折り紙における Conformal Geometric Algebra の利用

九州大学大学院数理学府数理学専攻
修士課程2年　近藤光浩
修士課程2年　松尾拓哉
CG技術の実装と数理 2015/10/3

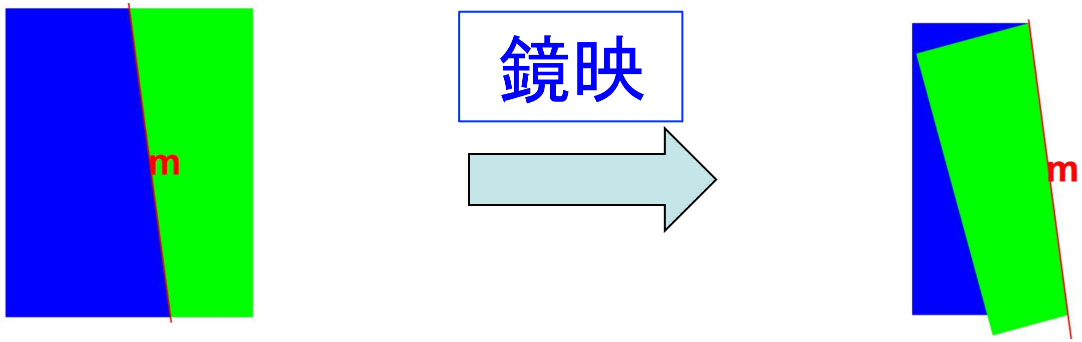
目的

- "Ida et al. 2006."《Computational Origami System Eos》
  - 目的:2D折り操作の形式化、幾何定理の自動証明
  - 2DEosシステムは公開済み(ソースは非公開)
- "Ida et al. 2014."《Huzita's Basic Origami Fold in Geometric Algebra》
  - 目的: Geometric Algebra(GA)を用いて3D折り操作の形式化、幾何定理の自動証明
  - 3DEosシステムはアイデアのみで未完成
- 普段の研究
  - 目的: GAを用いて新しい動きのアニメーションと定式化

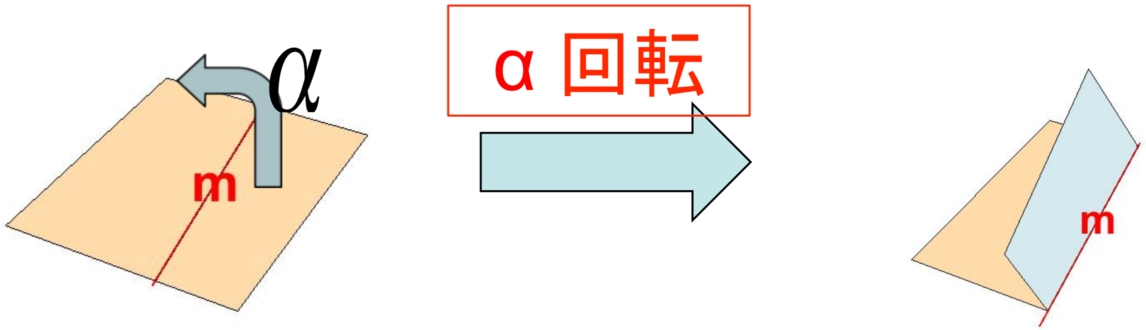
- 今回の目的
  - 折り紙, 折り紙操作のGAによる定式化
  - GAを用いた折り操作のアニメーション作成 (折り紙以外の『動き』も考えている)
  - 2DEosの再構築(GAを用いた)と3DEosの作成
  - 幾何定理の自動証明 ←3D折り紙の証明がGAの等式の証明と対応

2Dを3Dに拡張

2Dでは, 折り線 m と 山折り, 谷折りの情報を与えることで, 折り操作を行う.



3Dでは, 折り線mと角度αを与えることで, 折り操作を行う.



「折り線 m で 角度 α 折る」というGAの元を与えられる?

利点: 折り操作を簡単に表現出来る.
折り紙を用いた証明が可能になる.

折り紙データ構造

- 実装は*Wolfram Mathematica* で行った。

折り紙グラフ $O = (\Pi, \sim, \succ)$

- **面集合**(Face set) **Π**
  - 要素は頂点座標の集合による面。面は点の集合。
- **隣接関係**(Adjacency relation) **～**
  - 要素は隣あう面の組み合わせ。
- **重畳関係**(Superposition relation) ≻
  - 要素は直接重なりあう面の組合わせ。ただし、他の面の重畳関係の組み合わせを複数辿ることにより、面の重畳関係が分かるような場合は簡約化として取り除く。

折り紙データ構造～面集合～

九州大学

面集合 Π

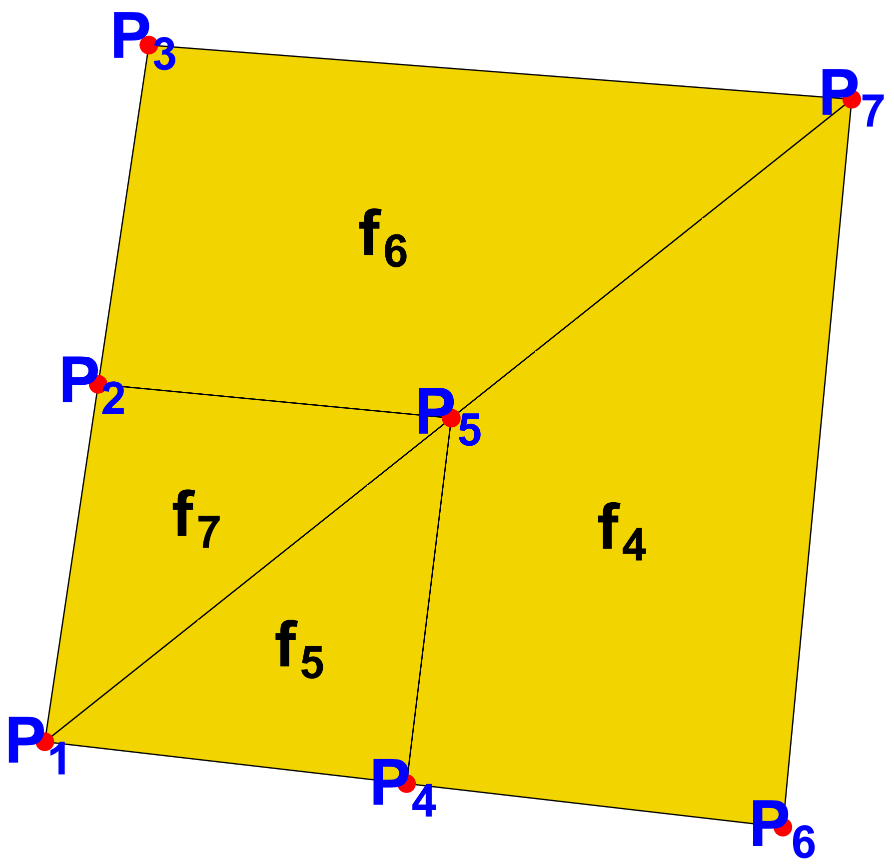
$\Pi = \{ f_4 , f_5 , f_6 , f_7 \}$

$f_4 = \{ p_5 , p_4 , p_6 , p_7 \}$

$f_5 = \{ p_4 , p_5 , p_1 \}$

$f_6 = \{ p_2 , p_5 , p_7 , p_3 \}$

$f_7 = \{ p_5 , p_2 , p_1 \}$



頂点の回転の向きによって面の裏表が決まる.

