

## מח"ן 13

א. בדומה לערימה בינארית, העץ של הערימה ה-D-ית מלא לחלוטין בכל רמותיו פרט אולי לאחרונה, המלאה משמאל ועד לנקודה מסויימת. לפיכך, נוכל לייצג אותו כמערך בדרך דומה לערימה בינארית, כך שהשורש מאוחסן בתא הראשון, ולאחריו האיברים של הרמה הבאה בעץ, משמאל לימין, עד הרמה האחרונה, בה כל העלים הקיימים מאוחסנים גם הם משמאל לימין.

על מנת להפוך את המערך חזרה לערימה ה-D-ית נבצע פעולה הפוכה, ונשתמש בערך בתא הראשון כשורש, בערכים בתא השני עד התא  $1+D$  כבניו, וכן הלאה, עד שנגיע לאיברים האחרונים, שהם העלים, ואותם נשבץ משמאל לימין כילדיהם של הרמה הלפני האחרונה, עד תום. הכללת החישובים הנדרשים לפעולות על הערימה ה-d-ית על סמך ערימה בינארית (לפי פרק 6.1 בספר) תתבצע כדלהלן (הצבת  $d=2$  תוכיח את נכונות החישוב לפי החישובים לערימה בינארית):

- מציאת אינדקס האב של האיבר ה- $i$ :  $\left\lfloor \frac{i-1}{d} \right\rfloor$
- מציאת האינדקס של הבן הח-י ( $n=1,2,3,\dots$ ) של אינדקס  $i$ :  $((di) + n)$
- האינדקס הראשון של הרמה ה- $i$  (כאשר השורש הוא רמה 0):  $\frac{d^i-1}{d-1}$
- האינדקס הראשון של העלים:  $\left\lfloor \frac{n+1}{d} \right\rfloor$
- גובה הערימה:  $\lceil \log_d n \rceil$  (ראה סעיף ב')

ב. באופן דומה לפתרון בעיה 2-6.1 עבור חישוב גובה ערימה בינארית בת  $n$  איברים, נבצע חישוב דומה עבור ערימה ה-D-ית.

יהיה  $h$  גובה הערימה. מאחר והעץ המייצג את הערימה הוא עץ ה-D-י מלא לחלוטין עד אולי הרמה  $h-1$ , ולכל איבר בו יש  $D$  בנים, וברמה האחרונה יהיו  $k$  עלים. לפיכך, כמות האיברים בעץ תהיה שווה ל-  

$$n = d^{h-1} + k$$

מכך נובע שהגובה, כלומר, אורך המסלול הפשוט הארוך ביותר מהשורש לעלה כלשהו יהיה -

$$n = d^{h-1} + k \rightarrow h = \lceil \log_d n \rceil$$

כלומר, הגובה של ערימה ה-d-ית בת  $n$  איברים הוא  $\lceil \log_d n \rceil$ .

### המטלה התכנותית – שפת python

כעת, כהקדמה לסעיפים ג' – ו', נסביר על המימוש הפנימי של הערימה ה-d-ית והמחלקות הנוספות בפתרון שלנו –

הערימה ה-d-ית מיוצגת על ידי המחלקה DHeap, שיורשת מהמחלקה list, ומתאחלת על ידי מערך של איברים והערך של d לערימה זו. בהתאם, מחלקת האב מאפשרת לקבל את כמות האיברים במערך (גודל הערימה) ואת היכולת לגשת ולקבוע ערכים לפי האינדקס שלהם. בנוסף, המחלקה עצמה מייצאת את התכונות heap\_size (גודל הערימה המשתנה), array\_length (גודל המערך ההתחלתי), height (גובה הערימה, חישובו מפורט בסעיף ב'). המחלקה מממשת פעולות פנימיות נפוצות בערימות, למשל SWAP בין ערכים, או הסרת הערך האחרון במערך. כמו כן, המחלקה מייצאת חישובים נפוצים, כמו שפירטנו בסעיף א'. לבסוף, מימשנו פעולות להדפסה למסך – בייצוג של רשימה (רשימה של רשימות המייצגות כל רמה בעץ), ובאילוסטרציה בתור עץ. בנוסף למחלקה של הערימה ה-d-ית, מימשנו מחלקה נוספת בשם GeneralAlgorithms שבה מימשנו אלגוריתמים נוספים הדרושים לפונקציונליות התכנית, למשל – BUILD-MAX-HEAP ו-MAX-HEAPIFY. בנספח א' למסמך צורפו כל המימושים בפסאודו-קוד לשגרות השונות שנדרשו לפתרון התרגיל.

