calcul est discrétisé par I noeuds x_i .

Nous notons C_i la cellule de longueur $\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ avec $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$ et X_i représente la valeur moyennée de X sur la cellule i .

Pour la discrétisation temporelle, nous notons $t^n = \sum_{k < n} \Delta t^k$ où le pas de

temps Δt^k sera précisé ultérieurement selon une condition de CFL. La partie conservative des équations est calculée en utilisant le schéma numérique volumes finis utilisé pour les écoulements transcritiques. Cette partie inclut également les termes sources (gradient de fond et frottement).

Pour la clareté de l'exposé, nous rappelons la structure générale d'un schéma Volumes Finis explicite :

$$\tilde{X}_i^{n+1} + D_i^{n+1} - (X_i^n + D_i^n) + \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) = \Delta t^n S_b(X_i^n) \quad (275)$$

où $\tilde{X} = (S, Q)$, le flux numérique $F_{i+1/2}^n$ représente $F_{i+1/2}^n$ le flux tel qu'il est calculé par le schéma de Roe pour les équations de Saint-Venant et S_b les termes sources intégrant le frottement et les gradients de fond. L'étape précédente est l'étape de prédiction. La prise en compte du terme $\left(\alpha(x, t) \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} \right)$ fera partie de l'étape de prédiction suivante.

Nous allons exprimer les dérivées spatiales de la vitesse à l'aide de différences finies classiques au temps t^{n+1} (*resp.* t^n).

$$\left(\alpha(x, t) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} = \alpha(x_i, t^{n+1}) \left(\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} \right)^{n+1} \quad (276)$$

où $u_i = \frac{Q_i}{S_i}$. Il nous reste à évaluer $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i \mp \frac{1}{2}}$. Ce qui en différences finies nous donne en $i + \frac{1}{2}$:

$$\frac{\frac{Q_{i+1}}{S_{i+1}} - \frac{Q_i}{S_i}}{\frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{2}} \quad (277)$$

Si nous regroupons les termes en $n + 1$ et ceux en n , nous obtenons une matrice tridiagonale à résoudre, l'inconnu du système est le vecteur $(Q, S)^T$ est donné par l'étape de prédiction.

3.4.7.5 Conditions aux limites

Pour les termes non hydrostatiques, nous avons à imposer des conditions aux limites pour des termes tels que :

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

Comme il n'y a pas de conditions naturelles, nous supposons :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \underline{n}} = 0$$

\underline{n} est la normale sortante à l'entrée et à la sortie du domaine.

4 Le code CASIER

4.1 Introduction

Ce chapitre présente le principe de résolution d'un ensemble de casiers dans le système MASCARET.

MASCARET permet en effet de modéliser les champs d'inondation situés le long d'une rivière par des *casiers* ou *bassines*, à cote constante et vitesse nulle. Ces casiers sont reliés entre eux et à la rivière par différentes lois d'échange, fonction de la typologie de la liaison, ce qui permet de modéliser les champs d'inondation qui ne participent pas de manière active à l'écoulement dans le lit majeur. Il s'agit donc d'une amélioration de la modélisation 1D classique, qui ne remplace toutefois pas la précision d'une modélisation 2D.

Ce chapitre présente le principe d'une telle modélisation, les équations régissant les différents débits d'échanges au travers des liaisons casier — casier et rivière — casier, le couplage numérique entre le module CASIER et le noyau fluvial non permanent, la résolution du système des casiers et enfin le planimétrage de la loi cote / volume du casier.

4.2 Principe général

Le système à résoudre peut se schématiser ainsi :

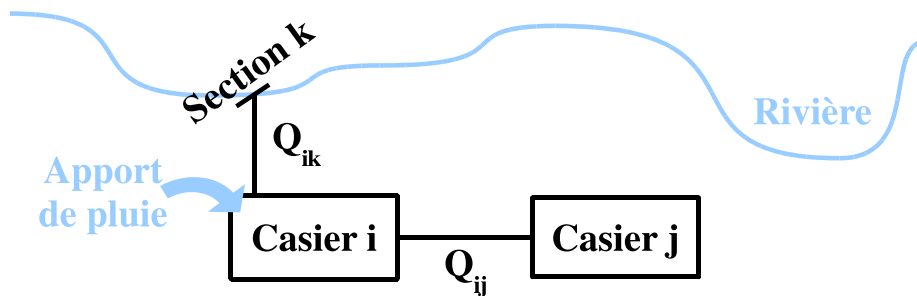


FIGURE 35 – Principe Casier – Rivière

L'écoulement dans la rivière est déterminé par la résolution des équations de Saint-Venant en une dimension. Dans le système MASCARET, trois noyaux de calcul peuvent être utilisés pour cette résolution : un noyau fluvial permanent, un noyau fluvial non permanent et un noyau torrentiel non permanent. On s'intéresse ici uniquement au couplage entre le système des casiers et

le noyau fluvial non permanent. La méthode de résolution utilisée pour les écoulements fluviaux non permanents est une méthode aux différences finies, schéma implicite : les détails de cette résolution sont donnés à la section 4.4.

En ce qui concerne le système des casiers, nous avons fait les hypothèses suivantes :

- la cote de la surface libre dans les casiers est horizontale ;
- la vitesse d’écoulement dans les casiers est nulle ;
- le débit des liaisons d’échange ne dépend que de la cote de la surface libre dans les casiers et dans la rivière.

Ainsi, chaque casier est modélisé par une équation de continuité s’écrivant à chaque pas de temps t :

$$\frac{dV_i(Z_i)}{dt} = \sum_j Q_{ij}(Z_i, Z_j) + \sum_k Q_{ik}(Z_i, Z_k) + Q_{apport,i} \quad (278)$$

où :

- i et j sont des indices de casier ;
- k est un indice de section de calcul dans un bief ;
- V_i est le volume du casier i ;
- Z_i est la cote de la surface libre dans le casier i , inconnue ;
- Z_j est la cote de la surface libre dans le casier j , connue au pas de temps précédent ;
- Z_k est la cote de la rivière dans la section de calcul k , calculée par le noyau fluvial ;
- Q_{ij} est le débit s’écoulant du casier j vers le casier i , inconnu ;
- Q_{ik} est le débit s’écoulant de la section de calcul k dans la rivière vers le casier i , inconnu ;
- $Q_{apport,i}$ est le débit résultant d’éventuels apports (de pluie par exemple) dans le casier i , donnée utilisateur.

La cote dans le casier i est donc fonction des débits d’échange et d’éventuels débits d’apport.

Les débits d’échange Q_{ij} et Q_{ik} sont déterminés par la résolution des équations définissant les liaisons d’échange (voir la section 4.3).

La cote Z_k dans la rivière est calculée par le noyau fluvial. Le couplage entre le système des casiers et le noyau fluvial est décrit à la section 4.4.

4.3 Détermination des débits d'échange

Les débits d'échange à travers les liaisons rivière - casier Q_{ik} ou casier à casier Q_{ij} dépendent du type de liaison. Le code accepte quatre types de liaisons : la liaison seuil, la liaison chenal, la liaison siphon et la liaison orifice.

