折り紙における Conformal Geometric Algebra の利用

九州大学大学院数理学府数理学専攻
修士課程2年　近藤光浩
修士課程2年　松尾拓哉

CG技術の実装と数理 2015/7/25

目的

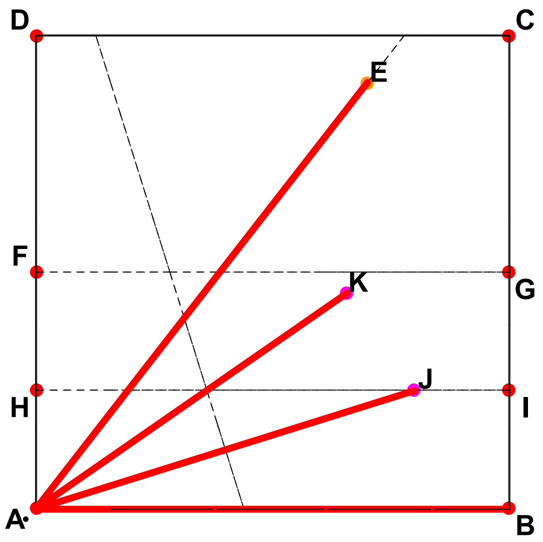
- "Ida et al. 2006."《Computational Origami System Eos》
  - 目的:2D折り操作の形式化、幾何定理の自動証明
  - 2DEosシステムは公開済み(ソースは非公開)
- "Ida et al. 2014."《Huzita's Basic Origami Fold in Geometric Algebra》
  - 目的: Geometric Algebra(GA)を用いて3D折り操作の形式化、幾何定理の自動証明
  - 3DEosシステムはアイデアのみで未完成
- 普段の研究
  - 目的: GAを用いて新しい動きのアニメーションと定式化

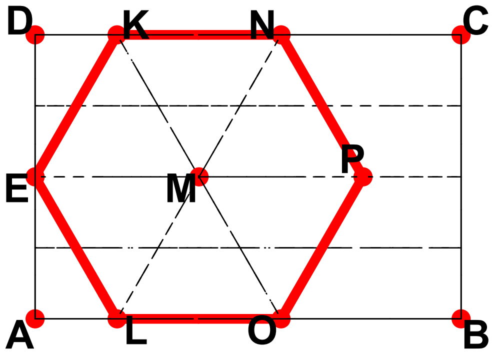
- 今回の目的
  - 折り紙, 折り紙操作のGAによる定式化
  - GAを用いた折り操作のアニメーション作成 (折り紙以外の『動き』も考えている)
  - 2DEosの再構築(GAを用いた)と3DEosの作成
  - 幾何定理の自動証明 ←3D折り紙の証明がGAの等式の証明と対応

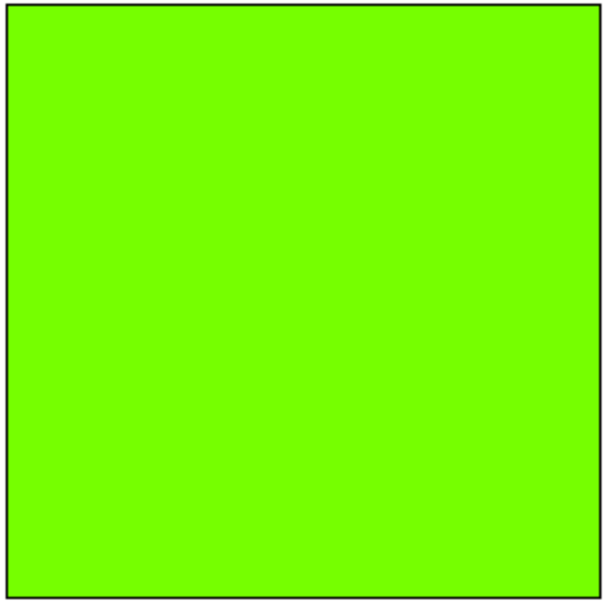
鶴ムービー

二次元Eos
平面で折って、最後の開く部分だけ
三次元にしている。

2DEosシステムは公開済み(ソースは非公開)





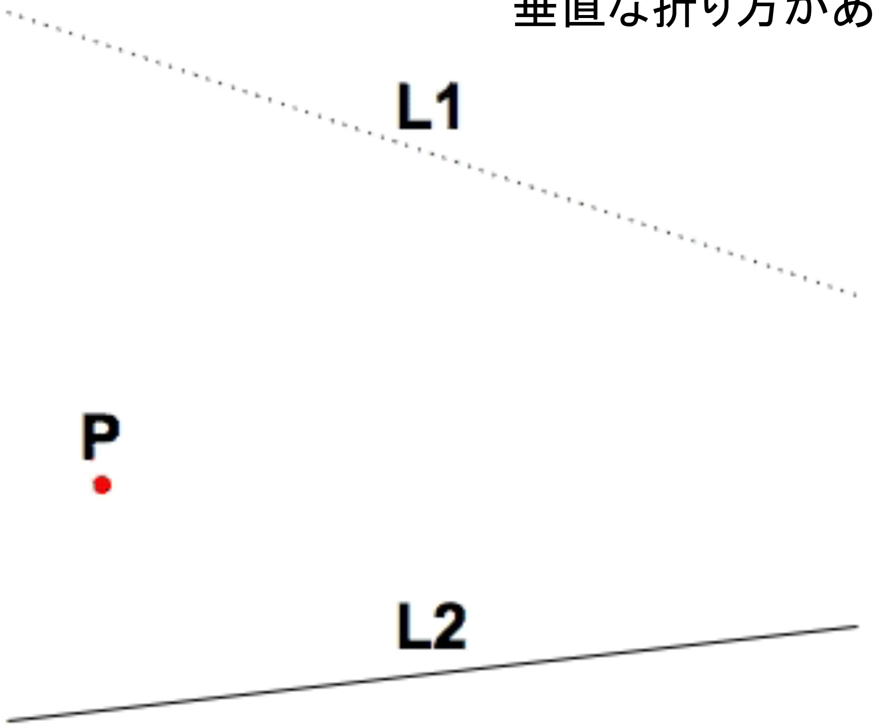


http://www.i-eos.org/tutorial

2DEos説明

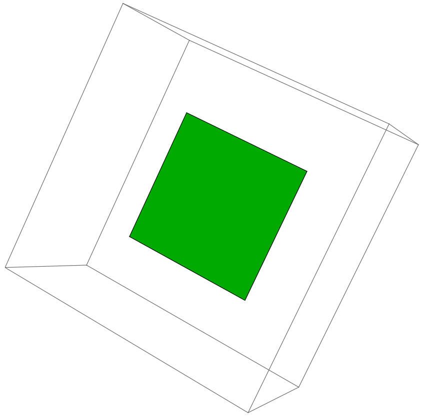
1点pと2本の直線l_1, l_2が与えられたとき、pをl_1に重ね、l_2に垂直な折り方がある。