מאחר ש MAX-HEAPIFY מרכזי לפונקציונליות של חלק גדול משאר הקוד, ננתח ראשית את הסיבוכיות שלו כדי להקל על הסעיפים הבאים –

לפי פרק 6.2 והפסאודו-קוד בנספח א' ניתן לראות שזמן הריצה של הפעולות הנדרשות לשגרה MAX-HEAPIFY הוא  $\Theta(1) * d$  בתחילת השגרה על מנת לקבוע את היחס בין השורש של תת העץ הנבחר וכל אחד מ-d בניו, ולאחר מכן זמן הריצה של MAX-HEAPIFY על כל תת-עץ המתחיל בכל אחד מ-d בניו של השורש. נוכל להראות כי זמן הריצה יהיה תלוי בגובה הערימה ה-d-ית, שהוא, כפי שהדגמנו בסעיף ב',  $\lceil \log_d n \rceil$ , מכיוון שהשגרה תרוץ רקורסיבית במקרה הכי גרוע על אורכו של אחד מ-d תתי העצים של השורש, אך ברמה האסימפטוטית זה שקול לסיבוכיות של  $\Theta(\lg(n))$ :

גודלו של כל אחד מתתי-העצים האלו, במקרה הגרוע ביותר (תתי עצים של שורש הערימה) הוא qn, כאשר  $q < 1$  הוא נתח כלשהו של האיברים בערימה (מאחר וגודלה של כל הערימה הוא n, וזהו רק תת-עץ, כלומר חלק שלה). לפיכך, ניתן לתאר את זמן הריצה של השגרה על ידי נוסחאת הנסיגה הכללית –

$$T(n) \leq T(qn) + \Theta(1)$$

לפי מקרה 2 של נוסחאת האב (משפט 4.1) –

$$\begin{aligned} a = 1, b = \frac{1}{q}, f(n) = \Theta(1) &\rightarrow \\ f(n) = \Theta\left(n^{\log_{\frac{1}{q}} 1}\right) = \Theta(n^0) = \Theta(1) &\rightarrow \\ T(n) = \Theta(n^0 * \lg(n)) = \Theta(\lg(n)) \end{aligned}$$

כלומר, זמן הריצה של השגרה הוא  $\log_d n$  בסיבוכיות האסימפטוטית שלה הוא  $\Theta(\lg(n))$ .

ג. בפתרון מימשנו את פעולה **EXTRACT-MAX(A)** על ערימת מקסימום d-ית (השגרה  $extract\_max(heap)$ ).

**הסבר על האלגוריתם** (ראו פסאודו-קוד בנספח א'):

האלגוריתם יגדיר את האינדקס של התא עם הערך המקסימלי (במקרה שלנו הערימה היא ערימת מקסימום, ולכן האיבר המקסימלי הוא השורש).  
האלגוריתם יקרא לשגרה **EXTRACT** עם האינדקס של השורש כפרמטר וישמור את הפלט למשתנה. לבסוף נחזיר את ערך המשתנה עם הפלט של **EXTRACT** על האיבר המקסימלי.

