

複素関数論

最終コンパイル
平成 30 年 5 月 16 日

T.Ueda

目次

| | | |
|--------------|-------------------------|-----------|
| 第 1 章 | 複素数と複素関数 | 5 |
| 1.1 | 複素数の定義と基本性質 | 5 |
| 1.1.1 | 複素数の定義 | 5 |
| 1.1.2 | 複素数の基本演算 | 5 |
| 1.2 | 共役複素数 | 6 |
| 1.2.1 | 共役複素数の定義 | 6 |
| 1.2.2 | 共役複素数の性質 | 6 |
| 1.3 | 極形式と偏角 | 9 |
| 1.3.1 | 複素数の絶対値と大小関係 | 9 |
| 1.3.2 | 偏角 | 10 |
| 1.3.3 | 極形式 | 10 |
| 1.4 | 複素数と三角関数 | 10 |
| 1.4.1 | オイラーの公式 | 10 |
| 1.4.2 | 三角関数の諸定理 | 11 |
| 1.4.3 | 逆三角関数 | 12 |
| 第 2 章 | 複素関数と性質 | 13 |
| 2.1 | 複素関数の微分 | 13 |
| 2.1.1 | 正則関数の定義と非正則関数 | 13 |
| 第 3 章 | 複素線積分とコーシーの積分定理 | 14 |
| 3.0.1 | コーシー・リーマンの方程式 | 14 |
| 3.1 | グリーンの定理 | 14 |
| 第 4 章 | コーシーの積分公式と応用 | 15 |
| 4.1 | コーシーの積分公式 | 15 |
| 4.2 | リュウビルの定理 | 15 |
| 第 5 章 | 冪級数展開の拡張 | 16 |

| | | |
|-------|-------------------|----|
| 第 6 章 | 留数定理 | 17 |
| 6.1 | ローラン展開 | 17 |
| 6.2 | 留数と留数定理 | 17 |
| 6.2.1 | 留数定理 | 17 |

第1章 複素数と複素関数

1.1 複素数の定義と基本性質

1.1.1 複素数の定義

定義 1.1.1 (虚数単位).

2 乗して-1 となるような数を i を用いて次のように表し, 虚数単位という.

$$i = \sqrt{-1} \quad (1.1)$$

定義 1.1.2 (複素数).

虚数単位を用いて表すことのできる数を複素数という.

$$z = x + iy \quad (1.2)$$

定義 1.1.3 (実部).

複素数 $z = x + iy$ の実数部分を実部といい次のように示す.

$$\Re(z) = x \quad (1.3)$$

定義 1.1.4 (虚部).

複素数 $z = x + iy$ の虚数部分を虚部といい次のように示す.

$$\Im(z) = y \quad (1.4)$$

1.1.2 複素数の基本演算

1. 和

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \quad (1.5)$$

2. 差

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d) \quad (1.6)$$

3. 積

$$\begin{aligned} (a + ib)(c + id) &= ac + iad + ibc + i^2bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc) \end{aligned} \quad (1.7)$$

4. 商

$$\begin{aligned} \frac{a + ib}{c + id} &= \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} \\ &= \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

1.2 共役複素数

1.2.1 共役複素数の定義

定義 1.2.1 (共役複素数).

複素数 z の虚部を -1 倍したものを共役複素数という. すなわち

$$\bar{z} = x + iy \quad (1.9)$$

に対し、

$$\bar{z}^* = x - iy \quad (1.10)$$

が共役複素数である.

1.2.2 共役複素数の性質

定理 1.2.1 (共役複素数の性質).

