

補足資料 集合・微分



許諾なく撮影や第三者
への開示を禁止します

• 目的

- ニューラルネットワークで必要になる集合や微分の基本を理解する.

• 目標

- 集合・写像の定義を説明できる.
- 上界・下界・上限・下限について説明できる.
- 偏微分, 勾配, ヤコビアン の計算ができる.

※先に補足資料_線形代数の内容を理解しておくことを推奨.

• 集合

- ある条件を満たすものの集まり.

例：

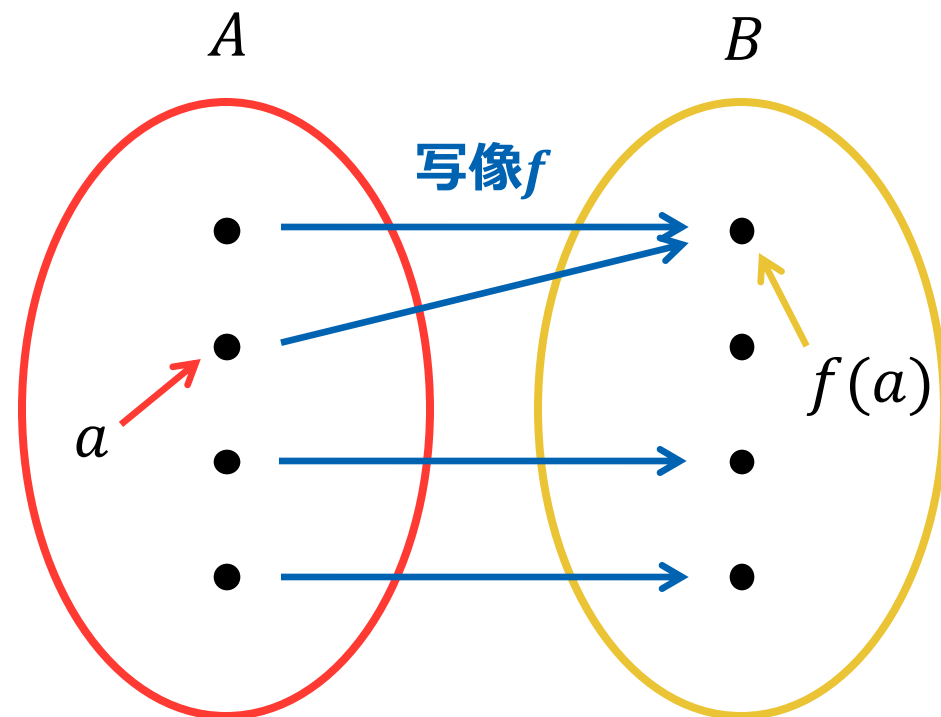
- 4以上の自然数の集まり
- 3次元実数集合 \mathbb{R}^3
- 集合 A の要素 (元) a を $a \in A$ と表す.

• 写像

- 集合 A, B に対して, A の元を B の元に一つずつ対応させる規則 f のことを A から B への写像といい, $f: A \rightarrow B$ で表す.
- 関数を一般化した概念.

例：

- 2次元実数集合から3次元実数集合への写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
- 恒等写像 $f(x) = x$



• 下界

- $L(\in \mathbb{R})$ が $A(\subset \mathbb{R})$ の下界 (の一つ) であるとき, $x \in A \Rightarrow L \leq x$.

• 下限

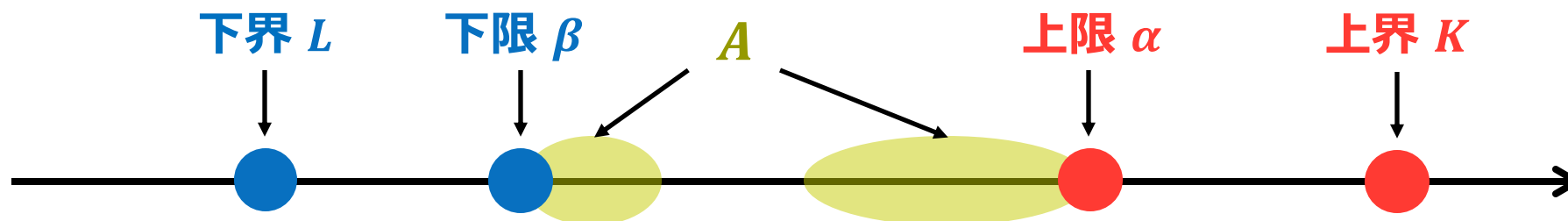
- β が A の下限であるとき,
 $x \in A \Rightarrow \beta \leq x$ かつ
任意の $\varepsilon > 0$ に対し
ある $x \in A$ が存在し, $\beta \leq x \leq \beta + \varepsilon$.
- $\inf A = \beta$ と表記.

