דף תרגילים בנושא פונקציה

שאלה 1

א. נתונה פונקציה (סידרה) $f: D \to R$ המוגדרת בצורה $f(n) = \frac{(-1)^n}{n^2-4}$,
כאשר $D = \{n \in N: n \geq 3\}$.

- מצא את התמונה של f
- בדוק האם f מונוטונית
- בדוק האם f חסומה

ב. נתונה פונקציה $f: D \to R$ המוגדרת בצורה $f(x) = \frac{1}{x-[x]}$.
כאן D תחום הגדרה מקסימלי אפשרי של f על ציר המספרים הממשיים.

- מצא ורשום את D מפורשות
- מצא את התמונה של f
- בדוק האם f חסומה
- בדוק האם f חד-חד-ערכית
- בדוק האם f על
- בדוק האם f מחזורית
- בדוק האם f זוגית או אי-זוגית

ג. נתונה פונקציה $\boldsymbol{f: D \to R}$ המוגדרת בצורה $\boldsymbol{f(x) = ln(2\cos x - 1)}$.
כאן D תחום הגדרה מקסימלי אפשרי של f על ציר המספרים הממשיים.

- מצא ורשום את D מפורשות
- מצא את התמונה של f
- בדוק האם f מחזורית
- בדוק האם f חסומה
- בדוק האם f חד-חד-ערכית
- בדוק האם f על
- בדוק האם f זוגית או אי-זוגית

ד. נתונה פונקציה (סידרה) $f: N \to R$ המוגדרת בצורה $f(n) = \frac{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{n+1}}$.

- בדוק האם f מונוטונית
- בדוק האם f חסומה

ה. בדוק זוגיות / אי זוגיות של הפונקציות הנתונות

- $f(x) = a^x + a^{-x}$ $(a > 0)$
- $f(x) = \frac{\tan x}{x^2+1}$

דף תרגילים בנושא פונקציה

שאלה 2: נתונות פונקציות:

$$h:\mathbb{R}\to(0,\infty),\quad h(x)=2^x \quad , g:(0,\infty)\to\mathbb{R},\quad g(x)=\ln x$$

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=1-\sin x$$

א. מצא נוסחת התאמה, תחום הגדרה ותמונה של הפונקציות הבאות:

1. $2h-f$
2. $\frac{h}{f}$
3. $\frac{f}{h}$
4. $h\cdot f$
5. $h\circ f$
6. $f\circ h$
7. $h\circ g$
8. $g\circ h$
9. $f\circ g$

ב. הסבר מדוע לא קיימת פונקציה $g\circ f$

ג. עבור כל אחת מבין הפונקציות f, g ,h בדוק האם היא הפיכה, ומצא פונקציה הפוכה באם היא קיימת.

שאלה 3:

נתונה פונקציה $f(x)=\frac{\log_2(x+1)}{4^x}$ $f\left(-1,\frac{1}{2}\right)\to\mathbb{R}:$ הפיכה (זה ידוע).

נסמן את הפונקציה ההפוכה של f ב- f^{-1}. חשב את:

א. חשב את $f^{-1}(0)$ ב. הראה כי $f^{-1}(-2)=-\frac{1}{2}$ ג. הראה כי $f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)=1$

שאלה 4:

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות

א. $h(x)=\sqrt{1-x^2}$, $h:[-1,0]\to[0,1]$

ב. $f(x)=x^3$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

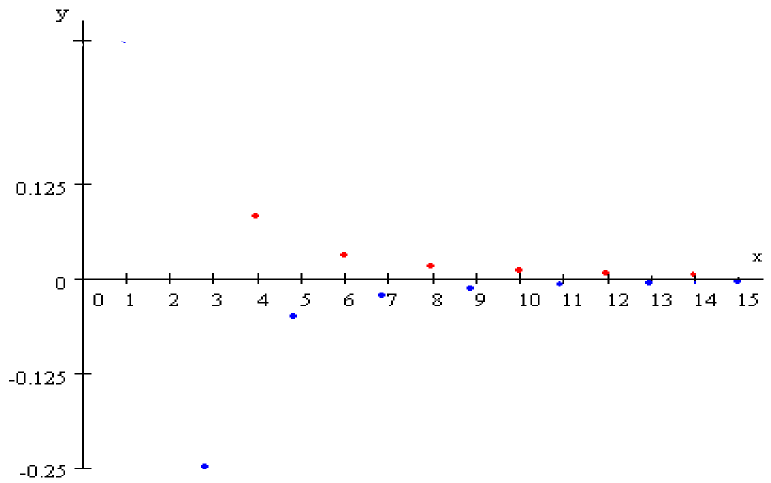
- מצא את הפונקציה ההפוכה.
- רשום את נוסחת התאמה של פונקציה הפוכה, את תחום הגדרתה של פונקציה הפוכה, ואת הטווח של פונקציה הפוכה.

