תרגיל בית 9 סטטיסטיקה והסתברות

מגיש טל ברוקר

31 במאי 2019

1)ב

$$Cov\left(\overrightarrow{\theta}\right) = \left(M^T C^{-1} M\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta\hat{a}^2 & Cov\left[\hat{a},\hat{b}\right] \\ Cov\left[\hat{a},\hat{b}\right] & \Delta\hat{b}^2 \end{pmatrix}$$

ועבור שגיאות והתאמה של קו ישר נקבל:=

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma^2} \end{pmatrix}, M^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

נציב בנוסחה ונקבל

$$Cov\left(\overrightarrow{\theta}\right) = \left(\frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix} \sum 1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix} n & n\bar{x} \\ n\bar{x} & n\overline{x^2} \end{pmatrix}\right)^{-1} = \left(\frac{n}{\sigma^2}\begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{x^2} \end{pmatrix}\right)^{-1}$$

נחשב הופכי:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \bar{x} & 1 & 0 \\ \bar{x} & \overline{x^2} & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \bar{x} & 1 & 0 \\ 0 & \overline{x^2} - \bar{x}^2 & -\bar{x} & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \bar{x} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\bar{x}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2} & \frac{1}{\overline{x^2}-\bar{x}^2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1+\frac{\bar{x}^2}{\overline{x^2}-\bar{x}^2} & -\frac{\bar{x}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2} \\ 0 & 1 & -\frac{\bar{x}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2} & \frac{1}{\overline{x^2}-\bar{x}^2} \end{array}\right)$$

וקיבלנו כי:

$$Cov\left(\overrightarrow{\theta}\right) = \frac{\sigma^2}{n}\begin{pmatrix} 1+\frac{\bar{x}^2}{\overline{x^2}-\bar{x}^2} & \frac{\bar{x}}{\bar{x}^2-\overline{x^2}} \\ \frac{\bar{x}}{\bar{x}^2-\overline{x^2}} & \frac{1}{\overline{x^2}-\bar{x}^2} \end{pmatrix}$$

נשווה על ידי הנוסחה ל$Cov\left(\overrightarrow{\theta}\right)$ שהבאתי בהתחלה ונקבל שהסדר של $\hat{a},\hat{b}$ הפוך מבתרגיל. אחרי שנסדר אותו נקבל:

$$\Delta\hat{a}^2=\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{1}{\bar{x^2}-\bar{x}^2}\right)$$

$$\Delta\hat{b}^2=\frac{\sigma^2}{n}\left(1+\frac{\bar{x}^2}{\bar{x^2}-\bar{x}^2}\right)$$

כנדרש.

2)

$$M=\begin{pmatrix}1 & x_1\\ 1 & \vdots\\ 1 & x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\\ 1 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix},C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma^2} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1.78 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.64 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.44\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{y}=\begin{pmatrix}0.92\\ 4.15\\ 9.72\\ 14.46\\ 17.26\\ 21.90\end{pmatrix}$$

3) א) במקרה הזה נקבל שעבור כל מדידה $y=ax_i^2+bx_i+c$ מתקבל:

$$M=\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n^2 & x_n^2\end{pmatrix},C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_i^2}\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 58 & 3364\\ 1 & 210 & 44100\\ 1 & 202 & 20804\\ 1 & 198 & 39204\\ 1 & 158 & 24964\end{pmatrix},C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{225} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{729} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{196} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{900} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{256}\end{pmatrix},\overrightarrow{y}=\begin{pmatrix}173\\ 479\\ 504\\ 510\\ 416\end{pmatrix}$$

ב)נחשב ונקבל כי $\hat{a}\approx 72.6,\hat{b}\approx 1.6,\hat{c}\approx 0.00225$

ג)

$$Cov\left(\overrightarrow{\theta}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc} 1517.58 & -2.16 & 0.07 \\ 2.16 & 0.39 & 0.001 \\ 0.07 & 0.001 & 4.2\cdot10^{-6} \end{array}\right)$$

ד)נמצא את השגיאות על המקדמים מתוך $Cov\left(\overrightarrow{\theta}\right)$

$$\Delta a^2 \approx 1517.58, \Delta b^2 \approx 0.39, \Delta c^2 \approx 4.2\cdot10^{-6} \to \Delta a \approx 39, \Delta b \approx 0.62, \Delta c \approx 0.002$$

$$Cov\left(\hat{a},\hat{b}\right) \approx -2.16, Cov\left(\hat{a},\hat{c}\right) \approx 0.07$$