4.3.1 Liaison seuil déversant

Le débit est calculé à partir de la formule des déversoirs :

$$Q = Cml\sqrt{2g}h^{\frac{3}{2}} \quad (279)$$

avec :

- Q le débit de la liaison ;
- C le coefficient d'écoulement (distinction de l'état noyé ou dénoyé) ;
- m le coefficient de débit ;
- l la largeur du seuil ;
- $h = Z_{amont} - Z_{seuil}$ la hauteur d'écoulement au-dessus du seuil (Z_{amont} désigne la cote à l'amont du seuil, dans la rivière ou dans le casier, et Z_{seuil} désigne la cote de la crête du seuil). La cote à l'amont du seuil Z_{amont} est déterminée par le code.

Ainsi, pour traiter ce type de liaison, il est nécessaire de connaître la largeur du seuil, sa cote (hauteur moyenne représentative) et son coefficient de débit.

On essaiera de ne faire porter le calage que sur l'estimation du coefficient de débit, les autres grandeurs étant égales aux valeurs physiques réelles associées.

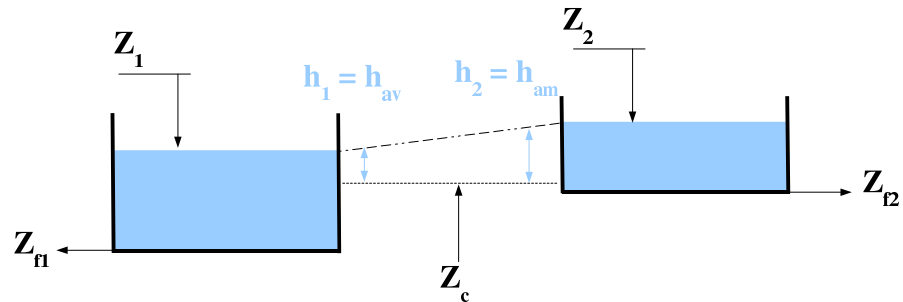
Remarque : le coefficient d'écoulement C permet de représenter la physique de l'écoulement en tenant compte du régime noyé ou dénoyé mais il permet également de stabiliser le calcul numérique lorsque le dénivelé entre les casiers tend vers 0. C'est pourquoi il est aussi appelé coefficient correcteur.

4.3.2 Liaison chenal

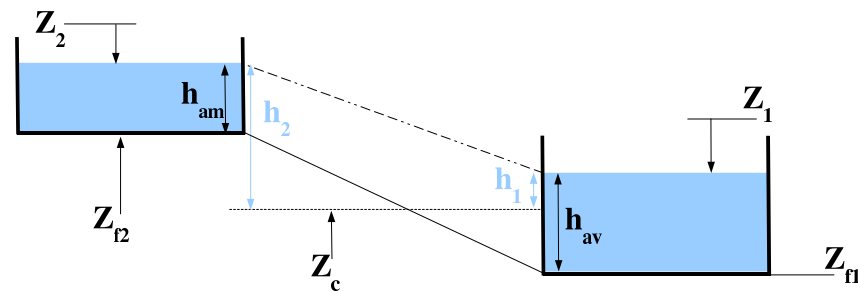
Le débit est calculé à partir de la formule de Strickler, caractéristique des écoulements à surface libre, avec vérification de la hauteur d'eau réelle à l'amont de la liaison.

On distingue deux cas :

- **Cas no. 1** : cas où la cote moyenne du fond du chenal est au dessus des deux cotes de fond des casiers ou de la rivière (cas d'un chenal horizontal par exemple) ;



- **Cas no. 2** : cas où la cote moyenne du fond du chenal est inférieure à l'une des cotes de fond des casiers (cas du chenal avec pente uniforme).



où :

- Z_1 et Z_2 sont les cotes de la surface libre dans les casiers ou dans la rivière ;
- Z_{f1} et Z_{f2} sont les cotes de fond des casiers ou de la rivière ;
- Z_c est la cote moyenne du fond du chenal ;
- h_1 et h_2 correspondent aux hauteurs d'eau relative à la cote moyenne du fond du chenal ($h_1 = Z_1 - Z_c$ et $h_2 = Z_2 - Z_c$). Elles permettent de déterminer le sens de l'écoulement et de distinguer l'amont de l'aval (sur nos schémas, l'amont est à l'indice 2 car : $h_2 > h_1$) ;
- h_{am} et h_{av} correspondent aux tirants d'eau réels à l'amont et à l'aval physique de la liaison. Dans le cas 1, elles sont calculées par rapport à la cote moyenne du fond du chenal et sont donc égales aux valeurs h_1 et h_2 . Dans le cas 2, elles sont calculées par rapport aux cotes de fond des casiers ou de la rivière ($h_{am} = Z_2 - Z_{f2}$ et $h_{av} = Z_1 - Z_{f1}$). La détermination de ces valeurs est nécessaire pour tester la présence d'eau à l'amont de la liaison. Ainsi, si $h_{am} = 0$ (alors que $h_2 > 0$), le débit d'échange sera nul.

Le débit d'échange est ensuite calculé en fonction de $\Delta Z = |h_1 - h_2|$ à partir de la formule de Strickler, caractéristique des écoulements à surface libre :

$$Q = KSR_h^{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{\Delta Z}{L}} \quad (280)$$

avec :

- Q le débit de la liaison ;
- S la section mouillée de la liaison ;
- R_h le rayon hydraulique de la liaison ;
- L la longueur de la liaison ;
- K le coefficient de Strickler de la liaison ($m^{1/3}.s^{-1}$) ;
- ΔZ le dénivelé entre les deux casiers ou dénivelé entre le casier et la rivière.

La hauteur d'eau sur le chenal h est la moyenne de h_{am} et h_{av} . On suppose que la hauteur d'eau h est très inférieure à la largeur l de la liaison et que le rayon hydraulique R_h peut être approché par la hauteur d'eau, autrement dit : $h \ll l$ et $R_h \simeq h$.

Sous ces hypothèses, l'équation précédente devient :

$$Q = Klh^{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{\Delta Z}{L}} \quad (281)$$

D'autre part, lorsque le dénivelé ΔZ tend vers 0, cette formulation présente des difficultés (la dérivée du débit par rapport au dénivelé tend vers l'infini). Numériquement, ce problème a été résolu en introduisant un coefficient correcteur C . Ce coefficient est calculé automatiquement par le code. Le débit devient alors :

$$Q = CKlh^{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{\Delta Z}{L}} \quad (282)$$

Pour traiter ce type de liaison, il est donc nécessaire de connaître la cote moyenne du fond du chenal, sa largeur, sa longueur ainsi que son coefficient de rugosité. Ces paramètres sont renseignés dans le fichier *cas* des paramètres du calcul.

On essaiera de ne faire porter le calage que sur l'estimation du coefficient de rugosité, les autres grandeurs étant égales aux valeurs physiques réelles

associées.

4.3.3 Liaison siphon

Le débit est calculé à partir de la formule universelle de perte de charge, caractéristique des écoulements en charge :

$$Q = \sqrt{\frac{2g}{\lambda L} \Delta Z} \times S^{\frac{5}{4}} \quad (283)$$

avec :

- Q le débit de la liaison ;
- S la section du siphon ;
- L la longueur du siphon ;
- ΔZ le dénivelé entre les deux casiers ou dénivelé entre le casier et la rivière, calculé par le code ;
- λ le coefficient de perte de charge relatif aux parois du tunnel (abaque de Moody).

