Chapitre 1 : Interdiction Polynômiale

4_1 Introduction :

Dons ce chapitre, on notera $P_n = R_n[x]$ l'ensemble polynômes de degrés inférieur ou égal à n et coefficients dons IR.

On rappelle que P_n est un espace vectoriel de dimension $n+1$ sur IR.

Soit $(a,b) \in IR^2$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to IR$ on suppose que f est continue sur $[a,b]$, on considère $n+1$ points $x_0, \dots \dots, x_n$ de intervalle $[a,b]$ tel que $a \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq b$.

Le problème d'interpolation polynomiale $(I)_{m,n}^{f}$ consiste à chercher s'il existe un polynôme $P_n \in p_n$ qui coïncide avec f aux nœuds $(x)_{0 \leq i \leq n}$.

I e tel que pour tout i=0,……, m on $P_{(n)}(x_i) = f(x_i)$

4_1_1 : Théorème

Le problème d'interpolation $(I)_{n,m}^{f}$ admet une unique solution sis m=n et les nœuds $(x)_{0 \leq i \leq n}$ sont deus à deus distincts.

Preuve :

Dons la suite, on s'intéresse au cas où le problème d'interpolation admet une unique solution et on la notera $(I)_n^f$

4_1_2 : Définition

Soit $f : [a,b] \to IR$ et (n+1) nœuds $(x)_{0 \leq i \leq n}$ deus à deus distincts .la solution (unique) bu problème $(I)_n^f$ est appelée polynôme d'interpolation de f aux nœuds $(x)_{0 \leq i \leq n}$ .ce polynôme sera noté $P_n(x.f)$

4_2 : la méthode d'interpolation de Lagrange

4_2_1 : Définition

Pour $j \in \{0, \dots \dots, n\}$ le polynôme L_j définie par

$$L_J(x_i) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

Est appelé interpolant de base de Lagrange (ou polynôme de base de Lagrange) associé à la suite $(x)_{0\leq i\leq n}$ et relative ou point x_j .

4_2_2 : proposition

Pour $n \in IN$ fixé, les $\left(l_j(x_i)\right)$ forment une base de l'espace vectorielle P_n que l'on appelle base de Lagrange.

Remarque.

La méthode d'interpolation de Lagrange consiste à écrire le polynôme d'interpolation sur la base de Lagrange.

4_2_3 : Théorème

Soit $f : [a, b] \to IR$ et $n + 1$ nocuols $(x)_{0\leq i\leq n}$ deux à deux distincts. Le polynôme d'interpolation de f aux nœuds $(x)_{0\leq i\leq n}$ s'écut alors

$$P_n(x_i, f) = \sum_{j=0}^{n} f(x_i) . L_j(x_i)$$

Preuve

On doit montrer que le La polynôme $Q(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_i) . L_j(x_i)$ ainsi défini est solution de polynôme d'interpolation $(I)_n^f$ il est clair que $Q \in P_n$ $(degré(Q) \leq n)$.

De plus, pour tout $i = 0, \dots \dots .., n$, $L_j(x_i) = \delta_{ij}$ ou $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$

D'où

$$Q(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_i) . L_j(x_i)$$

$$= f(x_i)L_j(x_i) + \sum_{j=0_{i\neq j}}^{n} f(x_i) . L_j(x_i)$$

$$Q(x_i) = 1. f(x_i)$$

$L_j(x_i) = 1$

$\sum_{j=0_{i\neq j}}^{n} f(x_i) . L_j(x_i) = 0$

Care $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$

$L_j(x_i) = 1$

$\sum_{j=0_{i\neq j}}^{n} f(x_i)\,.\,L_j(x_i) = 0$

Care $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$

Exemple

Si on choisit les mouds -1, 0, 1, on obtient

$$P_2(x,f) = f(-1)\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + f(0)\frac{(x+1)(-x+0)}{(0-1)(0+1)} + f(1)\frac{(x+1)(x-0)}{(1-0)(1+1)}$$

$$= f(-1)\frac{x(x-1)}{2} + f(0)(x^2-1) + f(1)\frac{x(x+1)}{2}$$

$$= \frac{f(-1)-2f(0)+f(1)}{2}x^2 + \frac{f(1)-f(-1)}{2}x + f(0)$$

Si no considéré la fonction $f\colon [-1,1] \xrightarrow[x\to|x|]{} IR$, alors le polynôme d'interpolation aux nœuds $(x)_{0\leq i\leq 2}$ se décompose sur la pose de la grange sous le forme $P_n(x,|x|) = \sum_{j=0}^{2} |x_j|\,.\,L_j(x)$

$$P_n(x_i,|x|) = x^2 - x$$

Remarque

Le principale inconvénient de la méthode d'interpolation de la Lagrange est que le fait de rajoutes un point change complétement les interpolant de base de Lagrange est on doit recalcules entièrement le polynôme $P_n(x.f)$

4_3 : Méthode D'interpolation de Newton.

