סדרות עתיות וחיזוי - תרגיל 3

להגשה עד ה-24.1.2024 בשעה 23:59

1. יהיה נתון המודל $X_t = \varepsilon_t - \frac{2}{3}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{12}\varepsilon_{t-2}$. הציגו את הפולינום $\Theta(B)$ באופן $\Theta(B) = (1-\alpha_1 B)(1-\alpha_2 B)$. (חשבו את α_1, α_2), ומכאן הציגו את המודל באופן: $\varepsilon_t = \frac{1}{\Theta(B)} X_t$. השתמשו בתכונות של טור גאומטרי אינסופי על מנת לחשב את 3 המקדמים הראשונים בהצגה:

$$\varepsilon_t = X_t + \psi_1 X_{t-1} + \psi_2 X_{t-2} + \psi_3 X_{t-3} + \cdots$$ (חשבו את ψ_1, ψ_2, ψ_3)

2. יהיה נתון המודל $Y_t = \frac{1}{4}Y_{t-1} + \frac{1}{4}Y_{t-2} + \frac{1}{8}Y_{t-3} + 5 + \varepsilon_t$ שראיתם בשאלה 1 בתרגיל 2.
   א. הפחיתו את $E(Y_t)$ והשתמשו במשוואת Yule-Walker על מנת לחשב את 5 מקדמי המתאם העצמיים הראשונים.
   ב. חשבו את $\sigma_\varepsilon^2 = Var(\varepsilon_t)$ אם ידוע ש- $Var(Y_t) = 8$.
   ג. חשבו את 5 מקדמי המתאם החלקיים הראשונים.

3. נתונה הסדרה $X_t = \frac{3}{2}X_{t-1} - \frac{1}{2}X_{t-2} + \epsilon_t - \frac{1}{3}\epsilon_{t-1}$
   א. הראו כי הסדרה אינה סטציונרית.
   ב. בצעו טרנספורמציה מתאימה על מנת להפוך את הסדרה לסטציונרית.
   ג. נתון כי $\gamma_0 = \frac{1}{2}$ ו-$\gamma_1 = -\frac{1}{12}$, מצאו את 3 מקדמי המתאם הראשונים של הסדרה הסטציונרית מסעיף ב.

4. יהיה נתון מודל $Y_t = 0.8Y_{t-1} + 0.1Y_{t-2} - 0.6\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
   א. רשמו את המודל בהצגה $\Theta(B)\varepsilon_t = \Phi(B)Y_t$
   ב. האם המודל סטציונרי? הפיך?
   ג. נניח כי $Var(Y_t) = 1.4,\ Cov(Y_t, Y_{t-1}) = 0.58$. חשבו את $Cov(Y_t, Y_{t-2})$.

5. רשמו את הצורה המפורשת $(Y_t = \ldots)$ של המודל $SARIMA(2,1,1)(1,1,2)_4$ תחת ההנחה שכל המקדמים שווים ל-0.5. בדקו סטציונריות והפיכות של הסדרה לאחר ביצוע ההפרשים.

1. יהיה נתון המודל $X_t = \varepsilon_t - \frac{2}{3}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{12}\varepsilon_{t-2}$. הציגו את הפולינום $\Theta(B)$ באופן $\Theta(B) = (1-\alpha_1 B)(1-\alpha_2 B)$. (חשבו את α_1, α_2), ומכאן הציגו את המודל באופן: $\varepsilon_t = \frac{1}{\Theta(B)} X_t$. השתמשו בתכונות של טור גאומטרי אינסופי על מנת לחשב את 3 המקדמים הראשונים בהצגה:

$$\varepsilon_t = X_t + \psi_1 X_{t-1} + \psi_2 X_{t-2} + \psi_3 X_{t-3} + \cdots \text{ (חשבו את } \psi_1, \psi_2, \psi_3\text{)}$$

$$X_t = \varepsilon_t - \frac{2}{3}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{12}\varepsilon_{t-2}$$

$$= \left(1 - \frac{2}{3}B + \frac{1}{12}B^2\right)\varepsilon_t$$

השורשים הם $\{2,6\}$ $\Leftarrow$

$$= \left(1 - \frac{1}{6}B\right)\left(1 - \frac{1}{2}B\right) \cdot \varepsilon_t$$

כלומר, $\alpha_1 = \frac{1}{6}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$. השורשים מחוץ למעגל היח' ולכן נפתח את הפולינום ההנדסי, ונקבל:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{(1-\frac{1}{6}B)(1-\frac{1}{2}B)} \cdot X_t$$

$$= \left(1 - \frac{1}{6}B\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}B\right)^{-1} \cdot X_t$$

$$= \left(1 + \frac{1}{6}B + \frac{1}{6^2}B^2 + \frac{1}{6^3}B^3 + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2^2}B^2 + \frac{1}{2^3}B^3 + \cdots\right)X_t$$

$$= \Big(1 + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2^2}B^2 + \frac{1}{2^3}B^3$$

$$+\frac{1}{6}B+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}B^2+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}B^3$$

$$+\frac{1}{6^2}B^2+\frac{1}{6^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot B^3$$

$$+\frac{1}{6^3}\cdot B^3+\cdots\Big)\cdot X_t$$

$$=\Big(1+\frac{2}{3}B+\frac{13}{36}B^2+\frac{5}{27}B^3+\cdots\Big)\cdot X_t$$

$$\psi_1 \qquad \psi_2 \qquad \psi_3$$

2. יהיה נתון המודל $Y_t = \frac{1}{4}Y_{t-1} + \frac{1}{4}Y_{t-2} + \frac{1}{8}Y_{t-3} + 5 + \varepsilon_t$ שראיתם בשאלה 1 בתרגיל 2.

