1. נמקו בקצרה אילו מבין הסדרות הבאות סטציונריות ואילו לא (אתם יכולים להניח הנחות על הסדרה ולהשתמש בהן כדי לקבוע):

א. מספר חודשי של הנוסעים בקו תל-אביב חיפה.

ב. מספר יומי של הנוסעים בקו תל-אביב חיפה.

ג. סדרה שעתית (כל שעה) של כמות מזהמים הנפלטים מן ארובה של מפעל.

ד. סדרה שעתית של מספר הסטודנטים בספריה.

(חודשי/קיץ...)

א. לא. קיימת מחזוריות (עונתיות) בחודשים ולכן השונות של X_t כנראה עשויה להיות תלויה ב-t.

ב. לא. קיימת עונתיות שכן לטענתי אין רכבות בסופ"ש ולכן גם כאן השונות של X_t תלויה בזמן והיא כפולה של 7.

ג. במידה שהמפעל עובד כל הזמן בקצב זהה שאינו תלוי בשעה, ניתן להניח כי הקריאות עשויות להיות רעש לבן, ובמקרה זה התהליך סטציונרי.

ד. לא. קיימת עונתיות שכן בשעות הלילה נצפה להרבה פחות סטודנטים מבשעות היום.

שאלה 2

מקרא:

$E[X] = const$

$E[const] = const$

$E[const \cdot X] = const \cdot E[X]$

$E[y+z] = E[y] + E[z]$

$a(b+c) = ab + ac$

א.

$$Cov(x,y) = E[(X - E[X])(y - E[y])]$$

$$= E[Xy - XE[y] - yE[x] + E[y]E[x]]$$

$$= E[xy] - E[x]E[y] - E[y]E[x] + E[y]E[x]$$

$$= E[xy] - E[x]E[y]$$

$$Cov(y,x) = E[(y - E[y])(X - E[X])]$$

$$= E[Xy - yE[x] - XE[y] + E[y]E[x]]$$

$$= E[xy] - E[x]E[y] - E[y]E[x] + E[E[y]E[x]]$$

$$= E[xy] - E[x]E[y]$$

$$Cov(x,y) = cov(y,x)$$

$\blacksquare$

ב.

$$Cov(x,x) = E[(X - E[X])(X - E[X])]$$

$$= E[X^2 - 2XE[X] + E^2[X]]$$

$$= E[X^2] - 2E[X] \cdot E[X] + E^2[X]$$

$$= E[X^2] - E^2[X]$$

$$= Var(x)$$

$$Cov(x,x) = Var(x)$$

$\blacksquare$

$$\operatorname{cov}(ax+b,\, cy+d) = E\Big[\big(\underline{(ax+b) - E[ax+b]}\big)\big(\underline{(cy+d) - E[cy+d]}\big)\Big]$$ ג.

נתבונן במקרה כללי: $mz+n$, z מ"מ מקרי, m,n קבועים:

$$E(mz+n) = E(mz) + E(n) = mE[z] + n$$

$$\longrightarrow mz+n - E[mz+n] = mz + n - mE(z) - n = m\big(z - E[z]\big)$$

נשלב המסקנה עבור $ax+b$ ו- $cy+d$:

$$\operatorname{cov}(ax+b,\, cy+d) = E\Big[\big(a(x - E[x])\big)\big(c(y - E[y])\big)\Big]$$

$$= ac\, E\Big[(x - E[x])(y - E[y])\Big]$$

$$= ac \operatorname{cov}(x,y)$$

$$\operatorname{cov}(ax+b,\, cy+d) = ac \operatorname{cov}(x,y)$$

$$\operatorname{cov}(x, y+z) = E\Big[(x - E[x])\big(\underline{(y+z) - E[y+z]}\big)\Big]$$ ד.