דף תרגילים בנושא פונקציה

פתרונות ותשובות

1א. פתרון:

- התמונה של f : $\operatorname{Im} f=\left\{-\frac{1}{5},-\frac{1}{21},-\frac{1}{45},\ldots\right\}\cup\left\{\ldots,\frac{1}{32},\frac{1}{12},\frac{1}{3}\right\}$
- הגרף של הפונקציה (לא נדרש בשאלה) :



- הפונקציה (הסדרה) אינה מונוטונית, שכן $f(3)=-\frac{1}{5}<f(4)=\frac{1}{12}$,
  אבל $f(4)=\frac{1}{12}>f(5)=-\frac{1}{21}$
- f חסומה , שכן $|f(n)|=\left|\frac{1}{n^2-4}\right|\leq 1$

דף תרגילים בנושא פונקציה

12. פתרון:

- תחום הגדרה של $f(x)=\frac{1}{x-[x]}$

הראינו בהרצאה כי פונקצית הערך השברי $\{x\}=x-[x]$ מתאפסת בכל מספר שלם $k\in Z$,

כמו כן, מתקיים $0\le\{x\}<1$ לכל $x\in R$, לכן תחום הגדרה של f :

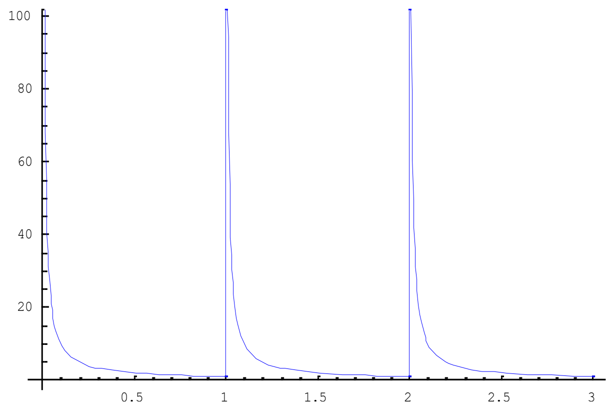
$D=\{x\ |x\in R\wedge x\notin Z\}$

- התמונה של f : $0<\{x\}<1$ לכל

$x\in D \Leftarrow 1<f(x)=\frac{1}{\{x\}}$ לכל $x\in D$

כלומר $\operatorname{Im} f=(1,\infty)$.

- חלק מגרף הפונקציה (לא נדרש בשאלה):



- הפונקציה אינה חסומה כי התמונה שלה $(1,\infty)=\{x\in\mathbb{R}:\ x>1\}$ היא קבוצה לא חסומה מלעיל.

- הפונקציה אינה חח"ע כיוון שקיימים מספרים ממשים $x_1=-\frac{1}{2}\ne\frac{1}{2}=x_2$ עבורם

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{-\frac{1}{2}-\left[-\frac{1}{2}\right]}=\frac{1}{-\frac{1}{2}-(-1)}=2=\frac{1}{\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{2}\right]}=\frac{1}{\frac{1}{2}-0}=f\left(\frac{1}{2}\right)$$

- הפונקציה אינה **על**, שכן $\operatorname{Im} f=(1,\infty)\ne\mathbb{R}$ (התמונה אינה שווה לטווח)

- הפונקציה מחזורית שכן לכל $x\in R$ מתקיים $\{x\}=\{x+1\}$ לכן $f(x)=f(x+1)$.

- הפונקציה אינה זוגית ואינה אי-זוגית כיוון שקיימים מספרים ממשים עבורם

$f(x)\ne f(-x)$ וגם $f(x)\ne -f(-x)$

למשל $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{\frac{1}{3}-\left[\frac{1}{3}\right]}=\frac{1}{\frac{1}{3}-0}=3$ ואילו $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{-\frac{1}{3}-\left[-\frac{1}{3}\right]}=\frac{1}{-\frac{1}{3}-(-1)}=\frac{3}{2}$

דף תרגילים בנושא פונקציה

1ג. פתרון: נתונה פונקציה $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(2\cos x-1)$

<u>תחום הגדרה של $f(x)$:</u>

הפונקציה $\ln$ מוגדרת רק בתחום $(0,\infty)$ ולכן תחום הגדרה של $f(x)$ הינו קבוצה

$$D=\{x\ |2\cos x-1>0\}=\left\{x\ |\cos x>\frac{1}{2}\right\}=\bigcup_{k\in Z}\left(2\pi k-\frac{\pi}{3},2\pi k+\frac{\pi}{3}\right)$$

<u>התמונה של $f(x)$:</u>

לכל $x\in D$ מתקיים $\frac{1}{2}<\cos x\le 1$, ולכן $0<2\cos x-1\le 1$. מתכונות הפונקציה $\ln x$ נובע $-\infty<f(x)=\ln(2\cos x-1)\le\ln 1=0$ כלומר $\operatorname{Im} f=(-\infty,0]$.

