

# 幾何学

---

Ver1.0  
2018/3/29

T.Ueda

---



# 目次

第 I 部 幾何学	5
第 1 章 命題と論理	6
1.1 命題	6
1.1.1 命題	6
1.1.2 合成命題	6
1.1.3 否定	7
1.1.4 真理表	7
1.1.5 命題の同値関係	8
1.2 条件文	8
1.2.1 条件文	8
1.2.2 条件文の逆・裏・対偶	8
1.2.3 必要条件と十分条件	9
1.2.4 真理集合	9
1.2.5 全称命題と特称命題	10
第 2 章 集合と写像	11
2.1 集合	11
2.1.1 集合と元	11
2.1.2 集合の表し方	12
2.2 集合の演算	12
2.2.1 部分集合	12
2.2.2 集合の演算	13
2.3 区間と近傍	13
2.3.1 区間	13
2.3.2 近傍	14
2.4 写像	14
第 3 章 ユークリッド空間	15
3.1 ユークリッド空間	15
3.1.1 1 次元ユークリッド空間	15

---

3.1.2	$n$ 次元ユークリッド空間 . . . . .	16
3.1.3	中間値の定理 . . . . .	16
3.2	円 . . . . .	16
3.2.1	弧度法 . . . . .	16
3.3	三角形 . . . . .	16
3.3.1	三角形の定義 . . . . .	16
3.3.2	三角形の面積 . . . . .	17
3.3.3	三角関数 . . . . .	17
第 4 章	位相空間 . . . . .	19
4.1	位相空間 . . . . .	19
4.1.1	開集合と位相空間 . . . . .	19
第 5 章	付録 . . . . .	21

# 第1章 命題と論理

## 1.1 命題

### 1.1.1 命題

定義 1.1.1 (命題).

ある事柄に対して正しいもしくは誤りであると判断できる主張を文で表したものを命題という. 表記を簡潔にするため, 記号: を用いて

$P: 12 \text{ は } 2 \text{ で割り切れる}$

と表す.

定義 1.1.2 (真と偽).

命題が正しい場合, 真理値が真 (True) の命題であるといい, 偽 (False) である場合は真理値が偽の命題であるという.

### 1.1.2 合成命題

定義 1.1.3 (合成命題).

いくつかの命題を組み合わせた, あるいは否定した命題を, 合成命題あるいは複合命題という. これに対し, 元の命題を単純命題という. 合成命題も真偽の判定ができるものでなければならない.

定義 1.1.4 (連言命題).

命題  $p, q$  に対して,  $p$  および  $q$  のいずれも真であるときのみ真となり, 他の場合に偽となる命題論理を連言命題あるいは論理積といい,  $p \wedge q$  と表す.

定義 1.1.5 (包含的選言命題).

命題  $p, q$  に対して,  $p$  および  $q$  のどちらかが真であるとき真となり, 他の場合に偽となる合成命題を包含的選言命題といい,  $p \vee q$  と表す.

定義 1.1.6 (排他的選言命題).

命題  $p, q$  に対して,  $p$  あるいは  $q$  のどちらかのみが真であり, 他方が偽であるとき真となり, 他の場合に偽となる合成命題を排他的選言命題といい,  $p \vee\vee q$  と表す.

### 1.1.3 否定

**定義 1.1.7 (否定).**

命題  $P$  に対して,  $P$  が真のとき偽,  $P$  が偽のとき真となる命題を否定命題といい,  $\sim P$  または  $\bar{P}$  と示す.

**定理 1.1.1 (ド・モルガンの法則).**

任意の命題  $P, Q$  に対し次の法則が成り立つ.

$$\sim (P \vee Q) = (\sim P) \wedge (\sim Q)$$

$$\sim (P \wedge Q) = (\sim P) \vee (\sim Q)$$

**定義 1.1.8 (多重否定).**

否定命題を否定した命題を二重否定命題といい,  $\sim(\sim P)$  または  $\overline{\overline{P}}$  と示す. その真偽は元の命題  $P$  の真偽に等しい.

**定理 1.1.2.**

$p, q$  を命題とすると, 次が成り立つ.

