複素関数論

最終コンパイル
平成 30 年 5 月 16 日

T.Ueda

目 次

第1章　複素数と複素関数

1.1　複素数の定義と基本性質

1.1.1　複素数の定義

定義 1.1.1 (虚数単位).

2 乗して-1 となるような数を i を用いて次のように表し，虚数単位という.

$$= \sqrt{-1} \tag{1.1}$$

定義 1.1.2 (複素数).

虚数単位を用いて表すことのできる数を複素数という.

$$\dot{z} = x + iy \tag{1.2}$$

定義 1.1.3 (実部).

複素数 $\dot{z} = x + iy$ の実数部分を実部といい次のように示す.

$$\Re(z) = x \tag{1.3}$$

定義 1.1.4 (虚部).

複素数 $\dot{z} = x + iy$ の虚数部分を虚部といい次のように示す.

$$\Im(z) = y \tag{1.4}$$

1.1.2　複素数の基本演算

1. 和

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \tag{1.5}$$

2. 差

$$(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d) \tag{1.6}$$

3. 積

$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id) &= ac+iad+ibc+i^2bd \\ &= (ac-bd)+i(ad+bc)\end{aligned} \tag{1.7}$$

4. 商

$$\begin{aligned}\frac{a+ib}{c+id} &= \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} \\ &= \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}\end{aligned} \tag{1.8}$$

1.2 共役複素数

1.2.1 共役複素数の定義

定義 1.2.1 (共役複素数).

複素数 z の虚部を -1 倍したものを共役複素数という．すなわち

$$\dot{z}=x+iy \tag{1.9}$$

に対し、

$$\dot{z}^*=x-iy \tag{1.10}$$

が共役複素数である．

1.2.2 共役複素数の性質

定理 1.2.1 (共役複素数の性質).

1. z が実数

$$\dot{z}^* = \dot{z} \tag{1.11}$$

証明

z が実数より

$$z = x$$

よって共役複素数は定義より

$$z^* = x$$

よって

$$z = z^*$$

2. z が純虚数

$$\dot{z}^* = -\dot{z} \tag{1.12}$$

証明

z が純虚数より

$$z = iy$$

よって共役複素数は定義より

$$z^* = -iy$$

よって

$$z = -z^*$$

3. 対合

$$(\dot{z}^*)^* = \dot{z} \tag{1.13}$$

証明

z の共役複素数は

$$(\dot{z}^*) = x - iy$$

よって $(\dot{z}^*)^*$ は

$$(\dot{z}^*)^* = z$$

4. ノルムの一致

$$|\dot{z}| = |\dot{z}^*| \tag{1.14}$$

証明

ノルムの定義より

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2}$$

5. 共役複素数の和と差

$$\begin{aligned} \dot{z} + \dot{z}^* &= 2\Re(\dot{z}) \\ \dot{z} - \dot{z}^* &= 2\Im(\dot{z}) \\ (\dot{z_1} + \dot{z_2})^* &= \dot{z_1}^* + \dot{z_2}^* \end{aligned} \tag{1.15}$$

証明

$$\begin{aligned} x + iy + x - iy = 2x &= 2\Re(\dot{z}) \\ x + iy - x + iy = 2y &= 2\Im(\dot{z}) \\ (x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2) &= \dot{z_1}^* + \dot{z_2}^* \end{aligned}$$

6. 共役複素数の積

$$\begin{aligned} \dot{z}\dot{z}^* &= |\dot{z}|^2 \\ (\dot{z_1}\dot{z_2})^* &= \dot{z_1}^* \cdot \dot{z_2}^* \end{aligned} \tag{1.16}$$

証明

$$\begin{aligned}
\dot{z}\dot{z}^* &= (x+iy)(x-iy) \\
&= x^2+y^2 \\
|\dot{z}|^2 &= \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \\
&= x^2+y^2 \\
(\dot{z_1}\dot{z_2})^* &= ((x_1+iy_1)(x_2+iy_2))^* \\
&= x_1x_2 - ix_1y_2 - iy_1x_2 - y_1y_2 \\
\dot{z_1}^* \cdot \dot{z_2}^* &= (x_1-iy_1)(x_2-iy_2) \\
&= x_1x_2 - ix_1y_2 - iy_1x_2 - y_1y_2
\end{aligned}$$

7. 共役複素数の商

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\dot{z_1}}{\dot{z_2}}\right)^* &= \frac{\dot{z_1}^*}{\dot{z_2}^*} \\
\dot{z}^{-1} &= \frac{\dot{z}^*}{|\dot{z}|^2}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

1.3 極形式と偏角

1.3.1 複素数の絶対値と大小関係

定義 1.3.1 (複素数の絶対値).

$$\begin{aligned}
|\dot{z}| &= |x+iy| \\
&= \sqrt{x^2+y^2} \\
&= r
\end{aligned} \tag{1.18}$$

定理 1.3.1 (複素数の大小関係).

