模擬国内予選 2018

17 - baton

まとめ

	ACチーム数	割合	解法
A	159/159	100%	場合分け
B	151/159	95%	ループ
C	117/159	74%	軽い構文解析
D	34/159	21%	組み合わせ
E	57/159	36%	彩色数
F	11/159	7%	累積和+二分探索
G	7/159	4%	期待値DP高速化
H	1/159	1%	**観賞用問題(幾何)**

A問題

改元

A - 問題概要

- “HEISEI 年月日” が与えられる
- 正しければそのまま出力

  間違っていれば、HEISEIを?に置換して出力せよ

A - 解法

- 年 > 32 だったら HEISEI -> ?
- 年 == 31 && 月 >= 5なら HEISEI -> ?
- それ以外ならそのまま出力

B問題

一般化うるう年

B - 問題概要

- ダルいので省略

B - 解法

- 問題に従ってL以上R以下の全ての年に対して、
  A1から順に割ってみれば良い

- もっと高速な解法はあるが、愚直に計算しても十分高速
  （エラトステネスの篩的な考えで、配列に割れる最小のiを保存していく。Aiが等しいときは片方だけで良いので、
  $$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\frac{R}{i}=O(R\log N)$$
  ）

C問題

知識の証明

C - 問題概要

- 4桁のパスワードと、ハッシュ関数がBNFに従って与えられる
- そのパスワードのハッシュ値と、
  ハッシュ値が同じパスワードの個数を求めよ

C - 解法

- パスワードの種類は高々10000なので、全てのパスワードに対してハッシュ値を求めることが可能
- ハッシュ値を求めるのはstackを使えばO(N)で求まる

C - 解法

- 1文字目から順にstackに入れる
  このとき、+*^であれば、そのまま
  abcdであれば、パスワードの値に置き換えて入れる
-]であれば、上2つの数字と演算子を取り出し、計算をして、
  計算結果をstackに入れる
- 最終的にstackに残った値が答えになる
  (開き括弧は無視して大丈夫)

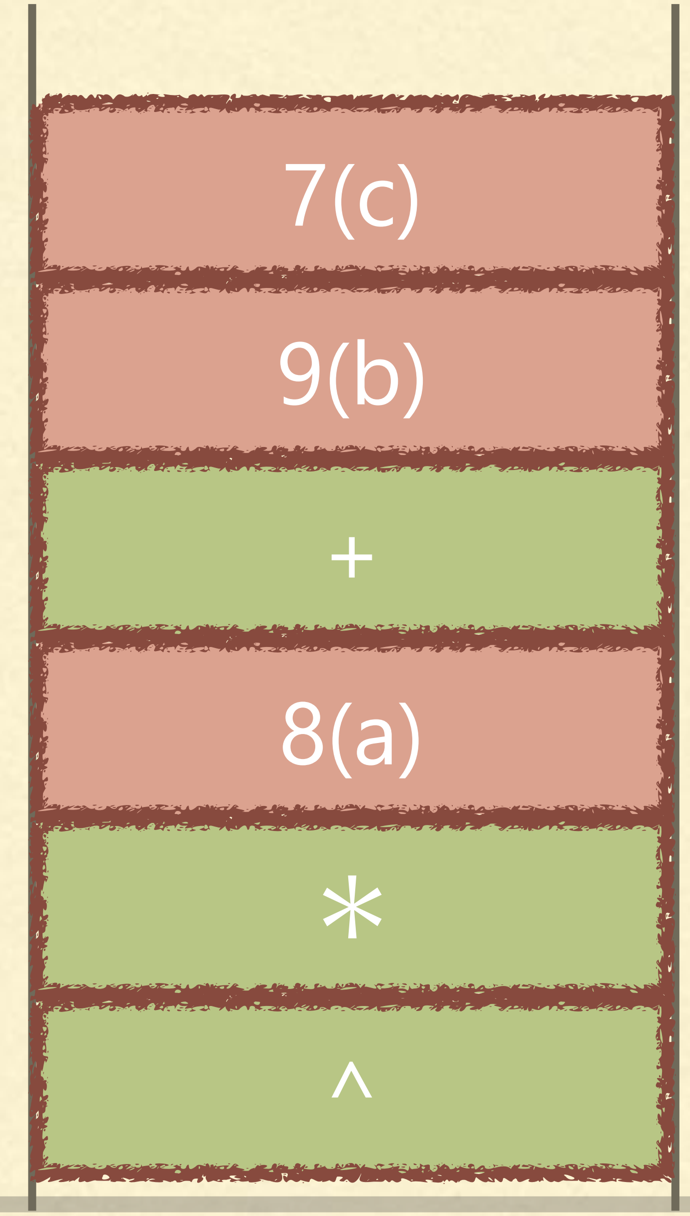
C - コード

```
for(int i=0;i<(int)s.size();i++){
  if(s[i] == '[') continue;

  if('a' <= s[i] && s[i] <= 'd'){
    st.push(x[s[i]-'a'] - '0');
  }else if (s[i] != ']') {
    st.push(s[i]);
  }else{
    char a = st.top(); st.pop();
    char b = st.top(); st.pop();
    char c = st.top(); st.pop();

    if(c == '+') st.push(a | b);
    if(c == '*') st.push(a & b);
    if(c == '^') st.push(a ^ b);
  }
}
```

