圏論

最終コンパイル
平成 30 年 4 月 4 日

T.Ueda

目 次

第1章　圏，函手，自然変換

1.1　圏に関する公理

定義 1.1.1 (メタグラフ).

メタグラフは対象 $A, B, C, \ldots$，射 $f, g, h, \ldots$，および次の 2 つの演算からなる．射 f が対象 A から対象 B への関係を示すものであるとき，

$$f\colon\ A \longrightarrow B \tag{1.1}$$

または

$$A \xrightarrow{f} B \tag{1.2}$$

で表す．このとき，A をドメイン，B をコドメインという．これらは dom，cod を用いてそれぞれ

$$\begin{aligned} A &= dom\ f \\ B &= cod\ f \end{aligned} \tag{1.3}$$

で表す．

ある射 f および g による合成演算 $\circ$ は

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \tag{1.4}$$

に関して

$$A \xrightarrow{g \circ f} C \tag{1.5}$$

で定義する．メタ圏における演算則は次の公理に従う．

公理 1.1.1.

1．結合則

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \tag{1.6}$$

が与えられた時，次の等式が常に成り立つ．

$$h \circ (g \circ f) = (k \circ g) \circ f \tag{1.7}$$

これは図を用いて，次のように表現できる．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h\circ(g\circ f)=(k\circ g)\circ f"] \arrow[d, "f"] \arrow[drr, "g\circ f"] & & D \\ B \arrow[rr, "g"'] \arrow[urr, "k\circ g"'] & & C \arrow[u, "k"'] \end{tikzcd} \tag{1.8}$$

2．単位元律

$$1_b \circ f = f \qquad g \circ 1_b = g \tag{1.9}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "I_b"] \arrow[dr, "g"] & \\ & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd} \tag{1.10}$$

1.2 圏

1.3 函手

1.4 自然変換

1.5 モニック射，エピ射，ゼロ射

1.6 基礎論

1.7 大きな圏

1.8 Hom 集合

第 2 章　圏の構築

2.1　双対性