Méthode Itératives pour la résolution des systèmes linéaires

3_4 : Introduction

Le principe de base de telles méthodes est d'engendrer une suite de vecteurs $x^{(k)}$ (les itères) convergente vers la solution x de système linéaire $Ax = b$

La plupart des méthode itératives sont de la forme suivante : partant d'un vecteur arbitraire $x^{(0)}$ on engendre une suite $x^{(k)}$ définie par $x^{(k+1)}$=$b\ x^{(k)} + C(3;1)$ avec $B\in M_{n.n}(K)$ et c$\in IK^{(n)}$

3_2 : Définition

Une méthode itérative de la forme (3 ,1) est dite convergent, si : pour tout $x^{(0)}$ on a $x^{(k)} \to_{k\to\pm\infty} x$ et la limite vérifie $AX = B$

3_ 3 : l'erreur d'approximation à la k ième étape

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x = Bx^{(k-1)} + c - Bx - c = B(x^{(k-1)} - x) = Be^{(k-1)}$$

et aussi $e^{(k)}$=$B^K\ e^{(0)}$

ii) une méthode itérative convergent si pour tout $x^{(n)}$ on aB

$$\lim_{k\to\pm\infty} e^{(k)}=0$$

Ceci est équivalent $\lim_{k\to\pm\infty} B^{(k)}=0 \Leftrightarrow \forall\ x \in IK^N$, $\lim_{k\to\pm\infty} B^{(k)}x = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\pm\infty} \|B\|^k = 0$$

Peur tout nome matricielle

3_4 : Théorème : (convergence des méthode itératives)

On a $\lim_{k\to\pm\infty} B^{(k)}=0 \Leftrightarrow \rho(B)<1$

Pour que une méthode itérative suit convergent (de la forme (3,1)) , il suffit que $\rho(B)$<1 ,on rappelle $\rho(B)$ désigne le rayon spectrale de la matrice B. $\rho(B)$=$max(\lambda_i(B))$

3_5 : Méthode classique itérative

Soit $A \in M_{n.m}(IK)$ (d'ordre n) telle que $a_{i,i}$≠0 , $i = 1, \dots \dots \dots \dots ., h$

On décompose A sous la forme $A = D - E - F$,

avec D : la diagonale de

E : la partie inf str de A

F : la partie sup str de A

Par exemple

A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ or D=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

F=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ or E=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3 -5 1 Méthode de Jacobi :

Résoudre de système $Ax = B$ à résoudre $Dx = (E + F)x + b$

Cette méthode est base sue la décomposition précédant et elle s'écrit de la façon suivant

$$\begin{cases} x^{(0)}: \quad arbitrire \\ Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b \end{cases}$$

Il est facile à chaque itérative de calcule en fonction de car la matrice diagonale D inversible $x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b$

Les composantes de $x^{(k+1)}$ vérifiant : $i \neq j$

$$a_{i,i.}x_i{}^{(k+1)} =- \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.\, x_j^{(k)} + b$$

$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{i,i}}\left(-\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}x_j^{(k)}+b\right)\right)$

Sont forme matricielle s'écrit

$x^{(k+1)}=D^{-1}(E+F)x^{(k)}+D^{-1}b=Jx^{(k)}+C$

Avec $J=D^{-1}(E+F)$ $et\ C=D^{-1}b$

La méthode de Jacobi converge sis $\rho(J)$<1.

$J=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ Les valeurs propres de J admet $0\ et \pm\ i\frac{\sqrt{r}}{2}$. On a: $\rho(J)=\frac{\sqrt{r}}{2}$<1.

Pour programmer cette méthode on a besoin de stoker les vecteurs $x^{(k+1)}$et $x^{(k)}$

3_5_2 : Méthode de Gauss Seidel

Elle est basée sur cette décomposition : $Ax\ =b\ \Leftrightarrow\ (D-E)x=Fx+b$

La méthode de Gausse _Seidel s'écrit comme suit

$$\begin{cases} x^{(0)}: \quad arbitrire \\ (D-E)x^{(k+1)}=Fx^{(k)}+b \end{cases}$$

Ou D-E : une matrice triangulaire inférieure et pour calculer $x^{(k+1)}$ en fonction de $x^{(k)}$, il suffit d'appliquer l'algorithme de descente suivant pour $i=1\dots\dots\dots n$, on a

$$a_{ii}x_i^{(k+1)}=-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_{ij}^{(k+1)}+b_i-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_{ij}^{(k)}$$

Ce qu'entraine:

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_{ij}^{(k+1)}+b_i\right)$$

Et pour $i = 1 \ldots \ldots n$:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_{ij}^{(k+1)} + b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_{ij}^{(k)} \right)$$

Notez que dons la boucle de calcule les composantes du vecteur $x^{(k+1)}$ s'écrit

$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1} F x^{(k)} + (D - E)^{-1} b$$

La matrice G $=(D - E)^{-1}F$ est la matrice d'itération de Gausse _Seidel.

La méthode de Gausse _Seidel converge sis $\rho(G)$<1 les valeurs propres de G accordées à la matrice A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ sont 0 ;$(-1)/2$ (de multiplicité 2) on donne $\rho(G)$<1.