<u>סדרות עתיות וחיזוי - תרגיל 2</u>

<u>להגשה עד ה-17.1.2024 בשעה 23:59</u>

1. יהיה נתון מודל: $Y_t = \frac{1}{4}Y_{t-1} + \frac{1}{4}Y_{t-2} + \frac{1}{8}Y_{t-3} + 5 + \varepsilon_t$.

א. הראו כי המודל הנתון הינו מודל סטציונרי (<u>רמז</u>: אין צורך לחשב את שורשי הפולינום באופן מפורש).

ב. חשבו את $E[Y_t]$.

<u>הדרכה לשאלה 1</u>: אילו הסדרה Y_t היתה סטציונרית, יכולנו לחשב את תוחלת הסדרה ואז להגדיר סדרה חדשה ע"י $X_t = Y_t - E(Y_t)$. ניתן לבדוק האם הסדרה החדשה X_t סטציונרית, ומכאן להסיק חזרה לגבי הסטציונריות של הסדרה המקורית.

2. בהטלת מטבע מאוזן מרוויחים שקל אם מתקבל "עץ" ואחרת מפסידים 90 אגורות (משחק לא רע). נסמן ע"י a_t את הרווח או את ההפסד בהטלה בזמן t (הטלה אחת בכל נקודת זמן). יהי $X_t = \frac{1}{3}(a_t + a_{t-1} + a_{t-2})$.

א. מה מבטאת סדרה X_t?

ב. הפחיתו מ-a_t את תוחלתו והכפילו בקבוע מתאים על מנת לקבל סדרת $MA(2)$. כלומר מצאו קבוע c כך שניתן לכתוב $\varepsilon_t = c[a_t - E(a_t)]$ וגם $Y_t = X_t - E(X_t) = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}$. (שימו לב שהמקדם של ε_t צריך להיות 1)

ג. חשבו את התוחלת, את השונות ואת מקדמי המתאם העצמיים של הסדרה Y_t מסעיף ב'. האם הסדרה סטציונרית? הפיכה?

3. קבעו אילו טענות נכונות (תחת ההנחה שכל הסדרות סטציונריות):

א. $\gamma_k = \gamma_{-k}$

ב. אם $E[X_t] = 0$ אז $\gamma_k = E[X_t X_{t-k}]$

ג. ב-$MA(1)$, הסדרה הפיכה אס"ם $|\theta_1| < 1$

ד. ב-$MA(q)$, $(q > 1)$ אם הסדרה הפיכה אזי $|\theta_i| < 1$ לכל $1 \le i \le q$

ה. ב-$MA(q)$ $(q > 1)$, אם $|\theta_i| < 1$ לכל $1 \le i \le q$, אזי הסדרה הפיכה

4. נתונה הסדרה $X_t = X_{t-1} - \frac{1}{2}X_{t-2} + \varepsilon_t$ כאשר ε_t רעש לבן.

א. באיזה מודל מדובר?

ב. הראו כי הסדרה סטציונרית.

ג. חשבו תוחלת ומקדמי מתאם עצמיים.

1. יהיה נתון מודל: $Y_t = \frac{1}{4}Y_{t-1} + \frac{1}{4}Y_{t-2} + \frac{1}{8}Y_{t-3} + 5 + \varepsilon_t$.

א. הראו כי המודל הנתון הינו מודל סטציונרי (<u>רמז</u>: אין צורך לחשב את שורשי הפולינום באופן מפורש).

ב. חשבו את $E[Y_t]$.

<u>הדרכה לשאלה 1</u>: אילו הסדרה Y_t היתה סטציונרית, יכולנו לחשב את תוחלת הסדרה ואז להגדיר סדרה חדשה ע"י $X_t = Y_t - E(Y_t)$. ניתן לבדוק האם הסדרה החדשה X_t סטציונרית, ומכאן להסיק חזרה לגבי הסטציונריות של הסדרה המקורית.

א. נגדיר $\mu \in \mathbb{R}$ כלשהו.