折り紙データ構造～隣接関係～

隣接関係

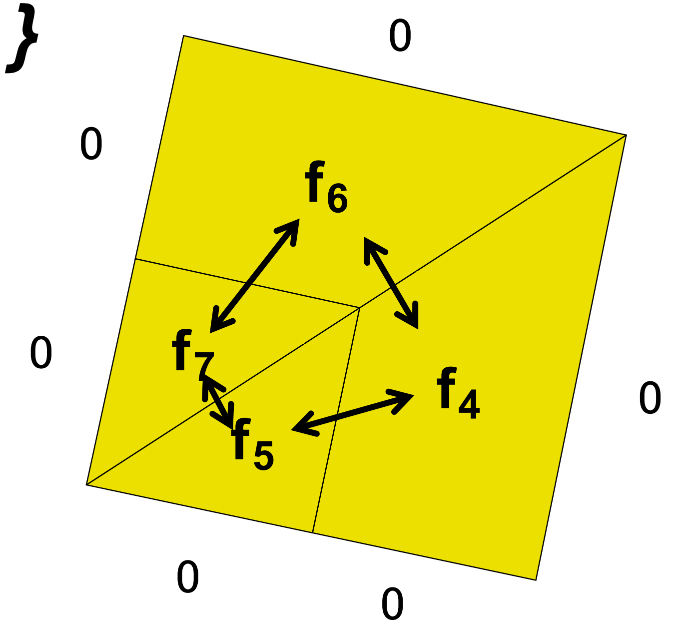
$\sim = \{\sim_4, \sim_5, \sim_6, \sim_7\}$

