תרגיל בית 10 בסטטיסטיקה והסתברות

מגיש טל ברוקר

12 ביוני 2019

(1

א) נזכור שטעות מסוג ראשון היא כאשר זכאי יוצא אשם, וטעות מסוג שני היא כאשר אשם יוצא זכאי.
במידה ונניח כי $c = 1$ יצא:
טעות מסוג ראשון:

$$P\left(X \geq 1\right) = 1 - e^{-0.0123} \approx 0.012$$

טעות מסוג שני:

$$p\left(Y \leq 0\right) = e^{-2.2} \approx 0.11$$

ניצור נוסחה כללית עבור כל c:

$$P\left(X \geq C\right) = 1 - \sum_{i=0}^{c} \frac{0.0123^i e^{-0.0123}}{i!} = P\left(\text{first type mistake}|c\right)$$

$$P\left(Y \leq C\right) = \sum_{i=0}^{c} \frac{2.2^i e^{-2.2}}{i!} = P\left(\text{second type mistake}|c\right)$$

נחשב את הסיכוי לטעויות מסוג ראשון ושני עבור ה־c הנתונים ונקבל:

$$P\left(\text{first type mistake}|c=2\right) = 1 - \sum_{i=0}^{2} \frac{0.0123^i e^{-0.0123}}{i!} \approx 3.1 \cdot 10^{-7}$$

$$P\left(\text{first type mistake}|c=3\right) = 1 - \sum_{i=0}^{3} \frac{0.0123^i e^{-0.0123}}{i!} \approx 9.4 \cdot 10^{-10}$$

$$P\left(\text{first type mistake}|c=4\right)=1-\sum_{i=0}^{4}\frac{0.0123^{i}e^{-0.0123}}{i!}\approx 2.3\cdot 10^{-12}$$

$$P\left(\text{second type mistake}|c=2\right)=\sum_{i=0}^{2}\frac{2.2^{i}e^{-2.2}}{i!}=0.62$$

$$P\left(\text{second type mistake}|c=3\right)=\sum_{i=0}^{2}\frac{2.2^{i}e^{-2.2}}{i!}=0.82$$

$$P\left(\text{second type mistake}|c=4\right)=\sum_{i=0}^{2}\frac{2.2^{i}e^{-2.2}}{i!}=0.92$$

ב) כדי לא לשים אשם בכלא, אני אעדיף קריטריון שלא נמוך מאוד אך עדיין יעיל. לכן, אני אבחר בקריטריון $c=2$. עבור קריטריון זה, אמנם לא ייתפסו הרבה פושעים, אך מספר החפים מפשע שיוכרזו אשמים יהיה אפסי.

2) נשים לב כי ההתפלגות היא בעצם התפלגות בינומית, ולכן עבור קובייה A מתקיים

$$P\left(green\ side|cube\ A\right)=\frac{1}{3}$$

$$P\left(green\ side|cube\ A\right)=\binom{n}{k}p^{k}\left(1-p\right)^{n-k}=\binom{2}{1}\frac{1}{3^{1}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2-1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

$$P\left(2green\ side|cube\ A\right)=\frac{1}{9}$$

ועבור קובייה מסוג B:

$$P\left(green\ side|cube\ B\right)=\frac{2}{3}$$

$$P\left(green\ side|cube\ B\right)=\binom{n}{k}p^{k}\left(1-p\right)^{n-k}=\binom{2}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2-1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

$$P\left(2green\ side|cube\ B\right)=\frac{4}{9}$$

לכן עבור R_1:

$$P\left(first\ type\ mistake\right)=P\left(not\ one\ green\ side|cube\ B\right)$$
$$=P\left(2yellow\ side|cube\ B\right)=\frac{1}{9}$$

$$P\left(second\ type\ mistake\right)=P\left(at\ least\ one\ green\ side|cube\ A\right)$$
$$=P\left(2yellow\ side|cube\ B\right)=P\left(green\ side|cube\ A\right)+P\left(2green\ side|cube\ A\right)=\frac{5}{9}$$

ועבור R_2:

$$P\left(first\ type\ mistake\right)=P\left(not\ 2\ green\ side|cube\ B\right)=$$
$$P\left(2yellow\ side|cube\ B\right)+P\left(green\ side|cube\ B\right)=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

$$P\left(second\ type\ mistake\right)=P\left(2\ green\ side|cube\ A\right)=\frac{1}{9}$$

3)

א)

ממוצע התצפיות מתפלג נורמלית ממשפט הגבול המרכזי.

ב)

גם Z מתפלג נורמלית מכיוון ש $Z=\bar{X}+Constant$. בנוסף $Z=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$

ג)

עבור רמת מובהקות של $\alpha=5\%$ ערך הסף של cעבורו נוכל לדחות את השערת האפס הוא

$$P\left(\bar{X}\leq C|H_0\right)=P\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{N}}\leq\frac{C-\mu_0}{\sigma/\sqrt{N}}\right)=0.05$$

לכן אנו צריכים ש

$$\int_{-\infty}^{\frac{C-\mu_0}{\sigma/\sqrt{N}}} f\left(z\right)dz = \int_{-\infty}^{\frac{C-\mu_0}{\sigma/\sqrt{N}}} f\left(z\right)dz = 0.05$$

נקבל כי ערך זה הוא 1.645 (כלומר $\frac{C-\mu_0}{\sigma/\sqrt{N}} = 1.645$) ולכן

$$C = \mu_0 - 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

ד)

בעצם נשאלת השאלה מהו $P\left(X \le C|H_1, C = \mu_0 - 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)$. נחשב:

$$P\left(X \le C|H_1, C = \mu_0 - 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) = P\left(X \le \mu_0 - 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{N}}|H_1\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{N}} \le \frac{\mu_0 - \mu_1 - 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}{\sigma/\sqrt{N}} = \frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{N}} - 1.645|H_1\right) = \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{N}} - 1.645\right)\left(= \int_{\infty}^{\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{N}}-1.645} f\right.$$

4)