ニムとGRUNDY数

1220競プロ講習会 baton

例題: カウントゲーム

- 最初の数字 X が決まっています。
- その 数字 Xを順に減らしていきます。
  このとき、一度に減らせる数は1個以上M個以下です。
- 交互に繰り返していった後、0を入った方が勝ちです。

例題: カウントゲーム

- X = 15, M = 3
- A: 15, 14
- B: 13, 12, 11
- A: 10, 9, 8
- B: 7
- A: 6, 5, 4
- B: 3
- A: 2, 1, 0

例題: カウントゲーム

- X = 15, M = 3
- A: 15, 14
- B: 13, 12, 11
- A: 10, 9, 8
- B: 7
- A: 6, 5, 4
- B: 3
- A: 2, 1, 0

(M+1)の倍数で止めれば勝てます

つまり、

X ≡ 0 (mod M+1) => 後手必勝

それ以外 => 先手必勝

二人零和有限確定完全情報ゲーム

- 二人: 2人で行う
- 零和: 終了時のプレイヤーのスコア合計値が0
  (勝ち: +1, 負け: -1, 引き分け: 0 とすればよい)
- 有限: 手の組み合わせ数が有限
- 確定: 偶然がない
- 完全情報: お互いが全ての情報を知ることができる

例題: 石取りゲーム

- N個の石の山がある
- それぞれの山の石の初期数は、a_i個である
- 各プレイヤーは自分の手番で、1つ山を選び、そこから1つ以上の任意個の石を取り除く
- 全ての山の石の数が0となったとき、最後の石を取ったプレイヤーの勝利

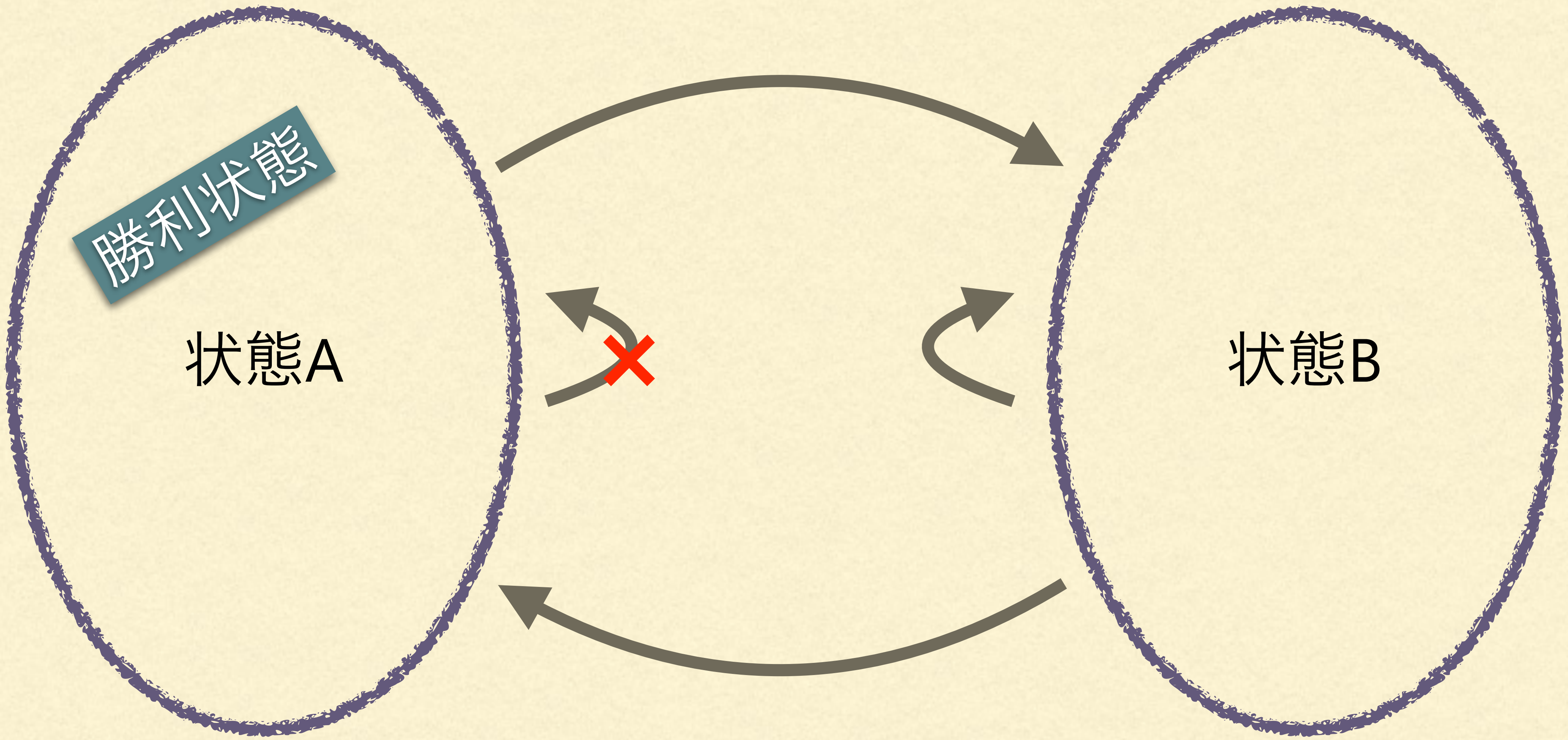
例題: 石取りゲーム

- 初期: 7, 5, 3
- R: 0, 5, 3
- G: 0, 3, 3
- R: 0, 1, 3
- G: 0, 1, 1
- R: 0, 0,1
- G: 0, 0, 0