$$(y+z) - E[y+z] = y - E[y] + z - E[z]$$

$$E\Big[(x - E[x])\big(y - E[y] + z - E[z]\big)\Big]$$

$$= E\Big[(x - E[x])(y - E[y]) + (x - E[x])(z - E[z])\Big]$$

$$= E\Big[(x - E[x])(y - E[y])\Big] + E\Big[(x - E[x])(z - E[z])\Big]$$

$$= \operatorname{cov}(x,y) + \operatorname{cov}(x,z)$$

$$\operatorname{cov}(x, y+z) = \operatorname{cov}(x,y) + \operatorname{cov}(x,z)$$ ■

3. אילו טרנספורמציות יש לבצע בכל אחד מהמודלים הבאים על מנת לקבל סדרה סטציונרית? הניחו שסדרת הסטיות ε_t היא רעש לבן עם תוחלת אפס ושונות σ^2 ושהמקדמים α, β, γ הם פרמטרים קבועים. אתם יכולים להגדיר משתנים חדשים (כמו $Z_t = Y_t - Y_{t-1}$ וכמו $Z_t = Y_t^2$)

א. $Y_t = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \varepsilon_t$

ב. $Y_t = \alpha + \beta t + S_t + \varepsilon_t;\ \ S_t = S_{t-4} \forall t$

ג. $Y_t = e^{\alpha + \beta t} e^{S_t} e^{\varepsilon_t};\ \ S_t = S_{t-4} \forall t$

חשבו את השונות ואת מקדמי המתאם הסדרתיים של הסדרות המתקבלות לאחר ביצוע טרנספורמציות במודלים הנ"ל.

א. נגדיר

$$Z_t := Y_t - Y_{t-1}$$

$$\Downarrow$$

$$Z_t = \cancel{\alpha} + \beta \cdot t + \gamma \cdot t^2 + \varepsilon_t - (\cancel{\alpha} + \beta \cdot (t-1) + \gamma \cdot (t-1)^2 + \varepsilon_{t-1})$$

$$= \beta \cdot t + \gamma \cdot t^2 + \varepsilon_t - \beta \cdot (t-1) - \gamma (t-1)^2 - \varepsilon_{t-1}$$

$$= \cancel{\beta \cdot t} + \gamma \cdot t^2 + \varepsilon_t - \cancel{\beta \cdot t} + \beta - \gamma (t^2 - 2t + 1) - \varepsilon_{t-1}$$

$$= \cancel{\gamma \cdot t^2} + \varepsilon_t + \beta - \cancel{\gamma \cdot t^2} + 2\gamma \cdot t - \gamma - \varepsilon_{t-1}$$

$$= \varepsilon_t + \beta + 2\gamma \cdot t - \gamma - \varepsilon_{t-1}$$

נגדיר:

$$W_t := Z_t - Z_{t-1}$$

$$W_t = \varepsilon_t + \beta + 2\gamma \cdot t - \gamma - \varepsilon_{t-1} - (\varepsilon_{t-1} + \beta + 2\gamma (t-1) - \gamma - \varepsilon_{t-2})$$

$$= \varepsilon_t + \cancel{\beta} + \cancel{2\gamma \cdot t} - \cancel{\gamma} - \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-1} - \cancel{\beta} - \cancel{2\gamma t} + 2\gamma + \cancel{\gamma} + \varepsilon_{t-2}$$

$$= \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-1} + 2\gamma + \varepsilon_{t-2}$$

$$= 2\gamma + \varepsilon_t - 2\cdot\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$$

נתבונן ב- ω_t:

$$\omega_t = 2\cdot\gamma + \varepsilon_t - 2\cdot\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$$

$$P(W_t \le \omega) = P\left(\varepsilon_t - 2\cdot\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} \le \omega - 2\cdot\gamma\right)$$

$$= \int_0^{\omega-2\gamma} \left\{\begin{matrix}\text{ביטוי שאינו תלוי} \\ \text{ב-}t\text{ שכן }\varepsilon_t\text{ רעש לבן}\end{matrix}\right\} dz$$

על כן, ניתן להוכיח באינדוקציה על מס' רכיבי הוקטור המקרי $(W_t,\dots,W_{t+k})^T$ (נסמן $\vec{W}_{t,k}$) לכל $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ כי הביטוי $P\left(W_{t,k} \le \begin{pmatrix}\omega_t \\ \vdots \\ \omega_{t+k}\end{pmatrix}\right)$ אינו תלוי ב-t.