藤田の公理7によって折り線mを計算。
関数 *HFold[P,L1,L2]*
によって計算可能。

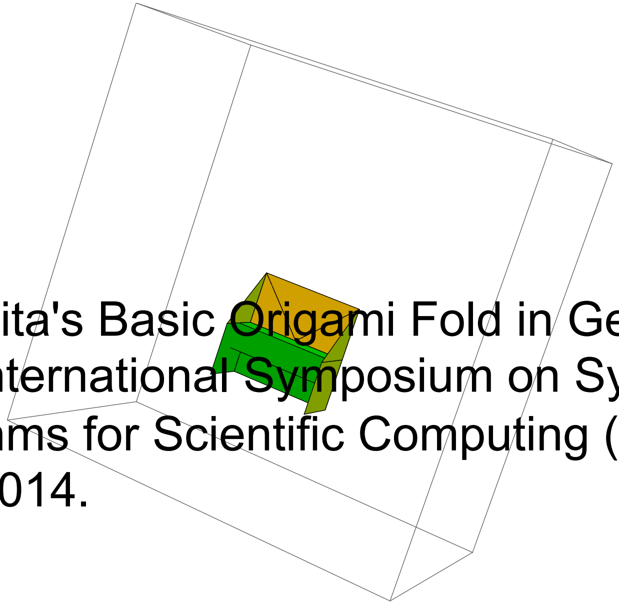


Eos:点の鏡映
GA:元移動（回転による途中の軌道を描写可能）

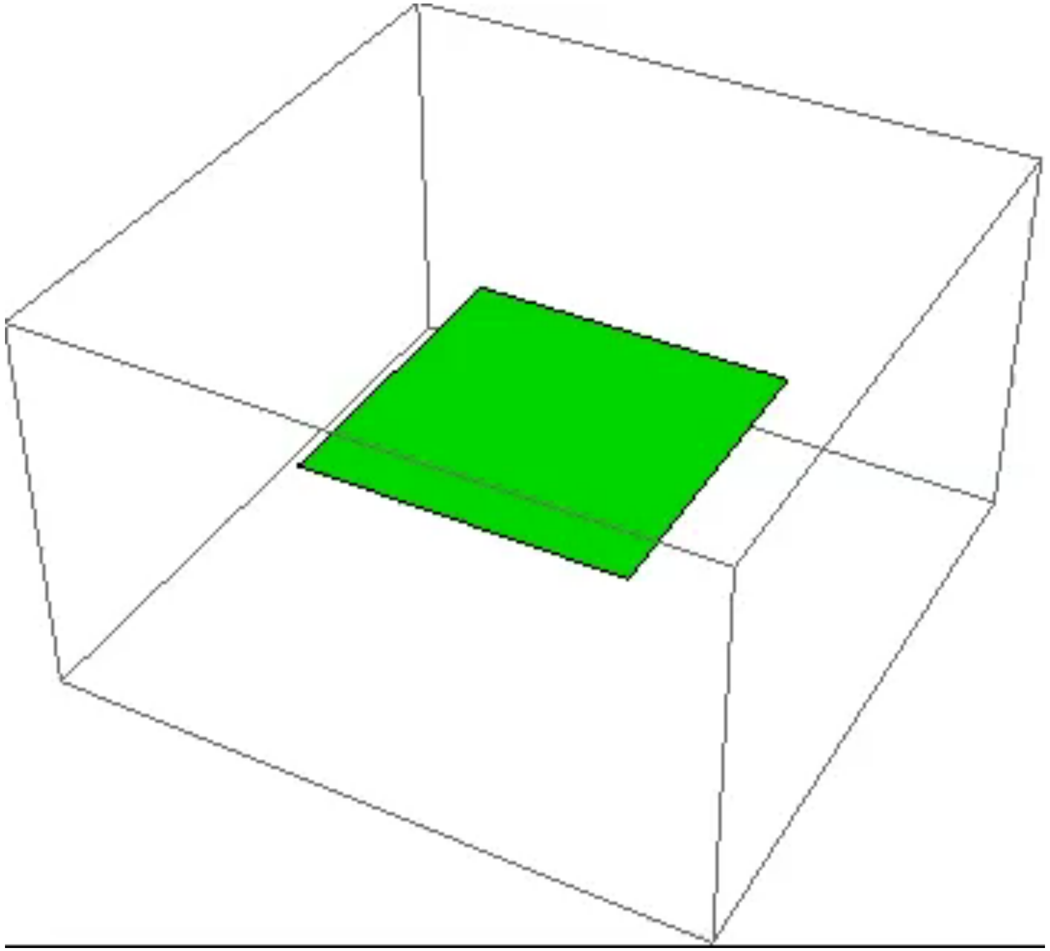
ピアノ-3次元折り紙への拡張-



回転を使って折り紙を折る



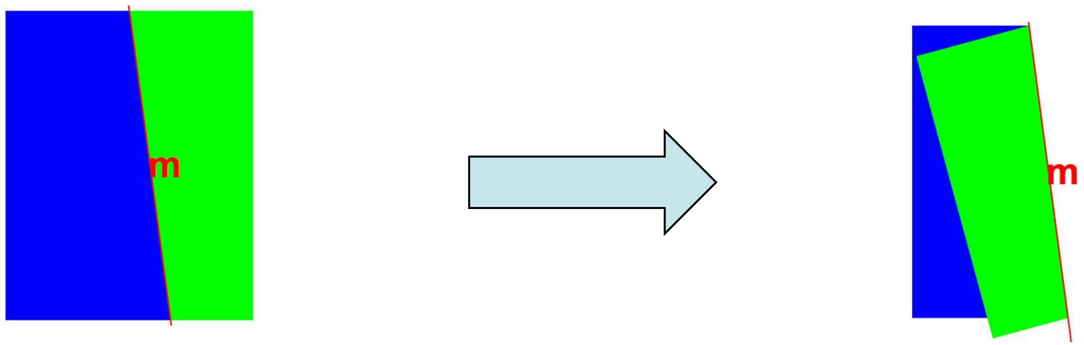
ピアノ



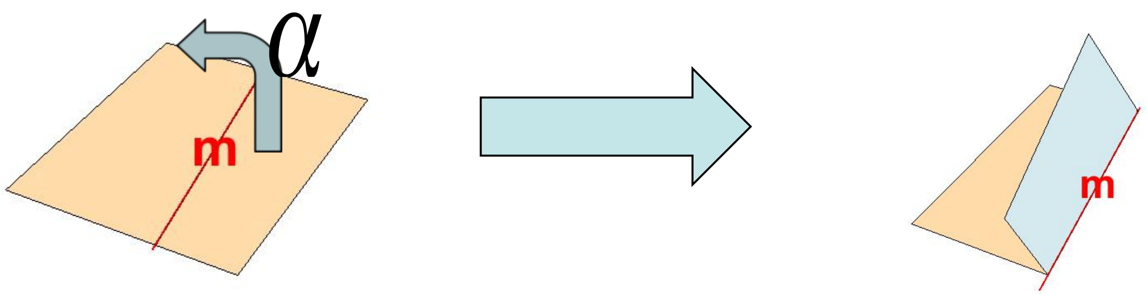
Tetsuo Ida , Huzita's Basic Origami Fold in Geometric Algebra , 16th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC), pages 11 - 13, 2014.

2Dを3Dに拡張

2Dでは, 折り線 m と 山折り, 谷折りの情報を与えることで, 折り操作を行う.



3Dでは, 折り線mと角度αを与えることで, 折り操作を行う.

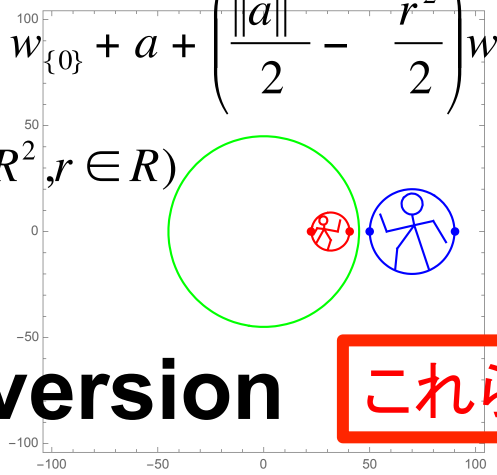


「折り線 m で 角度 α 折る」というGAの元を与えられる？

利点:　折り操作を簡単に表現出来る.
折り紙を用いた証明が可能になる.

Elements -Motions-

