Equation non linéaires

I-INTRODUCTION :

On considère tout d'abord une fonction $f : R \to R$ d'une seule variable réelle x et on cherche l'équation $f(x) = 0$,c.à.d. trouver une valeur une approchée x d'un réel x^* vérifiant $f(x) = 0$.

Pour '' chaque'' comparer les différentes méthodes '',On utilise ,''de résolution que l'on va considérer ,On utilise les notations suivantes de vitesse de convergence d'une suite.

5-1-1 : Définition :

Soit $(x)n \in N$ une suite convergente et x^* sa limite.

1-On dit que la convergence de $(x_n)_{n\in N}$est linéaire de facteur $k \in]0\,,1[$ s'il existe $n_\circ \in N$ tel que pour $n \geq n_\circ$, $|x_{n+1} - x*| \leq k|x_{n+1} - x*|$.

2-On dit que la convergence de $(x_n)_{n\in N}$est supplémentaire d'ordre $p \in N$, $p > 1$ s'il existe $n_\circ \in N$ ''tel que pour tout k'' et $k > 0$ tel que pour tout $n \geq n_\circ$
$|x_{n+1} - x^*| \leq |x_n - x*|^p$.

Si $p = 2$ .On parle de convergence quadratique,

Si $p = 3$ .On parle de convergence cubique.

On remarque que k n'est pas unique.

5-2 : Méthode de dichotomie.

La méthode de dichotomie est une méthode de localisation des racines d'une équation $f(x) = 0$ basée sur le théorème des valeurs intermédiaire.

'' si $f : [a, b] \to R$ est continue et $f(a). f(b) < 0$, alors il existe $x* \in]a, b[$ tel que $f(x*) = 0$''

L'idée est donc de scindé un intervalle $[a, b]$ vérifiant la propriété $f(a). f(b) < 0$,en deux intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$ avec $c = \frac{a+b}{2}$ et de tester les bornes des intervalles nouveaux { On calcule $f(a). f(c)$ et $f(c). f(b)$ } pour en trouver un (au mois) qui vérifie encore la propriété des valeurs intermédiaire)

i.e , $f(a). f(c) < 0$ et /ou $f(c). f(b) < 0$

On itère ensuite ce procédé ce procédé un certain nombre d'itération de pendant de la précision que l'on sur la solution.

5-2-1 : Théorème :

Le nombre minimum d'itération de la méthode de dichotomie, nécessaire pour approcher x^* à un Ɛ prés est :

$$E\left(\frac{\ln(b-a)-ln2}{ln2}\right)$$

E(x) désigne la partie entière du réel x.

Preuve :

Ã la première itération, la longueur de l'intervalle de l'intervalle est $\frac{b-a}{2}$ ….., à la n-ième itération la longueur de l'intervalle est $\frac{b-a}{2^n}$.

L'erreur commise à la n-ième itération à est donc majorée par $\frac{b-a}{2^n}$.

Le nombre n d'itération à effectue droit alors vérifier $\frac{b-a}{2^n} \leq Ɛ$ qui est équivalent à

n $\geq \frac{\ln(b-a)-\ln(Ɛ)}{ln2}$

5-2-2- PROPOSITION :

La convergence de la méthode de dichotomie est linéaire d'un facteur $\frac{1}{2}$. (TD)

5-3- Méthode de point fixe :

La méthode itérative de pointe fixe que nous allons décrire et aussi appelée Méthode d'approximation successives.

5-3-1-Définition :

Soit $g : R \rightarrow R$. On dit que $x \in R$ est un point fixe de g si $g(x) = x$.
Le principe de méthode de point fixe est d'associé à l'équation $f(x) = 0$ une équation de point fixe $g(x) = x$. de sorte que trouver un point fixe de . La technique pour approximer le point fixe de g est alors basé sur le résultat suivant.

5-3-2- Définition :

Soit $(x_n)_{n\in N}$la suite définie par $x_o \in R$ donné et $x_{n+1} = g(x_n)$.

Si $(x_n)_{n\in N}$est convergente et g est continue, alors la limite de $(x_n)_{n\in N}$est un pointe de g.