$\sim_4 = \{f_6, f_5, f_0, f_0\}$

$\sim_5 = \{f_0, f_4, f_7\}$

$\sim_6 = \{f_0, f_7, f_4, f_0\}$

$\sim_7 = \{f_7, f_7, f_0\}$



面集合 Π

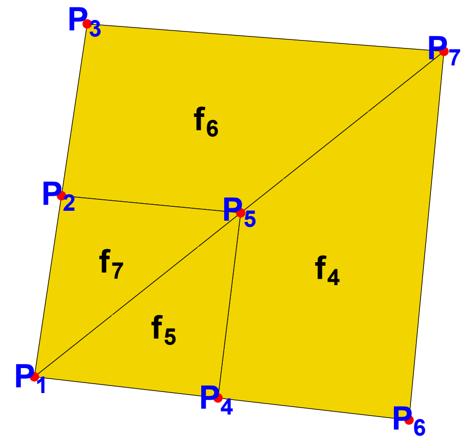
$\Pi = \{f_4, f_5, f_6, f_7\}$

$f_4 = \{p_5, p_4, p_6, p_7\}$

$f_5 = \{p_4, p_5, p_1\}$

$f_6 = \{p_2, p_5, p_7, p_3\}$

$f_7 = \{p_5, p_2, p_1\}$



面集合 Π

$\Pi = \{f_2, f_3\}$

$f_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$

$f_3 = \{p_5, p_6, p_7, p_8\}$

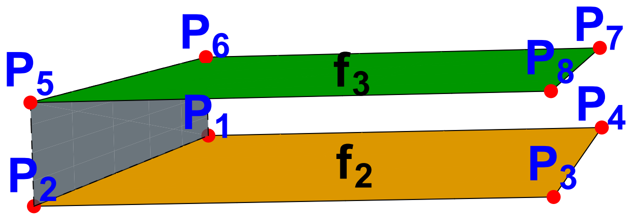
$\sim = \{\sim_2, \sim_3\}$

$\sim_2 = \{f_0, f_3, f_0, f_0\}$

$\sim_3 = \{f_0, f_2, f_0, f_0\}$

$\succ = \{(f_3, f_2)\}$

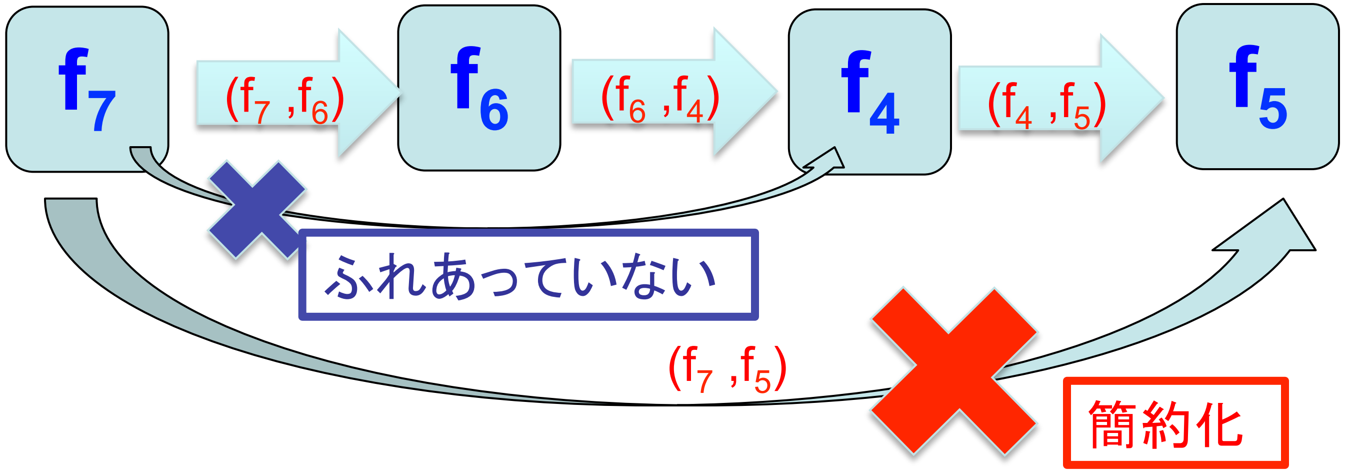
