3.3 ディラック粒子の自由粒子解

ディラック場 ψ は、Klein-Gordon 方程式を満たすから、Dirac 方程式の解は、平面波の重ね合わせで書ける。

$$\psi(x) = u(p)\, e^{-ip\cdot x} \tag{3.45}$$

$$p^2 = m^2 \quad (\text{分散関係})$$

以下、正の振動数解（$p^0 > 0$）について考える。Dirac 方程式

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

に (3.45) を代入すると、

$$(\not{p} - m)\, u(p) = 0 \tag{3.46}$$

$$(\text{ただし } \gamma^\mu p_\mu = \not{p})$$

まず、粒子の静止系 $p = p_0 = (m, 0)$ でこれを解き、後でブーストを考えれば、一般の p についての解が得られる。静止系において (3.46) は、

$$(m\gamma^0 - m)\, u(p_0) = m\left[\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\right] u(p_0)$$

$$= m\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u(p_0)$$

2×2 の単位行列。以下、単に 1 とする。

$$= 0$$

$$\therefore\quad u(p_0) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

ここに、$\sqrt{m}$ は、後の便宜のためにつけた定数である。ξ は 2成分スピノルで、規格化 ($\xi\xi^\dagger = 1$) されているものとする。

ξ は回転のもとで、回転群の2成分スピノルとして変換する。

従って ξ は、解のスピンの向きを決める。例えば、$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、粒子のスピンは、3軸に沿って、↑ である。

$u(p)$ は4成分量であるが、ディラック方程式を適用したことによって、自由度は2になっている。このことは、ディラック粒子のスピンが 1/2 であることと対応している。（スピン 1/2 の粒子は ↑, ↓ の2通りの状態がありうる。）

ただし、この時点では、ディラック粒子のスピンが $\underline{1/2}$ であることは自明でない。

→ 3.5 で示される。

次に、ブーストによって、$u(p)$ のより一般的な表式を求める。

(3.21) より、無限小ブーストは、

$$\begin{pmatrix} E \\ p^3 \end{pmatrix} = \left[1 + \eta \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\right] \underbrace{\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{静止系の4元運動量 } P\text{。}}$$

η: 無限小パラメータ

注) expの肩に乗せれば、有限なブーストが得られる。
3.1節のP38, 39の議論を参照

有限の大きさの η に対して、

$$\begin{pmatrix} E \\ p^3 \end{pmatrix} = \exp\left[\eta \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} + \frac{\eta^2}{2!}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \cdots \right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \eta^2/2! + \eta^4/4! + \cdots & \eta + \eta^3/3! + \eta^5/5! + \cdots \\ \eta + \eta^3/3! + \eta^5/5! + \cdots & 1 + \eta^2/2! + \eta^4/4! + \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta \\ \sinh\eta & \cosh\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m\cosh\eta \\ m\sinh\eta \end{pmatrix} \qquad (3.48)$$

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

②

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots$

$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots$

より

$\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots$

$\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$

でOK!!

η を rapidity という。

注). ブーストの表式

$$\begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta \\ \sinh\eta & \cosh\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-\beta^2} & \beta/\sqrt{1-\beta^2} \\ \beta/\sqrt{1-\beta^2} & 1/\sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix} \quad \text{より、} \quad \eta = \tanh^{-1}\beta$$

の関係にある。 //

(3.26) より、ブーストの生成子は、

$$S^{03} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^3 & \\ & -\sigma^3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \Lambda_{1/2} = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{03}S^{03}\right) = \exp\left[-\frac{1}{2}\eta\begin{pmatrix} \sigma^3 & \\ & -\sigma^3 \end{pmatrix}\right]$$

($\omega_{\mu\nu}$ は 無限小パラメータを与える反対称テンソル。 $\beta \ll 1$ のとき、 $\omega_{03} = \beta = \eta$.)

よって.
$$u(p) = \Lambda_{1/2}\, u(p_0)$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2}\eta\begin{pmatrix} \sigma^3 & \\ & -\sigma^3 \end{pmatrix}\right]\sqrt{m}\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix},\ (\sigma^3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\eta\begin{pmatrix} \sigma^3 & \\ & -\sigma^3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\eta\right)^2\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}\eta\right)^3\begin{pmatrix} \sigma^3 & \\ & -\sigma^3 \end{pmatrix} + \cdots\right] \times\sqrt{m}\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$$

$$= \left[\cosh\left(-\frac{1}{2}\eta\right)\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \sinh\left(-\frac{1}{2}\eta\right)\begin{pmatrix} \sigma^3 & \\ & -\sigma^3 \end{pmatrix}\right]\sqrt{m}\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$$

$$= \left[\cosh\left(\frac{1}{2}\eta\right)\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} - \sinh\left(\frac{1}{2}\eta\right)\begin{pmatrix} \sigma^3 & \\ & -\sigma^3 \end{pmatrix}\right]\sqrt{m}\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$$

ここで、 $\cosh\left(\frac{1}{2}\eta\right) \mp \sigma^3\sinh\left(\frac{1}{2}\eta\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\eta/2} + e^{-\eta/2}\right) \mp \frac{\sigma^3}{2}\left(e^{\eta/2} - e^{-\eta/2}\right)$$

$$= e^{\eta/2}\left(\frac{1 \mp \sigma^3}{2}\right) + e^{-\eta/2}\left(\frac{1 \pm \sigma^3}{2}\right)$$

であるから、

(3)

$$u(p) = \begin{pmatrix} e^{\eta/2}\frac{1+\sigma^3}{2} + e^{-\eta/2}\frac{1-\sigma^3}{2} & \\ & e^{\eta/2}\frac{1+\sigma^3}{2} + e^{-\eta/2}\frac{1-\sigma^3}{2} \end{pmatrix} \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$$

一方、(3.48)より、　　　　$\cosh\eta \pm \sinh\eta$

$$\sqrt{E \pm p^3} = \sqrt{m(\cosh\eta \pm \sinh\eta)} = \sqrt{m}\, e^{\pm\eta/2} = \frac{1}{2}\cancel{e}$$

$$\sqrt{m} \to \begin{matrix} \infty \\ 0 \end{matrix}$$

であるから、

$$u(p) = \begin{pmatrix} \left[\sqrt{E+p^3}\left(\frac{1-\sigma^3}{2}\right) + \sqrt{E-p^3}\left(\frac{1+\sigma^3}{2}\right)\right]\xi \\ \left[\sqrt{E+p^3}\left(\frac{1+\sigma^3}{2}\right) + \sqrt{E-p^3}\left(\frac{1-\sigma^3}{2}\right)\right]\xi \end{pmatrix} \qquad (3.49)$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E-p^3} & \\ & \sqrt{E+p^3} \end{pmatrix}\xi \\ \begin{pmatrix} \sqrt{E+p^3} & \\ & \sqrt{E-p^3} \end{pmatrix}\xi \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{E+p^3} = \sqrt{E-(E-p^3)+E} = \sqrt{E}$$

を得るが、これは次のように簡単に書くことができる。

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \end{pmatrix} \quad (※2) \qquad (3.50)$$

ただし、行列の平方根は、その行列の固有値の、正の平方根をとるものとする。

注). $p\cdot\sigma = p^0\sigma^0 - \mathbf{p}\cdot\sigma$

$$= \begin{pmatrix} p^0 - p^3 & -p^1 + ip^2 \\ -p^1 - ip^2 & p^0 + p^3 \end{pmatrix}$$

$$\det|p\cdot\sigma - \lambda I| = \det\begin{vmatrix} p^0 - p^3 - \lambda & -p^1 + ip^2 \\ -p^1 - ip^2 & p^0 + p^3 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (p^0 - \lambda - p^3)(p^0 - \lambda + p^3) - (-p^1 + ip^2)(-p^1 - ip^2)$$

$$= (p^0 - \lambda)^2 - (p^3)^2 - \{(p^1)^2 + (p^2)^2\}$$

$$= (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 - 2p^0\lambda + \lambda^2$$
$$= p^2 - 2E\lambda + \lambda^2$$
$$= 0$$