1.  $p \rightarrow q \equiv (\sim p) \vee q$
2.  $p \rightarrow q \equiv (\sim q) \rightarrow (\sim p)$
3.  $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge (\sim q)$

証明

### 1.1.4 真理表

**定義 1.1.9 (真理表).**

単純命題の真偽によって, 合成命題の真偽がどうなるかを示した表を真理表という. このとき真は T(True), 偽は F(False) で表す.

**例 1.1.1**

否定命題および連言命題、選言命題の真理表は次のようになる.

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$
$T$	$T$	$F$	$F$	$T$	$T$
$T$	$F$	$F$	$T$	$F$	$T$
$F$	$T$	$T$	$F$	$F$	$T$
$F$	$F$	$T$	$T$	$F$	$F$

### 1.1.5 命題の同値関係

定義 1.1.10 (同値).

2 つの合成命題の真理表が一致するとき、同値であるといい、記号  $\equiv$  で結ぶ。

## 1.2 条件文

### 1.2.1 条件文

定義 1.2.1 (条件文).

2 つの命題  $p$  および  $q$  を、「 $p$  ならば  $q$  である」という形式で結んだ文を条件文という。このとき  $p$  を仮定、 $q$  を結論といい、 $p \rightarrow q$  と表す。

定理 1.2.1 (条件文の同値関係).

「 $p$  ならば  $q$  である」という条件文は、「 $p$  でないか、または  $q$  である」という命題と同値である。すなわち、 $p \rightarrow q \equiv (\sim p) \vee q$  となる。

証明

条件文  $p \rightarrow q$  は  $\sim (p \wedge \sim q)$  である。

ド・モルガンの定理より、 $(\sim p) \vee (\sim (\sim q))$

よって、 $p \rightarrow q \equiv (\sim p) \vee q$

例 1.2.1 (条件文の否定)

「 $p$  ならば  $q$  である」という条件文の否定は、 $\sim ((\sim p) \vee q) \equiv p \wedge (\sim q)$  であるから、「 $p$  であって  $q$  でない」となる。

定義 1.2.2 (双条件文).

「 $p$  ならば  $q$  であり、かつ  $q$  ならば  $p$  である」という条件文を双条件文といい  $p \leftrightarrow q$  と表す。

### 1.2.2 条件文の逆・裏・対偶

定義 1.2.3 (条件文の逆).

「 $p$  ならば  $q$  である」という条件文に対して、「 $q$  ならば  $p$  である」という条件文をもとの条件文の逆といい、 $p \rightarrow q$  と表す。

定義 1.2.4 (条件文の裏).

「 $p$  ならば  $q$  である」という条件文に対して、「 $p$  でないならば  $q$  でない」という条件文をもとの条件文の裏といい、 $\sim p \rightarrow \sim q$  と表す。

**定義 1.2.5 (条件文の対偶).**

「 $p$  ならば  $q$  である」という条件文に対して, 「 $q$  でないならば  $p$  でない」という条件文をもとの条件文の対偶といい,  $\sim q \rightarrow \sim p$  と表す.

**例 1.2.2**

条件文  $p, q$  の逆, 裏および対偶は次のようになる.

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
$T$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$
$T$	$F$	$F$	$T$	$T$	$F$
$F$	$T$	$T$	$F$	$F$	$T$
$F$	$F$	$T$	$T$	$T$	$T$

**定理 1.2.2 (対偶の同値性).**

条件文とその対偶のどちらかが真である場合, 他方もまた真である.

**証明**

真理表より明らか.

### 1.2.3 必要条件と十分条件

**定義 1.2.6 (必要条件と十分条件).**

$p \rightarrow q$  であるとき,  $q$  を  $p$  であるための必要条件,  $p$  を  $q$  であるための十分条件という.

**定義 1.2.7 (必要十分条件).**

$p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p$  であるとき,  $q$  を  $p$  であるための必要十分条件といい  $p \rightleftharpoons q$  で表す.

### 1.2.4 真理集合

**定義 1.2.8 (命題関数).**

集合  $X$  の元  $x \in X$  に対して, その真偽が判定できるような条件  $p$  が与えられたとき,  $X$  を定義域, 値域を  $\{T, F\}$  とする命題関数という.