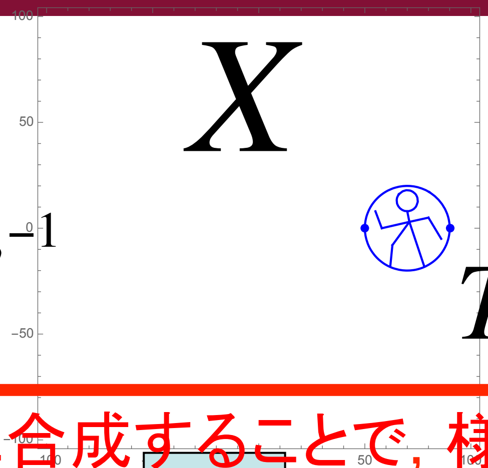
九州大学



$$Inv = w_{\{0\}} + a + \left(\frac{\|a\|^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right) w_{\{\infty\}}$$

$$(a \in R^2, r \in R)$$

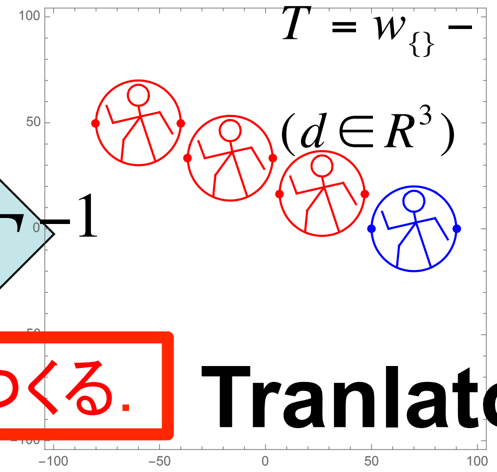
Inversion



$$X$$

$$Inv * X * Inv^{-1}$$

$$T * X * T^{-1}$$



$$T = w_{\{\}} - \frac{d}{2} w_{\{\infty\}}$$

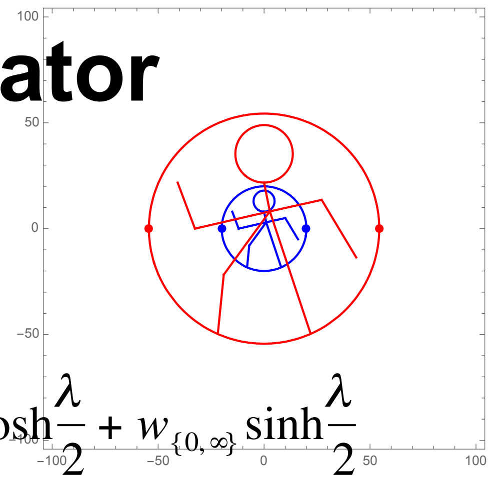
$$(d \in R^3)$$

Tranlator

これらの式を代数的に合成することで，様々な動きをつくる.

$$Dil * X * Dil^{-1} \quad Rot * X * Rot^{-1} \quad \mathrm{Ref} * X * \mathrm{Ref}^{-1}$$

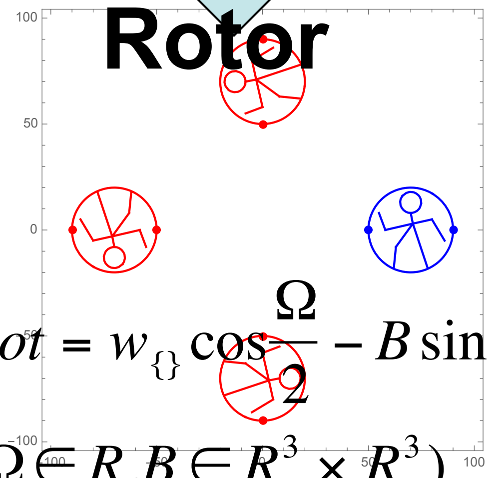
Dilator



$$Dil = w_{\{\}} \cosh\frac{\lambda}{2} + w_{\{0,\infty\}} \sinh\frac{\lambda}{2}$$