よって、$\lambda_\pm = E \pm \sqrt{E^2 - p^2} = E \pm \sqrt{E^2 - (E^2 - |\mathbb{P}|^2)}$
固有値
$$= E \pm |\mathbb{P}| \quad (>0)$$

$\lambda_\pm$ に属する固有ベクトル $u_\pm$ を用いて $U = (u_- \ u_+)$ とおく。
これにより $p\cdot\sigma$ は対角化されて、

$$U^{-1}\, p\cdot\sigma\, U = \begin{pmatrix} E - |\mathbb{P}| & \\ & E + |\mathbb{P}| \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

となる。

$$p\cdot\sigma = U \begin{pmatrix} E - |\mathbb{P}| & \\ & E + |\mathbb{P}| \end{pmatrix} U^{-1}$$

であるから、$\sqrt{p\cdot\sigma}$ を次式で定めるのが自然である。

$$\sqrt{p\cdot\sigma} = U \begin{pmatrix} \sqrt{E - |\mathbb{P}|} & \\ & \sqrt{E + |\mathbb{P}|} \end{pmatrix} U^{-1}$$

2乗すると元に戻る。

$p\cdot\sigma$ の $\lambda_\pm$ に属する固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} p^1 - ip^2 \\ p^0 - p^3 - \lambda_\pm \end{pmatrix}$ であるので、① のように対角化するには、

$$U = \begin{pmatrix} p^1 - ip^2 & p^1 - ip^2 \\ p^0 - p^3 - \lambda_- & p^0 - p^3 - \lambda_+ \end{pmatrix}$$ とすれば良い。

$$\det U = (p^1 - ip^2)\{(p^0 - p^3 - \lambda_+) - (p^0 - p^3 - \lambda_-)\}$$
$$= (p^1 - ip^2)(\lambda_- - \lambda_+)$$
$$= -2|\mathbb{P}|(p^1 - ip^2)$$

$$U^{-1} = \frac{1}{-2|\mathbb{P}|(p^1 - ip^2)} \begin{pmatrix} p^0 - p^3 - \lambda_+ & -(p^1 - ip^2) \\ -(p^0 - p^3 - \lambda_-) & p^1 - ip^2 \end{pmatrix}$$

以下、$\sqrt{E\pm|\mathbb{P}|}$ を $\sqrt{\pm}$ と書くことにする。

$$
U\begin{pmatrix}\sqrt{-} & \\ & \sqrt{+}\end{pmatrix}U^{-1} = \begin{pmatrix} p^1-ip^2 & p^1-ip^2 \\ p^0-p^3-\lambda_- & p^0-p^3-\lambda_+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{-} & \\ & \sqrt{+}\end{pmatrix}U^{-1}
$$

$$
= -\frac{1}{2|\mathbb{P}|(p^1-ip^2)}\begin{pmatrix}(p^1-ip^2)\sqrt{-} & (p^1-ip^2)\sqrt{+} \\ (p^0-p^3-\lambda_-)\sqrt{-} & (p^0-p^3-\lambda_+)\sqrt{+}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p^0-p^3-\lambda_+ & -(p^1-ip^2) \\ -(p^0-p^3-\lambda_-) & p^1-ip^2\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&(p^0-p^3-\lambda_+)(p^0-p^3-\lambda_-) \\
&= (p^0-p^3)^2-(p^0-p^3)(\lambda_++\lambda_-)+\lambda_+\lambda_- \\
&= (E-p^3)^2-(E-p^3)2E+E^2-|\mathbb{P}|^2 \\
&= (p^3)^2-|\mathbb{P}|^2 \\
&= -\left((p^1)^2+(p^2)^2\right) \\
&= -(p^1+ip^2)(p^1-ip^2)
\end{aligned}
$$

$$
= -\frac{1}{2|\mathbb{P}|(p^1-ip^2)}\begin{pmatrix}(p^1-ip^2)(p^0-p^3-\lambda_+)\sqrt{-}-(p^1-ip^2)(p^0-p^3-\lambda_-)\sqrt{+} & -(p^1-ip^2)^2\sqrt{-}+(p^1-ip^2)^2\sqrt{+} \\ (p^0-p^3-\lambda_+)(p^0-p^3-\lambda_-)\sqrt{-}-(p^0-p^3-\lambda_+)(p^0-p^3-\lambda_-)\sqrt{+} & -(p^1-ip^2)(p^0-p^3-\lambda_-)\sqrt{-}+(p^1-ip^2)(p^0-p^3-\lambda_+)\sqrt{+}\end{pmatrix}
$$

$$
= -\frac{1}{2|\mathbb{P}|(p^1-ip^2)}\begin{pmatrix}(p^1-ip^2)(p^0-p^3-\lambda_+)\sqrt{-}-(p^1-ip^2)(p^0-p^3-\lambda_-)\sqrt{+} & -(p^1-ip^2)^2\sqrt{-}+(p^1-ip^2)^2\sqrt{+} \\ -(p^1-ip^2)(p^1+ip^2)\sqrt{-}+(p^1-ip^2)(p^1+ip^2)\sqrt{+} & -(p^1-ip^2)(p^0-p^3-\lambda_-)\sqrt{-}+(p^1-ip^2)(p^0-p^3-\lambda_+)\sqrt{+}\end{pmatrix}
$$

$$
= -\frac{1}{2|\mathbb{P}|}\begin{pmatrix}(p^0-p^3-\lambda_+)\sqrt{-}-(p^0-p^3-\lambda_-)\sqrt{+} & (p^1-ip^2)(-\sqrt{-}+\sqrt{+}) \\ -(p^1+ip^2)(\sqrt{-}-\sqrt{+}) & -(p^0-p^3-\lambda_-)\sqrt{-}+(p^0-p^3-\lambda_+)\sqrt{+}\end{pmatrix}
$$

$$
\therefore\ \sqrt{p\cdot\sigma} = \frac{1}{2|\mathbb{P}|}\begin{pmatrix}(|\mathbb{P}|+p^3)\sqrt{-}+(|\mathbb{P}|-p^3)\sqrt{+} & (p^1-ip^2)(\sqrt{-}-\sqrt{+}) \\ -(p^1+ip^2)(\sqrt{-}-\sqrt{+}) & (|\mathbb{P}|-p^3)\sqrt{-}+(p^3+|\mathbb{P}|)\sqrt{+}\end{pmatrix}
$$

(3.49) では、z方向へのブーストを考えているので、この式において、$p^1=p^2=0$ とすれば良い。このとき、

$$
\sqrt{p\cdot\sigma} = \frac{1}{2p^3}\begin{pmatrix}2p^3\sqrt{E-p^3}+0 & 0 \\ 0 & 0+2p^3\sqrt{E+p^3}\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}\sqrt{E-p^3} & \\ & \sqrt{E+p^3}\end{pmatrix}
$$

となることが確かめられる。$\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}$ についても同様である。

$$
p\cdot\bar{\sigma} = p^0\sigma^0+\mathbb{P}\cdot\sigma = \begin{pmatrix}p^0+p^3 & p^1-ip^2 \\ p^1+ip^2 & p^0-p^3\end{pmatrix}
$$

であるから、$\sqrt{p\cdot\sigma}$ の表式において、$p^i\to -p^i$ のおきかえをすれば OK.