隣接関係は辺ごとに持つ必要がある

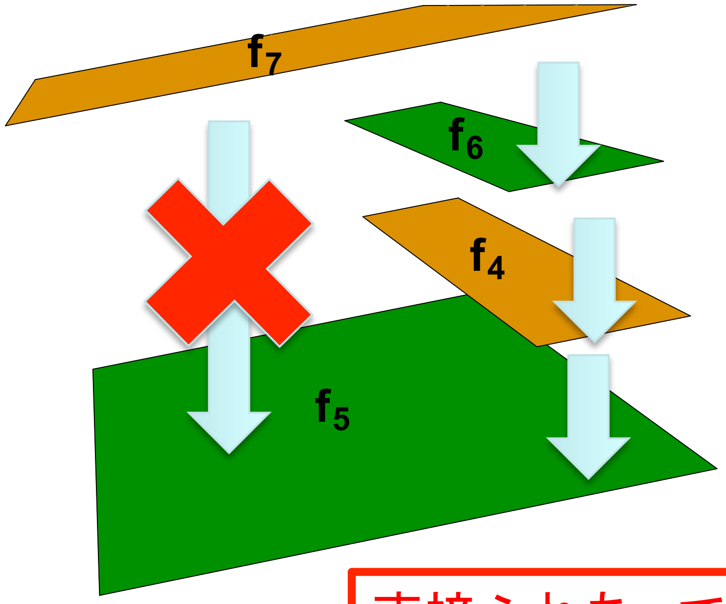


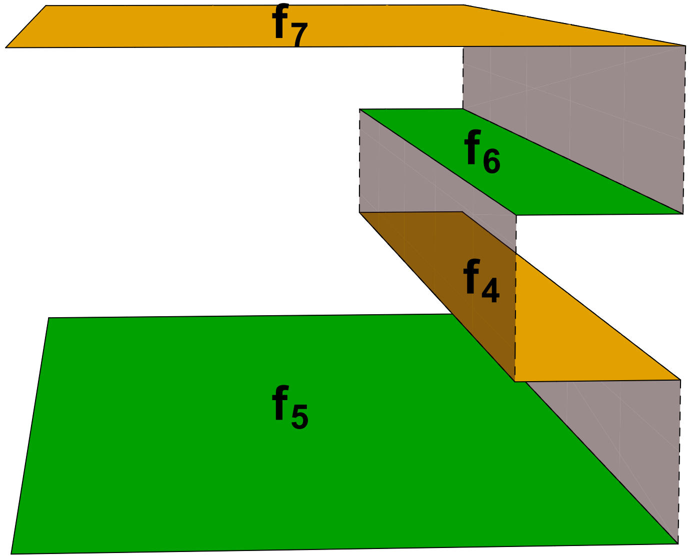
折り紙データ構造～重畳関係～

重畳関係

$\succ = \{(f_7,f_6), (f_6,f_4), (f_4,f_5)\}$





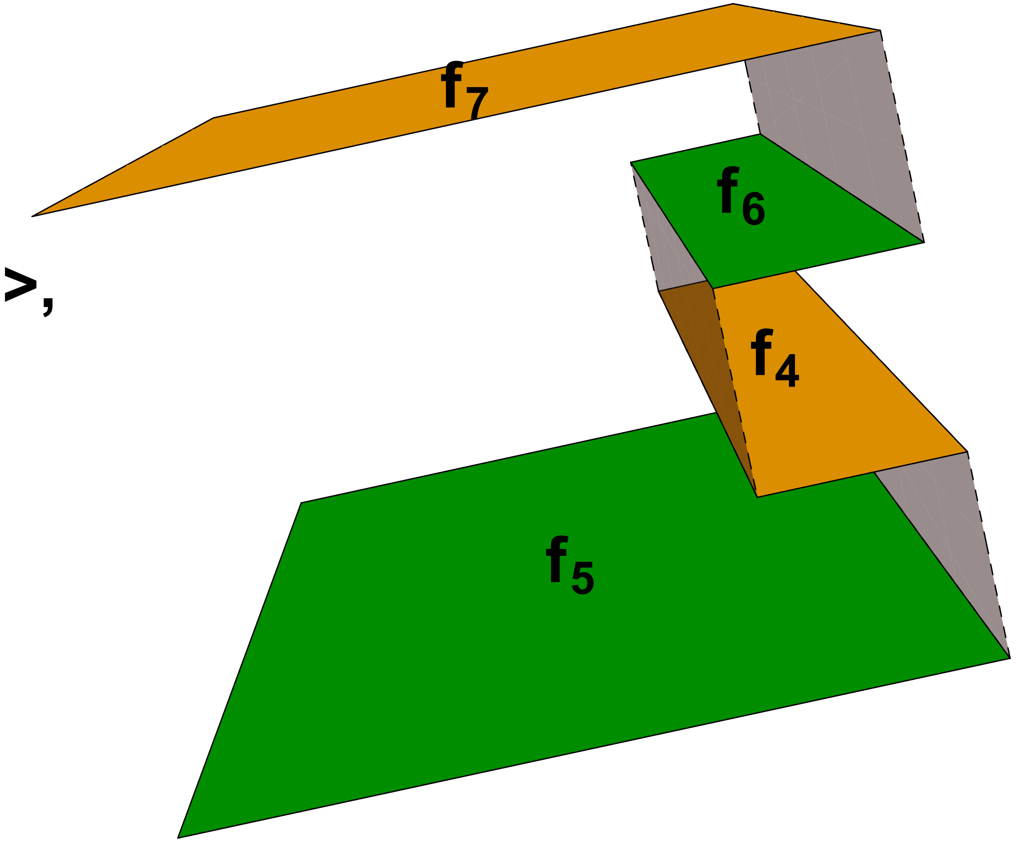


直接ふれあっている面同士の上下関係。
ただし、組み合わせて分かる関係は簡約化する

折り紙データ構造～連想配列～

Mathematica10 の連想配列の機能を使っている。

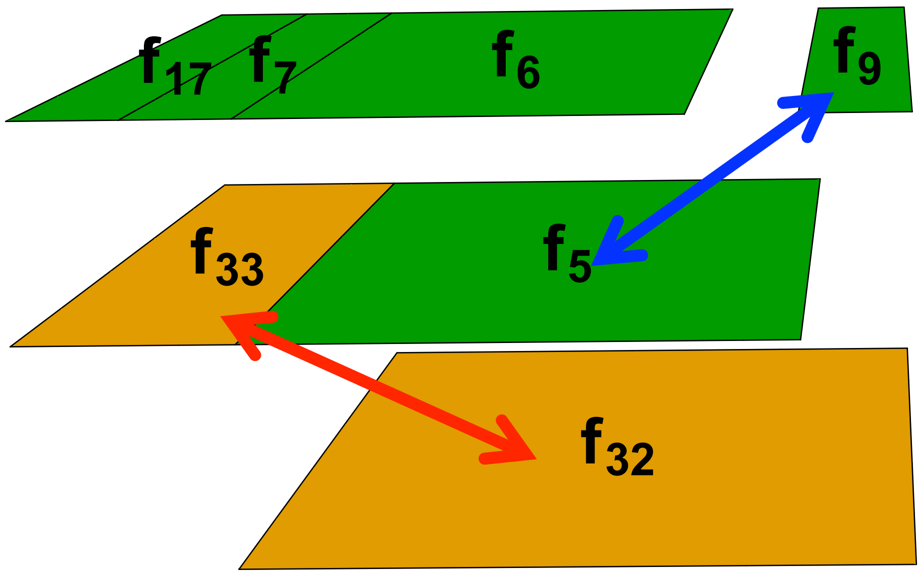
<| "F" → <|4 →{{6, 0}, {6, 10}, {5, 10}, {5, 0}},
5 → {{6, 10}, {6, 0}, {2., 0.}, {2., 10.}},
6→ {{6., 10.}, {6., 0.}, {5, 0}, {5, 10}},
7→ {{6., 0.}, {6., 10.}, {2., 10.}, {2., 0.}}|>,
"A" →<|4 → {0, 5, 0, 6}, 5 → {0, 4, 0, 0}
, 6 → {0, 7, 0, 4}, 7→ {0, 6, 0, 0}|>,
"S" → {{4, 5}, {6, 4}, {7, 6}} |>



