תרגיל בית 8

מגיש טל ברוקר

17 במאי 2019

1) נראה כי $Cov\left(\bar{y},\hat{a}\right)=0$:

$$Cov\left(\bar{y},\hat{a}\right)=Cov\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Cov\left(y_i,\frac{\left(x_i-\bar{x}\right)y_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)}\right)=$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\frac{\left(x_i-\bar{x}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)}Var\left(y_i\right)=0$$

2)א)

$$Var\left(\hat{y_i}\right)=Var\left(\hat{a}x_i+\hat{b}\right)=x_i^2Var\left(\hat{a}\right)+Var\left(\hat{b}\right)+2x_iCov\left(\hat{a},\hat{b}\right)=$$
$$=x_i^2\frac{\left(\Delta y\right)^2}{N\cdot Var\left(X\right)}+\frac{\left(\Delta y\right)^2}{N}+\frac{\bar{x}^2\left(\Delta y\right)^2}{N\cdot Var\left(X\right)}+2x_iCov\left(\hat{a},\hat{b}\right)=$$
$$=x_i^2\frac{\left(\Delta y\right)^2}{N\cdot Var\left(X\right)}+\frac{\left(\Delta y\right)^2}{N}+\frac{\bar{x}^2\left(\Delta y\right)^2}{N\cdot Var\left(X\right)}-2x_i\frac{\bar{x}\left(\Delta y\right)^2}{N\cdot Var\left(X\right)}=\frac{\left(\Delta y\right)^2}{N}\left(1+\frac{\left(\bar{x}-x_i\right)^2}{Var\left(X\right)}\right)$$

ב) מכיוון שהערכים $\hat{y_i},\hat{y_j}$נמצאים על אותו קו ישר, נקבל כי $\rho=1$, ולכן נקבל כי

$$Cov\left(\hat{y_i},\hat{y_j}\right)=Var\left(\hat{y_i}\right)Var\left(\hat{y_j}\right)=\frac{\left(\Delta y\right)^4}{N^2}\left(\frac{\left(\bar{x}-x_i\right)^2}{Var\left(X\right)}\right)\left(\frac{\left(\bar{x}-x_i\right)^2}{Var\left(X\right)}\right)$$

ג)נקבל כי השונות של $\hat{y_i}$ מקסימלית כאשר x_i הוא הx הכי רחוק מ$\bar{x}$, כלומר כאשר $\left(x_i-\bar{x}\right)^2$ מקסימלי. זה קורה בגלל שהשונות גדלה ככל שהמרחק של x_i מ-$\bar{x}$גדל.
שונות זו מינימלית כאשר x_i הכי קרוב ל$\bar{x}$, כלומר כאשר $x_i=\bar{x}$. זה קורה מאותו הנימוק עבור הx המקסימלי.
ד)אנחנו נדע כמה גדולה תהיה ההשפעה של x חדש על השונות של $\hat{y}$ששייך לאותו הx.

3) ה) מהסימטריה של y, נצפה כי $\bar{\hat{a}}=1.2,\bar{\hat{b}}=5$. נחשב את התוחלת\ממוצע שלהם:

$$E\left(\hat{a}\right)=1.2,\ E\left(\hat{b}\right)=5$$

ראינו בתרגול, כי

$$Var\left(\hat{a}\right)=\frac{\sigma^2}{N\cdot Var\left(X\right)}, Var\left(\hat{b}\right)=\frac{\sigma^2}{N}\left(1+\frac{\bar{x}^2}{Var\left(x\right)}\right)$$

כאשר σ מייצגת את השונות של שגיאות המדידה. במקרה שלנו, $\sigma=1$, $N=50$.
נזכור שבהתפלגות אחידה מתקבל $Var\left(x\right)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{100}{12}$
נקבל:

$$Var\left(\hat{a}\right)=\frac{1}{\frac{100}{12}50}=0.0024, Var\left(\hat{b}\right)=\frac{1}{50}\left(1+\frac{4}{\frac{100}{12}}\right)=0.0296$$