Nous devons donc trouver les conditions sur g pour que la suite $(x_n)_{n\in N}$ définie ci-dessus converge.

5-3-3- Définition :

Soit $g : \Omega \rightarrow R$ .On dit que g est lipchitzienne sur Ω de constante de lipchitzienneγ pour tout $(x, y) \in \Omega^2$, On a $|g(x) - g(y)| \leq \gamma|x - y|$.

On dit que g est strictement contraction sur Ω si g est $\gamma\_lipchitzienne$ sur Ω avec $\gamma < 1$.

5-3-4-Théorème du point fixe :

Soit g une application strictement contraction sur un intervalle $[a, b] \subset R$ de constante de lipchitzienne $\gamma < 1$.

Supposons que l'intervalle $[a, b]$ soit stable par g c.à.d. $g([a, b]) \subset [a, b]$ et la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge linéairement de facteur γ vers x^* pour point initial $x_0 \in [a, b]$ .De plus $\forall n \in N. |x_n - x * \Big| \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \Big| x_1 - x_0|$.

Preuve :[Admet pour ce cours]

Remarque :

On peut montrer aussi que $\forall n \in N$

$$|x_n - x * \Big| \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \Big| x_1 - x_0|$$

Si $\gamma \leq \frac{1}{2}$ Alors $|x_n - x_n *| \leq |x_n - x_{n+1}|$.Dans ce cas on pour a utiliser le est d'arrêt $|x_n - x_{n+1}| < \mathcal{E}$. qui certifiera une précision sur le résultat.

Revenant maintenant à note problème initial ou on cherche à résoudre l'équation $(x) = 0$, posons $g(x) = x - \lambda f(x)$; ou $\lambda \in R$ normal . λ arbitraire.

$$g(x) = x = x - \lambda f(x)$$

$$\Leftrightarrow \lambda f(x) = 0 \qquad \text{avec } \lambda \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0$$

D'après le théorème du point fixe {5-3-4} , une combien suffisante pour que g admette un pinte fixe dans l'intervalle $[a, b]$, est que $[a, b]$ est stable par g ,est que g soit strictement contractante sur $[a, b]$ avec une constante de $Lipchitz$ $\gamma < 1$.

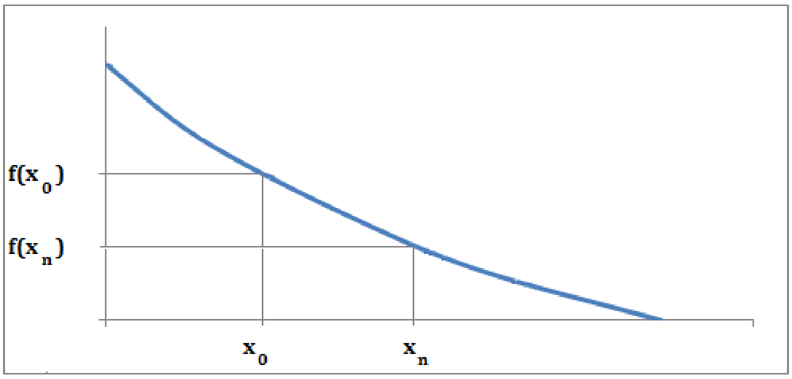
On a alors comme conséquence directe de la définition de contractante :

$$\forall x \in [a, b] \; |g'(x) < \gamma| \Leftrightarrow |1 - f'(x)| < \gamma < 1$$

Ce que implique en particulier que f'ne change pas de signe sur $[a, b]$ et que λ de même signe que f' géométriquement , on constant le suite des itères : $x_{n+1} = x_n - \lambda f(x_n)$

En remarquant que la droit de pende μ et passant par $(x_n, f(x_n))$ a pour équation $y = f(x_n) - \mu(x_n - x)$.et couple l'axe des abscisses en $= x_n - \frac{f(x_n)}{\mu}$.

On voit que x_{n+1} l'obtient comme point d'intersection de la droite de la pente $\frac{1}{\gamma}$ et passant par $(x_n, f(x_n))$ avec l'axe des abscisses.