- 面集合(Face set) **Π**
- 隣接関係(Adjacency relation) **∼**
- 重畳関係(Superposition relation) ≻

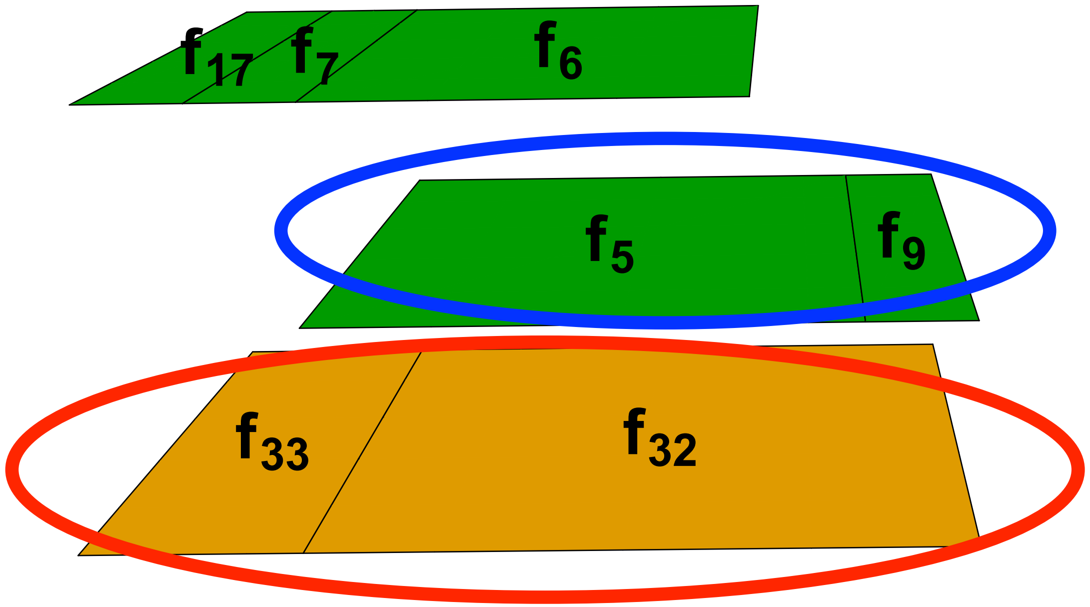
折り紙表示

- GOutput3D



隣接関係を無視した表示

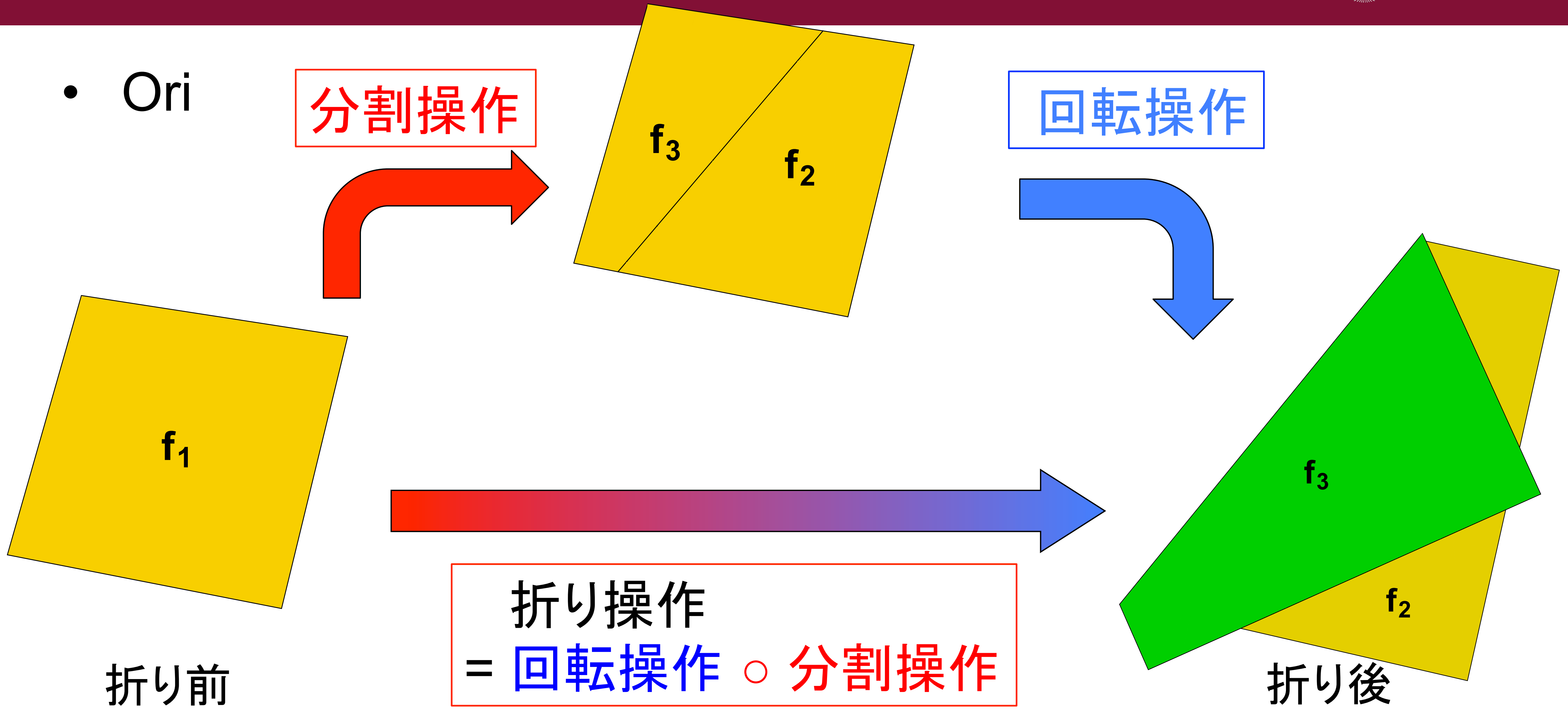
"S" → {{5, 32}, {6, 5}, {7, 33}, {9, 32}, {17, 33}}