**סיבוכיות זמן ריצה:**

האלגוריתם עושה ראשית מספר פעולות בעלות זמן ריצה קבוע (הגדרת משתנים, השמת ערכים) שזמן הריצה שלהם הוא בסיבוכיות של  $\Theta(1)$ ,  
ולבסוף קורא לשגרה **EXTRACT** שבעצמה עושה מספר פעולות בעלות זמן ריצה קבוע ואז קוראת לשגרה **MAX-HEAPIFY** שרצה על כל גובה הערימה  $\lceil \log_d n \rceil$  (השגרה **MAX-HEAPIFY** רצה רקורסיבית על כל העץ החל מהשורש החדש לאחר ההוצאה ועד לעלים) בסיבוכיות של  $\Theta(\lg(n))$ . כלומר, סיבוכיות זמן הריצה של השגרה כולה היא הסיבוכיות של הפעולה הכי כבדה (**MAX-HEAPIFY**) -  $\Theta(\lg(n))$ .

ד. בפתרון מימשנו את פעולה **INSERT(A, v)** על ערימת מקסימום d-ית (השגרה  $insert(heap, value)$ ).

**הסבר על האלגוריתם** (ראו פסאודו-קוד בנספח א'):

האלגוריתם יכין את הערימה לקבלת איבר חדש על ידי הגדלת המשתנה של גודל הערימה ב-1, בכך נוצר "תא אחרון" חדש במערך המייצג.  
לאחר מכן, נגדיר את ערכו של התא האחרון החדש הזה לערך שקיבלנו כקלט לשגרה.  
לבסוף, נקרא לשגרה **INCREASE-KEY** על מנת לפעפע את האיבר החדש למקומו הנכון.

**סיבוכיות זמן ריצה:**

האלגוריתם עושה ראשית מספר פעולות בעלות זמן ריצה קבוע (הגדרת משתנים, השמת ערכים) שזמן הריצה שלהם הוא בסיבוכיות של  $\Theta(1)$ ,  
ולבסוף קורא לשגרה **INCREASE-KEY** שרצה במקרה הכי גרוע לאורך כל הגובה העץ  $\lceil \log_d n \rceil$  (מהעלה לשורש) בסיבוכיות של  $\Theta(\lg(n))$ . כלומר, סיבוכיות זמן הריצה של השגרה כולה היא הסיבוכיות של הפעולה הכי כבדה (**INCREASE-KEY**) -  $\Theta(\lg(n))$ .

ה. בפתרון מימשנו את פעולה  $\text{INCREASE-KEY}(A,i,k)$  על ערימת מקסימום d-ית (השגרה  $\text{increase\_key}(\text{heap}, \text{index\_to\_increase}, \text{new\_value})$ ).

**הסבר על האלגוריתם** (ראו פסאודו-קוד בנספח א'):

האלגוריתם תחילה בודק מקרי קצה –

אם האינדקס שמנסים להגדיל גדול מגודל הערימה, הרי זה מצב של overflow ולכן נתריע על שגיאה;  
אם האינדקס לא תקין או שהערימה ריקה, אין אפשרות לעשות הגדלת איבר, ולכן נתריע על שגיאה;  
אם הערך באינדקס שאותו מנסים להגדיל גדול מהערך החדש – זהו מקרה ריק ולכן נסיים את השגרה.  
אם הכל כשורה –

כל עוד לא הגענו לאינדקס השורש (כלומר, העץ מסודר והגענו לתנאי העצירה), נבצע בלולאה:  
ניצור משתנה חדש עם ערך האינדקס של האבא של האינדקס הנוכחי, ונשווה בין הערכים שלהם.  
אם הבן יותר גדול מהאבא- ערימת המקסימום נשברה ולכן נעביר את הבן מעל לאבא, נגדיר את  
האינדקס הנוכחי להיות האינדקס של האבא ונמשיך בלולאה.  
אחרת – הערימה מסודרת כראוי ונוכל להפסיק בריצה.

**סיבוכיות זמן ריצה:**

האלגוריתם עושה ראשית מספר פעולות בעלות זמן ריצה קבוע (השוואות, הגדרת משתנים, השמת ערכים) שזמן הריצה שלהם הוא בסיבוכיות של  $\Theta(1)$ ,  
ולבסוף מפעפע את הערך החדש למקומו הנכון בפעולות בעלות זמן ריצה קבוע, שבמקרה הכי גרוע עוברות את כל גובה העץ  $\lceil \log_d n \rceil$  מלמטה למעלה עד השורש, בסיבוכיות של  $\Theta(\lg(n))$ . כלומר, סיבוכיות זמן הריצה של השגרה כולה היא  $\Theta(\lg(n))$ .