$$(\lambda \in R)$$

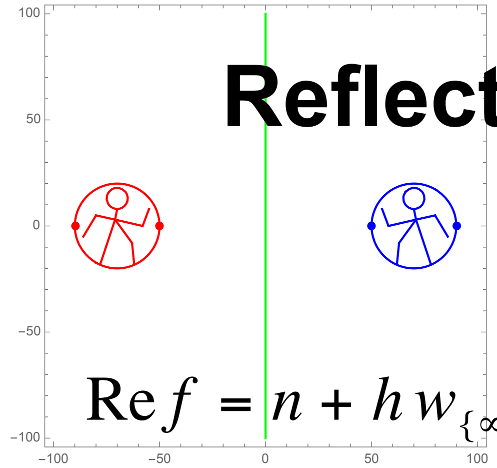
Rotor



$$Rot = w_{\{\}} \cos\frac{\Omega}{2} - B \sin\frac{\Omega}{2}$$

$$(\Omega \in R, B \in R^3 \times R^3)$$

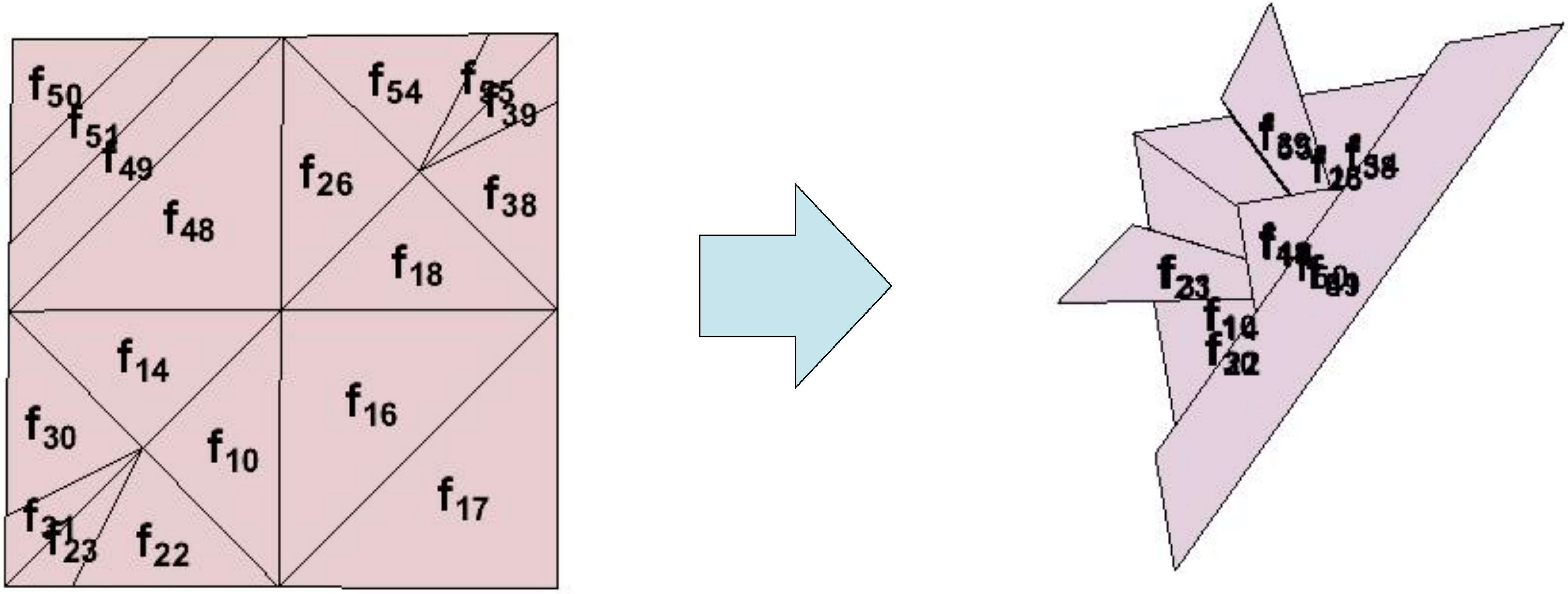
Reflector



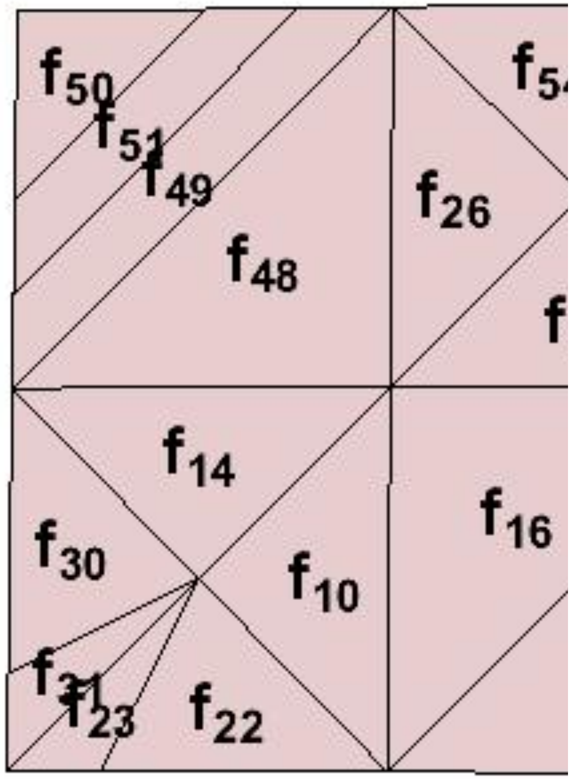
$$\mathrm{Re}f = n + h w_{\{\infty\}}$$