4_3_1 : Définition {base D'interpolation de Newton}

Le polynôme N_j définis pour $j = 0, \dots\dots\dots, n = 1$

$N_0(x) = 1$

$N_1(x) = (x - x_0)$

$N_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$

$\vdots \qquad \vdots$

$N_j(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1})$

$\vdots \qquad \vdots$

$N_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots\cdots (x - x_{n-1})$

Sont appelés interpolation de base de newton ou polynôme de base de newton relatif à la suite des points$(x)_{0 \le i \le n-1}$.

On remarque que là où on airait $n + 1$ points pour définit $L_j(x)$, $j = 0, \dots\dots, n$

La définition $N_J(x)$, $j = 0, \dots\dots, n$ ne nécessite

4_3_2 : Proposition

Pour $n \in IN$ fixe, les $\left(N_j(x)\right)_{0 \le j \le n}$ forment une base de l'espace vectoriel $P_n$que l'on appelle base de Newton.

4_3_3 : Expression de l'interpolation de Newton.

Soit $f : [a, b] \to IR$ est n nœuds $\left(x_j\right)_{0 \le j \le n}$.

Essayes d'écrire le polynôme d'interpolation de Newton, autrement dit cherchons les nombres a_{ii} , $i = 0, \dots\dots, n$ tel que

$$P_n(x, f) = \sum_{i=0}^{n} a_{ii} N_i(x)$$

$P_0(x_0, f) = a_0 = f(x_0) \Leftrightarrow a_0 = f(x_0)$

$$P_n(x_1, f) = f(x_0) + a_1(x - x_0) = f(x_1) \Leftrightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

$$P_n(x_1, f) = f(x_0) + \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) = f(x_2)$$

$$a_2 = \frac{\frac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2} - \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}}{x_2 - x_1}$$

On pose $f[U,V] = \frac{f(U)-f(V)}{U-V}$

On a alors $\quad a_1 = f[x_0, x_1]$

$$a_2 = \frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_1-x_2}$$

4_3_4 : Définition (différence divisée)

Pour tout $k \in IN$ on appelle différence divisée d'ordre k de f associée à la soit de points deux à distincts $(x_i)_{i\in IN}$, la quantité $f[x_0] = f(x_0)$

$\forall k \in IN^*$

$$f[x_0, \dots \dots, x_k] = \frac{f[x_0, \dots \dots, x_{k-1}] - f[x_1, \dots \dots, x_k]}{x_0 - x_k}$$

4_3_5 : théorème

Avec les notations précédentes, on a

$$P_n(x,f) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \dots \dots, x_k] \,.\, N_K(x)$$

Preuve

Même si la définition de base de l'interpolation de Newton de P_n ne nécessite que n point, le coefficient $f[x_0, \dots \dots, x_n]$de $N_n(x)$ finit intervenir le point x_n .

4_3_6 : Corollaire

Avec les notations précédentes, on

$$P_n(x,f) = P_{n-1}(x,f) + f[x_0, \dots \dots, x_n]. N_n(x)$$

La formule de ce corolaire montre que si l'on écrit le polynôme d'interpolation sur la base de Newton, alors il est facile de rajouter un point

4_4 : Erreur D'interpolation

On va maintenant voir comment estimer l'erreur ponctuelle

$$|f(x) - P_n(x, f)|$$

On peut exprimer l'erreur d'interpolation de la façon suivante

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x, f)$$

Cela signifie que le polynôme $P_n(x, f)$ de degré procure une approximation de la fonction f avec une erreur $E_n(x)$ il reste d'évaluer cette erreur.

On constate que $E_n(x_i) = 0$ pour $i = 0, \dots \dots, n$ le résultat suivant donne une expression analytique détermine l'erreur.

4_4_1 : Théorème

On suppose que $f[a, b] \rightarrow IR$ est $(n + 1)$ fois dérivable dons $]a, b[$, alors $\forall x \in [a, b]$,$\exists \varepsilon \epsilon]a, b[$

Tel que $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \dots \dots \dots . . (x - x_n)$

Remarque

1_on constate que $E_n(x_i) = 0, i = 0, \dots \dots, n$

2_puisque le terme d'erreur en un point x fait intervenir $(x - x_i)$, il y a tout intérêt à choisir les points x_i qui ont situés le plus près possible de x_i ce choix est utile lorsque un grand nombre de point de collocation sont disponibles.