2 つの任意の複素数において，その複素数同士の大小関係は定義されない.

証明 $-i < i \cdots (1)$ が成り立つとする

$$\begin{aligned}
-i \times i &< i \times i \cdots (\times i) \\
i \times 1 &< -i \times 1 \cdots (\times i) \\
i &< -i
\end{aligned} \tag{1.19}$$

よって矛盾するため定義不可

1.3.2 偏角

1.3.3 極形式

定義 1.3.2 (極形式).

$z = a + bi (a, b \subset \mathbb{R})$ におて，$\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ であるとき，

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i\right)$$

ここで $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ 及び実数 θ を

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

と定めると，$z = r(\cos\theta + i\sin\theta$ となり，このような表示形式を極形式という．

1.4 複素数と三角関数

1.4.1 オイラーの公式

定理 1.4.1 (オイラーの公式).

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1.20}$$

定理 1.4.2 (オイラーの等式).

特に $\theta = \pi$ の時のオイラーの公式をオイラーの等式という．オイラーの等式は

$$e^{i\pi} = -1 \tag{1.21}$$

となる．

定理 1.4.3 (三角関数の複素表示).

定理 1.4.1 の関係を用いると

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i2} \\ \cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \end{aligned} \tag{1.22}$$

1.4.2 三角関数の諸定理

定理 1.4.4 (加法定理).

1.

$$\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 \pm \cos\theta_1\sin\theta_2 \tag{1.23}$$

2.

$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 \mp \sin\theta_1\sin\theta_2 \tag{1.24}$$

3.

$$\tan(\theta_1 \pm \theta_2) = \frac{\tan(\theta_1 \pm \tan\theta_2)}{1 \mp \tan(\theta_1 \tan\theta_2)} \tag{1.25}$$

定理 1.4.5 (倍角の公式).

1.

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \tag{1.26}$$

2.

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin\theta^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\theta\end{aligned} \tag{1.27}$$

3.

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \tag{1.28}$$

定理 1.4.6 (半角の公式).

1.

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} \tag{1.29}$$

2.

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} \tag{1.30}$$

3.

$$\begin{aligned}\tan^2\frac{\theta}{2} &= \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\end{aligned} \tag{1.31}$$

定理 1.4.7 (三倍角の公式).

1.

$$\sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \tag{1.32}$$

2.

$$\cos^3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \tag{1.33}$$

定理 1.4.8 (チェビシェフ多項式).

$\cos nx$ は $\cos\theta$ の n 次多項式で表すことができる．このような多項式をチェビシェフ多項式と呼び，$T_n(x)$ と表す．

1.4.3 逆三角関数

定義 1.4.1 (逆三角関数).

$x=\sin\theta$ の逆関数を $\theta=\sin^{-1}x$ と書き，逆三角関数という．

第2章　複素関数と性質

2.1　複素関数の微分

2.1.1　正則関数の定義と非正則関数

第3章　複素線積分とコーシーの積分定理

3.0.1　コーシー・リーマンの方程式

定理 3.0.1 (コーシー・リーマンの方程式).

複素変数 $z = x + iy$ の関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ について

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{3.1}$$

をコーシー・リーマンの方程式という.

3.1　グリーンの定理

定理 3.1.1 (グリーンの定理).

単純閉曲線 $C(=\partial D)$ に囲まれた領域 D ついて

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dxdy \tag{3.2}$$

第4章　コーシーの積分公式と応用

4.1　コーシーの積分公式

定理 4.1.1 (コーシーの積分公式).

単連結領域内D$f(z)$ で正則である $f(z)$ について，D のジョルダン閉曲線上を正の方向に 1 周する積分路を C とすると，C 内部の任意の点 z に関して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \tag{4.1}$$

が成り立つ

証明

$f(z)$ は領域内で正則であるので $\zeta-$ 平面上で C の内部にある $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ の特異点は $\zeta = z$ だけであり，その時の留数は

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(z) &= \lim_{\zeta\to z}(\zeta - z)\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \\ &= f(z)\end{aligned} \tag{4.2}$$

4.2　リュウビルの定理

第 5 章　冪級数展開の拡張

第6章　留数定理

6.1　ローラン展開

6.2　留数と留数定理

定理 6.2.1 (1 位の極).

a が 1 位の極である場合に留数を求めるには

$$\mathrm{Res}(a,f) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) \tag{6.1}$$

定理 6.2.2 (2 位の極).

a が 2 位の極である場合に留数を求めるには

$$\mathrm{Res}(a,f) = \lim_{z\to a}\frac{d}{dz}\{(z-a^2)f(z)\} \tag{6.2}$$

定理 6.2.3 (n 位の極).

a が n 位の極である場合に留数を求めるには

$$\mathrm{Res}(a,f) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\} \tag{6.3}$$

6.2.1　留数定理

定理 6.2.4 (留数定理).

$$\oint f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(a,f) \tag{6.4}$$

索引

定義一覧

定理一覧