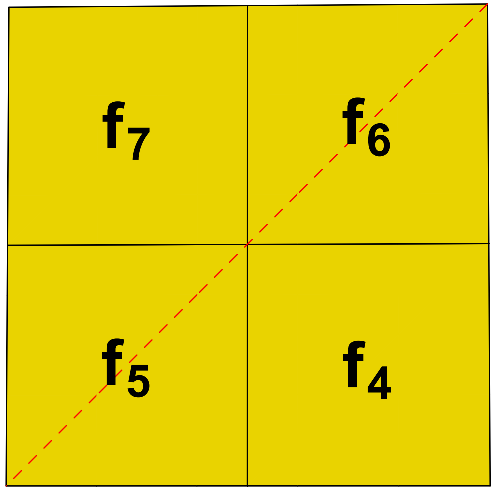
隣接関係によって高さを揃える

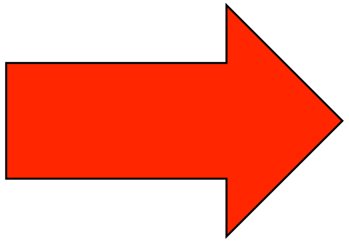
折り操作

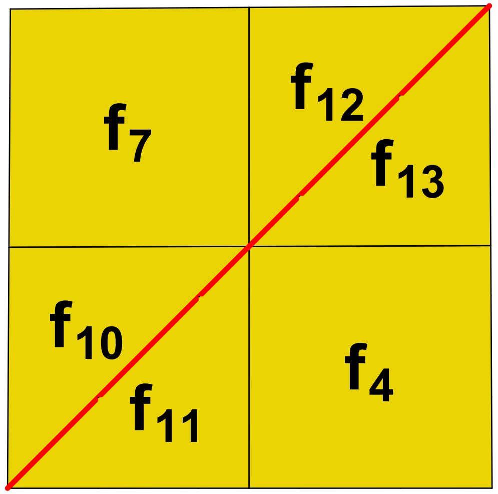
- Ori



折り操作～分割操作～



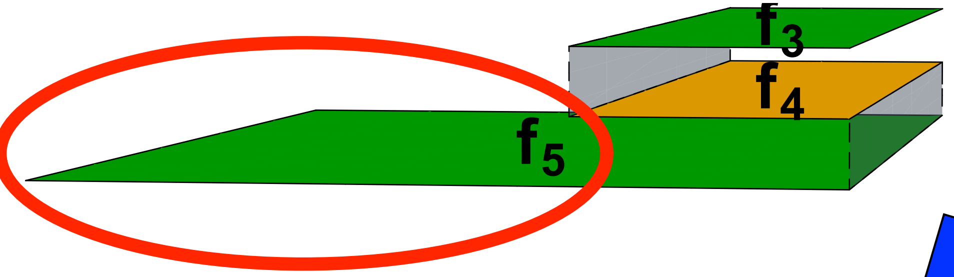




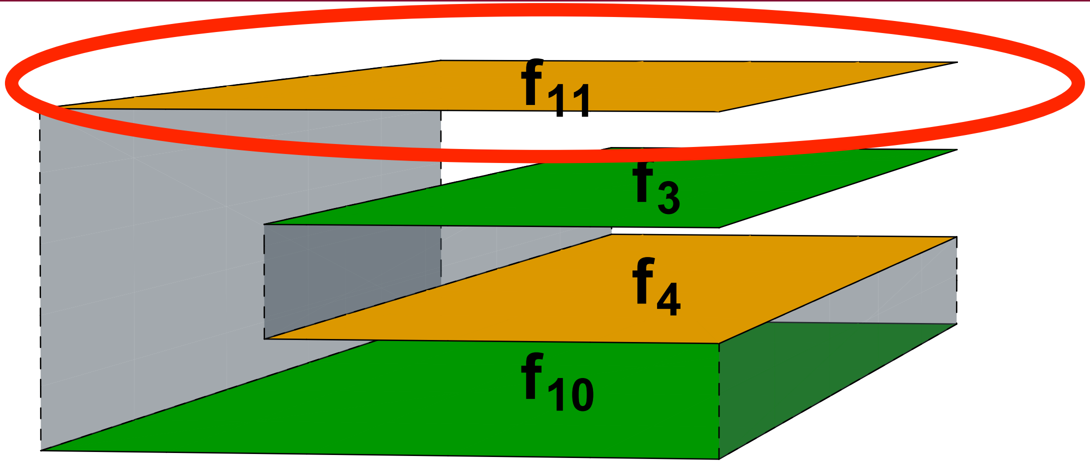
元の面のID が i の時、
面は2i, 2i+1 に分かれる。

折り操作～回転操作～

折る前の図
"S" → { {3, 4},{4, 5} }

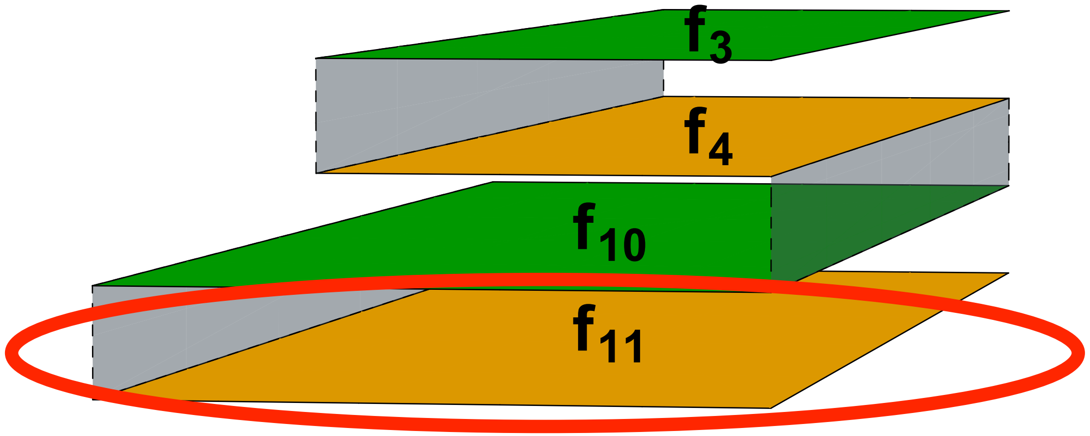


谷折り



谷折り時は，折られた面が上へ行くことで表現する．
"S" → { {11, 3},{3, 4},{4, 10} }

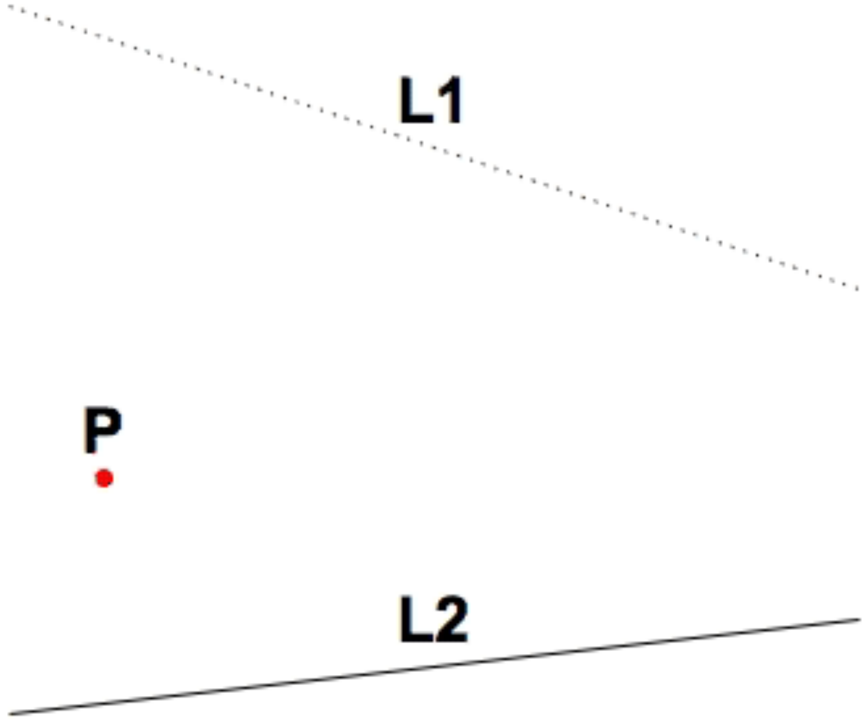
山折り



山折り時は，折られた面が下へ行くことで表現する．
"S" → { {3, 4},{4, 10}, {10, 11} }

折り線指定

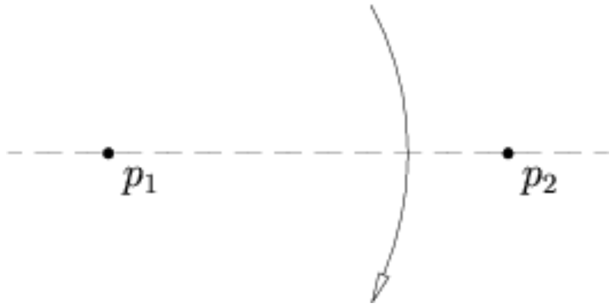
- Ori1~7
  - 藤田の公理1～7によって折り線を計算する関数



公理7

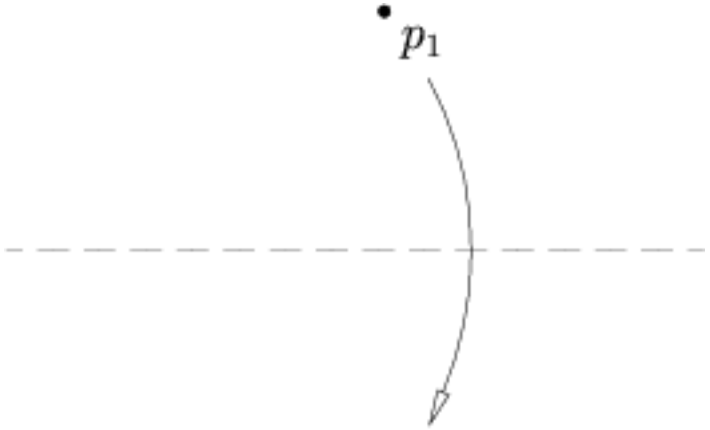
1点pと2本の直線l_1, l_2が与えられたとき、pをl_1に重ね、l_2に垂直な折り方がある。