Le siphon est considéré comme étant en charge dès l'instant où l'une de ses extrémités est recouverte d'eau. Dans le cas où le siphon n'est pas en charge (écoulement à surface libre), la liaison siphon est traitée comme une liaison chenal, avec comme largeur, la racine carrée de la section et comme coefficient de Strickler le coefficient suivant :

$$K = \sqrt{\frac{2g}{\lambda} S^{\frac{1}{6}}} \quad (284)$$

Lorsque le dénivelé ΔZ tend vers 0, la formulation du débit d'échange devient instable [28]. Comme dans le cas de la liaison chenal, il a été nécessaire d'introduire un coefficient correcteur C . La formulation du débit devient alors :

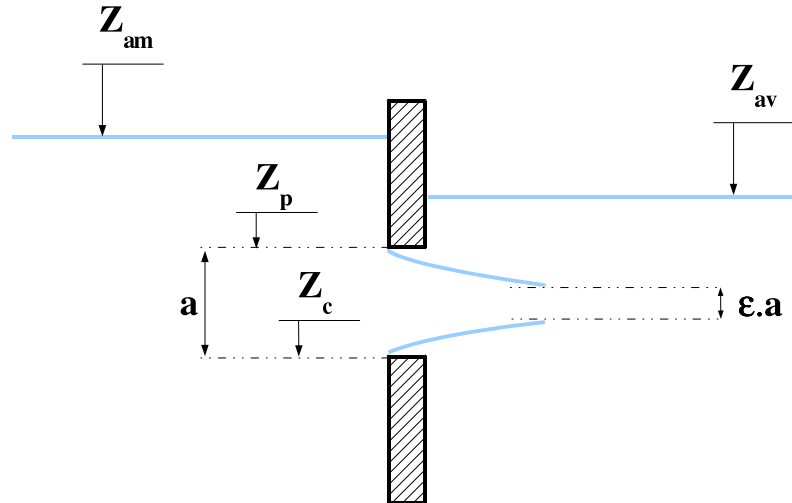
$$Q = C \sqrt{\frac{2g}{\lambda L} \Delta Z} \times S^{\frac{5}{4}} \quad (285)$$

Ainsi, pour traiter les liaisons de type siphon, il est nécessaire de connaître la cote moyenne du fond du siphon, sa longueur et sa section ainsi que le coefficient de perte de charge λ . Ces coefficients sont renseignés dans le fichier cas du calcul.

On essaiera de ne faire porter le calage que sur l'estimation du coefficient λ , les autres grandeurs étant égales aux valeurs physiques réelles associées.

4.3.4 Liaison orifice

La figure ci-dessous présente le schéma de principe de ce type de liaison :



où :

- Z_c est la cote du radier ;
- Z_p la cote du fond ;
- $a = Z_p - Z_c$ la hauteur de l'orifice ;
- Z_{am} la cote à l'amont de la liaison avec h_{am} la hauteur d'eau associée :
 $h_{am} = Z_{am} - Z_c$;
- Z_{av} la cote à l'aval de la liaison et h_{av} la hauteur d'eau associée :
 $h_{av} = Z_{av} - Z_c$;
- ϵ le coefficient de contraction verticale.

La liaison est aussi définie par :

- B la largeur de l'orifice ;
- S la section de l'orifice : $S = aB$;
- m le coefficient de débit ;
- un type particulier de clapet :
 - type 1 : correspond à un débit possible dans les 2 sens ;
 - type 2 : correspond à un clapet avec débit possible uniquement dans le sens casier origine \rightarrow casier fin (soit casier amont \rightarrow casier aval ou casier \rightarrow rivière) ;
 - type 3 : correspond à un clapet avec débit possible dans le sens casier fin \rightarrow casier origine (soit casier aval \rightarrow casier amont ou rivière \rightarrow casier).

Les valeurs Z_c , B , S et m ainsi que le type de clapet sont renseignés par l'utilisateur dans le fichier *cas*. Les paramètres a et Z_p sont calculés par le code : $a = \frac{S}{B}$ et $Z_p = Z_c + a$.

Le coefficient de contraction verticale ϵ est calculé par le code en fonction de la hauteur de l'orifice et de la charge (h_{am}) :

- * si $0 \leq \frac{a}{h_{am}} < 0.55$: $\epsilon = 0.65$;
- * si $0.55 \leq \frac{a}{h_{am}} < 0.9$: $\epsilon = 0.5 + 0.268 \frac{a}{h_{am}}$;
- * si $0.9 \leq \frac{a}{h_{am}} \leq 1$: $\epsilon = 0.745 + 0.255 \left(\frac{a}{h_{am}} - 0.9 \right)$.

Le calcul du débit d'échange dépend alors du type d'écoulement :

- **écoulement à surface libre** : $Z_{am} < Z_p$

L'orifice se comporte comme un seuil. On utilise alors la formule de la liaison seuil en imposant le coefficient d'activation α à 0,2 (voir la section 4.3.5). La cote de crête du seuil est prise égale à Z_c , sa largeur à B . Son coefficient de débit est lu dans le fichier *cas*. L'utilisateur doit donc renseigner deux valeurs de coefficient de débit : le coefficient de débit pour une loi de seuil et le coefficient de débit pour une loi d'orifice ;

- **écoulement submergé (en charge) noyé** : $Z_{am} > Z_p$ et $h_{av} > \frac{a}{2}$

Le débit est calculé par la formule suivante :

$$Q = m\epsilon S \sqrt{2g(h_{am} - h_{av})} \quad (286)$$

- **écoulement submergé (en charge) dénoyé** : $Z_{am} > Z_p$ et $h_{av} < \frac{a}{2}$

Le débit est calculé par la formule suivante :

$$Q = m\epsilon S \sqrt{2g(h_{am} - \frac{a}{2})} \quad (287)$$

Enfin, le calcul de la vitesse d'échange distingue le cas où l'orifice est submergé et libre :

- **dans le cas submergé** :

$$V_{ech} = \frac{Q_{ech}}{S} \quad (288)$$

- **dans le cas où l'orifice n'est pas en charge** :

$$V_{ech} = \frac{Q_{ech}}{S_m} \quad (289)$$

où $S_m = B.(Z_{moy} - Z_c)$ est la surface mouillée moyenne au-dessus de la liaison. Le calcul du niveau d'eau moyen Z_{moy} est donné par les formules suivantes :

- si $Z_{av} < Z_c$ alors $Z_{moy} = \frac{Z_{am} + Z_c}{2}$;
- si $Z_{av} > Z_c$ alors $Z_{moy} = \frac{Z_{am} + Z_{av}}{2}$.

4.3.5 Coefficient d'enneioement ou coefficient de correction

4.3.5.1 Nécessité d'un coefficient correcteur

Dans le cas de la liaison seuil, lorsque le régime devient noyé, il est nécessaire de faire intervenir la cote aval dans l'expression du débit. Cette cote aval est introduite par l'intermédiaire du coefficient d'enneioement C .