[^[*a[+bc]]d]



逆ポーランド記法だとstackは数字だけだが、前からだと演算子もいれなければならない

D問題

短歌数

D - 問題概要

- 2種類の数字で表された値を短歌数と呼ぶ
- Nが与えられるので、N番目に小さい短歌数を求める

D - 解法

- まず、桁数を求める
- x桁の短歌数の数は下の式で求まるので、2桁から順に足していってN以上になったときのxが桁数
- $f(d) = (2^{d-1} - 1) \cdot 9 \cdot 9$

  aababababababa (a = [1-9], b = [0-9])

D - 解法

- つぎに上位の桁から数字を決定していく
- 上位の桁を決定するとそれ以下が何通りあるか求められる
- これを順に繰り返していけば答え
- すでに出た数字の種類数を考慮することを忘れずに！
  あと333333は短歌数じゃないよ

E問題

分割統治

E - 問題概要

- 連結なグラフが与えられる
- グラフの各ノードにABCのラベルを割り振る
- ただし、隣り合ったノードのラベルは
  A-CまたはB-Cの組み合わせである必要がある

E - 解法

- AとBは隣り合わないので、ABとCでラベル付けをしてみる
- これは、2色の彩色が可能かどうかを調べるのと同じ
  また、これは一意に定まる
- 最後にそれぞれの色で塗られたノード数がx,yとすると、
  偶数であればABを割り当てられるので、それが答え
- つまりあり得る種類数は最大で2通り

F問題

対空シールド

F - 問題概要

- N個のユニットが一直線上にならんでいる
- 能力a_iのシールドがユニットx_iにある(1 <= i <= M-1)
- ユニットの強度の最小値が最大になるようにM個目のシールドの位置を求めよ

F - 解法

(1) 位置が決まっているM-1個のシールドから、
M個目を置く前の各ユニットの強度を求める

(2) M個目を置くと、最小値をX以上になるかをチェックする
二分探索を行う

F - 解法 - 総和フェーズ O(M√A)

- 愚直に各シールドが影響する範囲に加算していく
- 各シールドの影響範囲は2√a
- これを全てのシールドでやるとO(M√max_a)になる
- これで1ケース1秒くらいなので国内予選ならOK

  (最適化オプションは付けよう！)

AOJのジャッジで3sec弱で通って申し訳ない気分になった(imos使ってる人が1.7secぐらい)

F - 解法 - 総和フェーズ O(M+N)

- 高速化の為に累積和を使いたいが、
  追加したい値は位置uに依存する

- そこで、各次数毎に累積和を行って、
  値取得時に $1, u, u^2$ をかける

- $$\sum \max(a_i - (u - x_i)^2, 0) = \sum \max(-u^2 - 2x_i u + a_i + x_i^2, 0)$$