1. z が実数

$$\bar{z}^* = \bar{z} \quad (1.11)$$

証明

z が実数より

$$z = x$$

よって共役複素数は定義より

$$\bar{z}^* = x$$

よって

$$z = \bar{z}^*$$

2. z が純虚数

$$\bar{z}^* = -\bar{z} \quad (1.12)$$

証明

z が純虚数より

$$z = iy$$

よって共役複素数は定義より

$$\bar{z}^* = -iy$$

よって

$$z = -\bar{z}^*$$

3. 対合

$$(\bar{z}^*)^* = \bar{z} \quad (1.13)$$

証明

z の共役複素数は

$$(z^*) = x - iy$$

よって $(z^*)^*$ は

$$(z^*)^* = z$$

4. ノルムの一致

$$|z| = |z^*| \quad (1.14)$$

証明

ノルムの定義より

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2}$$

5. 共役複素数の和と差

$$\begin{aligned} z + z^* &= 2\Re(z) \\ z - z^* &= 2\Im(z) \\ (z_1 + z_2)^* &= z_1^* + z_2^* \end{aligned} \quad (1.15)$$

証明

$$\begin{aligned} x + iy + x - iy &= 2x = 2\Re(z) \\ x + iy - x + iy &= 2iy = 2\Im(z) \\ (x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2) &= z_1^* + z_2^* \end{aligned}$$

6. 共役複素数の積

$$\begin{aligned} zz^* &= |z|^2 \\ (z_1 z_2)^* &= z_1^* \cdot z_2^* \end{aligned} \quad (1.16)$$

証明

$$\begin{aligned}
 \dot{z}\dot{z}^* &= (x + iy)(x - iy) \\
 &= x^2 + y^2 \\
 |\dot{z}|^2 &= \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \\
 &= x^2 + y^2 \\
 (\dot{z}_1\dot{z}_2)^* &= ((x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2))^* \\
 &= x_1x_2 - ix_1y_2 - iy_1x_2 - y_1y_2 \\
 \dot{z}_1^* \cdot \dot{z}_2^* &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \\
 &= x_1x_2 - ix_1y_2 - iy_1x_2 - y_1y_2
 \end{aligned}$$

7. 共役複素数の商

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\dot{z}_1}{\dot{z}_2}\right)^* &= \frac{\dot{z}_1^*}{\dot{z}_2^*} \\
 \dot{z}^{-1} &= \frac{\dot{z}^*}{|\dot{z}|^2}
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

1.3 極形式と偏角

1.3.1 複素数の絶対値と大小関係

定義 1.3.1 (複素数の絶対値).

$$\begin{aligned}
 |\dot{z}| &= |x + iy| \\
 &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 &= r
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

定理 1.3.1 (複素数の大小関係).

2つの任意の複素数において、その複素数同士の大小関係は定義されない。

証明 $-i < i \cdots (1)$ が成り立つとする

$$\begin{aligned}
 -i \times i &< i \times i \cdots (\times i) \\
 i \times 1 &< -i \times 1 \cdots (\times i) \\
 i &< -i
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

よって矛盾するため定義不可

1.3.2 偏角

1.3.3 極形式

定義 1.3.2 (極形式).

$z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ において, $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ であるとき,

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right)$$

ここで $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ 及び実数 θ を

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

と定めると, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ となり, このような表示形式を極形式という.

1.4 複素数と三角関数

1.4.1 オイラーの公式

定理 1.4.1 (オイラーの公式).

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.20)$$

定理 1.4.2 (オイラーの等式).

特に $\theta = \pi$ の時のオイラーの公式をオイラーの等式という. オイラーの等式は

$$e^{i\pi} = -1 \quad (1.21)$$

となる.

定理 1.4.3 (三角関数の複素表示).

定理 1.4.1 の関係を用いると

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i2} \\ \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \end{aligned} \quad (1.22)$$

1.4.2 三角関数の諸定理

定理 1.4.4 (加法定理).

1.

$$\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 \pm \cos \theta_1 \sin \theta_2 \quad (1.23)$$

2.

$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \mp \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (1.24)$$

3.

$$\tan(\theta_1 \pm \theta_2) = \frac{\tan(\theta_1 \pm \tan \theta_2)}{1 \mp \tan(\theta_1 \tan \theta_2)} \quad (1.25)$$

定理 1.4.5 (倍角の公式).

1.

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad (1.26)$$

2.

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (1.27)$$

3.

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \quad (1.28)$$

定理 1.4.6 (半角の公式).

1.

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} \quad (1.29)$$

2.

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \quad (1.30)$$

3.

$$\begin{aligned} \tan^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \end{aligned} \quad (1.31)$$

定理 1.4.7 (三倍角の公式).

