עבודה 4 בלוגיקה

שם: טל זוקנוק

ת.ז: 215681107

① $P(n): \forall n((n^3+5n)\%6=0)$

$P(0)=0^3+0=0,\ 0\%6=0\ \checkmark$ // בסיס האינדוקציה

$P(k)=(k^3+5k)\%6=0$ // הנחת האינדוקציה

$P(k+1)=\left[(k+1)^3+5(k+1)\right]$ // שלב האינדוקציה

$=k^3+3k^2+3k+1+5k+5$

$=(k^3+5k)+3k^2+3k+6$

$=(k^3+5k)+6(k^2+k+1)$ // מסקנת אינדוקציה

לפי הנחת האינדוקציה מתחלק ב6 ללא שארית

כל מספר כפול 6 הוא גם מתחלק ב-6 ללא שארית

② $P(n)=\forall_{n\text{ טבעי}}((9^n-5^n)\%14=0)$

$P(0)=9^0-5^0=0\%14=0\ \checkmark$ // בסיס אינדוקציה

$P(k)=9^k-5^k\%14=0$ // הנחת אינדוקציה

$P(k+2)=9^{k+2}-5^{k+2}$

$=81\cdot 9^k-25\cdot 5^k$

$=81\cdot 9^k-25\cdot 5^k+81\cdot 5^k-81\cdot 5^k$ // הוספה וחיסור שלא משנה את הביטוי

$=81(9^k-5^k)+5^k(81-25)$ // הוצאת גורם משותף

$=81(9^k-5^k)+(5^k\cdot 56)$

$(9^k-5^k)\%14=0\ \checkmark$ $\quad 56\%14=0\ \checkmark$

(לפי הנחת האינדוקציה)

* אם מספר כפול מכפלה של 14, המספר כולו מתחלק ב-14 ללא שארית

③ $P(n \geq 1) = \forall_{n\geq 1} \left(1+4+7+\ldots+(3n-2)\right) = \frac{n(3n-1)}{2}$

$P(1) = \frac{1(3\cdot 1-1)}{2} = 1$ // בסיס אינדוקציה

$P(k) = \frac{k(3k-1)}{2} = 1+4+7+\ldots+(3k-2)$ // הנחת אינדוקציה

$P(k+1) = \overset{②}{\frac{(k+1)(3k+3-1)}{2}} = \overset{①}{P(k)+(3k+4)}$ // שלב אינדו

$= \frac{k(3k-1)}{2} + (3k+1) = \frac{k(3k-1)+2(3k+1)}{2}$

$= \frac{3k^2-k+6k+2}{2} = \boxed{\frac{3k^2+5k+2}{2}}$ ①

② $\frac{3k^2+2k+3k+2}{2} = \boxed{\frac{3k^2+5k+2}{2}}$

צד ימין
וצד שמאל
של $P(k+1)$
שווים
וגם בסיס
והנחת
האינדוקציה שווים

④ $P(n\geq 1) = \forall_{n\geq 1}\left(1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \dots + n\cdot n! = (n+1)! - 1\right)$

$P(1) = (1+1)! - 1 = 1 = 1\cdot 1!$ ✓ // בסיס אינדוקציה

$P(k) = (k+1)! - 1$ // הנחת אינדוקציה

$P(k+1) = P(k) + (k+1)\cdot(k+1)!$ ① // שלב אינדוקציה

② $\underbrace{(k+1+1)! - 1 = (k+2)! - 1 = (k+1)!\cdot(k+2) - 1}$

① $(k+1)! - 1 + (k+1)\cdot(k+1)!$

$= (k+1)!\cdot(1+k+1) - 1 = \overbrace{(k+1)!\cdot(k+2) - 1}$

שניהם שווים, בסיס האינדוקציה נכון

⑤ $P(n\geq 7) = \forall_{n\geq 7}\left(n! > 3^n\right)$

$P(7) = 7! = 5040 > 3^7 = 2187$ ✓ // בסיס האינדוקציה

$P(k) = k! > 3^k$ // הנחת אינדוקציה

$P(k+1) = (k+1)! > 3^{k+1}$ // שלב אינדוקציה

$= k!\cdot(k+1) > 3^k + 3$

$k+1 \geq 8$

$(k+1)$ גדול מ-3 עם $k!$ לעומת חיבור של 3 ל-3^k מה שמבטיח את האינדוקציה

$$⑥\ P(n\geq 1) = \forall_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n} k(2k-1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}\right)$$

$$P(1): \sum_{1}^{1} 1(2\cdot 1-1) = 1 = \frac{1(1+1)(4\cdot 1-1)}{6}$$ // בסיס האינדוקציה

$$p(g) = \frac{g(g+1)(4g-1)}{6} = \frac{g(4g^2+4g-g-1)}{6}$$

$$= \frac{g(4g^2+3g-1)}{6}$$ // הנחת האינדוקציה

$$①\ p(g+1) = p(g) + \left[(g+1)(2g+2-1)\right]$$ // שלב האינדוקציה

$$②\ p(g+1) = \frac{(g+1)(g+2)(4g+4-1)}{6}$$

$$= \frac{(g^2+g+2g+2)(4g+3)}{6} = \frac{(g^2+3g+2)(4g+3)}{6}$$

$$= \frac{4g^3+12g^2+8g+3g^2+9g+6}{6} = \boxed{\frac{4g^3+15g^2+17g+6}{6}}$$

$$①\ = \frac{g(4g^2+3g-1)}{6} + (g+1)(2g+1)$$

$$= \frac{4g^3+3g^2-g}{6} + (2g^2+2g+g+1)$$

$$= \frac{4g^3+3g^2-g+12g^2+12g+6g+6}{6}$$

$$= \boxed{\frac{4g^3+15g^2+17g+6}{6}}$$

בסיס ושלב האינדוקציה נכונים

$$\text{7)}\ P(n\geq 1) = \forall_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\cdot(i)^2 = \frac{(-1)^n\cdot n(n+1)}{2}\right)$$