נגדיר:

$$X_t = Y_t - \underset{\uparrow E[Y_t]}{\mu}$$

$$= \frac{1}{4}Y_{t-1} + \frac{1}{4}Y_{t-2} + \frac{1}{8}Y_{t-3} + 5 + \varepsilon_t - \mu$$

$$= \frac{1}{4}(Y_{t-1} - \mu) + \frac{1}{4}(Y_{t-2} - \mu) + \frac{1}{8}(Y_{t-3} - \mu) + 5 - \frac{3}{8}\mu + \varepsilon_t$$

נשים לב שאם נבחר $\mu = \frac{40}{3}$ נקבל:

$$X_t = \frac{1}{4}X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} + \frac{1}{8}X_{t-3} + \varepsilon_t$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(1 - \frac{1}{4}\cdot B - \frac{1}{4}\cdot B^2 - \frac{1}{8}\cdot B^3\right)X_t = \varepsilon_t$$

כל השורשים מחוץ למעגל היחידה (בדקנו במחשב)

ולכן:

$$\cdot\ \mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[X_t + \mu] = \mathbb{E}[X_t] + \mu = const$$

$$\cdot\ \gamma_h = Cov(X_t, X_{t-h}) = Cov(X_t + \mu, X_{t-h} + \mu)$$

קבוע אינו משנה שונות משותפת.

$$= Cov(Y_t, Y_{t-h})$$

$$\Downarrow$$

Y_t סטציונרי הוא כנדרש.

ב. מתקיים:

$$.Y_t = \frac{1}{4}Y_{t-1} + \frac{1}{4}Y_{t-2} + \frac{1}{8}Y_{t-3} + 5 + \varepsilon_t \qquad / : \mathbb{E}[\ ]$$

$$\Downarrow$$

$$\mu = \frac{1}{4}\mu + \frac{1}{4}\mu + \frac{1}{8}\mu + 5 + 0$$

(מסטציונריות התוחלת קבועה)

$$\Downarrow$$

$$\frac{3}{8}\mu = 5$$

$$\mu = \frac{40}{3}$$

2. בהטלת מטבע מאוזן מרוויחים שקל אם מתקבל "עץ" ואחרת מפסידים 90 אגורות (משחק לא רע). נסמן ע"י a_t את הרווח או את ההפסד בהטלה בזמן t (הטלה אחת בכל נקודת זמן). יהי $X_t = \frac{1}{3}(a_t + a_{t-1} + a_{t-2})$.

א. מה מבטאת סדרה X_t?

ב. הפחיתו מ-a_t את תוחלתו והכפילו בקבוע מתאים על מנת לקבל סדרת $MA(2)$. כלומר מצאו קבוע c כך שניתן לכתוב $\varepsilon_t = c[a_t - E(a_t)]$ וגם $Y_t = X_t - E(X_t) = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}$. (שימו לב שהמקדם של ε_t צריך להיות 1)

ג. חשבו את התוחלת, את השונות ואת מקדמי המתאם העצמיים של הסדרה Y_t מסעיף ב'. האם הסדרה סטציונרית? הפיכה?

א. ממוצע הרווחים משלוש ההטלות האחרונות בזמן כלשהו.

ב. לכל t מתקיים $E[a_t] = 5$ (באגורות).

נבחר $c = \frac{1}{3}$ ונקבל שכרגע:

$$\varepsilon_t = c \cdot a_t - 5c = \frac{1}{3}a_t - \frac{5}{3}$$

$$\varepsilon_{t-1} = c \cdot a_{t-1} - 5c = \frac{1}{3}a_{t-2} - \frac{5}{3}$$

$$\varepsilon_{t-2} = c \cdot a_{t-2} - 5c = \frac{1}{3}a_{t-3} - \frac{5}{3}$$

ואז:

$$Y_t = X_t - E[X_t] = X_t - 5 = \frac{1}{3}a_t + \frac{1}{3}a_{t-1} + \frac{1}{3}a_{t-2} - 5$$

$$= \frac{1}{3}a_t - \frac{5}{3} + \frac{1}{3}a_{t-1} - \frac{5}{3} + \frac{1}{3}a_{t-2} - \frac{5}{3}$$

$$= \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$$

$$\Downarrow$$

$$\theta_1 = 1, \theta_2 = 1$$

ג. מתקיים:

$$E[Y_t] = 0$$

$$\gamma_0 = 3\sigma^2 = Var(Y_t)$$

$$\gamma_1 = 2\sigma^2$$

$$\gamma_2 = \sigma^2$$

$$\gamma_i = 0 \qquad \forall i \in \{\mathbb{N}\},\ i \geq 3$$

$$\rho_i = \begin{cases} 1 & i=0 \\ 2/3 & i=1 \\ 1/3 & i=2 \\ 0 & i=3,4,\dots \end{cases}$$