La validation du code [28] a montré que, lorsque le dénivelé entre les casiers ou entre un casier et la rivière tend vers 0, des instabilités numériques se produisent quelque soit le type de liaison. Le coefficient d'enneioement est donc également utilisé pour stabiliser le calcul. C'est pourquoi on l'appelle également coefficient correcteur.

Ainsi, dans le cas des liaisons seuil, le coefficient d'enneioement sert également de coefficient correcteur. Par contre, dans le cas des liaisons chenal et siphon, comme il n'y a pas lieu de faire intervenir de coefficient d'enneioement, seul le coefficient correcteur est appliqué et sa définition est conforme à celle retenue pour la liaison seuil.

4.3.5.2 Définition de la fonction C

Dans le noyau de calcul fluvial non permanent, les seuils noyés sont traités à l'aide d'un coefficient d'enneioement C fonction de la variable R :

$$R = \frac{Z_{aval} - Z_{seuil}}{Z_{amont} - Z_{seuil}} \quad (290)$$

avec Z_{seuil} la cote de crête du seuil. L'allure de la fonction C est parabolique. La dérivée de cette fonction n'est pas continue en 1. Or, dans la résolution du système des casiers la dérivée du débit intervient explicitement dans les calculs [29]. Il est donc nécessaire que la fonction C ainsi que sa dérivée soit continue.

D'autre part, la fonction C dépend d'un paramètre α appelé coefficient d'activation qui définit la période d'activation de la fonction C . Ainsi C n'est défini que pour : $R > \alpha$. Dans le cas d'une liaison seuil noyée, le coefficient α correspond au critère d'envolement.

Finalement, le choix standard retenu est que la fonction polynomiale $C(R, \alpha)$ satisfasse les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} C(R = \alpha) &= 1 \quad \text{et} \quad C(R = 1) = 0 \\ \frac{dC}{dR}(R = \alpha) &= 0 \quad \text{et} \quad \frac{dC}{dR}(R = 1) = 0 \\ \frac{d^2C}{dR^2}(R = \frac{1 + \alpha}{2}) &= 0 \end{aligned} \tag{291}$$

On obtient alors une fonction du troisième degré au lieu de la fonction parabolique retenue pour les vrais seuils en rivière dans le noyau fluvial. Outre la continuité des dérivées, cette formulation entraîne une décroissance plus rapide du débit lorsque les niveaux des deux casiers ainsi connectés se rejoignent.

La fonction retenue est définie ainsi :

- en régime dénoyé et sans correction : $R < \alpha$ et $C = 1$;
- en régime noyé et/ou avec correction : $R \geq \alpha$ ($R < 1$ dans tous les cas) et :

$$C = -2 \left(\frac{1 - R}{1 - \alpha} \right)^3 + 3 \left(\frac{1 - R}{1 - \alpha} \right)^2 \tag{292}$$

Le paramètre α a été fixé à 0.95 pour les liaisons chenal et siphon et varie entre 0.2 et 0.8 pour les liaisons seuil. Il est fixé par l'utilisateur en fonction du type de seuil.

La variable R est calculée par rapport à la cote Z_{seuil} qui désigne la cote de crête du seuil ou la cote moyenne du fond du chenal ou du siphon.

4.3.6 Apport de pluie

Les débits d'apport de pluie sont fournis par l'utilisateur à travers la définition d'un hydrogramme $Q(t)$. Le débit au temps t est une valeur moyenne du débit à l'instant t et du débit à l'instant $t - dt$. L'interpolation des débits à partir de l'hydrogramme est linéaire.

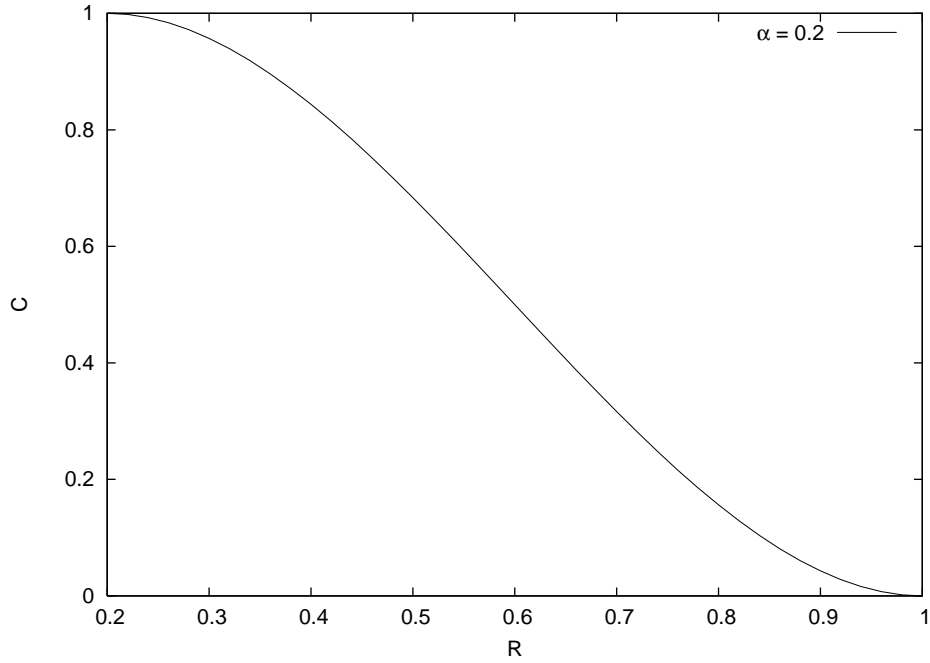


FIGURE 36 – fonction $C = f(R)$

4.4 Couplage avec le noyau fluvial

Les casiers sont couplés directement avec la rivière de manière implicite dans la matrice du système de transition d'état 120. Deux nouvelles équations sont introduites afin de tenir compte :

- du débit d'échange dans les liaisons ;

$$A_{liaison}\Delta Q_{liaison} + B_{liaison}\Delta Z_{amont} + C_{liaison}\Delta Z_{aval} = D_{liaison} \quad (293)$$

- et de la variation de cote dans les casiers ;

$$S_{casier}\frac{\Delta Z_{casier}}{\Delta t} = \Sigma Q_{liaison} \quad (294)$$

avec S_{casier} la surface d'un casier et :

$$A_{liaison} = -1; B_{liaison} = \frac{\partial Q}{\partial Z_{amont}}; C_{liaison} = \frac{\partial Q}{\partial Z_{aval}}; D_{liaison} = 0$$

Pour chaque casier et chaque liaison, la taille du système à résoudre 120 est augmenté d'une variable et d'une équation. Dans le cas d'une liaison rivière-casier, les équations de Saint-Venant discrétisées sur les deux sections du lit mineur encadrant la liaison sont remplacées. L'équation de continuité est réduite à l'égalité des débits et l'équation de la dynamique à l'égalité des cotes.