$$(n \in R^3, \|n\| = 1, h \in R)$$

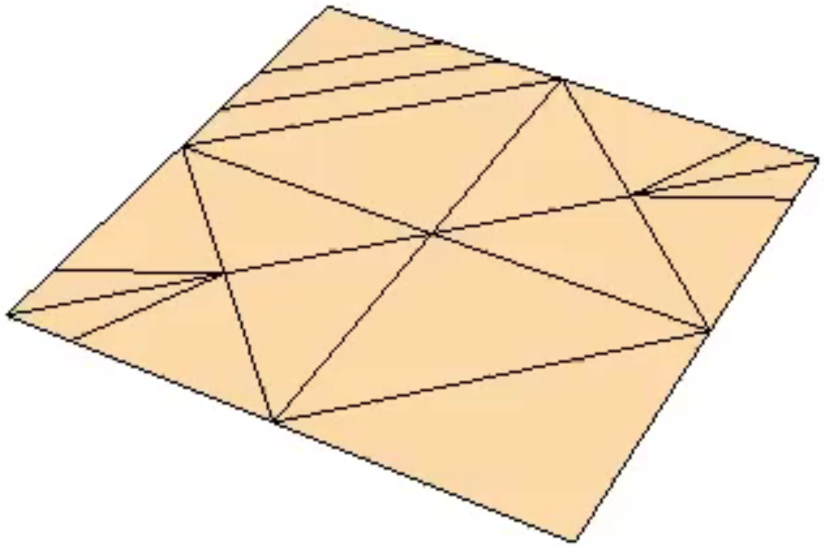
カブト



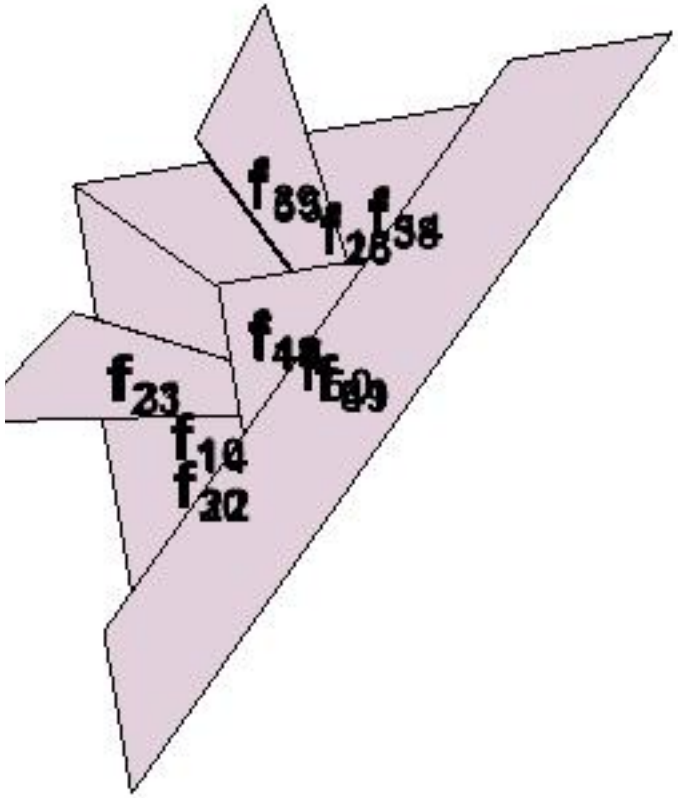
カブト



f_{50}
f_{51}
f_{49}
f_{48}
f_{26}
f_{14}
f_{30}
f_{10}
f_{16}
f_{23}
f_{22}

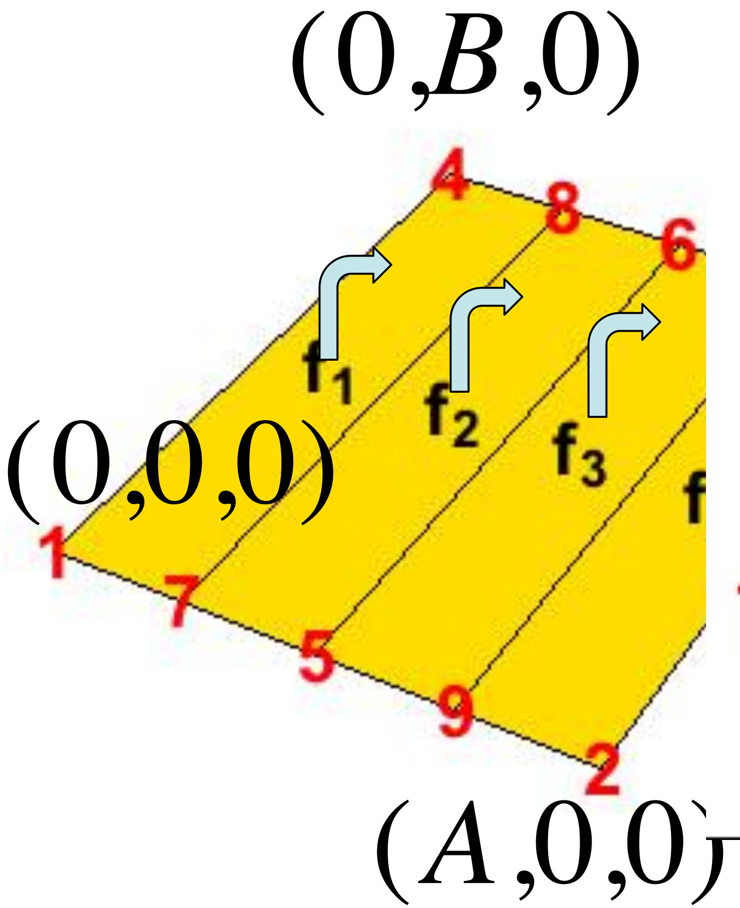


0.707107 w({1, 3}) – 0.707107 w({2, 3})