נניח באינד' כי הטענה מתקיימת עבור k כלשהו, ואז:

$$P\left(\vec{W}_{t,k+1} \le \begin{pmatrix}\omega_t \\ \vdots \\ \omega_{t+k+1}\end{pmatrix}\right) = P\left(W_{t+k+1} \le \omega_{t+k+1} \,\middle|\, \vec{W}_{t,k} \le \begin{pmatrix}\omega_t \\ \vdots \\ \omega_{t+k}\end{pmatrix}\right)$$

$$\cdot\, P\left(\vec{W}_{t,k} \le \begin{pmatrix}\omega_t \\ \vdots \\ \omega_{t+k}\end{pmatrix}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\text{מספר}} dP_{\varepsilon_{t+k+1}}\, dz \cdot \left\{\begin{matrix}\text{ביטוי שאינו} \\ \text{תלוי ב-}t\text{ מהנחת} \\ \text{האינדוקציה}\end{matrix}\right\}$$

ומשום ש-ε_{t+h} אינו תלוי ב-t (רעש לבן) נקבל כי הסדרה סטציונרית

<u>סטציונריות המשך:</u> (למקרה שזה מה שרצו)

- $$\mathbb{E}[W_t] = \mathbb{E}[2\gamma + \varepsilon_t - 2\cdot\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}]$$

$$= 2\cdot\gamma$$ אינו תלוי ב-t

- $$\gamma_0 = Var(W_t) = \sigma^2 + 4\sigma^2 + \sigma^2 = 6\cdot\sigma^2$$ אינו תלוי ב-t

- $$\gamma_1 = Cov(W_t, W_{t-1}) = Cov(2\gamma + \varepsilon_t - 2\cdot\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}, 2\gamma + \varepsilon_{t-1} - 2\cdot\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-3})$$

$$= Cov(-2\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + Cov(\varepsilon_{t-2}, -2\varepsilon_{t-2})$$

$$= -2\sigma^2 + (-2)\sigma^2 = -4\sigma^2$$ אינו תלוי ב-t

- $$\gamma_2 = Cov(W_t, W_{t-2}) = Cov(2\gamma + \varepsilon_t - 2\cdot\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}, 2\gamma + \varepsilon_{t-2} - 2\cdot\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-4})$$

$$= Var(\varepsilon_{t-2}) = \sigma^2$$ אינו תלוי ב-t

- $\forall_{\substack{i \geq 3 \\ i \in \mathbb{N}}} \gamma_i = 0$

$\Downarrow$

השונות המשותפת אינה תלויה ב-t

$\Downarrow$

סטציונרי חלש לפי הגדרה.

ב. נבחר:

$$Z_t := Y_t - Y_{t-4}$$

ונקבל:

$$Z_t = \alpha + \beta \cdot t + S_t + \varepsilon_t$$

$$- (\alpha + \beta(t-4) + S_{t-4} + \varepsilon_{t-4})$$

$$= \cancel{\alpha} + \cancel{\beta \cdot t} + S_t + \varepsilon_t$$

$$\cancel{-\alpha} \cancel{- \beta \cdot t} + 4\beta - S_{t-4} - \varepsilon_{t-4}$$

$$= 4 \cdot \beta + \cancel{S_t} - \cancel{S_{t-4}} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-4}$$

$S_t = S_{t-4}$ ✓ $\forall t \in \mathbb{Z}$

$$= 4\beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-4}$$

ואז באותו אופן אינדוקטיבי שהוצג בסעיף הקודם ניתן להראות סטציונריות,

סטציונריות חלשה:

אינו תלוי ב-t

- $E[Z_t] = 4\beta$

- $\gamma_0 = Var(Z_t) = 2\sigma^2$

- $\gamma_1 = Cov(Z_t, Z_{t-1}) = Cov(4\beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-4},\ 4\beta + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-5}) = 0$

- $\forall_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ i \geq 2}} \quad \gamma_i = 0$

$$\Downarrow$$

סטציונריות חלשה מהגדרה.