//

(3.50) 式は一般の p について成り立つ。(3.50) が Dirac 方程式を満たすことも、直接確認することができる。

◎ 恒等式 $(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma}) = p^2 = m^2$ (3.51)

$$\begin{aligned}
(\because)\ (p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma}) &= (E-\mathbb{p}\cdot\sigma)(E+\mathbb{p}\cdot\sigma) \\
&= E^2 - (\mathbb{p}\cdot\sigma)(\mathbb{p}\cdot\sigma) \\
&= E^2 - |\mathbb{p}|^2 \\
&= p^2 \\
&= m^2 \qquad //
\end{aligned}$$

◎ (3.50) が Dirac 方程式 (3.47) を満たすこと。

$$\begin{pmatrix} -m & i\sigma\cdot\partial \\ i\bar{\sigma}\cdot\partial & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi e^{-ip\cdot x} \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi e^{-ip\cdot x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-m\sqrt{p\cdot\sigma} + i\sigma\cdot\partial\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}})\,\xi e^{-ip\cdot x} \\ (i\bar{\sigma}\cdot\partial\sqrt{p\cdot\sigma} - m\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}})\,\xi e^{-ip\cdot x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&-m\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi e^{-ip\cdot x} + i\sigma\cdot\partial\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi e^{-ip\cdot x} \\
&= (-m\sqrt{p\cdot\sigma} + (\sigma\cdot p)\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}})\,\xi e^{-ip\cdot x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{p\cdot\sigma}}(-m(p\cdot\sigma) + (\sigma\cdot p)\underbrace{\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\sigma}}_{=m})\,\xi e^{-ip\cdot x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

注). $\frac{1}{\sqrt{p\cdot\sigma}}$ は $\sqrt{p\cdot\sigma}$ の逆行列の意味

なるで より OK.

3軸に沿った、スピンの ↑, ↓ 状態 (σ^3の固有状態) を考える。

$$\sigma^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = +\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \cdots \quad (\uparrow)$$

$$\sigma^3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \cdots \quad (\downarrow)$$

(3.49) で、$\xi = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とすると、

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E-p^3}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \sqrt{E+p^3}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{large boost}} \sqrt{2E}\begin{pmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \end{pmatrix} \qquad (3.52)$$

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+p^3}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \sqrt{E-p^3}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{large boost}} \sqrt{2E}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3.53)$$

$\gamma \to \infty$ ($\beta \to 1$) の極限で、状態は、massless ($E = p^3$) の 2成分スピノルに縮退することが分かる。（※3）

(3.47) において $\sqrt{m}$ をかけておいたのは、$u(p)$ が massless の極限でも使えるようにしたかったからである。

(3.52)(3.53) は、ヘリシティー演算子の固有状態である。(※4)

$$h \equiv \hat{p} \cdot S = \frac{1}{2} \hat{p}_i \begin{pmatrix} \sigma_i & \\ & \sigma_i \end{pmatrix} \qquad (3.54)$$

h の固有値が $+1/2$ を右巻き、$-1/2$ を左巻きという。ヘリシティーとは、進行方向に対するスピンの向きを与えるものなので、質量のある粒子に対しては、適当な座標系から見れば、運動量が変わるので、ヘリシティも変わる。ただし、massless な粒子は光速で運動するため、これを追いこすようなブーストは存在しないので、ヘリシティは不変。

◎ ローレンツ共変な規格化条件

$\psi^\dagger \psi$ はローレンツ共変ではなかった。（$\bar{\psi}\psi$ はローレンツスカラーになる。3.2節を参照）同様に、$u^\dagger u$ もローレンツ共変でない。

$$u^\dagger u = \left(\xi^\dagger \sqrt{p\cdot\sigma} \quad \xi^\dagger \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} \right) \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\, \xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\, \xi \end{pmatrix} \qquad (3.55)$$

$$= (p\cdot\sigma + p\cdot\bar{\sigma})\, \xi^\dagger \xi$$

$$= 2E_p\, \xi^\dagger \xi$$

※ ξ 自身は規格化しておくという約束であった。

ローレンツスカラーを得るには、次のようにすればOK。

$$\bar{u}(p) \equiv u^\dagger(p)\, \gamma^0 \qquad (3.56)$$

とすれば、

$$\bar{u} u = u^\dagger(p)\, \gamma^0 u(p)$$

$$= \left(\xi^\dagger\sqrt{p\cdot\sigma} \quad \xi^\dagger\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\right)\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\,\xi\end{pmatrix}$$

$$= 2\sqrt{(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar\sigma)}\;\xi^\dagger\xi$$

$$= 2m\,\xi^\dagger\xi \qquad \swarrow (3.51) \qquad (3.57)$$

これは ローレンツ共変となっている。massless 粒子に対しては (3.57) は 0 になって意味がないので、(3.55) を使わなくてはならない。

まとめ

Dirac 方程式の一般解は、平面波の重ね合わせで表せる。

平面波解 $\rightarrow \quad \psi(x) = u(p)\,e^{-ip\cdot x} \qquad (p^2 = m^2,\ p^0 > 0) \qquad (3.58)$

$u(p)$ は 線形独立な 2つの解がある。これを、添え字 s ($s=1,2$) で区別する。

$$u^s(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\,\xi^s\end{pmatrix} \quad (s=1,2) \qquad (3.59)$$

規格化条件は、
$$\begin{cases} \bar u^r(p)\,u^s(p) = 2m\,\delta^{rs} & \cdots \text{massive} \\ u^{r\dagger}(p)\,u^s(p) = 2E_p\,\delta^{rs} & \cdots \text{massless}\end{cases} \qquad (3.60)$$

まったく同様にして、負の振動数解が得られる。

$$\psi(x) = v(p)\,e^{+ip\cdot x} \quad (p^2 = m^2,\ p^0 > 0) \qquad (3.61)$$

$\uparrow$ $p^0 < 0$ とする代わりに、指数の符号を変えた。

$$v^s(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\,\eta^s\end{pmatrix} \quad (s=1,2) \qquad (3.62)$$

規格化条件は
$$\begin{cases} \bar v^r(p)\,v^s(p) = -2m\,\delta^{rs} & \cdots \text{massive} \\ v^{r\dagger}(p)\,v^s(p) = 2E_p\,\delta^{rs} & \cdots \text{massless}\end{cases} \qquad (3.63)$$

— がつくのは (3.47) に戻って考えれば明らか。

(3.55)の計算

(3.57) の計算

このv(p) が、反粒子に対応していることは、3.5 で明らかになる。

⑨

また、uとvは互いに直交する。

$$\bar{u}^r(p)\, v^s(p) = \bar{v}^r(p)\, u^s(p) = 0 \qquad (3.64)$$

∵ $\bar{u}^r(p)\, v^s(p) = u^{r\dagger}\gamma^0 v^s$

$$= \left(\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^{r\dagger}\ \ \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\,\xi^{r\dagger}\right)\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\,\eta^s\end{pmatrix}$$

$$= -\sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\,\xi^{r\dagger}\eta^s + \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^{r\dagger}\eta^s$$

$$= 0$$ など。 //

ただし、次のようになることに注意．

$$u^{r\dagger}(p)\, v^s(p) \neq 0, \qquad v^{r\dagger}(p)\, u^s(p) \neq 0$$

$$u^{r\dagger}(\mathbf{p})\, v^s(-\mathbf{p}) = v^{r\dagger}(-\mathbf{p})\, u^s(\mathbf{p}) = 0 \qquad (3.65)$$

∵ 1つ目 … 明らか。

2つ目 … $u^{r\dagger}(\mathbf{p})\, v^s(-\mathbf{p}) = \left(\sqrt{-\mathbf{p}\cdot\sigma}\,\xi^{r\dagger}\ \ \sqrt{\mathbf{p}\cdot\sigma}\,\xi^{r\dagger}\right)\begin{pmatrix}\sqrt{\mathbf{p}\cdot\sigma}\ \ \eta^s \\ -\sqrt{-\mathbf{p}\cdot\sigma}\ \ \eta^s\end{pmatrix}$

$$= \sqrt{-\mathbf{p}\cdot\sigma}\sqrt{\mathbf{p}\cdot\sigma}\,\xi^{r\dagger}\eta^s - \sqrt{\mathbf{p}\cdot\sigma}\sqrt{-\mathbf{p}\cdot\sigma}\,\xi^{r\dagger}\eta^s$$

$$= 0$$ など //

◎ スピンについての和．

クロスセクションの計算などに必要。

$$\sum_{s=1,2} u^s(p)\,\bar{u}^s(p) = \sum_s \begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\,\xi^s\end{pmatrix}\left(\xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma}\ \ \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\right)\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

$$= \sum_s \begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\,\xi^s\end{pmatrix}\left(\xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\ \ \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\bar\sigma} & \sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma} \\ \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sqrt{p\cdot\bar\sigma} & \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma}\end{pmatrix} \qquad \swarrow \sum_s \xi^s\xi^{s\dagger} = 1$$

$$= \begin{pmatrix} m & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar\sigma & m\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar{\sigma} & \end{pmatrix} + m \qquad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix}$$ であるから、

$$\sum_{s=1,2} u^s(p)\bar{u}^s(p) = \not{p} + m \quad \cdots \quad (3.66)$$

同様に $$\sum_{s=1,2} v^s(p)\bar{v}^s(p) = \not{p} - m \quad (3.67)$$

3.4 Dirac 行列と、Dirac Field Bilinears

反交換関係 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ (3.22) で定義される、Diracのガンマ行列の代数は、以下の16コの基底がある。一般に、$\bar{\psi}\Gamma\psi$ という量は、ローレンツ共変となるが、Γ の形によって、ローレンツ変換に対する性質が異なり、スカラーや、ベクトルやテンソルになる。