Dans le cas simple d'un bief discrétisé avec 7 sections de calcul, le système initial de Saint-Venant s'écrit :

$$\begin{pmatrix}
 -J & G & H & & & & & & \\
 -O & L & M & & & & & & \\
 & -I & -J & G & H & & & & \\
 & -N & -O & L & M & & & & \\
 & & -I & -J & G & H & & & \\
 & & -N & -O & L & M & & & \\
 & & & -I & -J & G & H & & \\
 & & & -N & -O & L & M & & \\
 & & & & -I & -J & G & H & \\
 & & & & -N & -O & L & M & \\
 & & & & & -I & -J & G & \\
 & & & & & -N & -O & L &
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \Delta Z_1 \\
 \Delta Q_2 \\
 \Delta Z_2 \\
 \Delta Q_3 \\
 \Delta Z_3 \\
 \Delta Q_4 \\
 \Delta Z_4 \\
 \Delta Q_5 \\
 \Delta Z_5 \\
 \Delta Q_6 \\
 \Delta Z_6 \\
 \Delta Q_7
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 K \\
 P \\
 K \\
 P \\
 K \\
 P \\
 K \\
 P \\
 K \\
 P \\
 K \\
 P
 \end{pmatrix}
 \quad (295)$$

L'insertion d'un casier avec une liaison rivière-casier comprise entre les sections 4 et 5 au système modifié suivant :

$$\begin{pmatrix} -J & G & H \\ -O & L & M \\ & -I & -J & G & H \\ & -N & -O & L & M \\ & & -I & -J & G & H \\ & & -N & -O & L & M \\ & & & 1 & & -1 \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & & -I & -J & G & H \\ & & & & -N & -O & L & M \\ & & & & & -I & -J & G \\ & & & & & -N & -O & L \\ & & B & & C & & A \\ & & & & & & -1 & \frac{S}{\Delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta Z_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Z_2 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta Z_3 \\ \Delta Q_4 \\ \Delta Z_4 \\ \Delta Q_5 \\ \Delta Z_5 \\ \Delta Q_6 \\ \Delta Z_6 \\ \Delta Q_7 \\ \Delta Q_l \\ \Delta Z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \\ P \\ K \\ P \\ K \\ P \\ \Sigma Q \\ \Sigma Z \\ K \\ P \\ K \\ P \\ D \\ Q_l \end{pmatrix} \quad (296)$$

4.5 Pré-traitement des données

Le noyau de calcul du système des casiers nécessite de connaître, pour chaque cote Z de la surface libre dans un casier, la surface au miroir $S(Z)$ et le volume $V(Z)$ correspondant. Pour cela, il est nécessaire de définir des lois $S(Z)$ et $V(Z)$ qui associent à une cote donnée la surface et le volume correspondant. Ces lois doivent être discrétisées ; ce ne sont donc pas des fonctions continues. Elles ont un nombre de couples (S, Z) et (V, Z) bien défini et l'écart entre les cotes est constant. Cette opération de discrétisation s'appelle le planimétrage. L'écart entre les cotes est appelé pas de discrétisation ou encore pas de planimétrage.

L'utilisateur a la possibilité de renseigner ces lois $S(Z)$ et $V(Z)$ discrétisées *à la main*, c'est-à-dire directement dans le fichier de géométrie des casiers. Cependant, ces lois sont souvent difficiles à déterminer et l'utilisateur peut alors les faire calculer automatiquement par le code, après avoir défini les points frontières et les points intérieurs caractéristiques du casier.

Le principe du planimétrage automatique est le suivant.

\Rightarrow Calcul des cotes

Les cotes des points intérieurs sont rangées dans l'ordre croissant dans un tableau que l'on nommera ZINT.

Ainsi, le tableau ZINT est tel que :

$Z_{INT}(i - 1) \leq Z_{INT}(i)$ pour $i = 2..$ nombre de points intérieurs.

Le tableau des cotes de planimétrage est le tableau Z .

La première cote de planimétrage est la plus petite cote des points intérieurs :

$Z(1) = \text{Min}(Z(i), i = 1..$ nombre de points intérieurs) $) = Z_{INT}(1)$.

Les cotes sont ensuite rangées par ordre croissant avec :

$Z(i + 1) - Z(i) =$ pas de planimétrage.

Le nombre de cotes est égal au nombre de pas de planimétrage N_{planim} souhaité.

La dernière cote est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Z(N_{planim}) &= Z(1) \\ &+ (N_{planim} - 1) \\ &\times \text{ pas de planimétrage} \end{aligned}$$

\Rightarrow Calcul des surfaces

Les points frontière permettent de définir la surface maximale du casier (S_{max}) : cette surface est calculée à partir de la définition de l'aire d'un polygone. Dans le cas où l'utilisateur a choisi l'option de calcul permettant de définir une surface indépendante de la cote, la surface du casier est égale à S_{max} quelque soit la cote dans le casier.

Dans l'autre cas, la première surface est calculée de la façon suivante :

$S(1) = S_{max} \times (\text{nombre de points intérieurs ayant pour cote de référence } Z(1)) / (\text{nombre de points intérieurs})$

Nous appellerons Z_{max} la plus grande cote des points intérieurs :

$$\begin{aligned}
Z_{max} &= \text{Max}(Z(i), i = 1..\text{nombre de points intérieurs}) \\
&= Z_{INT}(\text{nombre de points intérieurs})
\end{aligned}$$

Tant que cette cote n'est pas atteinte, le calcul de $S(i)$ est le suivant :

soit k tel que : $Z_{int}(k-1) \leq Z(i) < Z_{INT}(k)$

$$S_1 = \frac{k-1}{\text{size}(Z_{INT})} S_{max} \quad (297)$$

où $\text{size}(Z_{INT})$ désigne la taille du tableau Z_{INT} .

$$S_2 = \frac{k}{\text{size}(Z_{INT})} S_{max} \quad (298)$$

$$\alpha = \frac{Z(i) - Z_{INT}(k-1)}{Z_{INT}(k) - Z_{INT}(k-1)} \quad (299)$$

$$S(i) = (1 - \alpha) \times S_1 + \alpha \times S_2 \quad (300)$$

Enfin, une fois que la cote Z_{max} est dépassée ou égale, la surface est égale à la surface maximale du casier : $S(i) = S_{max}$.

⇒ Calcul des volumes

En ce qui concerne les volumes, le premier volume est nul : $V(1) = 0$. En effet, il correspond à la cote du fond du casier, donc à un casier vide. Les autres sont définis par la relation :

$$V(i) = V(i-1) + [(S(i-1) + S(i))/2] \times \text{pas de planimétrage}$$

EXEMPLE :

Dans cet exemple (figure 37), on présente une vue de dessus d'un casier avec la position des points intérieurs cotés. Les positions sont repérées par leurs coordonnées (X, Y) .

Le pas de planimétrage est 1 m, le nombre de pas de planimétrage est 10.

Dans cet exemple, le code détermine les lois $S(Z)$ et $V(Z)$ indiquées sur le tableau 4.