### 1.2.5 全称命題と特称命題

**定義 1.2.9 (全称命題).**

集合  $X$  の元  $x \in X$  に対して、その真偽が判定できるような条件  $p$  が与えられたとき、 $X$  を定義域、値域を  $\{ \text{T}, \text{F} \}$  とする命題関数という。

## 第2章 集合と写像

### 2.1 集合

#### 2.1.1 集合と元

定義 2.1.1 (集合).

集合 (Set) とは確定した, 互いに区別することのできる対象を 1 つにまとめたものである.

定義 2.1.2 (元).

集合  $X$  に含まれているある要素  $x$  を  $X$  の元といい,  $x \in X$  で表す.  $x$  が  $X$  の元でないことは  $x \notin X$  で表す.

定義 2.1.3 (空集合).

一つも元が属さない集合を空集合といい,  $\emptyset$  で表す.

定義 2.1.4 (有限集合と無限集合).

集合  $A$  の元が有限個である場合,  $A$  は有限集合であるという.  $A$  が有限集合でない場合,  $A$  は無限集合であるという.

定義 2.1.5 (全体集合).

対象としているすべての集合を全体集合といい,  $U$  で表す.

定義 2.1.6 (特殊な数の全体集合).

特殊な数の全体集合を示す集合を次のように定義する.

自然数	$\mathbb{N}$
整数	$\mathbb{Z}$
有理数	$\mathbb{Q}$
実数	$\mathbb{R}$
複素数	$\mathbb{C}$

### 2.1.2 集合の表し方

定義 2.1.7 (外延的記法).

集合の元をすべて列挙し, それを括弧  $\{\}$  でくくる表記法を外延的記法という.

例 2.1.1 (外延的記法)

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= (1, 2, \dots, n, \dots) \\ \mathbb{Z} &= (\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots)\end{aligned}\tag{2.1}$$

定義 2.1.8 (内延的記法).

集合の元を変数を用いて示す記法のことを内延的記法という.

例 2.1.2 (内延的記法)

$$\begin{aligned}A &= \{x | a < 2 \wedge x \in \mathbb{R}\} \\ B &= \{y | P(x)\} \quad (P(x) \text{ は述語})\end{aligned}\tag{2.2}$$

定義 2.1.9 (集合族).

添え字の付けられた集合  $A_1, A_2, \dots, A_k$  を考える. このような集合の集まり  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  を集合族という.

## 2.2 集合の演算

### 2.2.1 部分集合

定義 2.2.1 (部分集合).

$X$  と  $Y$  を集合とする.  $X$  に含まれているどの要素も  $Y$  の元となっているとき,  $X$  は  $Y$  の部分集合であるといい,  $X \subset Y$  で表す.  $B \subset A$  かつ  $B \neq A$  であるとき,  $B$  は  $A$  の真部分集合であるといい,  $B \subsetneq A$  で表す.

定義 2.2.2 (相等).

集合  $X, Y$  において,  $X \subset Y$  かつ  $Y \subset X$  のとき,  $X$  と  $Y$  は相等または同値であるといい,  $X = Y$  で表す.

### 2.2.2 集合の演算

**定義 2.2.3 (共通部分と和集合).**

集合  $A, B$  を  $X$  の部分集合であるとする.  $A$  の元かつ  $B$  の元となる集合を  $A$  と  $B$  の共通部分といい,  $A \cap B$  で表す. すなわち

$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\} \quad (2.3)$$

$A \cap B = \emptyset$  のとき,  $A$  と  $B$  は互いに素という.

$A$  の元および  $B$  の元であるものの全体のなす集合を  $A$  と  $B$  の和集合といい,  $A \cup B$  で表す. すなわち,

$$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\} \quad (2.4)$$

**定義 2.2.4 (差集合).**

$A$  に属して  $B$  に属さない要素の全体を  $A$  から  $B$  を引いた差集合といい,  $A - B$  もしくは  $A/B$  と表す. すなわち,

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \quad (2.5)$$

**定義 2.2.5 (補集合).**

集合  $A$  を集合  $X$  の部分集合であるとする. このとき  $X - A$  を  $A$  の  $X$  に関する補集合といい  $A^c$  と表す.