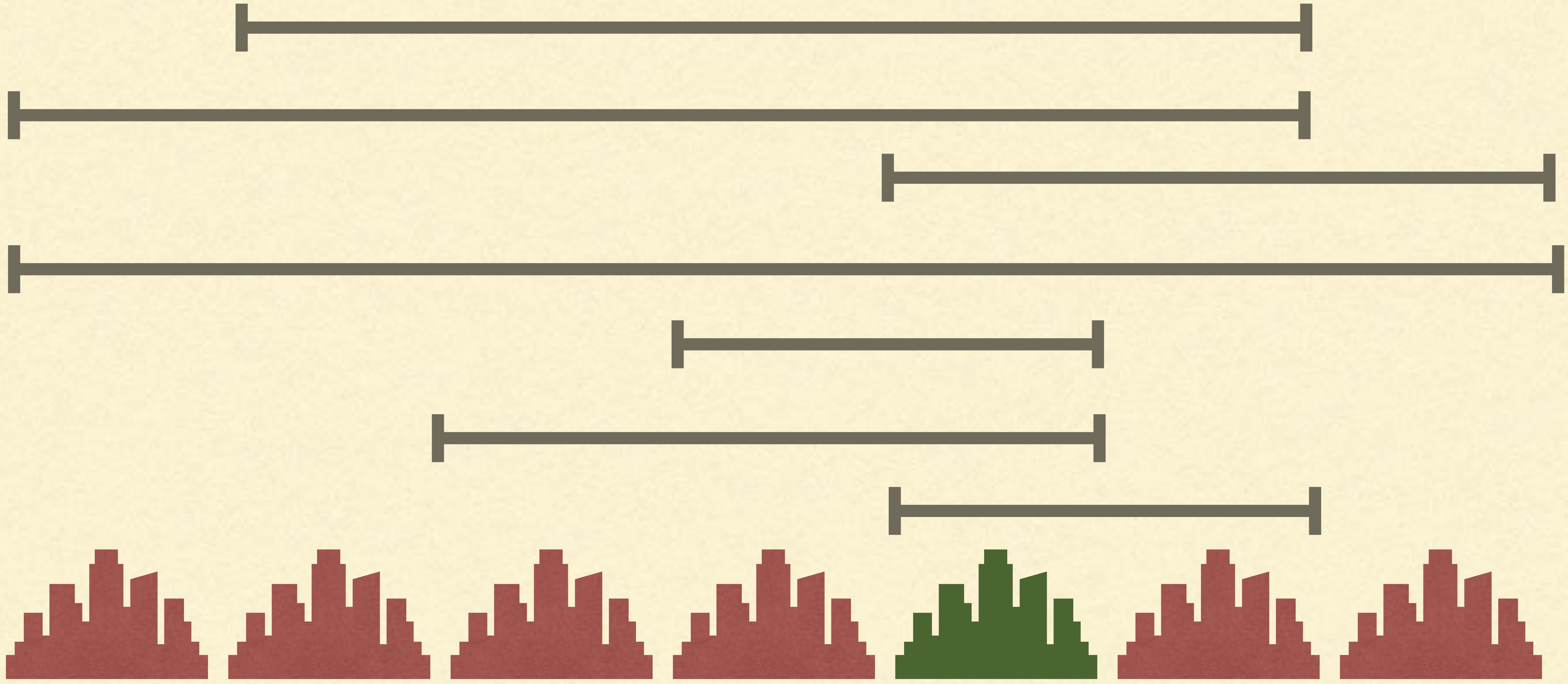
- max関数の扱いは、範囲外に加算しないようにするだけ

N階差分を使うと配列が一個で済むが、こっちの方が楽だしバグりにくそう

F - 解法 - M個目の配置フェーズ

- 最小値の最大値 → 二分探索っぽい？（だいたい正しい）
- 最小値を固定するとわかることは？
  - 各ユニットが最小値以上になるためにはM個目のフィールドをどの範囲に置けば良いかがわかる