藤田の折り紙公理1~4



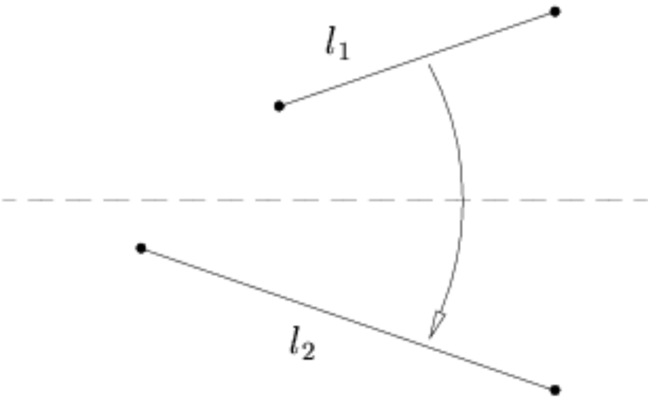
公理1

2点p_1, p_2が与えられたとき、2点を通るただ1つの折り方がある。



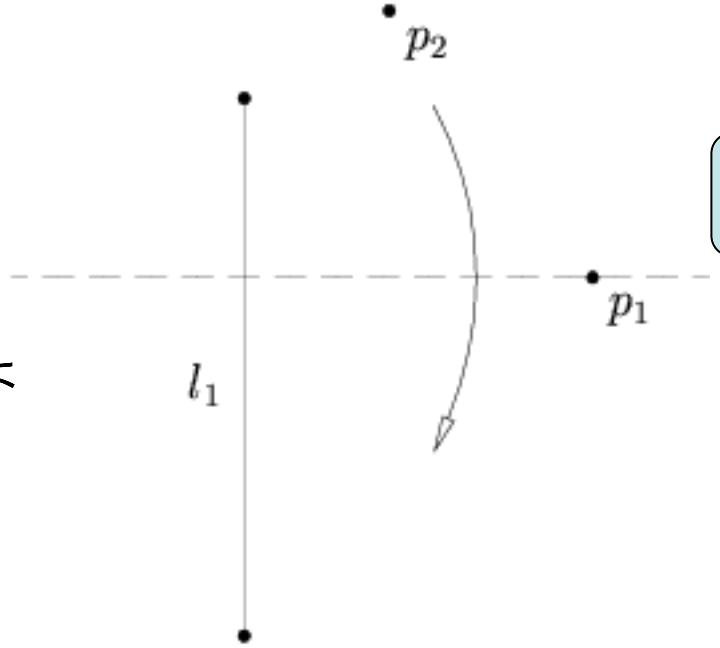
公理2

2点p_1, p_2が与えられたとき、p_1をp_2に重ねるただ1つの折り方がある。



公理3

2本の直線l_1, l_2が与えられたとき、l_1をl_2に重ねるような折り方がある。

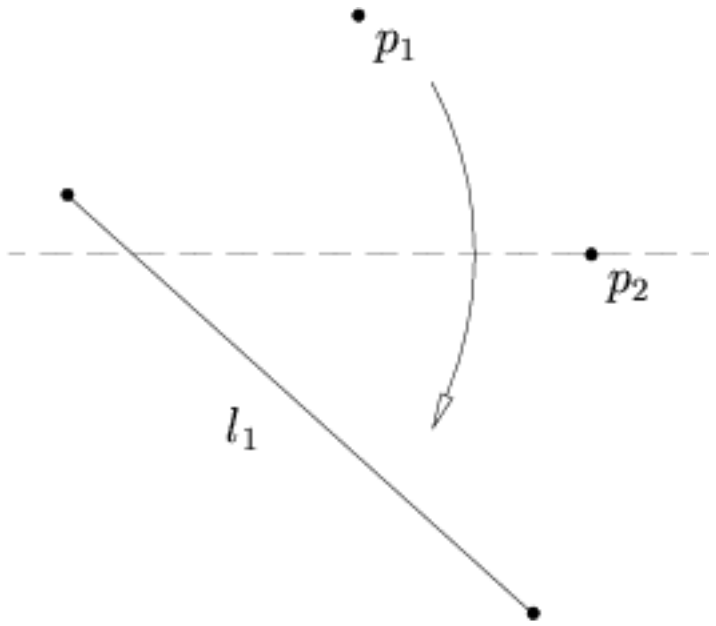


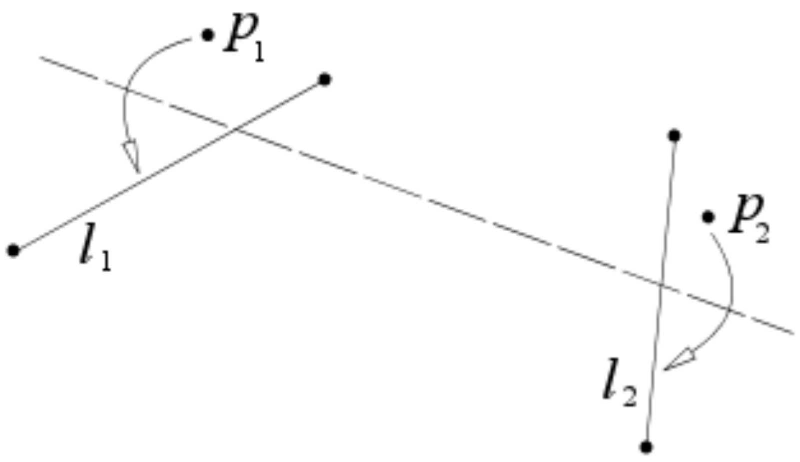
公理4

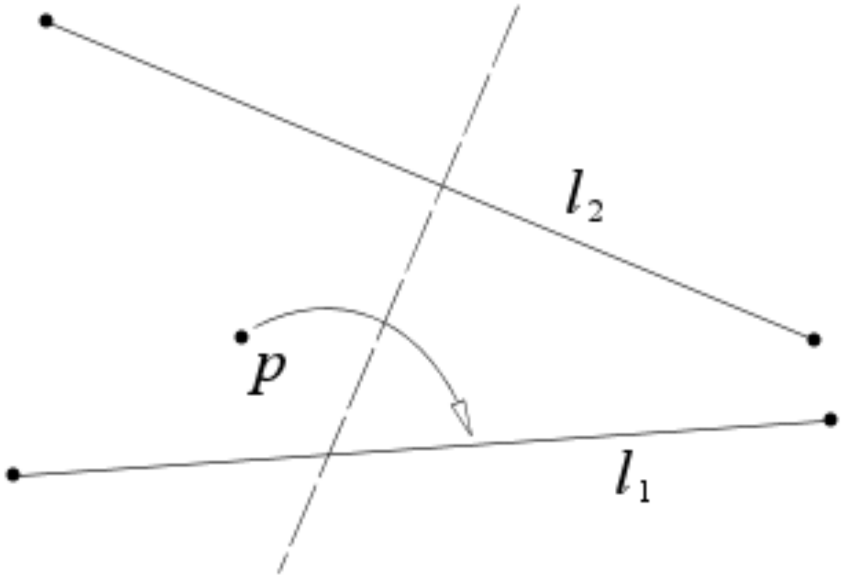
1点p_1と1本の直線l_1が与えられたとき、l_1に垂直でp_1を通るただ1つの折り方がある。

藤田の折り紙公理5~7

九州大学







公理5

2点p_1, p_2と1本の直線l_1が与えられたとき、p_1をl_1上に重ね、p_2を通る折り方がある。

公理6

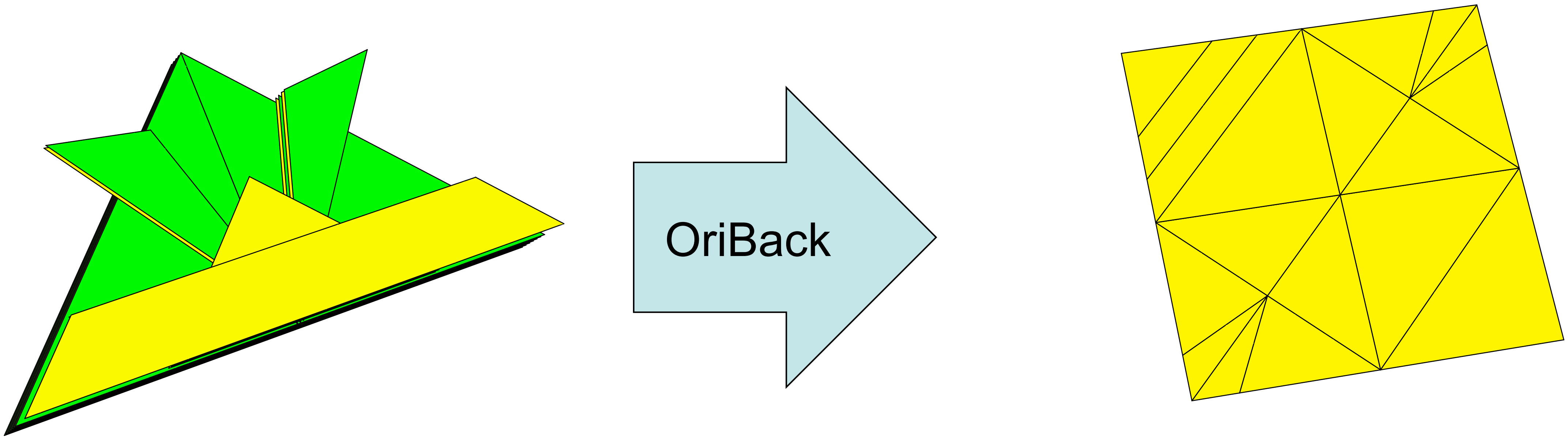
2点p_1, $p_2$2本の直線l_1, l_2が与えられたとき、p_1をl_1上に重ね、かつp_2をl_2上に重ねる折り方がある。