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \gamma^\mu & \gamma^{\mu\nu} & \gamma^{\mu\nu\rho} & \gamma^{\mu\nu\rho\sigma} & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1コ & 4コ & {}_4C_2 = 6コ & {}_4C_3 = 4コ & 1コ & —\ 計16コ \end{array}$$

ただし、 $$\gamma^{\mu\nu} \equiv \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]} = \frac{1}{2!}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$$

$$\gamma^{\mu\nu\rho} \equiv \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho]} = \frac{1}{3!}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu + \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu - \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu\right)$$

$$\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma]}$$

である。数と γ^μ で作られるどんな量も、これらの反対称化積 (Γ) と計算で表すことができる。例えば…

(次5)

$\gamma^\mu\gamma^\nu$; γ^μ の定義 (3.22) から、

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

一方、 $$\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\gamma^{\mu\nu}$$

$$\therefore\ \gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}$$

$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho$; (3.22) の両辺に右から γ^ρ をかけると、

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho = 2g^{\mu\nu}\gamma^\rho$$

また、$\gamma^{\mu\nu}$ の定義式の両辺に右から γ^ρ をかけると、

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho = 2\gamma^{\mu\nu}\gamma^\rho$$

よって、$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = g^{\mu\nu}\gamma^\rho + \gamma^{\mu\nu}\gamma^\rho$ となる。添字をサイクリックに置換して足し合わせると、

$$\begin{aligned}
&\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu + \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu \\
&= g^{\mu\nu}\gamma^\rho + g^{\nu\rho}\gamma^\mu + g^{\rho\mu}\gamma^\nu + \gamma^{\mu\nu}\gamma^\rho + \gamma^{\nu\rho}\gamma^\mu + \gamma^{\rho\mu}\gamma^\nu \\
&= g^{\mu\nu}\gamma^\rho + g^{\nu\rho}\gamma^\mu + g^{\rho\mu}\gamma^\nu + 3\gamma^{\mu\nu\rho} \qquad \text{— ①}
\end{aligned}$$

ところで、
$$\begin{aligned}
\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu &= \gamma^\nu(2g^{\rho\mu} - \gamma^\mu\gamma^\rho) \\
&= -\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho + 2\gamma^\nu g^{\rho\mu} \\
&= \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - 2g^{\nu\mu}\gamma^\rho + 2g^{\rho\mu}\gamma^\nu
\end{aligned}$$

同様に $\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu = \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - 2g^{\rho\nu}\gamma^\mu + 2g^{\rho\mu}\gamma^\nu$

のように、γ^μ の順序を入れかえることができるので、① は

$$\begin{aligned}
&3\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - 2g^{\nu\mu}\gamma^\rho - 2g^{\rho\nu}\gamma^\mu + 4g^{\rho\mu}\gamma^\nu \\
&= g^{\mu\nu}\gamma^\rho + g^{\nu\rho}\gamma^\mu + g^{\rho\mu}\gamma^\nu + 3\gamma^{\mu\nu\rho}
\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = g^{\mu\nu}\gamma^\rho + g^{\nu\rho}\gamma^\mu - g^{\rho\mu}\gamma^\nu + \gamma^{\mu\nu\rho}$$

$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$ も、きっと同様にできる。また、4次元時空では、γ^μ の5コ以上の積は存在しない。γ^μ が5コ以上あると、必ず添字の重複（$\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^3$ のように）がおこるが、次の性質と反交換関係を用いることにより、4コ以下の積に直せるからである。

性質 $(\gamma^0)^2 = 1$ $\qquad (\gamma^i)^2 = -1$

∵ (3.22) において $\mu=\nu=0$, $\mu=\nu=i$ とすれば明らか。

また、4次元では、5階以上の完全反対称テンソルが存在しないことからも γ^μ の5コ以上の積を考えても仕方ないことが分かる。

ローレンツ変換に対する性質を調べてみる。

例) $\bar{\Psi}\gamma^{\mu\nu}\Psi \rightarrow (\bar{\Psi}\Lambda^{-1}_{1/2})(\frac{1}{2}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}])(\Lambda_{1/2}\Psi)$

$$= \frac{1}{2}\bar{\Psi}(\Lambda^{-1}_{1/2}\gamma^{\mu}\underbrace{\Lambda_{1/2}\Lambda^{-1}_{1/2}}\gamma^{\nu}\Lambda_{1/2} - \Lambda^{-1}_{1/2}\gamma^{\nu}\underbrace{\Lambda_{1/2}\Lambda^{-1}_{1/2}}_{1にする}\gamma^{\mu}\Lambda_{1/2})\Psi$$

$$= \frac{1}{2}\bar{\Psi}(\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\gamma^{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\gamma^{\beta} - \Lambda^{\nu}{}_{\beta}\gamma^{\beta}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\gamma^{\alpha})\Psi$$

$$= \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\bar{\Psi}\gamma^{\alpha\beta}\Psi$$

よって $\bar{\Psi}\gamma^{\mu\nu}\Psi$ は2階のテンソルである。 //

$\gamma^{\mu\nu\rho}$ や $\gamma^{\mu\nu\rho\sigma}$ を直接扱うよりも、次の γ^{5} を定義した方が便利である。

$$\gamma^{5} \equiv i\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3} = -\frac{i}{4!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\rho}\gamma_{\sigma} \qquad (7.68)$$

∵ $i\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3} = -\frac{i}{4!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\rho}\gamma_{\sigma}$ であること:

(右辺) $= -\frac{i}{4!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma}\gamma^{\delta}$

$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ は、すべて互いに異なる数字をとるとして良い。(それ以外は0)

その順列は 4! 通りある。$\alpha\neq\beta$ に対して、(7.22)より、$\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} = -\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha}$ であるので、

$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ が、$(0,1,2,3)$ の

(i) 偶置換なら、$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=+1$ で、$\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma}\gamma^{\delta}\rightarrow\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}$ の並べかえによる符号は -1 の偶数乗 だから $+1$.

(ii) 奇置換なら、$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=-1$ で、$\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma}\gamma^{\delta}\rightarrow\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}$ の並べかえによる符号は、-1 の奇数乗 だから -1, 全体として $+1$.