• 上界

- $K(\in \mathbb{R})$ が $A(\subset \mathbb{R})$ の上界 (の一つ) であるとき, $x \in A \Rightarrow x \leq K$.

• 上限

- $\alpha(\in \mathbb{R})$ が A の上限であるとき,
 $x \in A \Rightarrow x \leq \alpha$ かつ
任意の $\varepsilon > 0$ に対し
ある $x \in A$ が存在し, $\alpha - \varepsilon \leq x \leq \alpha$.
- $\sup A = \alpha$ と表記.



※ A は \mathbb{R} の部分集合でなくとも,
順序 \leq が定義された集合であれば良い

・ 偏微分

- 多変数関数を一つの変数について微分すること.
- 通常の微分が d を用いるのに対し, ∂ を用いて表す.

例題：

次の関数を偏微分せよ.

$$f(x, y) = 2x^3 + 4y^2 + x + 7y + 5$$

解答：

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (2x^3 + x + \boxed{4y^2 + 7y} + 5) \\ &= 6x^2 + 1\end{aligned}$$

定数として扱う

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (\boxed{2x^3 + x} + 4y^2 + 7y + 5) \\ &= 8y + 7\end{aligned}$$

・ 勾配

- 多変数関数の各変数に関する偏微分を並べたベクトルのこと.
- ∇ もしくは grad を用いて表す.

例題：

次の関数の勾配を求めよ.

$$f(x, y) = 2x^3 + 4y^2 + x + 7y + 5$$

解答：

$$\begin{aligned}\nabla f &= \text{grad} f \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= (6x^2 + 1, 8y + 7)\end{aligned}$$

• ヤコビ行列

- n 次元の変数 (x_1, x_2, \dots, x_n) から m 次元の変数 (z_1, z_2, \dots, z_m) への変数変換が、関数 (f_1, f_2, \dots, f_m) によって、

$$\begin{cases} z_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ z_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ z_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

と定義される時、

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

をヤコビ行列 J という。

- 勾配を並べた行列というイメージ。

• ヤコビアン

- ヤコビ行列の行列式。

例題：

次の変数変換のヤコビアンを求めよ。

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

解答：

$$\begin{aligned} |J| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2 \theta - (-r \sin^2 \theta) \\ &= r \end{aligned}$$

• 微分の連鎖律

- 合成関数の微分に使用する計算法.
- $y = f(x)$ と $x = g(t)$ について,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

- 多変数関数 $y = f(x_1, x_2)$ と $x_1 = g_1(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $x_2 = g_2(t_1, t_2, \dots, t_n)$ について,

$$\frac{dy}{dt_i} = \frac{dy}{dx_1} \frac{dx_1}{dt_i} + \frac{dy}{dx_2} \frac{dx_2}{dt_i}$$

例題 :

$x = uv, y = u + v$ とする. 次の関数 f について, $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ を求めよ.

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

解答 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{df}{dx} \frac{dx}{du} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{du} \\ &= 2x \cdot v + 2y \cdot 1 \\ &= 2uv^2 + 2u + 2v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{df}{dx} \frac{dx}{dv} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dv} \\ &= 2x \cdot u + 2y \cdot 1 \\ &= 2u^2v + 2u + 2v \end{aligned}$$

- [1] 大学数学の授業ノート (2021), “[集合 と元\(集合論\)](#)”, 大学数学の授業ノート, アクセス日 : 2024/01/09
- [2] 大学数学の授業ノート (2021), “[写像 \(集合論\)](#)”, 大学数学の授業ノート, アクセス日 : 2024/01/09
- [3] 数学の景色 (2023), “[上界・下界とは～定義と具体例～](#)”, 数学の景色, アクセス日 : 2024/01/09
- [4] 数学の景色 (2024), “[上限,下限\(sup,inf\)の定義と最大,最小\(max,min\)との違い](#)”, 数学の景色, アクセス日 : 2024/01/09
- [5] 羽山博 (2020), “[\[AI・機械学習の数学\] 偏微分の基本（意味と計算方法）を理解する](#)”, @IT, アクセス日 : 2024/01/09
- [6] 高校数学の美しい物語 (2021), “[勾配ベクトルの意味と例題](#)”, 高校数学の美しい物語 , アクセス日 : 2024/01/16
- [7] 基礎物理から半導体デバイスまで (2019), “[ヤコビ行列](#)”, 基礎物理から半導体デバイスまで, アクセス日 : 2024/01/16