公理7

1点pと2本の直線l_1, l_2が与えられたとき、pをl_1に重ね、l_2に垂直な折り方がある。

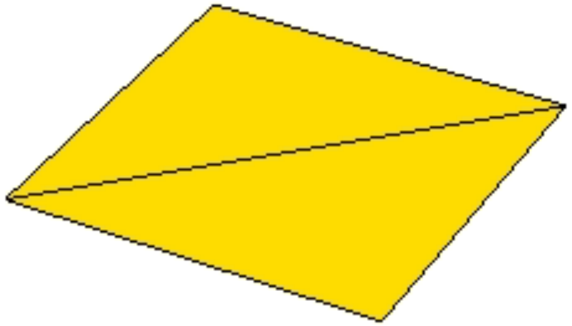
展開図

- OriBack
    - 開く(折りを戻す)関数

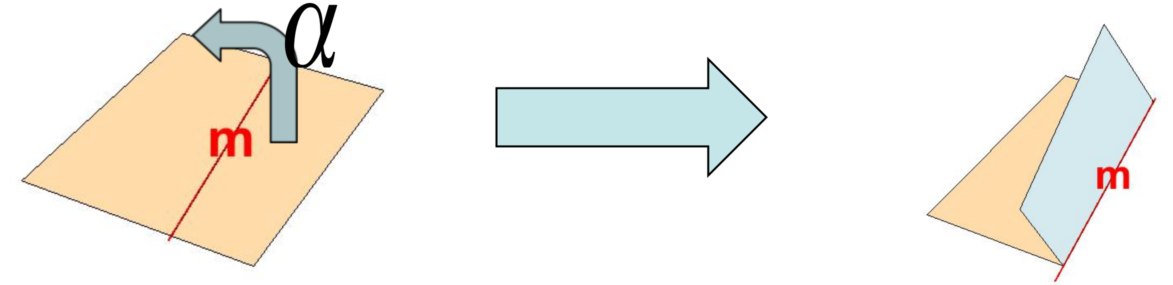


ムービー

- 折り紙ムービーを作る関数
  - CGAを使うことでデータを扱いやすくしている。



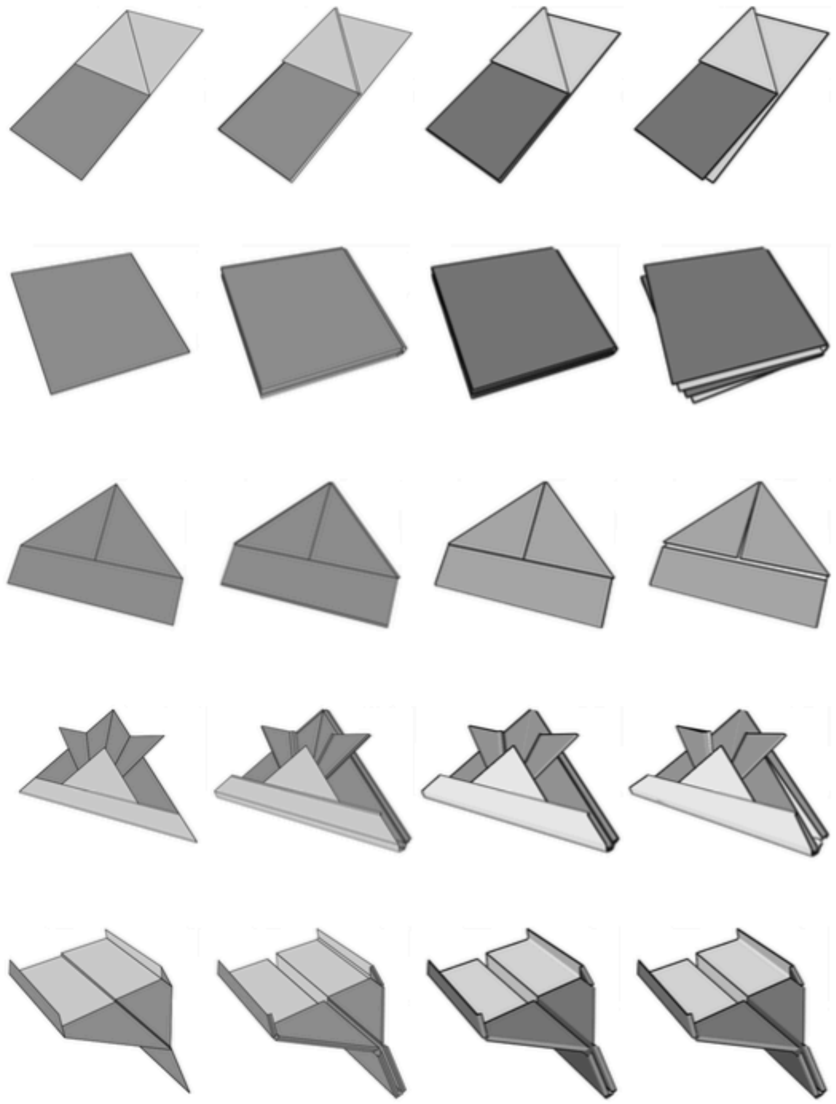
鏡映



α 回転による折り操作の補間←CGA

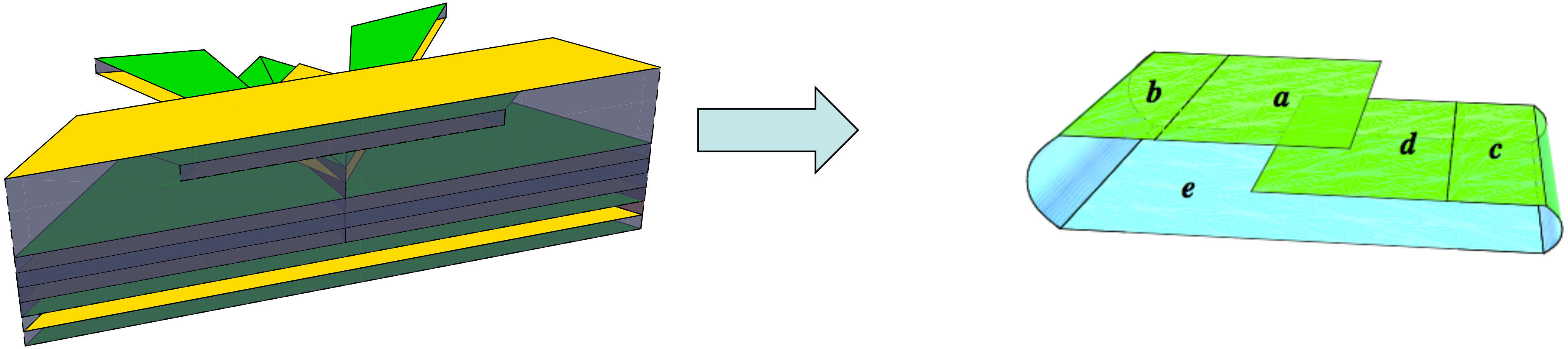
今後の課題

- より現実的な折り紙の表示のために、点の間に距離を調節する、面に厚みを持たせるなどしたい

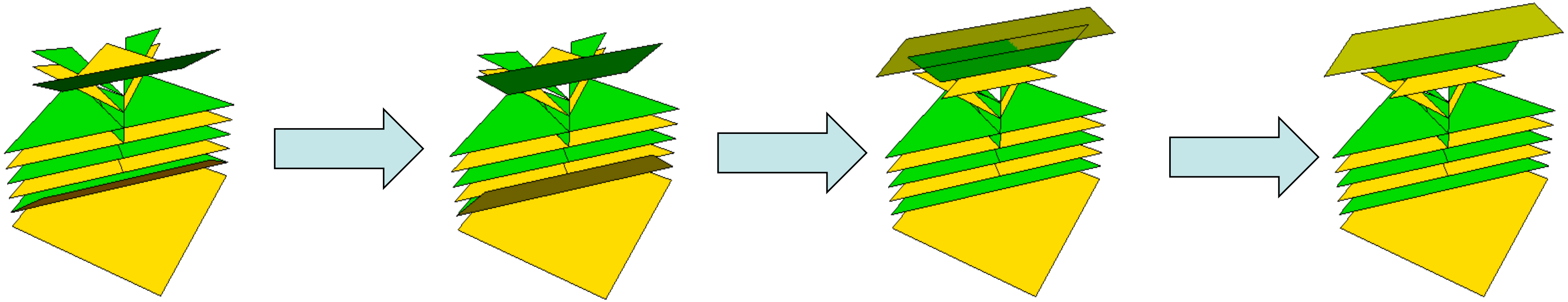


今後の課題

- 重なりが見やすいように蝶番部分を丸めたい



- ムービー時の面の急な移動を無くしたい



References

[1] Pablo Colapinto, VERSOR Spatial Computing with Conformal Geometric Algebra, March 2011

[2] Christian Perwass,Geometric Algebra with Applications in Engineering,Berlin, Germany. c2009 Springer

[3] Computational Origami System Eos

[4] Huzita's Basic Origami Fold in Geometric Algebra

[5]三谷純, 鈴木宏正. "折り紙の構造把握のための形状構築と CG 表示." 情報処理学会論文誌 46.1 (2005): 247-254.