また $g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta} = (-1)^{3}\times(+1) = -1$ であるから、結局

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma}\gamma^{\delta} = 4!\times(+1)\times(-1)\times\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}$$

よって、示したい式 OK. //

この γ^{5} を用いれば、

(1) $\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = -i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{5}$

(2) $\gamma^{\mu\nu\rho} = i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_{\sigma}\gamma^{5}$

⊙ (1) $-i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5 = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^{\sigma]}$

(2) $i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma\gamma^5 = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$\sigma=0$; $-\varepsilon^{\mu\nu\rho 0}\gamma_0\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\varepsilon^{\mu\nu\rho 0}g_{0\lambda}\gamma^\lambda\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$= -\varepsilon^{\mu\nu\rho 0}(\gamma^0)^2\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$= -\varepsilon^{\mu\nu\rho 0}\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$= \varepsilon^{0\mu\nu\rho}\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$= \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]}$

$\sigma=i$; $-\varepsilon^{\mu\nu\rho i}\gamma_i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\varepsilon^{\mu\nu\rho i}g_{ij}\gamma^j\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$= g_{ii}\varepsilon^{\mu\nu\rho i}\gamma^0\gamma^j\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$j=1$のとき. $g_{ii}\varepsilon^{\mu\nu\rho i}\gamma^0\gamma^1\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$= \varepsilon^{\mu\nu\rho 1}\gamma^0\gamma^2\gamma^3 = \varepsilon^{\mu 1\nu\rho}\gamma^0\gamma^2\gamma^3 = \gamma^{[\mu}\gamma^2\gamma^{3]}$

$j=2$のとき. $-\varepsilon^{\mu\nu\rho 2}\gamma^0\gamma^1\gamma^3 = \varepsilon^{\mu\nu 2\rho}\gamma^0\gamma^1\gamma^3 = \gamma^{[\mu}\gamma^1\gamma^{3]}$

$j=3$のとき $\varepsilon^{\mu\nu\rho 3}\gamma^0\gamma^1\gamma^2 = \gamma^{[\mu}\gamma^1\gamma^{2]}$

//

γ^5の性質

(1) $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$ (3.69) (2) $(\gamma^5)^2 = 1$ (3.70) (3) $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ (3.71)

⊙ (1) (×6)

(2) $(\gamma^5)^2 = -(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)$

$= \gamma^0\gamma^0\ \gamma^1\gamma^2\gamma^3\ \gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$= \gamma^0\gamma^0\ \gamma^1\gamma^1\ \gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3$

$= -(\gamma^0)^2(\gamma^1)^2(\gamma^2)^2(\gamma^3)^2$

$= 1$

(3) $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = \gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5$

$\mu=0$; $\gamma^5\gamma^0 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0 = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$\gamma^0\gamma^5 = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ ∵ OK

$\mu=i$; $\gamma^5\gamma^i = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^i$

$\gamma^i\gamma^5 = i\gamma^i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma^0\gamma^i\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$\{\gamma^5, \gamma^i\} = i\gamma^0(\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^i - \gamma^i\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = 0.$

//

以上の性質から、 $[\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0$ が分かる。

② $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ より、 $[\gamma^5, [\gamma^\mu, \gamma^\nu]] = 0$ を示せば良い。

$$
\begin{aligned}
[\gamma^5, [\gamma^\mu, \gamma^\nu]] &= [\gamma^5, \gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu] \\
&= [\gamma^5, \gamma^\mu\gamma^\nu] - [\gamma^5, \gamma^\nu\gamma^\mu] \\
&= [\gamma^5, \gamma^\mu]\gamma^\nu + \gamma^\mu[\gamma^5, \gamma^\nu] - [\gamma^5, \gamma^\nu]\gamma^\mu - \gamma^\nu[\gamma^5, \gamma^\mu] \\
&= \{\gamma^5, \gamma^\mu\}\gamma^\nu - \gamma^\mu\{\gamma^5, \gamma^\nu\} - \{\gamma^5, \gamma^\nu\}\gamma^\mu + \gamma^\nu\{\gamma^5, \gamma^\mu\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

//

γ^5の異なる固有値に属する固有ベクトルは、混ざることなく変換するので、ディラック表現は可約である。（Schurの補題）（※7）

Weyl表示を採用すると、 $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix}$ であるから、γ^5の具体形は、

$$
\begin{aligned}
\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 &= i\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & \end{pmatrix} \\
&= i\begin{pmatrix} -\sigma^1 & \\ & \sigma^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sigma^2\sigma^3 & \\ & -\sigma^2\sigma^3 \end{pmatrix} \\
&= i\begin{pmatrix} \sigma^1\sigma^2\sigma^3 & \\ & -\sigma^1\sigma^2\sigma^3 \end{pmatrix} \\
&= i\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^1\sigma^2\sigma^3 &= \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i & \\ & i \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(3.72)

となる。従って、左手ないし右手成分しかないディラックスピノルは、γ^5の固有状態になる。

$$\gamma^5\begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^5\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} = +\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

固有値 -1　　　　固有値 $+1$

これらのスピノルは、ローレンツ変換によって混ざり合うことはない。

注）γ^5の固有値を、カイラリティと呼ぶ。

まとめ.

1	γ^μ	$\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma^\mu\gamma^\nu]$	$\gamma^\mu\gamma^5$	γ^5
スカラー(1コ)	ベクター(4コ)	テンソー(6コ)	擬ベクター(4コ)	擬スカラー(1コ)

"擬"がつく量は、パリティ変換によって符号を変える。(3.6節で述べる)

⊗ カレント

γ^μ と $\gamma^\mu\gamma^5$ を用いて、次のようにカレントを定める。

$$j^\mu(x) = \bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x) \qquad j^{\mu5}(x) = \bar\psi(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x) \qquad (3.53)$$

この発散を計算してみる。

$$\begin{aligned}\partial_\mu j^\mu &= (\partial_\mu\bar\psi)\gamma^\mu\psi + \bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\ &= im\bar\psi\psi + \bar\psi(-im\psi) \\ &= 0 \qquad (3.54)\end{aligned}$$

Dirac-eq

$$-i\partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu - m\bar\psi = 0$$
$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0$$

従って $\psi(x)$ が Dirac 方程式に従うなら、$j^\mu(x)$ はいつも保存する。
(電磁場とディラック場の結合を考えると、これはちょうど電流密度である.)
同様に、

$$\begin{aligned}\partial_\mu j^{\mu5} &= (\partial_\mu\bar\psi)\gamma^\mu\gamma^5\psi + \bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\psi \\ &= (\partial_\mu\bar\psi)\gamma^\mu\gamma^5\psi - \bar\psi\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\ &= 2im\bar\psi\gamma^5\psi \qquad (3.55)\end{aligned}$$

これは $m=0$ のときのみ保存する。(軸性ベクトルカレントという)
ここで、次の右巻き、左巻き状態への射影演算子

$$\frac{1-\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix}1 & \\ & 0\end{pmatrix} \qquad \frac{1+\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix}0 & \\ & 1\end{pmatrix}$$

(左巻きへの射影) (右巻きへの射影)

を用いて、

$$j^{\mu5} = j^\mu_L + j^\mu_R = \bar\psi\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi + \bar\psi\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\psi \qquad (3.56)$$

と書くと便利。

$m=0$ のとき、左巻き粒子と右巻き粒子のカレント(電流密度)は、別々に保存することが分かる。

これら2つのカレントは、次の変換に関するネーターカレントである。

$$j^\mu \quad : \quad \psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha}\psi(x) = \psi(x) + i\alpha\psi(x) + O(\alpha^2) \quad ①$$
$$j^{\mu 5} \quad : \quad \psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha\gamma^5}\psi(x) = \psi(x) + i\alpha\gamma^5\psi(x) + O(\alpha^2) \quad ②$$

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

①の変換に対して
$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = e^{-i\alpha}\psi^\dagger\gamma^0(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{i\alpha}\psi = \mathcal{L}$$

∴ ネーターカレントは $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}(i\psi) = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$

②の変換に対して
$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}'' = e^{-i\alpha\gamma^5}\psi^\dagger\gamma^0(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{i\alpha\gamma^5}\psi(x)$$
$$= ie^{-i\alpha\gamma^5}\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu e^{i\alpha\gamma^5}\partial_\mu\psi - me^{-i\alpha\gamma^5}\psi^\dagger\gamma^0 e^{i\alpha\gamma^5}\psi$$

(第1項): $\gamma^0\gamma^\mu$ と γ^5 は可換である。(∵ $\mu=0$ は明らか。$\mu=i$ のときも、(3.71) よりOK) $(\gamma^5)^2=1$ であるから、$e^{i\alpha\gamma^5}$ は 1 と γ^5 を用いたべき級数で表される。よって、$\gamma^0\gamma^\mu$ と $e^{i\alpha\gamma^5}$ は可換である。

$$(\text{第一項}) = \psi^\dagger\gamma^0 i\gamma^\mu\partial_\mu\psi.$$

(第2項); (3.71) より、γ^0 と γ^5 は非可換である。よって γ^0 と $e^{i\alpha\gamma^5}$ も非可換。この項は全微分項でないので、$m\neq0$ のとき、保存量はない。

$m=0$ のとき、ネーターカレントは $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}(i\gamma^5\psi) = -\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$

☆ Fierzの恒等式.