ג. נבחר:

$$W_t := \log(Y_t)$$

$$W_t = \alpha + \beta \cdot t + S_t + \varepsilon_t$$

הזיע לסעיף ב', ולכן אם נבחר מלכתחילה

$$Z_t := \log(Y_t) - \log(Y_{t-n})$$

נגיע לסטציונריות, כנדרש.

4. נוכיח סטציונריות:

יהיו $t\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$:

באינדוקציה על מספר רכיבי הוקטור $\vec{X}_{t,k} := (X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+k})^T$

בסיס $(k=0)$:

$$P(X_t \le x_t) = \int_{-\infty}^{x_t} dP_{\varepsilon'_t}$$

עבור $\varepsilon'_t := \varepsilon_t - 1.3\varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-2}$

ומשום שמתקיים: $\varepsilon'_t \sim N\left(0, \sigma^2 + (1.3)^2\sigma^2 + (0.4)^2\sigma^2\right)$

נקבל כי ההסתברות כלל אינה תלויה ב-t.

נניח באינדוקציה עבור k כלשהו, ואז:

$$P\left(\vec{X}_{t,k+1} \le \overset{!!}{\vec{x}_{t,k+1}}\right) = P\left(X_{t,k+1} \le x_{t,k+1} \mid \vec{X}_{t,k} \le \vec{x}_{t,k}\right) \cdot P\left(\vec{X}_{t,k} \le \vec{x}_{t,k}\right)$$

$$\vec{x}_{t,k+1} = (x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+k+1})^T$$

$$= \underbrace{\left(\int_{-\infty} dP_{\varepsilon_t}\right)}_{\text{מספר שאינו תלוי ב-}t} \cdot \left\{\text{ביטוי שאינו תלוי ב-}t\text{, מהנחת האינדוקציה}\right\}$$

ומשום ש-ε_t אינו תלוי ב-t (מהגדרה, כרעש לבן) נקבל סטציונריות.

סטציונריות חלשה:

- $\mathbb{E}[X_t] = 0$

- $\gamma_0 = Var(X_t) = \sigma^2 + (1.3)^2\sigma^2 + (0.4)^2\sigma^2$

אינו תלוי ב-t.

- $\gamma_1 = Cov(\varepsilon_t - 1.3\varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-2}\ ,\ \varepsilon_{t-1} - 1.3\varepsilon_{t-2} + 0.4\varepsilon_{t-3})$

$$= (-1.3)\cdot Var(\varepsilon_{t-1}) + (0.4)\cdot(-1.3)\cdot Var(\varepsilon_{t-2})$$

$$= -1.3\sigma^2 + (0.4)(-1.3)\sigma^2$$

אינו תלוי ב-t.

- $\gamma_2 = Cov(\varepsilon_t - 1.3\varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-2}\ ,\ \varepsilon_{t-2} - 1.3\varepsilon_{t-3} + 0.4\varepsilon_{t-4})$

$$= 0.4\sigma^2$$

אינו תלוי ב-t.

- $\forall_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ i \geq 3}}\ \gamma_i = 0$

$$\Downarrow$$

סטציונריות חלשה לפי הגדרה.