ו. בפתרון מימשנו את פעולה  $\text{EXTRACT}(A,i)$  על ערימת מקסימום d-ית (השגרה  $\text{extract}(\text{heap}, \text{index\_to\_remove})$ ).

**הסבר על האלגוריתם** (ראו פסאודו-קוד בנספח א'):

האלגוריתם תחילה בודק מקרי קצה –

אם האינדקס שמנסים להוציא גדול מגודל הערימה, הרי זה מצב של overflow ולכן נתריע על שגיאה;  
אם האינדקס לא תקין או שהערימה ריקה, אין אפשרות לעשות הוצאת איבר, ולכן נתריע על שגיאה;  
אם בערימה יש רק איבר אחד, הרי הוא בהכרח האיבר שמנסים להוציא (אחרת היינו מקבלים שגיאה קודם), ולכן נוציא אותו ונחסוך פעולות מיותרות נוספות.  
אם הכל כשורה –

האלגוריתם יחליף בין האיבר שאנו מנסים להוציא לבין האיבר האחרון בערימה (כדי שיהיה יותר נוח להוציא אותו), ויקרא לשגרת-עזר שמוציאה את האיבר האחרון מהערימה (בודקת את ערכו ואז מקטינה את המשתנה של גודל הערימה ב-1). את ערך האיבר שהוצא נשמור במשתנה חדש. מאחר והעברנו את ערך העלה האחרון לאיבר כלשהו, כלומר ככל הנראה שברנו את ערימת המקסימום - נקרא לשגרה MAX-HEAPIFY עם האינדקס של האיבר הנשלף כפרמטר על מנת לסדר את תת העץ שלו לערימת מקסימום. לבסוף נחזיר את המשתנה עם הערך שהוצא.

**סיבוכיות זמן ריצה:**

האלגוריתם עושה ראשית מספר פעולות בעלות זמן ריצה קבוע (השוואות, הגדרת משתנים, השמת ערכים) שזמן הריצה שלהם הוא בסיבוכיות של  $\Theta(1)$ ,  
ולבסוף קורא לשגרה MAX-HEAPIFY שרצה, במקרה הכי גרוע (מחיקת השורש), על כל גובה הערימה  $\lceil \log_d n \rceil$  (השגרה MAX-HEAPIFY רצה רקורסיבית על כל העץ החל מהשורש החדש לאחר המחיקה) בסיבוכיות של  $\Theta(\lg(n))$ . כלומר, סיבוכיות זמן הריצה של השגרה כולה היא הסיבוכיות של הפעולה הכי כבדה (MAX-HEAPIFY) -  $\Theta(\lg(n))$ .