(1) (補題) $(\sigma^\mu)_{\alpha\beta}(\sigma_\mu)_{\gamma\delta} = 2\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta}$ (7.75)

添字の入れかえについて反対称

(2) (Fierzの恒等式)

(i) $(\bar{u}_{1R}\sigma^\mu u_{2R})(\bar{u}_{3R}\sigma_\mu u_{4R}) = -(\bar{u}_{1R}\sigma^\mu u_{4R})(\bar{u}_{3R}\sigma_\mu u_{2R})$ (7.78)

(ii) $(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu u_{4L}) = -(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu u_{4L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu u_{2L})$ (3.79)

(3) (i) $\varepsilon_{\alpha\beta}(\sigma^\mu)_{\beta\gamma} = (\bar{\sigma}^{\mu T})_{\alpha\beta}\,\varepsilon_{\beta\gamma}$ (3.80)

(ii) $\bar{\sigma}^\mu \sigma_\mu = 4$ (3.81)

⑤ (1) $(\text{左辺}) = \underbrace{\left[(\sigma^0)_{\alpha\beta}(\sigma^0)_{\gamma\delta} - (\sigma^3)_{\alpha\beta}(\sigma^3)_{\gamma\delta}\right]}_{\text{対角成分のみ}\neq 0} - \underbrace{\left[(\sigma^1)_{\alpha\beta}(\sigma^1)_{\gamma\delta} + (\sigma^2)_{\alpha\beta}(\sigma^2)_{\gamma\delta}\right]}_{\text{非対角成分のみ}\neq 0}$

従って、$(\alpha\beta\gamma\delta) = (i\,i\,j\,j)$ もしくは $(k\,l\,m\,n)$ $(k\neq l,\ m\neq n)$

$(i\,j\,k\,l\,m\,n = 1, 2)$

の場合以外は 0 になる。σ^μ の具体形は、

$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ $\sigma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ $\sigma^2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}$

であるので、

$(\alpha.\beta.\gamma.\delta) = (i\,i\,j\,j)$ のとき、$(\text{左辺}) = \begin{cases} 0 & (i=j) \\ 2 & (i\neq j) \end{cases}$

$(k\,l\,m\,n)$ のとき、$(\text{左辺}) = \begin{cases} 0 & (k=m,\ l=n) \\ -2 & (k\neq m,\ l\neq n) \end{cases}$

一方、$(\text{右辺}) = 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}$ も、上記と同じ値になることが確認できる。 //

(2)(i) $(\text{左辺}) = (\bar{u}_{1R}\sigma^\mu u_{2R})(\bar{u}_{3R}\sigma_\mu u_{4R})$

$= \left[(\bar{u}_{1R})_\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\beta}(u_{2R})_\beta\right]\left[(\bar{u}_{3R})_\gamma(\sigma_\mu)_{\gamma\delta}(u_{4R})_\delta\right]$

$= 2\varepsilon_{\alpha\gamma}(\bar{u}_{1R})_\alpha(\bar{u}_{3R})_\gamma\,\varepsilon_{\beta\delta}(u_{2R})_\beta(u_{4R})_\delta$ ↓ (3.79)

$= -2\varepsilon_{\alpha\gamma}(\bar{u}_{1R})_\alpha(\bar{u}_{3R})_\gamma\,\varepsilon_{\delta\beta}(u_{2R})_\delta(u_{4R})_\beta$

$= -\left[(\bar{u}_{1R})_\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\beta}(u_{4R})_\beta\right]\left[(\bar{u}_{3R})_\gamma(\sigma_\mu)_{\gamma\delta}(u_{2R})_\delta\right]$

$= -(\bar{u}_{1R}\sigma^\mu u_{4R})(\bar{u}_{3R}\sigma_\mu u_{2R})$

/

(ii) $\bar{\sigma}^\mu = ((\sigma^0), +(\sigma^i))$, $\bar{\sigma}_\mu = ((\sigma^0), -(\sigma^i))$

だから、積 $\bar{\sigma}^\mu\bar{\sigma}_\mu$ を考えれば、(i) と同様の議論により、

(3.79) と同様の式 $(\bar{\sigma}^\mu)_{\alpha\beta}(\bar{\sigma}_\mu)_{\gamma\delta} = 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}$ が成り立つ。

よって、(2) (i) と同様に示せる。 /

(3)
(i) $\varepsilon = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$, $\sigma^0 = \bar{\sigma}^{0T}$, $\sigma^2 = \bar{\sigma}^{2T}$, $\sigma^1 = -\bar{\sigma}^{1T}$, $\sigma^3 = -\bar{\sigma}^{3T}$

であるから、

$$\varepsilon\sigma^0 = \varepsilon \ , \quad \bar{\sigma}^{0T}\varepsilon = \varepsilon .$$

$$\begin{cases} \varepsilon\sigma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \\ \bar{\sigma}^{1T}\varepsilon = \begin{pmatrix} & -1 \\ -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon\sigma^2 = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & \\ & i \end{pmatrix} \\ \bar{\sigma}^{2T}\varepsilon = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & \\ & i \end{pmatrix} . \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon\sigma^3 = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -1 \\ -1 & \end{pmatrix} \\ \bar{\sigma}^{3T}\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -1 \\ -1 & \end{pmatrix} \end{cases}$$

OK.

(ii) $\bar{\sigma}^\mu \sigma_\mu = (\sigma^0)^2 + (\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2 + (\sigma^3)^2 = 4$

これらの公式を用いれば、例えば次のような鬱陶しい式が簡単になる。

$$(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})$$

$$= \left[(\bar{u}_{1L})_\alpha (\bar{\sigma}^\mu)_{\alpha\beta} (\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda u_{2L})_\beta\right]\left[(\bar{u}_{3L})_\gamma (\bar{\sigma}_\mu)_{\gamma\delta} (\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})_\delta\right]$$

$$\downarrow (3.79)$$

$$= 2\varepsilon_{\alpha\gamma}(\bar{u}_{1L})_\alpha(\bar{u}_{3L})_\gamma\ \varepsilon_{\beta\delta}(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda u_{2L})_\beta(\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})_\delta \quad \cdots ※$$

ここで

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\beta\delta}(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda u_{2L})_\beta &= \varepsilon_{\beta\delta}(\sigma^\nu)_{\beta\rho}(\bar{\sigma}^\lambda)_{\rho\tau}(u_{2L})_\tau \\ &= \varepsilon_{\beta\delta}(\sigma^{\nu T})_{\rho\beta}(\bar{\sigma}^{\lambda T})_{\tau\rho}(u_{2L})_\tau \\ &= (\bar{\sigma}^\nu)_{\beta\delta}\,\varepsilon_{\rho\beta}(\bar{\sigma}^{\lambda T})_{\tau\rho}(u_{2L})_\tau \quad (3.80) \\ &= (\bar{\sigma}^\nu)_{\beta\delta}(\sigma^\lambda)_{\rho\beta}\,\varepsilon_{\tau\rho}(u_{2L})_\tau \\ &= \varepsilon_{\tau\rho}(u_{2L})_\tau(\sigma^\lambda\bar{\sigma}^\nu)_{\rho\delta} \end{aligned}$$

注) (3.80) と同様にして、$\varepsilon_{\alpha\beta}(\bar{\sigma}^\mu)_{\beta\delta} = (\sigma^{\mu T})_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\delta}$ も成り立つ。