**定義 2.2.6 (直積).**

$X, Y \neq \emptyset$  のとき, 集合

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\} \quad (2.6)$$

を  $X, Y$  の直積という.

#### 2.2.1 演習.

1.

## 2.3 区間と近傍

### 2.3.1 区間

**定義 2.3.1 (区間).**  $\forall a, b \in \mathbb{R} (a < b)$  に対して, 次を満たす集合を区間という.

开区間

$$\begin{aligned} (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ (a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\ (-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

閉区間

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} \\ [a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\} \\ (-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

半開区間

$$\begin{aligned} [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\} \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

### 2.3.2 近傍

**定義 2.3.2 (近傍).**

$\varepsilon > 0, a \in \mathbb{R}$  に対して,

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} | |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \tag{2.10}$$

とおく. この開区間  $U_\varepsilon(a)$  を点  $a$  の  $\varepsilon$ -近傍または単に近傍という.

## 2.4 写像

**定義 2.4.1 (写像).**

$X, Y$  を集合とする.  $X$  の各要素  $x \in X$  に対して  $Y$  の各要素  $y$  がただ一つ対応するような関係を  $X$  から  $Y$  への写像という. 対応  $f$  が  $X$  から  $Y$  への写像であるとき  $f: X \rightarrow Y$  と表す.

**定義 2.4.2 (像と定義域, 値域).**

$f: X \rightarrow Y$  を写像とする.

## 第3章 ユークリッド空間

### 3.1 ユークリッド空間

#### 3.1.1 1次元ユークリッド空間

定義 3.1.1 (絶対値).

実数  $x$  について

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \quad (3.1)$$

を  $x$  の絶対値という.

定理 3.1.1 (三角不等式).

任意の実数  $a, b$  に対して次の関係が成り立つ. この関係式を三角不等式という.

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (3.2)$$

証明

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &\leq (|a| + |b|)^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 &\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \\ ab - |a||b| &\leq 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

定義 3.1.2.

数直線上の2点  $x, y \in \mathbb{R}$  を結ぶ線分の長さは, 絶対値を用いて

$$d^{(1)}(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x - y)^2} \quad (3.4)$$

で与えられる.

### 3.1.2 n 次元ユークリッド空間

### 3.1.3 中間値の定理

定理 3.1.2 (中間値の定理).

部分集合  $X \subset \mathbb{R}^n$  を連結とし,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^1$  を連続関数とすると

$$\forall \alpha, \beta \in f(X), \alpha < \beta \quad ([\alpha, \beta] \subset f(X)) \quad (3.5)$$

## 3.2 円

### 3.2.1 弧度法

定義 3.2.1.

単位円において, 弧の長さが 1 となる扇形の中心角を  $1[rad]$  と表す.

## 3.3 三角形

### 3.3.1 三角形の定義

定義 3.3.1 (三角形).

同一直線上にない 3 点  $A, B, C$  と, 各点を結ぶ 3 つの線分からなる多角形を三角形といい,  $\triangle ABC$  と示す.

定義 3.3.2 (斜辺).

$\triangle ABC$  において, 最も長い辺を斜辺という.

定義 3.3.3 (正三角形).

一片の長さが  $a$  の三角形を正三角形という.

定義 3.3.4 (直角三角形).

三角形の 3 つの内角のうち最大の角が  $90^\circ$  の三角形を直角三角形という.

定理 3.3.1 (三平方の定理).

3 辺の長さが  $a, b, c$  の直角三角形において次の関係が成り立つ.

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (a, b, c > 0) \quad (3.6)$$

### 3.3.2 三角形の面積

#### 定理 3.3.2.

一般に三角形の面積  $S$  は底辺の長さ  $a$  と高さ  $h$  を用いて

$$S = \frac{1}{2}ah \quad (3.7)$$

で与えられる.

#### 定理 3.3.3 (ヘロンの公式).

3 辺の長さが  $a, b, c$  の三角形とその面積  $S$  には次の関係が成り立つ.