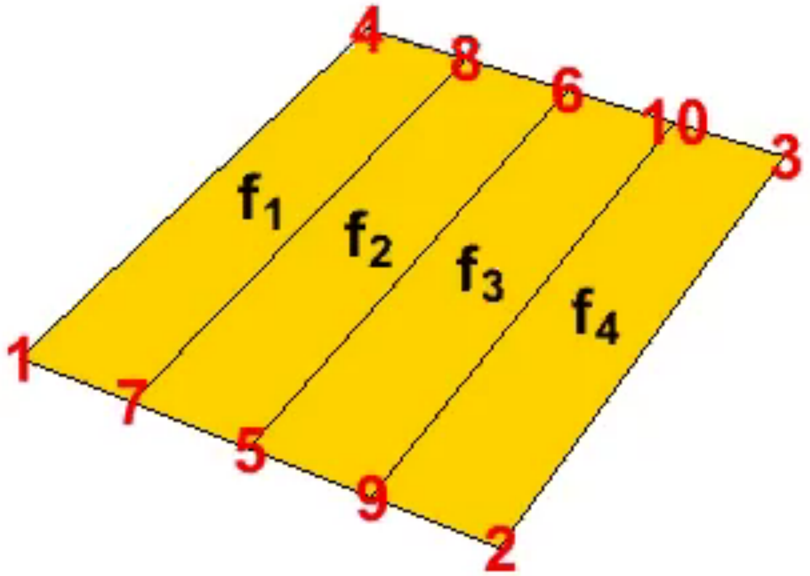


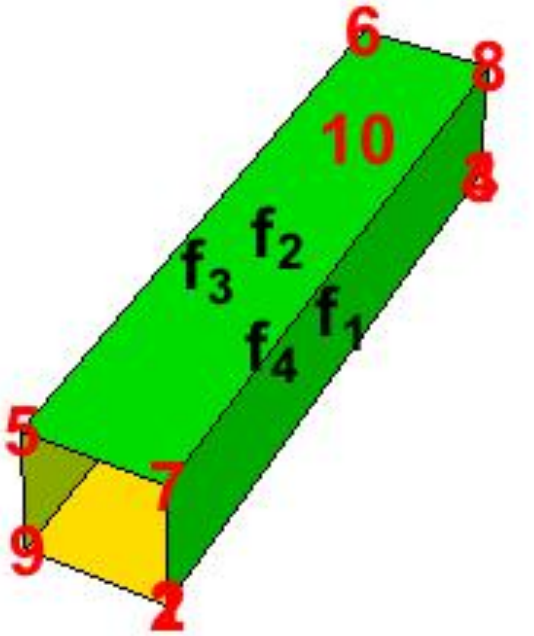
f_{23}

数式の証明



$$-\frac{A\sqrt{B^2}\,w(\{3,\infty\})}{4\sqrt{2}\,B}+\frac{\sqrt{B^2}\,w(\{1,3\})}{\sqrt{2}\,B}+\frac{w(\{\})}{\sqrt{2}}$$

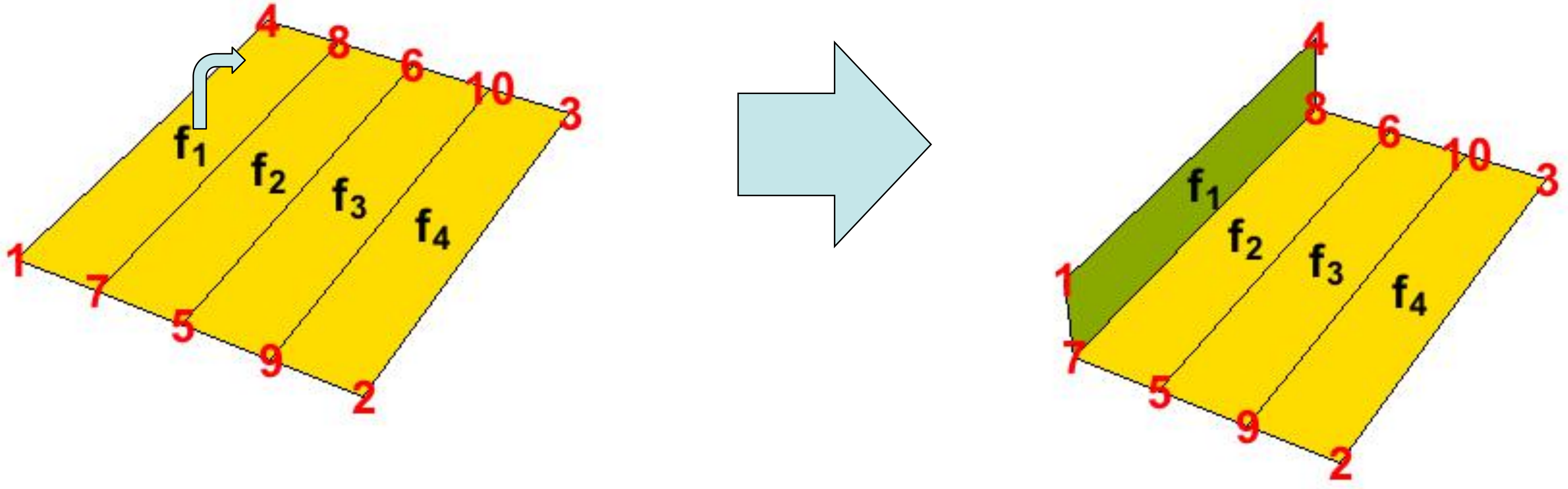




点1と 点 2 が重なる？

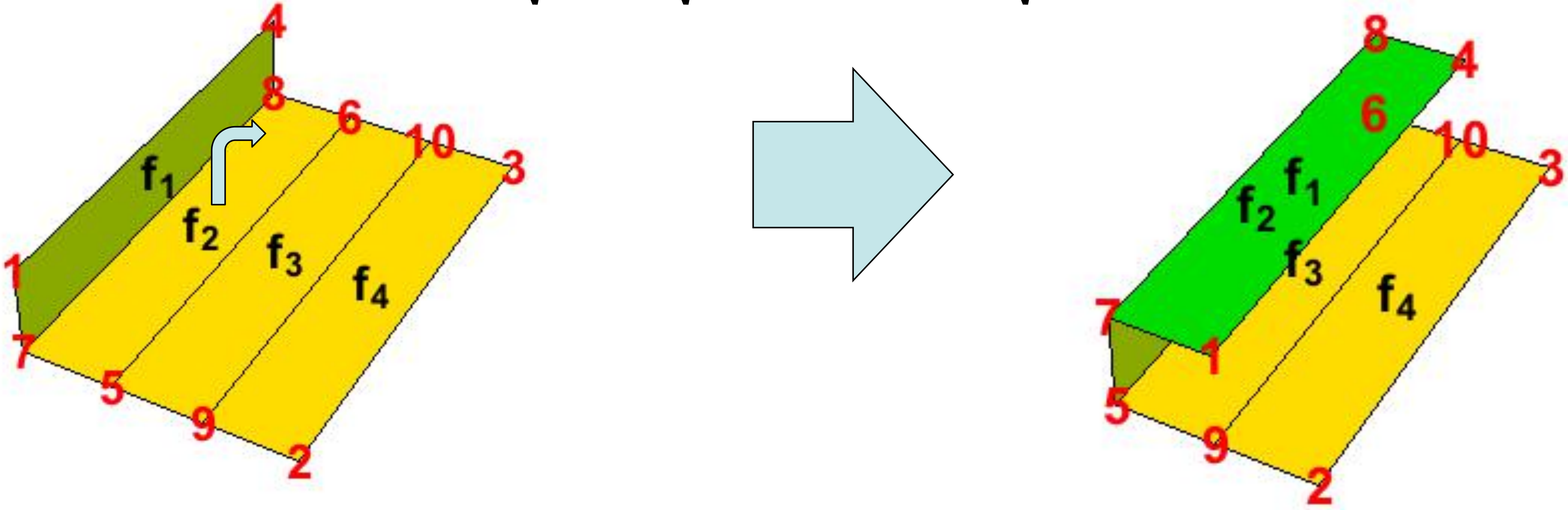
数式の証明

$$R_1 = \frac{w_{\{\}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{B^2}}{\sqrt{2}B} w_{\{1,3\}} - \frac{A\sqrt{B^2}}{4\sqrt{2}B} w_{\{3,\infty\}}$$