F - 解法 - M個目の配置フェーズ



- 共通範囲があればOK なければNG

F - 解法 - 計算量

- 総和の計算 ・・・ $O(N\sqrt{\max a})$ or $O(M+N)$
- 配置チェック・・・$O(\log(M \max a)N)$

G問題

カジノ

G - 問題概要

- N個の(いびつではない)6面サイコロを振った総和をスコアとする

- M回まで振ることができるとき、最後のスコアが最大になるような行動をすると期待値はいくつになるか

そんなに早くは収束しなかった…

G - 解法

- x回目でスコアyになったときに振り直すべきかが分かれば良さそう
- これは単純で、

  残りM-x回の期待値 > 現在スコア ・・・振り直し

  残りM-x回の期待値 ≦ 現在スコア・・・終わり

G - 解法

- じゃあ、x回まで振れる時の期待値を求めるには？
- x = 1のときは、O(N^2)のDPで各総和の時の確率が求まるので期待値も簡単に求まる
- x = 2のときは、x = 1のときの期待値が分かれば、
  さっきの振り直すかどうかを反映させればわかるはず
- それを繰り返していけばx = Mの期待値がわかる！

G - 解法

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**7.00**
7	7	7	7	7	7	7	8	9	10	11	12	**7.97**
7.97	7.97	7.97	7.97	7.97	7.97	7.97	8	9	10	11	12	**8.54**
8.54	8.54	8.54	8.54	8.54	8.54	8.54	8.54	9	10	11	12	**8.95**

$$E_{i+1} = E_i \sum_{j=1}^{\lfloor E_i \rfloor} p_j + \sum_{j=\lfloor E_i \rfloor + 1}^{6n} j \cdot p_j$$

$p_j :=$ 総和が j になる確率

$E_i :=$ i 回振れる時の期待値

G - 高速化

$$E_{i+1} = E_i \sum_{j=1}^{\lfloor E_i \rfloor} p_j + \sum_{j=\lfloor E_i \rfloor + 1}^{6n} j \cdot p_j$$

$p_j :=$ 総和が j になる確率

$E_i :=$ i 回振れる時の期待値

- これをi=1からMまで単純に計算するとO(M)なのでTLE
- よく見ると総和の部分は$\lfloor E_i \rfloor$が等しい限り変わらない
- $\lfloor E_i \rfloor$ が等しい区間を一気に計算すると、変化点は高々6Nなので解けそう

G - 高速化

$$E_{i+1} = E_i \sum_{j=1}^{\lfloor E_i \rfloor} p_j + \sum_{j=\lfloor E_i \rfloor+1}^{6n} j \cdot p_j \longrightarrow E_{i+1} = E_i X + Y$$

$$\begin{pmatrix} E_{i+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_i \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E_{i+r} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^r \begin{pmatrix} E_i \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 行列の累乗の式になったので、Eiの値が変わるiを二分探索で求めると $O(\log^2 M)$
- 結果、全体で $O(N \log^2 M + N^2)$ で求められる

H問題

NINJA GAME

H - 問題概要

- 読んでない人も多そう
- 面倒なので書きません(各自で読んで下さい)

H - 解法？

- 幾何問は考察が容易で実装だけみたいなときはありますが、こういう問題は解けないと気づけるようにしましょう
- 下手に考察して時間を消耗してしまうと悲しくなります
- まぁ、yosupoさんを含む東大チームが解いたんですが…

最後に

- 実はすでにAOJに追加されています

2881: Change of the Era Name	8 sec	256 MB	8	87.50 %	x 7
2882: Generalized Leap Years	8 sec	256 MB	7	100.00 %	x 7
2883: Proof of Knowledge	8 sec	256 MB	14	85.71 %	x 12
2884: Tanka Number	8 sec	256 MB	13	76.92 %	x 9
2885: Divide and Conquer	8 sec	256 MB	10	80.00 %	x 8
2886: Antiaircraft Shield	8 sec	256 MB	3	100.00 %	x 3
2887: Casino	8 sec	256 MB	3	66.67 %	x 2
2888: NINJA GAME	8 sec	256 MB	0	0.00 %	x 0

- JAGが出した解説もあるので、確認してみて下さい

  http://acm-icpc.aitea.net/index.php?2018%2FPractice%2F模擬国内予選%2F講評