例題: 石取りゲーム

- この必勝法は、 a_0 XOR a_1 XOR ... XOP a_n = 0
- となるように石を取れば良い

遷移図



例題: 石取りゲーム

- 初期: 7, 5, 3
- R: 0, 5, 3
- B: 0, 3, 3 → 0
- R: 0, 1, 3
- B: 0, 1, 1 → 0
- R: 0, 0,1
- B: 0, 0, 0 → 0

$$\boxed{\begin{array}{c} 111 \oplus 101 \oplus 011 = 001 \\ \downarrow \\ 110 \oplus 101 \oplus 011 = 000 \\ 111 \oplus 100 \oplus 011 = 000 \\ 111 \oplus 101 \oplus 010 = 000 \end{array}}$$

お気持ち証明

- XORが0のとき

  → どれか一つの値が変化するので1bitは必ず変化する

  そのため、必ずXORは0ではなくなる

- XORが0でないとき

  →XORを取ったときの値の1である最上位のビットに注目

  その1を0にするということは、下位ビットは任意に決められる

例題: 複数カウントゲーム

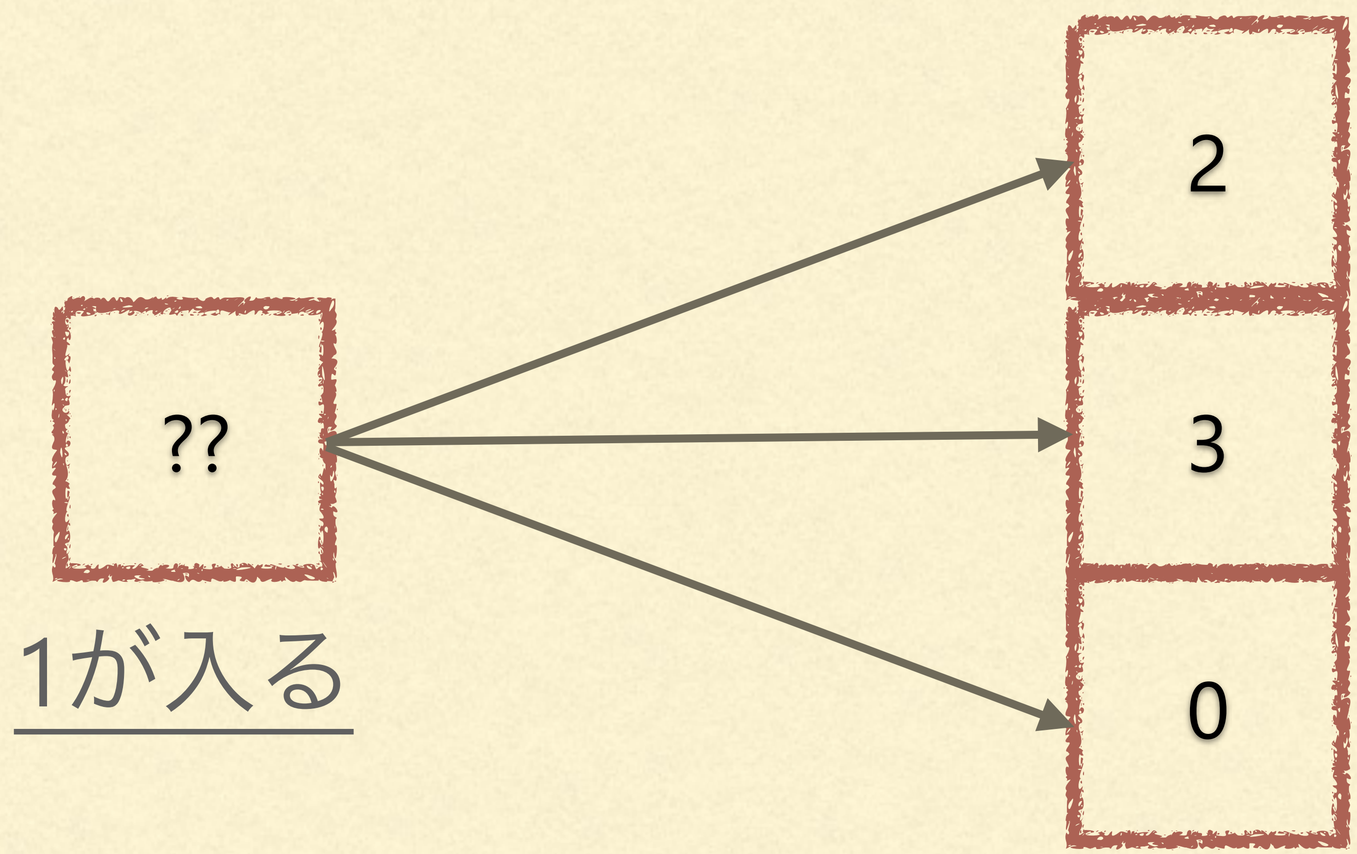
- N個の石の山がある
- それぞれの山の石の初期数は、a_i個である
- 各プレイヤーは自分の手番で、1つ山を選び、そこから1つ以上の~~任意個の石~~M_i個以下を取り除く
- 全ての山の石の数が0となったとき、最後の石を取ったプレイヤーの勝利

例題: 複数カウントゲーム

8	5	6
4個まで	1個まで	2個まで

GRUNDY数

- 勝利状態をdp[win] = 0とする
- それ以外の状態は、遷移先のdpの値と異なる最小の非負整数とする



おしらせ

クリスマスコンテスト

- 12/24 にクリスマスコンテストがAtCoder上であります
- http://snuke.main.jp/contest/xmas2018/
- 夜の4時間ぐらいらしいです(未確定)

CPCTF

- 今年もやるはずなので、作問頑張りましょう！