数式の証明

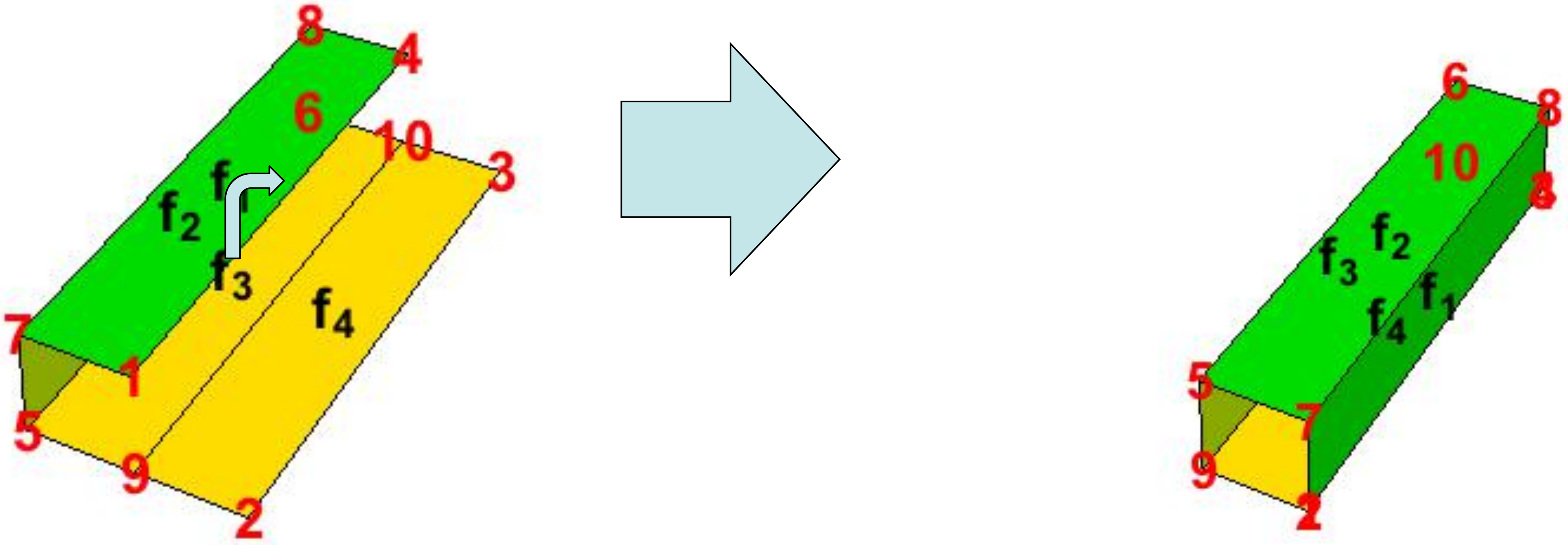
$$R_2 = \frac{w_{\{\}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{B^2}}{\sqrt{2}B} w_{\{1,3\}} - \frac{A\sqrt{B^2}}{2\sqrt{2}B} w_{\{3,\infty\}}$$



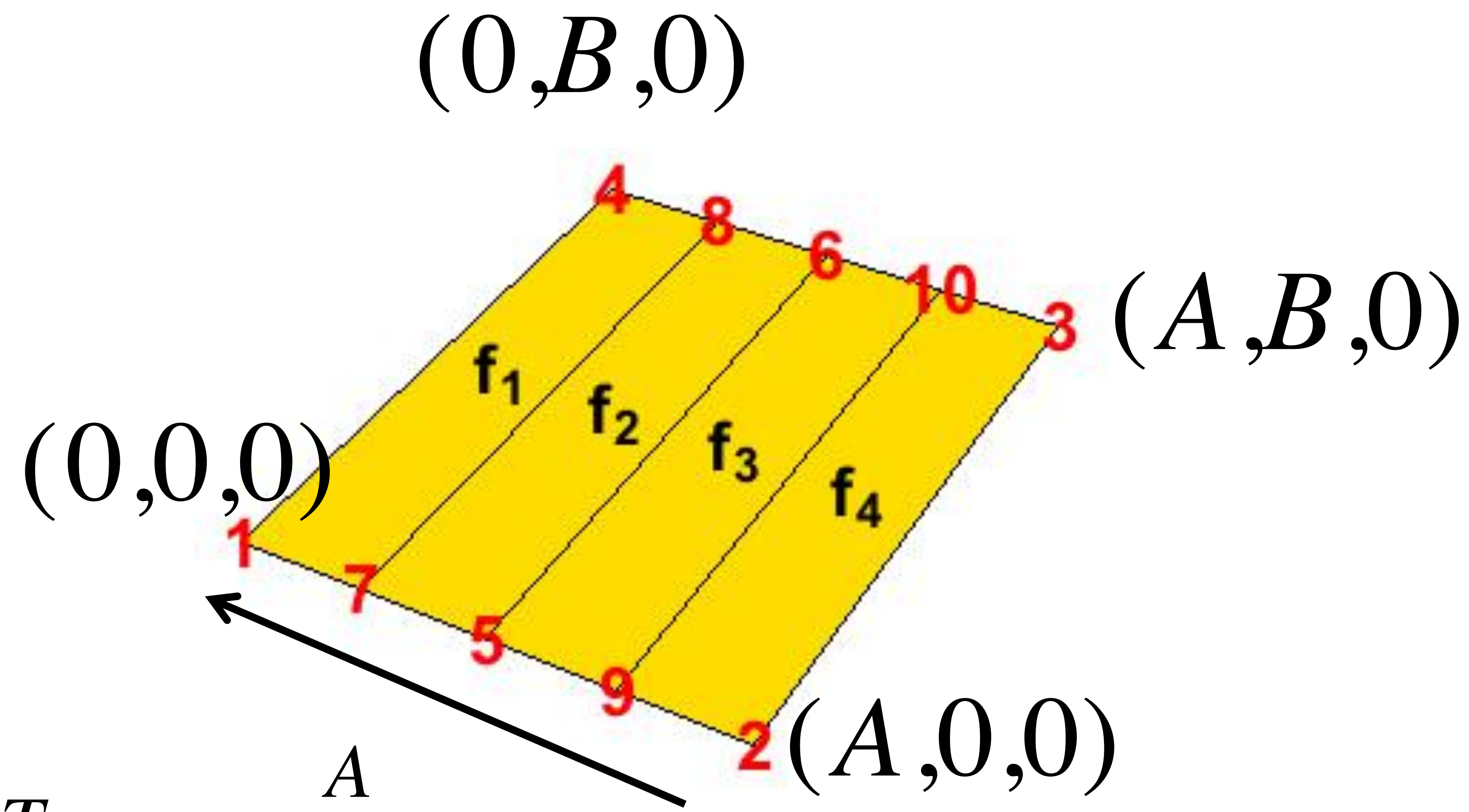
数式の証明

九州大学

$$R_3 = \frac{w_{\{\}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{B^2}}{\sqrt{2}B} w_{\{1,3\}} - \frac{3A\sqrt{B^2}}{4\sqrt{2}B} w_{\{3,\infty\}}$$



