線型代数

相澤 拓海

2020 年 8 月 11 日

1　ベクトル空間 (線型空間)

少し量子力学を勉強すると量子状態をベクトル (ケットベクトル) と対応させる考え方が出てくる。つまり、ある特定の量子状態を指定するということはベクトル空間からある一つのベクトルを取り出す作業になる。したがって、ベクトル空間の性質を知っておくことが重要になるのでベクトル空間についてざっと見ていく。

定義 1. ベクトル空間の定義

あるベクトルの集合 V を考える。V は空集合ではない $V \neq \emptyset$ とする。また、和とスカラー倍の演算が定義されている ($\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$ かつ $a\boldsymbol{x} \in V$)。任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ とスカラー a, b に対して

(1) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$
(2) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$
(3) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$
(4) $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$
(5) $(ab)\boldsymbol{x} = a(b\boldsymbol{x})$
(6) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$
(7) $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$
(8) $(a+b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$

の 8 つを満たすならば、V はベクトル空間 (線型空間) と呼び、その元をベクトルという。

ベクトル空間でも線型空間でもどっちでもいいっぽい。これはすごく重要。当たり前かもしれないが実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ は上記の条件を満たし、ベクトル空間となっている。量子力学では複素ベクトルが量子状態に対応するので興味があるのは $\mathbb{C}^n$ である。複素数の演算から $\mathbb{C}^n$ もベクトル空間である。n 組の複素数を $(z_1, z_2 \cdots z_n)$ としてベクトルはこれらを縦に並べて

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

定義 1 から和の演算 (addition operation) が定義されているので以下が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \vdots \\ z'_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} z_1+z'_1 \\ z_2+z'_2 \\ \vdots \\ z_n+z'_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

また、スカラー倍が定義されているので、以下の乗算が成り立つ。z は複素スカラーである。

$$z \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} zz_1 \\ zz_2 \\ \vdots \\ zz_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

結構当たり前かもしれないが重要な気がする。ところで複素数はなぜ z を使うのか。