5-3-6. Proposition :

On considère l'équation $g(x) = x$ ou g et une fonction au mois $(p + 1)$ fois dérivable avec $p \geq 1$ .supposons que les hypothèse de théorème (5-3-4)(point fixe)

Soient vérifiées de lette santé que g admette un point fixe $x * \in [a, b]$.

Si on suppose que $g'(x *) = g''(x *) = \cdots = g^{(p)}(x) = 0$ et $g^{(p+1)}(x *) \neq 0$ alors la convergence de la méthode est d'ordre $p + 1$

Preuve :(TD)

5-3-7.Proposition :

Soit g une fonction dérivable sur l'intervalle $[a, b]$.

Si sa dérivée g' vérifie $max|g'(x)| = L < 1$, Alor est strictement contractante sur $[a, b]$ de constante de $Lipchitz\ L$.{pour la d »montrer , il suffit d'utiliser FAF}.

5-4.Méthode de Newton :

La méthode de Newton consiste à de remplacer λ pour une suite $(\lambda_n)_{n\in N}$ telle que $\lambda_n = \frac{1}{f\prime(x_n)}$ ce qui s'interprète comme suit :$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f\prime(x_n)}$

5-4-1.Définition :

La fonction d'itération de Newton associé à l'équation f(x)=0 sur [a,b] est :

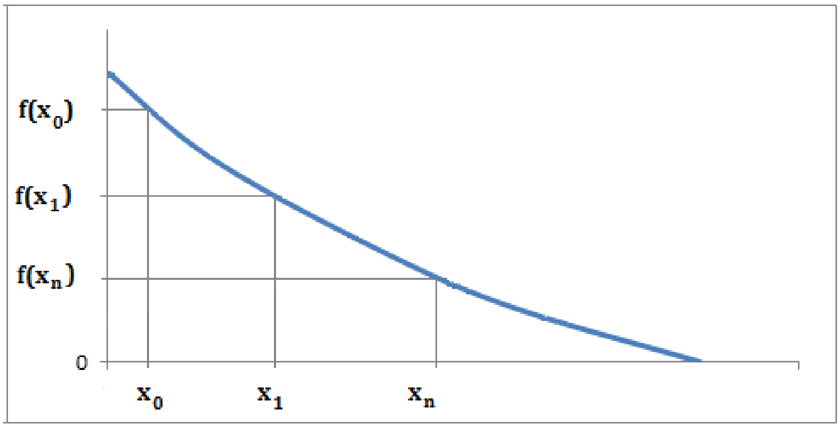
$$N : [a, b] \to R$$

$$x \to N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_n)}$$

Celle-ci est définie pour f dérivable sur $[a, b]$ et telle que f' s'annule pas sur $[a, b]$.

Géométriquement, la suite des itérés de Newton construit comme suit .

Étant donnée $x_o \in [a, b]$, on cherche à construire x_n tel que $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$



En espérant le raisonnement développé dans la section précédente on voit que x_{n+1}.
S'obtient comme l'intersection de la droite tangente au graphe de f en$(x_n, f(x_n))$

Avec l'axe des abscisses.

5-4-2.Exemple :

On considère la fonction $f(x) = x^2 - 2$ sur l'intervalle [a,b].

Il est claire que f admette une racine sur [1,2].

On choisi $x_o = 1.$ $\quad f(x_o) = -1$

$x_1 = 1 - \frac{-1}{2} = 1{,}5 \quad f(x_1) = \frac{1}{4}$

$x_2 = 1{,}5 - \frac{0{,}25}{3} \simeq 1{,}4167$

$x_3 = 1{,}4167 - \frac{0{,}0069}{2{,}8333} \simeq 1{,}4142$

$x_4 = 1{,}4142 - \frac{0{,}000006}{2{,}8284} \simeq 1{,}4142.$

5-4-3.Théorème :

On suppose que :

1. f est de classe C^2sur $[a, b]$
2. $f(a). f(b) < 0$
3. $f' \neq 0 \; sur \; [a, b]$
4. $f'' > 0 \; [a, b]$

Alors si $x_0$vérfie $f(x) > 0$.la suite des itérés de Newton converge vers l'unique solution l de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a, b]$

Preuve : Admis pour ce cours.