TABLE 3 – Tableau récapitulatif des lois $S(Z)$ et $V(Z)$

Cote Z	Surface S	Volume V
$Z(1) = Z_{INT}(1)$	$S(1) = S_{max} \times$ (nombre de points intérieurs ayant pour cote de référence $Z(1)$) / (nombre de points intérieurs)	$V(1) = 0$
$Z(i) = Z(i-1) +$ pas de planimétrage	$S(i) = S(i-1) + \Delta S$ $\Delta S = (1 - \alpha)S_1 + \alpha S_2$	$V(i) = V(i-1) +$ $(S(i-1) + S(i))/2 \times$ pas de planimétrage
$Z(i) \geq Z_{INT}$ (nombre de points intérieurs)	$S(i) = S_{max}$	$V(i) = V(i-1) +$ $(S(i-1) + S(i))/2 \times$ pas de planimétrage
Z (nombre de pas de planimétrage) = $Z(1)$ + (nombre de pas de planimétrage - 1) \times pas de planimétrage	S (nombre de pas de planimétrage) = S_{max}	$V(i) = V(i-1) +$ $(S(i-1) + S(i))/2 \times$ pas de planimétrage

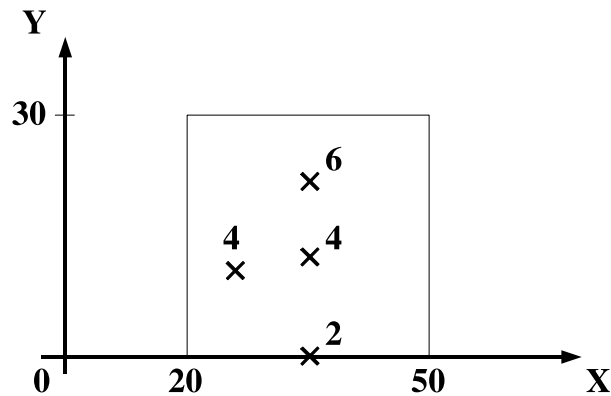


FIGURE 37 – Exemple de planimétrage d'un casier

TABLE 4 – Exemple de résultat d'un planimétrage

Cote Z (m)	Surface S (m^2)	Volume V (m^3)
2	22.5	0
3	33.8	28.1
4	67.5	78.8
5	78.8	151.9
6	90	236.3
7	90	326.3
8	90	416.3
9	90	506.3
10	90	596.3
11	90	686.3

5 Le calage automatique du coefficient de Strickler

Avertissement : ce calage n'est possible qu'en régime permanent (noyau SARAP) et sur un seul bief avec la version actuelle de MASCARET.

5.1 Introduction

Pour la modélisation hydraulique 1D et 2D basée sur la résolution des équations de Saint-Venant, il est nécessaire de disposer de différentes données que sont la géométrie, les conditions initiales en régime non permanent, les conditions limite et le coefficient de Strickler. Toutes les données, hormis le coefficient de Strickler, sont parfaitement définies par les conditions d'étude (les données de géométrie sont fournies par des campagnes de mesures ; les conditions aux limites et les conditions initiales correspondent au cas d'étude).

Le coefficient de Strickler modélise les pertes de charge linéaires dues au frottement sur le fond et les berges le long de la rivière. Or, dans le cadre d'une modélisation monodimensionnelle, il prend aussi en compte des phénomènes de dissipation qui ne sont pas modélisés par ailleurs. Par conséquent, la détermination de ce coefficient nécessite un calage, réalisé à partir de lignes d'eau mesurées pour des débits du même ordre de grandeur que ceux de l'étude.

Cette étape de calage, absolument essentielle pour la qualité de l'étude, est une des étapes les plus consommatrices en temps dans une étude.

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode d'identification des coefficients de Strickler intégrée au système MASCARET et basée sur la résolution d'un problème inverse. Cette méthode d'identification des paramètres de calage permet de diminuer une des phases les plus longues des études et ainsi obtenir des gains importants sur les délais et de mieux maîtriser les incertitudes liées aux coefficients de Strickler.

La première partie est consacrée à la présentation générale d'un problème d'identification de paramètres. Puis, nous présentons l'algorithme complet appliqué au cas du coefficient de Strickler.

La validation sur des cas schématiques et sur un cas réel est détaillée dans

la note [30].

5.2 Position du problème

Dans ce premier paragraphe, nous présentons brièvement le problème d'identification du coefficient de Strickler. L'estimation de paramètres revient à trouver les coefficients de Strickler qui minimisent une fonction coût J égale à l'écart quadratique entre les mesures et le résultat d'une simulation numérique. On rappelle le principe général des méthodes existantes pour la minimisation d'un problème à plusieurs variables.

Considérons un écoulement permanent sur un tronçon de rivière. On dispose d'un certain nombre de points de mesure avec les cotes correspondant au débit qui nous intéresse. A partir de ces mesures, on cherche à identifier le coefficient de Strickler (ou les coefficients de Strickler sur différentes zones du domaine) qui va minimiser la fonctionnelle J suivante :

$$J(K) = \sum_{i=1..m} \alpha_i (Z_i^m - Z_i^c(K))^2 \quad (301)$$

où :

- m est le nombre de points de mesure ;
- α_i est une pondération pour chaque mesure (ce coefficient peut être égal à zéro si la mesure n'est pas disponible) ;
- Z_i^m est la cote mesurée au point i pour le débit considéré ;
- Z_i^c est la cote calculée au point i par la résolution des équations de Saint-Venant avec un ensemble de coefficients de Strickler K_i .

Remarques :

- J est une fonction coût qui mesure l'écart quadratique entre la cote mesurée et la cote calculée pour un ensemble de coefficients de Strickler donné ;
- J n'est pas connue analytiquement. Pour la déterminer, il faut évaluer les cotes calculées pour un jeu de coefficients de Strickler donné à l'aide d'une résolution d'un problème de Saint-Venant.

Pour minimiser la fonctionnelle J , on peut trouver dans la littérature de nombreuses méthodes d'optimisation. A l'heure actuelle, la méthode utilisée est de type quasi-Newton BFGS avec prises en compte des contraintes de bornes sur les variables d'optimisation. Cette méthode du second ordre ne nécessite pas le calcul exacte de la Hessienne car elle est approximée par l'analyse itérative des différents gradients.

L'algorithme de quasi-Newton a la forme générale suivante :

- 1) détermination du point de départ x_0 et d'une matrice Hessienne approchée B_0 (par exemple l'identité);
- 2) pour : $k = 0, 1, 2 \dots$ jusqu'à convergence :
 - calculer d_k en résolvant : $B_k \cdot d_k = -\nabla J(x_k)$;
 - mettre à jour la solution avec une recherche linéaire :
$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k \cdot d_k$$
;
 - mettre à jour la matrice B_{k+1} par la formule BFGS;

La convergence peut être testée sur la nullité du gradient (condition nécessaire d'optimalité).

Cette méthode n'a pas de convergence garantie. Elle est cependant performante si la fonction à optimiser admet un développement de Taylor quadratique près de l'optimum.

5.3 Algorithme d'identification des coefficients de Strickler

Dans ce paragraphe, on présente succinctement l'algorithme d'identification des coefficients de Strickler pour un écoulement monodimensionnel permanent sur un seul bief et la méthode de quasi-Newton pour minimiser la fonction coût.

5.3.1 Rappels des équations de Saint-Venant

On représente l'écoulement filaire d'une rivière par un système d'équations aux dérivées partielles où le frottement a été modélisé par la relation de Strickler. Ces équations sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes après plusieurs hypothèses simplificatrices dont :

- une direction des vitesses uniforme;
- un profil des vitesses constant sur une section de la rivière.

En régime permanent, on se donne des conditions limites qui sont un débit à l'entrée du domaine de modélisation et une cote ou une relation hauteur-débit à l'aval.