<u>מחזוריות של $f(x)$:</u>

הפונקציה $\cos x$ מחזורית עם מחזור $T=2\pi$ ולכן לכל $k\in\mathbb{Z}$ מתקיים

$$f(x+2\pi k)=\ln(2\cos(x+2\pi k)-1)=\ln(2\cos(x)-1)=f(x)$$

לסיכום: מהגדרה נובע שגם $f(x)$ בעלת מחזור $T=2\pi$.

<u>חסימות:</u> הפונקציה אינה חסומה כיוון שהתמונה שלה שיא קבוצה לא חסומה

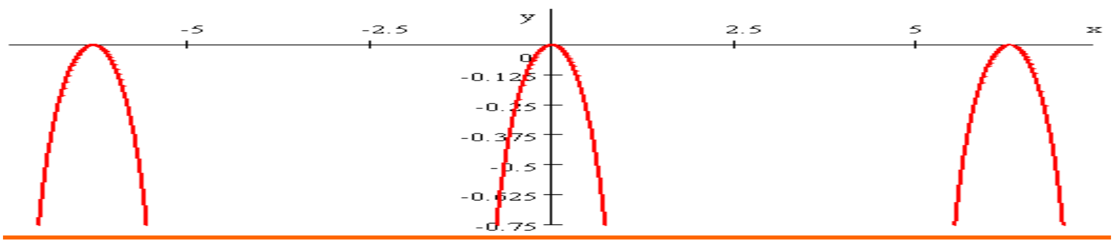
<u>חח"ע של $f(x)$:</u> יהיו $x_1,x_2\in D$ כך ש- $f(x_1)=f(x_2)$ $(*)$.

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\ln(2\cos x_1+1)=\ln(2\cos x_2+1)\Rightarrow 2\cos x_1+1=2\cos x_2+1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\cos x_1=\cos x_2$$

מהשוויון $\cos x_1=\cos x_2$ לא ניתן להסיק כי $x_1=x_2$. אכן, ניקח $x_1=\frac{\pi}{6}\ne-\frac{\pi}{6}=x_2$. בשל הזוגיות שכבר הוכחנו $f(x_1)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=f(x_2)$ ולכן הפונקציה אינה חח"ע לפי ההגדרה.

<u>האם $f(x)$ פונקציה על?</u>

$f(x)$ איננה על ביחס לטווח הנתון R, כיוון שהתמונה שלה $\operatorname{Im} f=(-\infty,0]$ אינה שווה לטווח.



<u>זוגיות / אי-זוגיות של $f(x)$:</u>

הפונקציה $\cos x$ זוגית, כלומר $\cos(-x)=\cos x$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכן גם $f(-x)=\ln(2\cos(-x)-1)=\ln(2\cos x-1)=f(x)$ ואז הפונקציה זוגית לפי ההגדרה

דף תרגילים בנושא פונקציה

1 ד. פתרון: נסמן $n \in N;\ f(n) = b_n = \frac{n-1}{n+1}$

1. נראה כי הסדרה מונוטונית עולה, כלומר לכל מספר טבעי $n \in N$ מתקיים $b_n < b_{n+1}$, או באופן שקול $b_{n+1} - b_n > 0$:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n(n+1)-(n+2)(n-1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

לכל $n \in N$ $\frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$ ולכן מתקיים הדרוש להוכחה.

2. נראה כי הסדרה חסומה :

האיבר הכללי של הסדרה ניתן להצגה שקולה :

$$b_n = \frac{n-1}{n+1} = \frac{(n+1)-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$$

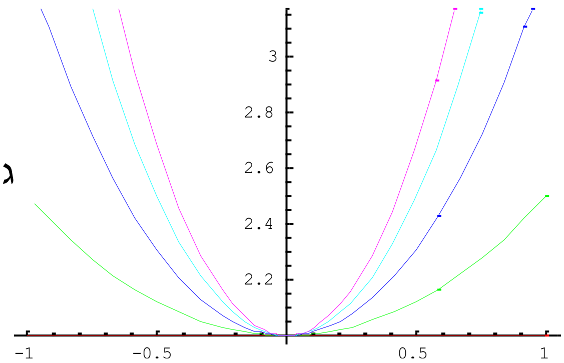
מתקיים : $0 < \frac{2}{n+1} \le 1$ ולכן $0 \le b_n = 1 - \frac{2}{n+1} < 1$ $n \ge 1$ כלומר הסדרה חסומה.