であるから、

$$\begin{aligned} ※ &= 2\varepsilon_{\alpha\gamma}(\bar{u}_{1L})_\alpha(\bar{u}_{3L})_\gamma\ \varepsilon_{\tau\rho}(u_{2L})_\tau(\sigma^\lambda\bar{\sigma}^\nu)_{\rho\delta}(\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})_\delta \\ &= 2\varepsilon_{\alpha\gamma}(\bar{u}_{1L})_\alpha(\bar{u}_{3L})_\gamma\ \varepsilon_{\beta\delta}(u_{2L})_\beta(\sigma^\lambda\bar{\sigma}^\nu\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})_\delta \\ &\qquad \downarrow (3.81) \\ &= 2\cdot 4^2\,\varepsilon_{\alpha\gamma}(\bar{u}_{1L})_\alpha(\bar{u}_{3L})_\gamma\ \varepsilon_{\beta\delta}(u_{2L})_\beta(u_{4L})_\delta \\ &\qquad \downarrow (3.79) \\ &= 16\,(\bar{\sigma}^\mu)_{\alpha\beta}(\bar{\sigma}_\mu)_{\gamma\delta}(\bar{u}_{1L})_\alpha(\bar{u}_{3L})_\gamma(u_{2L})_\beta(u_{4L})_\delta \\ &= 16\,(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu u_{4L}) \qquad (3.82) \end{aligned}$$

となる。

(補足).

(※1). ξ が 2成分スピノルであること。

Weyl表示では、回転の生成子は、

$$S^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k & \\ & \sigma^k\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\Sigma^k \qquad (3.27)$$

と書けるので、回転を表す行列を $D_{1/2}$ と書けば、(3.30) より、

$$D_{1/2} = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{ij}S^{ij}\right)$$

$$= \exp\left[-\frac{i}{4}\left(\omega_{12}\epsilon^{123}\Sigma^3 + \omega_{21}\epsilon^{213}\Sigma^3 + (1,2,3\text{の巡回置換})\right)\right]$$

$\omega_{ij} \equiv \theta_k$ とおいた。

$$= \exp\left[-\frac{i}{4}\left(2\theta_3\Sigma^3 + 2\theta_1\Sigma^1 + 2\theta_2\Sigma^2\right)\right]$$

$$= \exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\right) \qquad \boldsymbol{\theta} \equiv (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

$$= \exp\left[-\frac{i}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma} & \\ & \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}\right]$$

となる。よって、ディラックスピノルは回転のもとで、$\psi \to D_{1/2}\psi$ のように変換する。今、$\psi(x) = \sqrt{m}\,e^{-ip\cdot x}\begin{pmatrix}\xi \\ \xi\end{pmatrix}$ であるから、係数を省略して

$$\begin{pmatrix}\xi \\ \xi\end{pmatrix} \longrightarrow \exp\left(-\frac{i}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma} & \\ & \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\xi \\ \xi\end{pmatrix}$$

$$= \exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\begin{pmatrix}\xi \\ \xi\end{pmatrix}$$

結局、ξ 自身は、$\xi \longrightarrow \exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\xi$ のように変換することが分かる。

$\exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)$ はユニタリー行列であり、かつ、行列式の値は1である。実際

$$-\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix}\theta_3 & \theta_1 - i\theta_2 \\ \theta_1 + i\theta_2 & -\theta_3\end{pmatrix} \qquad \therefore\ \mathrm{tr}\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) = 0$$

であるから、公式 $\det e^A = e^{\mathrm{tr}A}$ より、

$$\det\exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) = e^{\mathrm{tr}\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)} = 1.$$

よって $\exp(-\frac{i}{2}\theta\cdot\sigma)$ の集合は $SU(2)$ をなす。従って、ξ は 2成分スピノルである。

(※2) $$\sqrt{p\cdot\sigma} = \frac{p\cdot\sigma + m}{\sqrt{2(p^0+m)}}$$ が成り立つ。（web の補足による。）

∵ $$\sqrt{p\cdot\sigma} = \frac{1}{2|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix} |\mathbf{p}|(\sqrt{-}+\sqrt{+}) - p^3(\sqrt{+}-\sqrt{-}) & -(p^1-ip^2)(\sqrt{+}-\sqrt{-}) \\ -(p^1+ip^2)(\sqrt{+}-\sqrt{-}) & |\mathbf{p}|(\sqrt{-}+\sqrt{+}) + p^3(\sqrt{+}-\sqrt{-}) \end{pmatrix}$$

$$(\sqrt{+}\pm\sqrt{-})^2 = 2E \pm 2\sqrt{E^2-|\mathbf{p}|^2} = 2(E\pm m) = 2(p^0\pm m) \geq 0$$

$$= \frac{1}{2|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix} |\mathbf{p}|\sqrt{2(p^0+m)} - p^3\sqrt{2(p^0-m)} & -(p^1-ip^2)\sqrt{2(p^0-m)} \\ -(p^1+ip^2)\sqrt{2(p^0-m)} & |\mathbf{p}|\sqrt{2(p^0+m)} + p^3\sqrt{2(p^0-m)} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(p^0+m)}}\begin{pmatrix} p^0+m - p^3\frac{\sqrt{(p^0)^2-m^2}}{|\mathbf{p}|} & -(p^1-ip^2)\frac{\sqrt{(p^0)^2-m^2}}{|\mathbf{p}|} \\ -(p^1+ip^2)\frac{\sqrt{(p^0)^2-m^2}}{|\mathbf{p}|} & p^0+m + p^3\frac{\sqrt{(p^0)^2-m^2}}{|\mathbf{p}|} \end{pmatrix}$$

$$(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(p^0+m)}}\begin{pmatrix} p^0 - p^3 + m & -p^1 + ip^2 \\ -p^1 - ip^2 & p^0 + p^3 + m \end{pmatrix}$$

$$= \frac{p\cdot\sigma + m}{\sqrt{2(p^0+m)}}$$

//

(※5) もっと一般に、次のことがいえる。

「$\Gamma^a = \{1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, i\gamma^\mu\gamma^5, \gamma^5\}$ $(a=1,\dots,16)$ と名前をつける。この時、$\{\Gamma^a\}$ は完全系をなし、任意の 4×4 行列は、これらの一次結合で表される。」このことを示す。

補題 $\mathrm{Tr}(\Gamma^a\Gamma_b) = 4\delta^a{}_b$ 。ただし、$\Gamma_b = \{1, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, i\gamma_\mu\gamma^5, \gamma^5\}$（添字を下げたもの）

∵ §5.1 の Trace Technology より、次が成り立つ。

(i) Tr(奇数個の γ^μ の積) $= 0$

(ii) Tr(奇数個の γ^μ と γ^5 の積) $= 0$

(iii) $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$

(iv) $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$

(v) $\mathrm{Tr}(\gamma^5) = 0$

(vi) $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) = 0$

(i)〜(vi) を用いて、右の表の 15 種類のトレースを計算すれば良い。

Γ^a \ Γ_b	1	γ_μ	$\sigma_{\mu\nu}$	$i\gamma_\mu\gamma^5$	γ^5
1	$(1)^2$	γ_μ	$\sigma_{\mu\nu}$	$i\gamma_\mu\gamma^5$	γ^5
γ^μ		$\gamma^\mu\gamma_\nu$	$\gamma^\mu\sigma_{\lambda\rho}$	$i\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma^5$	$\gamma^\mu\gamma^5$
$\sigma^{\mu\nu}$			$\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\rho\sigma}$	$i\sigma^{\mu\nu}\gamma_\rho\gamma^5$	$\sigma^{\mu\nu}\gamma^5$
$i\gamma^\mu\gamma^5$				$-\gamma^\mu\gamma^5\gamma_\nu\gamma^5$	$i\gamma^\mu(\gamma^5)^2$
γ^5					$(\gamma^5)^2$