数式の証明



$$T = w_{\{\}} + \frac{A}{2} w_{\{1,\infty\}}$$

数式の証明

$$P_1 = w_{\{0\}}$$ (最初の点1のGAの式)

$$(T * R_3 * R_2 * R_1) * P_1 * (R_1^{-1} * R_2^{-1} * R_3^{-1} * T^{-1})$$ (折り操作及び平行移動後の点1のGAの式)

$$O = T * R_3 * R_2 * R_1$$

$$= \left(w_{\{\}} + \frac{A}{2} w_{\{1,\infty\}}\right) \left(\frac{w_{\{\}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{B^2}}{\sqrt{2}B} w_{\{1,3\}} - \frac{3A\sqrt{B^2}}{4\sqrt{2}B} w_{\{3,\infty\}}\right) \left(\frac{w_{\{\}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{B^2}}{\sqrt{2}B} w_{\{1,3\}} - \frac{A\sqrt{B^2}}{2\sqrt{2}B} w_{\{3,\infty\}}\right) \left(\frac{w_{\{\}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{B^2}}{\sqrt{2}B} w_{\{1,3\}} - \frac{A\sqrt{B^2}}{4\sqrt{2}B} w_{\{3,\infty\}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} w_{\{\}} + \frac{\sqrt{B^2}}{\sqrt{2}B} w_{\{1,3\}} = \begin{cases} \cos\frac{3\pi}{4} w_{\{\}} + \sin\frac{3\pi}{4} w_{\{1,3\}} & (B > 0) \\ \cos\frac{5\pi}{4} w_{\{\}} + \sin\frac{5\pi}{4} w_{\{1,3\}} & (B < 0) \end{cases}$$

$$O * P_1 * O^{-1} = w_{\{0\}}$$

元の式と同じになる

不足点

- 3Dでの重なりがわからない.

  現在は無視しているため, 下の面が見えている.

- 折り操作が行えるかどうかを判定することができていない.

- 開く操作がまだ未実装(鶴が折れない)

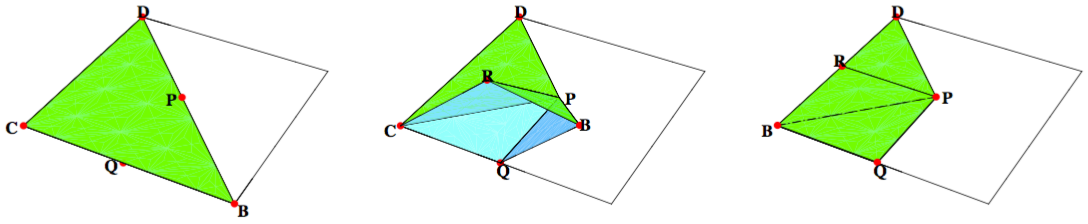
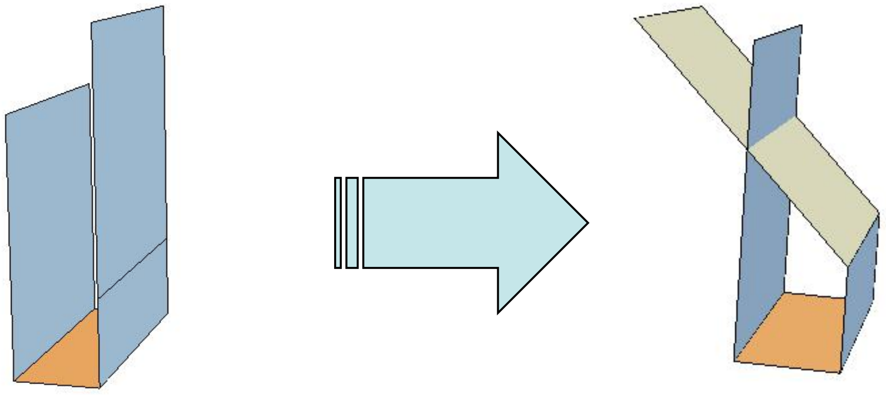


図 6.7: 折り鶴の基礎折りに用いられるつぶし折り

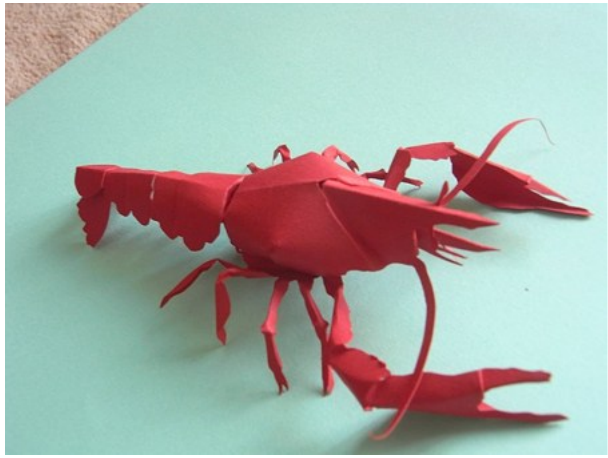


終わりに

九州大学

- 折り紙ならではのCGへ応用出来る動きはあるでしょうか?
- 三次元ならではの折り紙作品(例: ピアノ)の具体例はあるでしょうか?
- 三次元ならではの折り方はあるでしょうか?

- 他にも意見やアドバイス等ありましたらお教えください



References

[1] Pablo Colapinto, VERSOR Spatial Computing with Conformal Geometric Algebra, March 2011

[2] Christian Perwass,Geometric Algebra with Applications in Engineering,Berlin, Germany. c2009 Springer

[3] Computational Origami System Eos

[4] Huzita's Basic Origami Fold in Geometric Algebra