1.

$$\sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \quad (1.32)$$

2.

$$\cos^3 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \quad (1.33)$$

定理 1.4.8 (チェビシェフ多項式).

$\cos nx$ は $\cos \theta$ の n 次多項式で表すことができる. このような多項式をチェビシェフ多項式と呼び, $T_n(x)$ と表す.

1.4.3 逆三角関数

定義 1.4.1 (逆三角関数).

$x = \sin \theta$ の逆関数を $\theta = \sin^{-1} x$ と書き, 逆三角関数という.

第2章 複素関数と性質

2.1 複素関数の微分

2.1.1 正則関数の定義と非正則関数

第3章 複素線積分とコーシーの積分定理

3.0.1 コーシー・リーマンの方程式

定理 3.0.1 (コーシー・リーマンの方程式).

複素変数 $z = x + iy$ の関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ について

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\tag{3.1}$$

をコーシー・リーマンの方程式という.

3.1 グリーンの定理

定理 3.1.1 (グリーンの定理).

単純閉曲線 $C(= \partial D)$ に囲まれた領域 D について

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy\tag{3.2}$$

第4章 コーシーの積分公式と応用

4.1 コーシーの積分公式

定理 4.1.1 (コーシーの積分公式).

単連結領域内 D で $f(z)$ が正則である $f(z)$ について, D のジョルダン閉曲線上を正の方向に 1 周する積分路を C とすると, C 内部の任意の点 z に関して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (4.1)$$

が成り立つ

証明

$f(z)$ は領域内で正則であるので ζ -平面上で C の内部にある $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ の特異点は $\zeta = z$ だけであり, その時の留数は

$$\begin{aligned} \text{Res}(z) &= \lim_{\zeta \rightarrow z} (\zeta - z) \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= f(z) \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.2 リュウビルの定理

第5章 冪級数展開の拡張

第6章 留数定理

6.1 ローラン展開

6.2 留数と留数定理

定理 6.2.1 (1 位の極).

a が 1 位の極である場合に留数を求めるには

$$\operatorname{Res}(a, f) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) \quad (6.1)$$

定理 6.2.2 (2 位の極).

a が 2 位の極である場合に留数を求めるには

$$\operatorname{Res}(a, f) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz} \{(z - a)^2 f(z)\} \quad (6.2)$$

定理 6.2.3 (n 位の極).

a が n 位の極である場合に留数を求めるには

$$\operatorname{Res}(a, f) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z - a)^n f(z)\} \quad (6.3)$$

6.2.1 留数定理

定理 6.2.4 (留数定理).

$$\oint f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(a, f) \quad (6.4)$$

索引

定義一覧

| | |
|-------------------------|----|
| 1.1.1 虚数単位 | 5 |
| 1.1.2 複素数 | 5 |
| 1.1.3 実部 | 5 |
| 1.1.4 虚部 | 5 |
| 1.2.1 共役複素数 | 6 |
| 1.3.1 複素数の絶対値 | 9 |
| 1.3.2 極形式 | 10 |
| 1.4.1 逆三角関数 | 12 |

定理一覧

| | |
|-------------------------------|----|
| 1.2.1 共役複素数の性質 | 6 |
| 1.3.1 複素数の大小関係 | 9 |
| 1.4.1 オイラーの公式 | 10 |
| 1.4.2 オイラーの等式 | 10 |
| 1.4.3 三角関数の複素表示 | 10 |
| 1.4.4 加法定理 | 11 |
| 1.4.5 倍角の公式 | 11 |
| 1.4.6 半角の公式 | 11 |
| 1.4.7 三倍角の公式 | 12 |
| 1.4.8 チェビシェフ多項式 | 12 |
| 3.0.1 コーシー・リーマンの方程式 | 14 |
| 3.1.1 グリーンの定理 | 14 |
| 4.1.1 コーシーの積分公式 | 15 |
| 6.2.1 1 位の極 | 17 |
| 6.2.2 2 位の極 | 17 |
| 6.2.3 n 位の極 | 17 |
| 6.2.4 留数定理 | 17 |