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \left( s = \frac{a+b+c}{2} \right) \quad (3.8)$$

### 3.3.3 三角関数

#### 定義 3.3.5. 三角関数

原点を中心として半径  $r$  の円の円周上に点  $P(x, y)$  があり,  $OP$  と  $x$  軸とのなす角を  $\theta$  とする. この時, 三角関数 (正弦, 余弦, 正接) は

$$\begin{aligned} \text{正弦} : \sin \theta &= \frac{y}{r} \\ \text{余弦} : \cos \theta &= \frac{x}{r} \\ \text{正接} : \tan \theta &= \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (3.9)$$

と定義される. ただし,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  のとき,  $\tan \theta$  は値を持たない.

#### 定義 3.3.6. 単位円

半径が 1 であるような円を単位円という. 単位円での三角関数は

$$\begin{aligned} \text{正弦} : \sin \theta &= y \\ \text{余弦} : \cos \theta &= x \end{aligned} \quad (3.10)$$

となる.

#### 定理 3.3.4. 正弦定理

$\triangle ABC$  において,  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ , 外接円の半径を  $r$  とすると

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r \quad (3.11)$$

なる関係を正弦定理という.



**定理 3.3.5. 余弦定理**

$\triangle ABC$  において,  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ ,  $\alpha = \angle CAB$ ,  $\beta = \angle ABC$ ,  $\gamma = \angle BCA$  とすると

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma\end{aligned}\tag{3.12}$$

なる関係を余弦定理という.

## 第4章 位相空間

### 4.1 位相空間

#### 4.1.1 開集合と位相空間

定義 4.1.1 (開集合).

$\forall a \in U (U \subset \mathbb{R})$  に対してある  $\varepsilon > 0$  が存在し  $N(x, \varepsilon) \subset U$  が成り立つとき,  $U$  を開集合という.

定理 4.1.1 (開集合の性質).

開集合は次の性質を持つ.

1.  $U_1, \dots, U_n$  を  $\mathbb{R}$  の開集合とすると,  $U_1 \cap U_2 \cdots \cap U_n$  もまた  $\mathbb{R}$  の開集合である.
2. 集合族  $U_\lambda (\lambda \in \Lambda)$  に対して,  $U_\lambda$  が開集合ならば  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  である.

定義 4.1.2 (閉集合).

$\mathbb{R} - F (F \subset \mathbb{R})$  であるとき,  $F$  を閉集合という.

定義 4.1.3 (位相).

集合  $S$  に対し, 部分集合の族  $\mathcal{O}$  が  $S$  の開集合系であるとは, 次の条件を満たす場合をいう.

1.  $S \in \mathcal{O}$  かつ  $\emptyset \in \mathcal{O}$
2.  $m \in \mathbb{N}, O_1, \dots, O_m \in \mathcal{O} \longrightarrow O_1 \cap \dots \cap O_m \in \mathcal{O}$
3. 任意の集合  $\Lambda$  に対し, 各元  $\lambda \in \Lambda$  から  $\mathcal{O}$  の元  $O_\lambda \in \Lambda$  への対応を与えたとき,  
 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

集合  $S$  に開集合系  $\mathcal{O}$  が与えられているとき, 「 $\mathcal{O}$  は  $S$  に位相 (構造) を定める」もしくは「 $S$  には  $\mathcal{O}$  による位相 (構造) が入る」といい,  $\mathcal{O}$  の元を開集合 (open set) とよぶ. このような位相構造が定められた集合  $S$  を位相空間 (topological space) という.  $S$  の元を点という.

**例 4.1.1**

$[S, d]$  を距離空間とする.

$$\mathcal{O}(d) = \{U \subset S \mid \forall p \in U, \exists \epsilon > 0; N_\epsilon(p) \subset U\}$$

と置けば,  $\mathcal{O}(d)$  は開集合の公理 1 ~ 3 を満たす.

**証明**

1.  $\mathcal{O}(d)$  の定義より明らか.
- 2.
- 3.

## 第5章 付録

	記号	対応する日本語
否定 negation	$\neg$	「...でない」
連言 conjunction	$\wedge$	「かつ」、「そして」
選言 disjunction	$\vee$	「または」
条件法 conditional	$\rightarrow$	「もし...ならば...」
双条件法 biconditional	$\leftrightarrow$	英語の ‘if and only if’ に相当
矛盾 absurdity	$\perp$	