実際、次のようになる。

$$\mathrm{Tr}(1^2) = 4, \quad \mathrm{Tr}(\gamma^\mu) = 0,$$
$$\mathrm{Tr}(\sigma^{\mu\nu}) = \frac{i}{2}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = \frac{i}{2}\cdot(4g^{\mu\nu} - 4g^{\nu\mu}) = 0,$$
$$\mathrm{Tr}(i\gamma_\mu\gamma^5) = 0, \quad \mathrm{Tr}(\gamma^5) = 0, \quad \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma_\nu) = 4\delta^\mu{}_\nu,$$
$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\sigma_{\nu\rho}) = \frac{i}{2}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\rho - \gamma^\mu\gamma_\rho\gamma_\nu) = 0,$$
$$\mathrm{Tr}(i\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma^5) = 0, \quad \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^5) = 0,$$
$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\rho\sigma}) &= -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma - \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\sigma\gamma_\rho - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma + \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\sigma\gamma_\rho) \\ &= -\left[(g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - \delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma + \delta^\mu{}_\sigma\delta^\nu{}_\rho) - (g^{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - \delta^\mu{}_\sigma\delta^\nu{}_\rho + \delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma)\right. \\ &\quad \left. -(g^{\nu\mu}g_{\rho\sigma} - \delta^\nu{}_\rho\delta^\mu{}_\sigma + \delta^\nu{}_\sigma\delta^\mu{}_\rho) + (g^{\nu\mu}g_{\sigma\rho} - \delta^\nu{}_\sigma\delta^\mu{}_\rho + \delta^\nu{}_\rho\delta^\mu{}_\sigma)\right] \\ &= 4(\delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma - \delta^\mu{}_\sigma\delta^\nu{}_\rho),\end{aligned}$$
$$\mathrm{Tr}(i\sigma^{\mu\nu}\gamma_\rho\gamma^5) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\rho\gamma^5 - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\rho\gamma^5) = 0.$$
$$\mathrm{Tr}(\sigma^{\mu\nu}\gamma^5) = \frac{i}{2}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5 - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^5) = 0$$
$$\mathrm{Tr}(-\gamma^\mu\gamma^5\gamma_\nu\gamma^5) = \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma^5\gamma^5) = \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma_\nu) = 4\delta^\mu{}_\nu$$
$$\mathrm{Tr}(i\gamma^\mu(\gamma^5)^2) = \mathrm{Tr}(i\gamma^\mu) = 0, \quad \mathrm{Tr}((\gamma^5)^2) = \mathrm{Tr}(1) = 4$$

//

これより、もし、$\sum_a C_a\Gamma^a = 0$ であれば、両辺に Γ_b をかけてトレースをとると、

$$0 = \mathrm{Tr}\left(\sum_a C_a\Gamma^a\Gamma_b\right) = \sum_a C_a\,\mathrm{Tr}(\Gamma^a\Gamma_b) = 4\sum_a C_a\delta^a{}_b$$

∴ すべての b に対して $C_b = 0$ となる。よって $\{\Gamma^a\}$ は1次独立である。4×4 行列の自由度は 16 あり、1次独立な基底の数も 16 ある。よって、$\{\Gamma^a\}$ は完全系をなす。

(※6) (i) $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ ならば $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$

∵
$$\begin{aligned}(\gamma^5)^\dagger &= -i\gamma^{3\dagger}\gamma^{2\dagger}\gamma^{1\dagger}\gamma^{0\dagger} \\ &= -i(-\gamma^3)(-\gamma^2)(-\gamma^1)\gamma^0 \quad \text{仮定より} \\ &= i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 \\ &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (3210)\to(0123)\ \text{は偶置換} \\ &= \gamma^5\end{aligned}$$

//

(ii) 関係式 $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ は、γ^μ のユニタリー変換 $\gamma^{\mu\prime} = U^\dagger\gamma^\mu U$ に対しても成り立つ。

∵
$$\begin{aligned}(\gamma^{\mu\prime})^\dagger = (U^\dagger\gamma^\mu U)^\dagger &= U^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger U \\ &= U^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 U \\ &= U^\dagger\gamma^0 UU^\dagger\gamma^\mu UU^\dagger\gamma^0 U \\ &= \gamma^{0\prime}\gamma^{\mu\prime}\gamma^{0\prime}\end{aligned}$$

//

(iii) Weyl 表示した γ^μ について、$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ が成り立つことは明らかである。

従って (ii) より、少なくとも Weyl表示とユニタリー同値な表示について、[illegible] が成り立つ。

注). P41の記述によれば、ディラック代数（あるいは、クリフォード代数）のすべての 4×4 表現はユニタリー同値だそうである。

(※2). Weyl表示では $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ となる。このことと $[\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0$ であることを用いると、$S^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおけば、

$$\begin{aligned} \gamma^5 S^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\parallel \\ S^{\mu\nu}\gamma^5 &= \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad S^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \qquad (a, d \text{ は } 2\times2 \text{ 行列})$$

となる。$S^{\mu\nu}$ は、このようにブロック対角の形をしているので、ディラック表現は（完全）可約である。

(※3). 速度 v で運動する粒子を考える。ここでは、$\hbar$, c を明示して書くことにすれば、粒子のド・ブロイ波の意味でのエネルギーと運動量は、

$$E = h\nu, \qquad |\mathbb{P}| = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{v}$$

である。よって、この時の4元運動量の大きさを計算すると、

$$p^\mu p_\mu = E^2 - c^2|\mathbb{P}|^2 = (h\nu)^2\left\{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right\} \xrightarrow{v\to c} 0$$

となる。つまり、$v \to c$ (large boost) の極限で粒子は massless となり、$E = |\mathbb{P}|$ が成り立つ。

(※4). ここで、$\hat{p}$ は、単位ベクトルの意味であることに注意する。（＾は演算子であることを強調する記号でない！）すなわち、

$$h = \hat{p}\cdot S = \frac{1}{2|\mathbb{P}|}\, p_i \begin{pmatrix} \sigma_i & \\ & \sigma_i \end{pmatrix}$$

最も簡単な場合について、$u(p)$ が h の固有状態であることを確かめてみる。

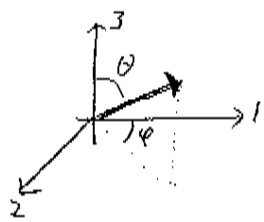
$$u(p) = \sqrt{2E}\begin{pmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \sqrt{2p_3}\begin{pmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$ の時、

← 3軸方向に進む massless な粒子。

$$h\,u(p) = \frac{1}{2p_3}\, p_3 \begin{pmatrix} \sigma_3 & \\ & \sigma_3 \end{pmatrix} \sqrt{2p_3}\begin{pmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2p_3}\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2p_3}\begin{pmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\,u(p)$$

さてこの時、$u(p)$ は固有値 $1/2$ に属する固有状態であるから、右手型である。
p_i は本来演算子であるが、この節ではすべて p-表示で話を進めているので、p_i は "p_i をかける" という演算子となり、c数であるかのように扱って良い。

一般の $\mathbb{p}$ の固有状態は、次のように与えられる。極座標表示 (θ, φ) で、



$$\mathbb{p}/|\mathbb{p}| = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$$

$$h = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathbb{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{|\mathbb{p}|} = \frac{1}{2}\left[\sin\theta\cos\varphi\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} + \cos\theta\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

となる。このとき、h の固有値を $\xi_\uparrow$, $\xi_\downarrow$ と書くことにすれば、

$$\xi_\uparrow = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$
$$\xi_\downarrow = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

← この詳細は、量子力学のノートなどを参照

である。従って、これらを定数倍した $u(p)$ もまた h の固有状態となる。結局、一般の $\mathbb{p}$ に対して、次が成り立つ。

$$h\,u_\uparrow(p) = h\begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\ \xi_\uparrow \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\ \xi_\uparrow \end{pmatrix} = +\frac{1}{2}u_\uparrow(p)$$
$$h\,u_\downarrow(p) = h\begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\ \xi_\downarrow \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\ \xi_\downarrow \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}u_\downarrow(p).$$