$$p(1) = \sum_{i=1}^{1}(-1)^1\cdot 1^2 = -1 = \frac{(-1)^1\cdot 1(1+1)}{2}$$ // בסיס האינדוקציה

$$p(k) = \frac{(-1)^k\cdot k(k+1)}{2}$$ // הנחת האינדוקציה

$$\text{1)}\ p(k+1) = p(k) + \left[(-1)^{k+1}\cdot(k+1)^2\right]$$

$$\text{2)}\ p(k+1) = \frac{(-1)^{k+1}\cdot(k+1)(k+2)}{2}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}\cdot(k^2+k+2k+2)}{2} = \frac{(-1)^{k+1}\cdot(k^2+3k+2)}{2}$$

$$= \frac{(-1)^k\cdot(-1)\cdot(k^2+3k+2)}{2} = \boxed{\frac{(-1)^k\cdot(-k^2-3k-2)}{2}}$$

$$\text{1)} = \frac{(-1)^k\cdot(k^2+k)}{2} + \left[(-1)^k\cdot(-1)^1\cdot(k^2+2k+1)\right]$$

$$= \frac{(-1)^k\cdot(k^2+k) + (-1)^k\cdot(-2k^2-4k-2)}{2}$$

$$= \frac{(-1)^k(k^2+k-2k^2-4k-2)}{2} = \boxed{\frac{(-1)^k(-k^2-3k-2)}{2}}$$

בסיס ושלב האינדוקציה נכונים

(8) $a_1 = 5, \quad a_2 = 13$

(1) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \quad (n \geq 3)$

$a_3 = 5a_2 - 6a_1 = 5 \cdot 13 - 6 \cdot 5 = 35$

(2) $a_n = 2^n + 3^n \quad (n \geq 1)$

$a_1 = 2^1 + 3^1 = 5 \checkmark$

$a_2 = 2^2 + 3^2 = 13 \checkmark$

$a_3 = 2^3 + 3^3 = 35 \checkmark$

// בסיס האינדוקציה

a_k

(1) $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$

(2) $a_k = 2^k + 3^k$

a_{k-1}

(1) $a_{k-1} = 5a_{k-2} - 6a_{k-3}$

(2) $a_{k-1} = 2^{k-1} + 3^{k-1}$

a_{k+1} // שלב אינדוקציה

(1) $a_{k+1} = 5a_k - 6a_{k-1}$

(2) $\boxed{a_{k+1} = 2^{k+1} + 3^{k+1}}$

חיבור

$a_{k+1} = 5(2^k + 3^k) - 6(2^{k-1} + 3^{k-1})$

פיצול למקרים

(א) $5 \cdot 2^k - 6 \cdot 2^{k-1} = 2^{k-1}(5 \cdot 2 - 6) = 4 \cdot 2^{k-1}$

(ב) $5 \cdot 3^k - 6 \cdot 3^{k-1} = 3^{k-1}(5 \cdot 3 - 6) = 9 \cdot 3^{k-1}$

חיבור נוסף

$\boxed{a_{k+1} = 2^{k+1} + 3^{k+1}}$

בסיס ושלב אינדוקציה נכונים

9 $a_1 = 1,\ a_2 = 2$

① $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3)$

② $a_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \quad (n \geq 1)$

② $a_1 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{1-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$ ✓

$a_2 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{2-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{0} = 1$ ✓

$a_3 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{3-2} = \frac{3}{2} <$ קטן מ-

① $a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$ ✓

בסיס
אינדוקציה

a_k

① $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$

② $a_k \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}$

a_{k-1}

① $a_{k-1} = a_{k-2} + a_{k-3}$

② $a_{k-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3}$

a_{k+1}

① $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$

② $a_{k+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$

תיקון

$a_{k+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3}$

סיכם

$\frac{6}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} \geq \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3}$

$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} \cdot \left(\frac{3}{2} + 1\right)$

$3 \cdot \cancel{\left(\frac{3}{2}\right)^{k-3}} \geq 2.5 \cdot \cancel{\left(\frac{3}{2}\right)^{k-3}}$

$3 \geq 2.5$ ✓

(10) $P(12 \le n) \longrightarrow (n = 4a + 5b), \ (a, b \in \mathbb{N})$

בסיס האינדוקציה

$n = 12$:

$a = 3$

$b = 0$

$12 = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0$ ✓

$n = 13$

$a = 2$

$b = 1$

$13 = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1$ ✓

$n = 14$:

$a = 1$

$b = 2$

$14 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2$ ✓

$n = 15$:

$a = 0$

$b = 3$

$15 = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3$ ✓

$P(k)$: $k = 4a + 5b$ // הנחת אינדוקציה

$P(k-4)$: $k - 4 = 4a + 5b$ // שלב אינדוקציה

$k = 4(a+1) + 5b$ ✓

---

* $a+1$ הינו מספר שלם שלא התבצעה עליו פעולת חילוק.
* הכוונה מתוך ההנחה שגם n מורכב ממכפלה של 4 ועוד כפולה של 5
* גם מקרי הבסיס וגם שלב האינדוקציה נכונים לכן האינדוקציה נכונה.