Les inconnues sont la cote en chaque point du domaine de calcul : $[x_0, x_1]$. Le débit est déterminé par la condition à la limite amont et les apports de

débit le long du domaine de calcul $[x_0, x_1]$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = q_a \quad (302)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{S(Z)} \right) + gS(Z) \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{gQ^2}{K^2 S(Z) R^{\frac{4}{3}}} = 0 \quad (303)$$

$$\begin{cases} Q(x_0) = Q_{am} \\ Z(x_1) = Z_{aval} \end{cases} \quad (304)$$

avec :

- x est l'abscisse curviligne le long de la rivière ;
- Q est le débit ;
- $S(Z)$ est la section mouillée de la rivière dépendant de la cote ;
- R est le rayon hydraulique, g la gravité et K le coefficient de Strickler qui dépend de x . En fait, ce coefficient sera considéré constant par zone.

L'équation de continuité (302) permet de calculer le débit en tous points du domaine de calcul, connaissant le débit imposé à la condition limite amont

L'équation (303) de quantité de mouvement est une équation différentielle qui est discrétisée par différences finies. Après discrétisation, on a à résoudre une équation de la forme : $Z = F(Z)$.

Ce qui revient à chercher les zéros de la fonction : $Z - F(Z)$. A chaque résolution d'un problème de Saint-Venant, on fait alors appel au noyau de calcul dédié à la résolution des équations de Saint-Venant en régime permanent du système MASCARET. Pour plus de détails, on peut se reporter au chapitre consacré aux principes du noyau fluvial permanent.

La solution de cette équation différentielle, c'est-à-dire les cotes calculées en chaque point discret du domaine dépend du coefficient de Strickler qui n'est pas une donnée du problème mais résulte d'un calage.

5.3.2 Présentation du programme d'optimisation

Dans la présentation de l'algorithme d'identification du coefficient de Strickler, la phase de résolution du problème discret de Saint-Venant permanent est appelée *résolution d'un problème de Saint-Venant permanent pour un ensemble discret de coefficients de Strickler définis par zone*.

Le programme de minimisation utilisé se nomme **N2QN1** de la librairie **MODULOPT**⁶ développé et maintenu principalement par les membres du projet **ESTIME** de l’Institut National pour la Recherche en Informatique et Automatique (INRIA). Ce solveur est adapté aux problèmes de minimisation “bornés” d’une fonction objectif J avec des contraintes fixes, et ayant un très grand nombre de variables. Il utilise une méthode de type quasi-Newton BFGS avec contraintes. L’intérêt des bornes est de pouvoir limiter la recherche de coefficients de frottements à des valeurs cohérentes d’un point de vue physique.

Comme indiqué précédemment, le fonctionnement interne du solveur **N2QN1** s’appuie sur une estimation de la matrice Hessienne de la fonction coût étudiée. Il comporte plusieurs modes d’initialisation de cette matrice (initialisation scalaire et initialisation vectorielle) et nécessite le passage de plusieurs paramètres, dont en particulier :

- le vecteur d’entrée de la fonction étudiée (ici le coefficient de frottement) ;
- la valeur de la fonction coût ;
- le gradient relatif à la valeur de la fonction coût ;
- divers paramètres internes (comme le nombre de simulations, d’itérations, la précision attendue, etc.).

Le principe général est de fournir au solveur les paramètres décrits plus haut, ainsi qu’un pointeur vers une fonction simulateur. Celle-ci doit calculer la valeur de la fonction coût et le gradient de celle-ci à partir des paramètres d’entrée fournis par le minimiseur (dans notre cas le coefficient de frottement). Ces paramètres sont modifiés en regard de la précédente itération, elle même basée sur la valeur de la fonction coût et du gradient. Le solveur **N2QN1** peut avoir à tester plusieurs directions avant d’arriver à estimer convenablement le minimum. Le simulateur est appelé jusqu’à ce qu’un des critères d’arrêt soit atteint.

Ces critères sont modélisés par les paramètres *epsabs* et *dxmin*, qui représentent respectivement la précision requise sur chaque coefficient de frottement K , et la précision du gradient. **N2QN1** s’arrête lorsqu’il trouve K_k tel que, pour obtenir K_{k+1} avec $J(K_{k+1}) \leq J(K_k)$ il doit prendre $|K_{k+1}^i - K_k^i| \leq dxmin^i$, $i = 1, \dots, N_{zones}$, ou lorsque $||\nabla J_k|| \leq epsabs$.

Le coefficient de frottement obtenu après convergence avec la méthode de

6. <https://who.rocq.inria.fr/Jean-Charles.Gilbert/modulopt/modulopt.html>

quasi-Newton BFGS avec contraintes doit permettre un calcul de cotes très proches des cotes mesurées. L'ensemble de la résolution implémentée dans N2QN1 est basée sur une approximation de la Hessienne de la fonction objectif, qui est calculée à partir du gradient de cette dernière. Or, si ce gradient est obtenu par différences finies, il est lui-même une approximation. Cette double approximation peut entraîner une perte d'information très importante. Les résultats qui en découlent manquent alors de précision.

Pour palier à ce problème, il est nécessaire de calculer le gradient analytique de la fonction coût par rapport au coefficient de frottement plutôt qu'une approximation de celui-ci par différences finies. Ce calcul est difficile pour un code industriel comme MASCARET. Il existe des outils mathématiques de différentiation automatique d'un code de calcul (voir par exemple : <http://www.autodiff.org/>), permettant le calcul de dérivées exactes. L'un de ces outils, le logiciel TAPENADE [42] développé par l'INRIA ⁷, a été choisi pour rendre viable l'utilisation de la méthode de quasi-Newton BFGS.

5.4 Méthode de calage d'un lit composé

Les coefficients de Strickler des lits mineurs et majeurs sont fixés par zones pour calculer une ligne d'eau mesurée pour un débit de plein bord et un débit débordant. En première étape, une estimation des coefficients de Strickler du lit mineur est réalisée par calage automatique à partir de la ligne d'eau mesurée pour le débit de plein bord. Puis, avec ces coefficients de Strickler mineurs obtenus par calage automatique, on estime dans un deuxième temps, par calage automatique, les coefficients de Strickler du lit majeur dans le cas du débit débordant.

5.5 Validation et conclusions

La validation de l'algorithme d'identification de paramètres a été faite dans un premier temps sur un cas schématique, ce qui a permis de contrôler la solution obtenue, puis l'algorithme a été appliqué à une étude réelle.

En cas de régime permanent, le calage automatique du coefficient de Strickler par une méthode d'identification de paramètres avec un calcul de gradient de la fonction coût donne des résultats satisfaisants sur des cas schématiques et sur des cas réels. Néanmoins, il faut noter une convergence qui n'est pas extrêmement rapide surtout lorsqu'on approche d'un minimum

7. <http://www-tapenade.inria.fr:8080/tapenade/index.jsp>

local. Dans les cas pratiques, la précision obtenue suffit car il n'est pas réaliste de souhaiter une précision supérieure au *cm* sur des mesures.

Les prochains développements concerneront d'une part la prise en compte du régime transitoire en introduisant le problème adjoint pour évaluer le gradient de la fonction coût et d'autre part le changement de la méthode de minimisation pour d'autres méthodes plus robustes et plus récentes (méthode du gradient conjugué ou les méthodes de Quasi-Newton).