הסדרה סטציונרית שכן מדובר במודל MA כלשהו.

נבדוק הפיכות:

$$Y_t = (1 + 1\cdot B + 1\cdot B^2)\varepsilon_t$$

נמצא שורשים:

$$b_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\cdot i}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

הנורמה היא 1 ולכן אין הפיכות.

נחשב כעת את σ^2:

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] - \mathbb{E}[\varepsilon_t]^2$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(c\cdot(a_t-5)\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[c\cdot(a_t-5)\right]^2$$

$c = \frac{1}{3}$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}(100-5)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(-90-5)\right)^2$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(100-5)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(-90-5)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot 95^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot(-95)^2$$

$$- \frac{1}{6}\cdot 95 - \frac{1}{6}\cdot(-95)$$

$$= \frac{9025}{18} + \frac{9025}{18} - \frac{95}{6} + \frac{95}{6}$$

$$= \frac{9025}{9}$$

וכעת ניתן לחשב את המדדים התלויים ב-σ באופן ישיר!

3. קבעו אילו טענות נכונות (תחת ההנחה שכל הסדרות סטציונריות):

א. $\gamma_k = \gamma_{-k}$

ב. אם $E[X_t] = 0$ אז $\gamma_k = E[X_t X_{t-k}]$

ג. ב-$MA(1)$, הסדרה הפיכה אס"ם $|\theta_1| < 1$

ד. ב-$MA(q)$, $(q > 1)$ אם הסדרה הפיכה אזי $|\theta_i| < 1$ לכל $1 \le i \le q$

ה. ב-$MA(q)$ $(q > 1)$, אם $|\theta_i| < 1$ לכל $1 \le i \le q$, אזי הסדרה הפיכה

א. <u>נכון.</u>

$$\gamma_k = Cov(X_t, X_{t-k}) \underset{\text{סטציונריות}}{=} Cov(X_{t+k}, X_t)$$

$$= Cov(X_t, X_{t+k}) = \gamma_{-k}$$

ב. <u>נכון.</u>

$$\gamma_k \underset{\text{מסטציונריות ולכל } t}{=} Cov(X_t, X_{t-k}) = E[X_t X_{t-k}] - \cancel{E[X_t]}^{0} \cdot E[X_{t-k}]$$

$$= E[X_t X_{t-k}]$$

ג. <u>נכון.</u> ראינו בהרצאה כי סדרה הפיכה אמ"מ שורש הפולינום גדול בערך מוחלט מ-1. ב-$MA(1)$ השורש הוא $\frac{1}{\theta}$ ולכן

$$|\theta_1| < 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\left|\frac{1}{\theta}\right| > 1$$
$$\Updownarrow$$

הפיכות של $MA(1)$.

$$Y_t = (1-\theta_1 B)(1-\theta_2 B)\cdots$$ אם θ מרוכב

3. <u>נכון.</u> מכיוון שאם הסדרה הפיכה אז ממשפט השורשים הם מחוץ למעגל היחידה. נכתוב את הפולינום כך: $c\cdot(1-\theta_1 B)\cdots(1-\theta_q B)$
ואז נקבל כי כל השורשים $(\frac{1}{\theta_1},\dots,\frac{1}{\theta_q})$ מחוץ למעגל היחידה ולכן $\theta_1,\dots,\theta_q$ בתוך מעגל היחידה.

ה. <u>נכון.</u> ניתן לעשות את אותם השיקולים של סעיף ג בכיוון ההפוך.