## נספח א' – מימושי הפעולות בפתרון

השגרה	סיבוכיות זמן ריצה	המימוש	הערות
SWAP	$\Theta(1)$ (Const. time)	SWAP(A, i, j): temp = A[i] A[i] = A[j] A[j] = temp	פונקציית עזר
MAX-HEAPIFY	$(\lfloor \log_d n \rfloor)$ $= O(\lg(n))$ (recursively goes over the sub-heap of largest child node out of d children, which in the worst case is the entire height of the heap)	MAX-HEAPIFY(A, i): Largest_index = i For child from A.nth_child_index(i, 1) to A.nth_child_index(i, d): If child < A.HEAP_SIZE and A[child] > A[Largest_index]: Largest_index = child If Largest_index != i: SWAP(A, i, Largest_index) MAX-HEAPIFY(A, Largest_index)	בדומה למימוש המוצג בפרק 6.2
BUILD-MAX-HEAP	$(\lfloor (n+1)/d \rfloor * \log_d(n))$ $= O(n * \lg(n))$ (calls MAX-HEAPIFY for each node of the heap that isn't a leaf)	BUILD-MAX-HEAP(A): For i from A.get_first_leaf_index() downto 0: MAX-HEAPIFY(A, i)	בדומה למימוש המוצג בפרק 6.3, המימוש של חישוב העזר מוגדר בסעיף א'
POP-LAST	$\Theta(1)$ (Const. time)	POP-LAST(A): Last_index = A.HEAP_SIZE - 1 Popped_node = A[last_index] A.HEAP_SIZE = A.HEAP_SIZE - 1 Return Popped_node	פונקציית עזר
EXTRACT	$(\Theta(1) + \lfloor \log_d n \rfloor)$ $= O(\lg(n))$ (Const. time + MAX-HEAPIFY)	EXTRACT (A, i): If A.HEAP_SIZE < i: Error "heap overflow" If i < 0 or A.HEAP_SIZE < 1: Error "heap underflow" If A.HEAP_SIZE == 1: Return POP-LAST(A) SWAP(i, A.HEAP_SIZE - 1) Popped_node = POP-LAST(A) MAX-HEAPIFY(A, i) Return Popped_node	מקרה כללי של המימוש של EXTRACT-MAX המוצג בפרק 6.5
EXTRACT-MAX	$(\Theta(1) + \lfloor \log_d n \rfloor)$ $= O(\lg(n))$ (Const. time + MAX-HEAPIFY)	EXTRACT-MAX(A): Max_index = 0 Popped_node = EXTRACT(A, Max_index) Return Popped_node	מקרה פרטי של EXTRACT לשורש (האיבר המקסימלי בערימת מקסימום)

<p>בדומה למימוש המוצג בפרק 6.5</p>	<pre> INCREASE-KEY(A, i, v):   If A.HEAP_SIZE &lt; i:     Error "Heap overflow."   If i &lt; 0 or A.HEAP_SIZE &lt; 1:     Error "Heap underflow."   If A[i] &gt; v:     Return # New key is smaller than current key   else:     A[i] = v     While i &gt; 0:       Parent_index = A.get_parent_index(i)       If A[i] &gt; A[Parent_index]:         SWAP(i, Parent_index)         i = Parent_index       Else:         Return         </pre>	<p> <math>(\Theta(1) + \lfloor \log_d n \rfloor)</math>  <math>= O(\lg(n))</math>            (Swaps the value to his right place, which in the worst case is the entire height of the heap)         </p>	<p>INCREASE-KEY</p>
<p>בדומה למימוש המוצג בפרק 6.5</p>	<pre> INSERT(A, v):   A.HEAP_SIZE += 1   A[A.HEAP_SIZE] = v   INCREASE-KEY(A, A.HEAP_SIZE, v)         </pre>	<p> <math>(\Theta(1) + \lfloor \log_d n \rfloor)</math>  <math>= O(\lg(n))</math>            (Const. time + INCREASE-KEY)         </p>	<p>INSERT</p>

סטודנט א': טל דרוז'נין, 211768379  
סטודנט ב': שלי גולצמן, 211371596

### **נספח ב' – דוגמא לשימוש בממשק המשתמש**

מצורף פלט לדוגמא של הרצת התכנית ושימוש בממשק. הקלטים וסדר הפעולות של הדוגמא הנ"ל כלולים, בין היתר, בקובץ הבדיקות של התכנה.

סטודנט א': טל דרוז'נין, 211768379  
סטודנט ב': שלי גולצמן, 211371596

בכללי TODO:

- להוסיף את הפלט של ההרצה לדוגמא תחת נספח ב' – TODO שלי
- לתקף את הפסאודו קוד לפי הגרסא הסופית של הקוד – TODO שלי
- לוודא שהמסמך הנלווה כתוב באופן שבו הוא יכול לשמש את המנחה לבדיקה ללא צורך בהרצה (כך שכביכול ההרצה היא רק לבדיקה שמה שכתוב בקובץ המלווה הוא אכן נכון) – טל + שלי