Références

- [1] J.-M. HERVOUET, *hydrodynamics of Free Surface Flows modelling with the finite element method*, Ed. Wiley, 2007
- [2] M. UAN, *Etablissement des équations régissant les écoulements non permanents à surface libre avec champ d'inondation*, Rapport EDF-LNH C43-75-66, 1975
- [3] G. NICOLLET et M. UAN, *ELcoulements permanents à surface libre en lits composés*, La Houille Blanche, no. 1, pp. 21-30, janvier 1979
- [4] J. A. CUNGE et M. WEGNER, *Intégration numérique des équations d'écoulement de Barré de Saint-Venant par un schéma implicite de différences finies*, La Houille Blanche, no. 1, pp. 33-39, Janvier 1964
- [5] F. ZAOUI, *Implantation d'une méthode de résolution matricielle dans MASCARET (noyau fuvial non-permanent)*, Rapport EDF H-P73-2010-02037-FR, 2010
- [6] Z. ZLATEV, J. WASNIEWSKI and K. SCHAUMBURG, *Y12M Solution of large and sparse systems of linear algebraic equations : documentation of subroutines*, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. Kg, october 1981
- [7] N. GOUTAL, *Note de principe du code RUPTUR*, Rapport EDF HE-43/91/038
- [8] M. AFIF, *Analyse de quelques problèmes hyperboliques issus de la modélisation des crues de rivières*, Thèse de l'Université de Saint-Etienne, Juin 1986
- [9] E. GODLEWSKI and P.A. RAVIART, *Hyperbolic systems of conservation laws*, Mathématiques et applications, Ellipses, 1991
- [10] J. SMOLLER, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1983
- [11] P.D. LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of stock wales*, SIAM, Regional Conference Series, Lectures in applied MATH., Philadelphia, 1972
- [12] A. PAQUIER, *Modélisation et simulation de la progression de l'onde de rupture de barrage*, Thèse de l'Université Jean Monnet, Octobre 1995
- [13] M.E. VAZQUEZ CENDON, *Estudio de esquemas descentrados para su aplicación a las leyes de conservación hiperbólicas con términos fuente*, Tesis doctoral, Universidad Santiago de Compostella, Spain, 1994
- [14] D. AMBROSI, *Approximate of shallow water equations by Roe's Riemann solver*, International Journal for Numerical Methods in FLuids, Vol. 20, pp. 157-168, 1995

- [15] L.A. MONTHE, *Etude des Equations aux Dérivées Partielles Hyperboliques Raides. Application aux équations de Saint-Venant*, Thèse de l'Université de Rouen, Juillet 1997
- [16] P.L. ROE, *Approximate Riemann solvers, parameters vectors, and difference schemes*, Journal of Computational Physics, Volume 43, Issue 2, October 1981, Pages 357-372
- [17] T. BUFFARD, *Analyse de quelques méthodes de volumes finis non structurés pour la résolution des équations d'Euler*, Thèse de l'Université Paris VI, décembre 1993
- [18] R. J. LEVEQUE, *Numerical methods for conservation laws*, Lecture in Mathematics ETH, Zurich, 1990
- [19] N. GOUTAL, *Implication du noyau transcritique de **MASCARET***, Rapport EDF H-P76/2002/008/B, 2002
- [20] N. GOUTAL et F. MAUREL, *Note de principe de la version 4.1 du code **MASCARET***, Rapport EDF HE-43/96/075/B, 1996
- [21] N. GOUTAL et F. MAUREL, *Proceedings of the 2nd workshop on the dam-break wave simulation*, Rapport EDF HE-43/97/016/A, 1997
- [22] O. LE COZ, *Un schéma équilibre pour les écoulements à surface libre instationnaires avec bathymétrie*, Thèse de l'Université Bordeaux I, Talence, 1996
- [23] C. BON, *Modélisation et simulation numérique d'écoulements hydrauliques et de ruissellement en topographie quelconque*, Thèse de l'Université Bordeaux I, Talence, 1997
- [24] F. MAUREL, *Traitement des confluent dans le logiciel **MASCARET** 4.0 - Principes de la méthode et éléments de validation*, Rapport EDF HE-43/96/067/A, 1996
- [25] E. BEN SLAMA, *Code **EROSIF** - Note de principe, note d'utilisation et éléments de validation*, Rapport EDF HE-43/95/073/A, 1995
- [26] N. GOUTAL, *Système **MASCARET** v5p2 : ajout de nouvelles singularités*, Rapport EDF HP-76/03/020/A, 2003
- [27] M. CARLIER, *Hydraulique générale et appliquée*, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, Eyrolles, 1987
- [28] C. RISSOAN et E. MONIER, *Système **MASCARET** : validation du couplage d'un système de casiers avec le noyau fluvial non permanent*, Rapport EDF HP-76/02/043, 2002
- [29] N. GOUTAL et C. RISSOAN, ***MASCARET** 5.1 Note d'utilisation*, Rapport EDF HP-76/02/013, 2002

- [30] N. GOUTAL, *Calage automatique du coefficient de Strickler en régime permanent sur un bief unique*, Rapport EDF HP-75/05/021/A, 2005
- [31] A. LEBOSSE, *Code CASTOR – Calage du coefficient de Strickler Optimisé en Rivière – Note de principe*, Rapport EDF HE-43/89/40
- [32] A. LEBOSSE, *Code CASTOR – Calage du coefficient de Strickler Optimisé en Rivière – Note de validation*, Rapport EDF HE-43/89/57
- [33] A. LEBOSSE, *Estimation of the Manning-Strickler-Roughness coefficient in St-Venant equations*, Rapport EDF HE-43/89/58
- [34] M.-O. BRISTEAU, N. GOUTAL and J. SAINTE-MARIE *Numerical simulations of a non-hydrostatic shallow water model*, Computers and Fluids 47 (2011) 51-64
- [35] N. GOUTAL, *Note de principe et validation des équations de Saint-Venant permanentes en régime transcritique*, Rapport EDF HP-73-2008-3786
- [36] A. PREISSMANN, *Propagation des intumescences dans les canaux et rivières*, 1^{er} congrès de l'Association Française de Calcul, Grenoble, 1961
- [37] E. A. MESELHE and F. M. HOLLY Jr., *Invalidity of the Preissmann scheme for transcritical flow*, Journal of Hydraulic Engineering, July 1997, pp. 652 – 655
- [38] V. KUTIJA and C. J. M. HEWETT, *Modelling of supercritical flow conditions revisited; NewC Scheme*, Journal of Hydraulic Research, Vol. 40, No. 2, 2002
- [39] T. C. JOHNSON, M. J. BAINES and P. K. SWEBY, *A box scheme for transcritical flow*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 55, pp. 895 – 912, 2002
- [40] E. F. TORO, *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*, Ed. Wiley and Sons, 2001
- [41] V. GUINOT, *Uncertainty in modelling from an engineering perspective*, SimHydro 2010 : Hydraulic modeling and uncertainty, 2 – 4 June 2010, Sophia Antipolis
- [42] L. HASCOET, V. PASCUAL, *The Tapenade Automatic Differentiation tool : Principe, Model and Specification*, Journal ACM Transactions on Mathematical Software 39 :3, 2013