הפיכות:

מתקיים כי:

$$X_t = \varepsilon_t - 1.3\varepsilon_{t-1} + 0.4\cdot\varepsilon_{t-2}$$

$$\Updownarrow$$

$$X_t = (1 - 1.3B + 0.4B^2)\varepsilon_t$$

נמצא את שורשי הפולינום:

$$b_{1,2} = \frac{1.3 \pm \sqrt{(1.3)^2 - 4\cdot 1\cdot 0.4}}{0.8}$$

$$b_{1,2} = \{2,\ 1.25\}$$

כל שורשי הפולינום הם מחוץ לקטע $[-1,1]$ ולכן הפיכות מתקיימת.

5. יהי נתון המודל: $X_t = \varepsilon_t - \frac{2}{3}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{12}\varepsilon_{t-2}$ כאשר ε_t סדרת רעש לבן.

א. רשמו את המודל בצורה $X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$ ובדקו האם הוא הפיך. באיזה סוג מודל מדובר?

ב. חשבו את התוחלת, את שונות ואת מקדמי המתאם העצמיים של הסדרה X_t.

א. סוג המודל הוא $MA(2)$.

מתקיים:

$$X_t = \left(1 - \frac{2}{3}B + \frac{1}{12}B^2\right)\varepsilon_t$$

$$= (1-6B)(1-2B)\varepsilon_t$$

משמע, מתקיים הפיך שכן שורשי הפולינום הם 2, 6.

ב. $$E[X_t] = E[\varepsilon_t] + E\left[-\frac{2}{3}\varepsilon_{t-1}\right] + E\left[\frac{1}{12}\varepsilon_{t-2}\right]$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\gamma_0 = Var(X_t)$$

$$= Var\left(\varepsilon_t - \frac{2}{3}\cdot\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{12}\varepsilon_{t-2}\right)$$

$$= Var(\varepsilon_t) + \frac{4}{9}Var(\varepsilon_{t-1}) + \frac{1}{144}Var(\varepsilon_{t-2})$$

$$= \left(1 + 4/9 + 1/144\right)\sigma^2$$

$$\gamma_1 = Cov(X_t, X_{t-1})$$

$$= Cov\Big(\varepsilon_t - 2/3 \cdot \varepsilon_{t-1} + \frac{1}{12}\varepsilon_{t-2},$$

$$\varepsilon_{t-1} - 2/3 \cdot \varepsilon_{t-2} + \frac{1}{12}\varepsilon_{t-3}\Big)$$

$$= Cov\left(-2/3\ \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}\right)$$

$$+ Cov\left(1/12 \cdot \varepsilon_{t-2}, -2/3\ \varepsilon_{t-2}\right)$$

$$= -2/3\,\sigma^2 - 2/36\,\sigma^2 = \left(-\frac{24}{36} - \frac{2}{36}\right)\sigma^2 = -\frac{13}{18}\sigma^2$$

$$\gamma_2 = Cov(X_t, X_{t-2})$$

$$= Cov\Big(\varepsilon_t - 2/3 \cdot \varepsilon_{t-1} + \frac{1}{12}\varepsilon_{t-2},$$

$$\varepsilon_{t-2} - 2/3 \cdot \varepsilon_{t-3} + \frac{1}{12}\varepsilon_{t-4}\Big)$$

$$= Cov\left(\frac{1}{12}\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2}\right)$$

$$= \frac{1}{12}\sigma^2$$

עבור $i \geq 3$ כל המחוברים זרים בין X_t לאיבר השני
ולכן נקבל שונות משותפת 0.

$$\Downarrow$$

$$\gamma_i = \begin{cases} \frac{209}{144}\sigma^2 & i=0 \\ \left(-\frac{13}{18}\right)\sigma^2 & i=1 \\ \left(\frac{1}{12}\right)\sigma^2 & i=2 \\ 0 & else \end{cases}$$

$i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

$$\Downarrow$$

$i \in \mathbb{N}$

$$p_i = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ \dfrac{-19/24}{209/144} & i = 2 \\ \dfrac{1/12}{209/144} & i = 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$