$\theta_1,\dots,\theta_q$ בתוך מעגל היחידה

$\Downarrow$

$\frac{1}{\theta_1},\dots,\frac{1}{\theta_q}$ מחוץ למעגל היחידה.

$\Downarrow$

שורשי הפולינום $c\cdot(1-\theta_1 B)\cdots(1-\theta_q B)$ מחוץ למעגל היחידה

$\Downarrow$

המודל $MA(q)$ הפיך.

אם רוצים למקדם הפולינום k ε_t:

ד. הטענה אינה נכונה.

ניקח לדוגמה:

$$X_t = \varepsilon_t - 1.3\,\varepsilon_{t-1} + 0.4\,\varepsilon_{t-2}$$

$$= (1 - 1.3B + 0.4B^2)\,\varepsilon_t$$

שורשי הפולינום הם $\{2, 1.25\}$, כלומר מחוץ למעגל היחידה, ואכן המודל הפיך אבל המקדם הראשון מקיים $1.3 = |\theta_1| > 1$ בסתירה.

ה. הטענה אינה נכונה.

נבחר:

$$X_t = \left(1 - \tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}B^2\right)\varepsilon_t$$

שורשי הפולינום הם $\{-2, 1\}$

כלומר קיים שורש שאינו מחוץ למעגל היחידה, כלומר הסדרה הפיכה. אולם מצד שני המקדמים כולם קטנים ממש מ-1

4. נתונה הסדרה $X_t = X_{t-1} - \frac{1}{2}X_{t-2} + \varepsilon_t$ כאשר ε_t רעש לבן.

א. באיזה מודל מדובר?

ב. הראו כי הסדרה סטציונרית.

ג. חשבו תוחלת ומקדמי מתאם עצמיים.

א. המודל הוא $AR(2)$.

ב. נרשום:

$$X_t - X_{t-1} + \frac{1}{2}X_{t-2} = \varepsilon_t$$

$$\left(1 - 1\cdot B + \frac{1}{2}\cdot B^2\right)X_t = \varepsilon_t$$

$$b_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-2}}{1} = 1 \pm i$$

נשים לב כי השורשים מחוץ למעגל היח' ולכן מתקיימת סטציונריות ממשפט. (הנורמה שלהם היא $\sqrt{2}$)

ג. מסטציונריות נסמן $E[X_t] = \mu$ ואז:

$$\mu = \mu - \frac{1}{2}\mu + 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mu = 0$$

שימוש במשוואות Y-W:

$$X_t = X_{t-1} - \frac{1}{2} X_{t-2} + \sigma^2$$

$$\begin{cases} \gamma_0 = \gamma_1 - \frac{1}{2}\gamma_2 + \sigma^2 \\ \gamma_1 = \gamma_0 - \frac{1}{2}\gamma_1 + 0 \\ \gamma_2 = \gamma_1 - \frac{1}{2}\gamma_0 + 0 \\ \forall_{\substack{i \geq 3 \\ i \in \mathbb{N}}} \quad \gamma_i = \gamma_{i-1} - \frac{1}{2}\gamma_{i-2} + 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$1\tfrac{1}{2}\gamma_1 = \gamma_0$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 - \frac{1}{2} \cdot 1\tfrac{1}{2} \cdot \gamma_1$$

$$= \gamma_1 - \tfrac{3}{4} \cdot \gamma_1$$

$$= \frac{1}{4}\gamma_1$$

$$\Downarrow$$

$$1\tfrac{1}{2}\gamma_1 = \gamma_1 - \frac{1}{8}\gamma_1 + \sigma^2$$

$$\frac{5}{8}\gamma_1 = \sigma^2$$

$$\gamma_1 = \frac{8}{5}\sigma^2 = 1.6\sigma^2$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{5} \sigma^2 = \frac{24}{10} \sigma^2 = 2.4\sigma^2$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{5} \sigma^2 = \frac{8}{20} \sigma^2 = 0.4\sigma^2$$

$$\Downarrow$$

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 2/3 & k=1 \\ 1/6 & k=2 \\ \dfrac{\gamma_k - \frac{1}{2}\gamma_{k-2}}{\gamma_0} & k \geq 3 \end{cases}$$