1 ה. פתרון:

3. הפונקציה $(a > 0)$ $f(x) = a^x + a^{-x}$ מוגדרת לכל x ממשי.

מתקיים $f(-x) = a^{(-x)} + a^{-(-x)} = a^{-x} + a^x = f(x)$ ולכן הפונקציה זוגית.

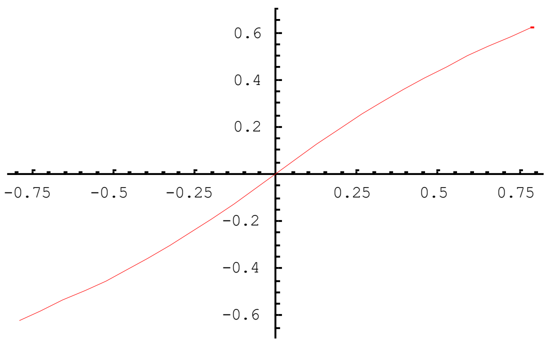
גרפים עבור $a = 1,2,3,4,5$



4. הפונקציה $f(x) = \frac{\tan x}{x^2+1}$ מוגדרת לכל $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ממשי.

מתקיים $f(-x) = \frac{\tan(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-\tan x}{x^2+1} = -f(x)$ ולכן הפונקציה אי- זוגית

(כאן השתמשנו באי-זוגיות הפונקציה $\tan x$) . הפונקציה חח"ע .



דף תרגילים בנושא פונקציה

שאלה 2 – פתרון חלקי:

א. – תשובות:

א.1. $2h-f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad (2h-f)(x)=2\cdot 2^x+\sin x-1$

א.2. $\frac{h}{f}(x)=\frac{2^x}{1-\sin x},\quad \frac{h}{f}:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ כאשר $\mathbb{D}=\left\{x\in\mathbb{R}|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

א.3. $\frac{f}{h}(x)=\frac{1-\sin x}{2^x},\quad \frac{f}{h}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

א.4. $h\cdot f(x)=2^x(1-\sin x),\quad h\cdot f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

א.5. $h\circ f(x)=2^{1-\sin x},\quad h\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

א.6. $f\circ h(x)=1-\sin(2^x),\quad f\circ h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

א.7. $h\circ g(x)=2^{\ln x},\quad h\circ g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

א.8. $g\circ h(x)=\ln(2^x)=x\ln 2,\quad g\circ h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

א.9. $f\circ g(x)=1-\sin(\ln x),\quad f\circ g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

ב. – פתרון:

הרכבת הפונקציות מוגדרת בצורה $g\circ f(x)=g(f(x))$, לכל x מתחום הגדרתת של f

לכן פונקציה g אמורה להיות מוגדרת לכל איבר בתמונה של f.

אבל $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\sin\frac{\pi}{2}=0$ ואילו g אינה מוגדרת בראשית. אכן לביטוי

$"g\circ f\left(\frac{\pi}{2}\right)"="g\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)"="\ln\left(1-\sin\frac{\pi}{2}\right)"="\ln 0"$ אין משמעות (הוא לא מוגדר).

ג. – תשובה:

$h(x)=2^x,\quad h:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ - חח"ע, על ולכן הפיכה, מתקיים

$h^{-1}(x)=\log_2 x,\quad h^{-1}:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

$g(x)=\ln x,\quad g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ - חח"ע, על ולכן הפיכה, מתקיים $g^{-1}(x)=e^x,\quad g^{-1}:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

$f(x)=1-\sin x,\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - לא חח"ע, נימוק: $f(\pi)=1-\sin\pi=1=1-\sin 0=f(0)$, לכן לא הפיכה.

דף תרגילים בנושא פונקציה

שאלה 3 – פתרון

א. $f(x)=\frac{\log_2(x+1)}{4^x}=0 \Leftrightarrow \log_2(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$. מהגדרה של פונקציה הפוכה:
$f^{-1}(0)=0$.

ב. נחשב $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)}{4^{-\frac{1}{2}}}=\frac{-1}{1/\sqrt{4}}=-2$ לכן לפי ההגדרה $f^{-1}(-2)=-\frac{1}{2}$

ג. נחשב $f(1)=\frac{\log_2(2)}{4^1}=\left(\frac{1}{4}\right)$ לכן לפי ההגדרה $f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)=1$

שאלה 4 – פתרון חלקי

א. קיימת פונקציה הפוכה $h^{-1}:[0,1]\to[-1,0],\quad h(x)=-\sqrt{1-x^2}$

ב. קיימת פונקציה הפוכה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sqrt[3]{x}$