א. הפחיתו את $E(Y_t)$ והשתמשו במשוואת Yule-Walker על מנת לחשב את 5 מקדמי המתאם העצמיים הראשונים.

ב. חשבו את $\sigma_\varepsilon^2 = Var(\varepsilon_t)$ אם ידוע ש- $Var(Y_t) = 8$.

ג. חשבו את 5 מקדמי המתאם החלקיים הראשונים.

א. מתרגיל הקודם, מתקיים כי $E[Y_t] = \frac{40}{3}$ (כבר הראינו סטציונריות)

נחשב 5 מקדמי מתאם עצמיים עבור $X_t := Y_t - \frac{40}{3}$:

$$X_t = Y_t - \frac{40}{3} = \frac{1}{4}Y_{t-1} + \frac{1}{4}Y_{t-2} + \frac{1}{8}Y_{t-3} + 5 + \varepsilon_t$$

$$\frac{1}{4}\left(Y_{t-1} - \frac{40}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(Y_{t-2} - \frac{40}{3}\right) + \frac{1}{8}\left(Y_{t-3} - \frac{40}{3}\right) + \varepsilon_t$$

$$\Downarrow$$

$$X_t = \frac{1}{4}X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} + \frac{1}{8}X_{t-3} + \varepsilon_t \qquad *$$

נבצע $\cdot X_t$ / * ונקח תוחלת:

- $\gamma_0 = \frac{1}{4}\gamma_1 + \frac{1}{4}\gamma_2 + \frac{1}{8}\gamma_3 + \sigma^2$
- $\gamma_1 = \frac{1}{4}\gamma_0 + \frac{1}{4}\gamma_1 + \frac{1}{8}\gamma_2$
- $\gamma_2 = \frac{1}{4}\gamma_1 + \frac{1}{4}\gamma_0 + \frac{1}{8}\gamma_1$
- $\gamma_3 = \frac{1}{4}\gamma_2 + \frac{1}{4}\gamma_1 + \frac{1}{8}\gamma_0$

נפתור את המערכת:

- $8\gamma_0 = 2\gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_3 + 8\sigma^2$
- $8\gamma_1 = 2\gamma_0 + 2\gamma_1 + \gamma_2$
- $8\gamma_2 = 2\gamma_1 + 2\gamma_0 + \gamma_1$
- $8\gamma_3 = 2\gamma_2 + 2\gamma_1 + \gamma_0$

$$2\gamma_0 = 6\gamma_1 - \gamma_2$$

$$2\gamma_0 = -3\gamma_1 + 8\gamma_2$$

$$\Downarrow$$

$$6\gamma_1 - \gamma_2 = -3\gamma_1 + 8\gamma_2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\gamma_1 = \gamma_2}$$

ממשוואה 2:

$$2\gamma_0 = 5\gamma_1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\gamma_0 = 2.5\gamma_1}$$

ממשוואה 4:

$$8\gamma_3 = 6.5\gamma_1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\gamma_3 = \frac{13}{16}\gamma_1}$$

משוואה 1:

$$20\gamma_1 = 4\tfrac{13}{16}\gamma_1 + 8\sigma^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\gamma_1 = \left(\frac{128}{243}\right)\sigma^2}$$

עוד נקבל:

$$\gamma_4 = \frac{1}{4}\gamma_3 + \frac{1}{4}\gamma_2 + \frac{1}{8}\gamma_1 = \frac{37}{64}\gamma_1$$

ולכן:

$$\gamma_0 = 2\tfrac{1}{2}\cdot\frac{128}{243}\cdot\sigma^2 = \frac{320}{243}\sigma^2$$

$$\gamma_1 = \frac{128}{243}\sigma^2$$

$$\gamma_2 = \frac{128}{243}\sigma^2$$

$$\gamma_3 = \frac{13}{16}\cdot\frac{128}{243}\sigma^2 = \frac{104}{243}\sigma^2$$

$$\gamma_4 = \frac{37}{64}\cdot\frac{128}{243}\cdot\sigma^2 = \frac{74}{243}\sigma^2$$

$$\Downarrow$$

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = 0.4$$

$$\rho_2 = 0.4$$

$$\rho_3 = \frac{13}{40}$$

$$\rho_4 = \frac{37}{160}$$

ב. מתקיים

$$Var(Y_t) = 8$$
$$\Downarrow$$
$$Var(X_t) = 8$$

הנחה בקבוע (Y_t סטציונרי)

$$\Downarrow$$
$$\gamma_0 = 8$$

מסעיף קודם:

$$\gamma_0 = \frac{320}{243}\sigma^2$$
$$\Downarrow$$
$$\sigma^2 = 8 \cdot \frac{243}{320}$$
$$\Downarrow$$
$$\sigma^2 = \frac{243}{40}$$

ג. המודל X_t הוא $AR(3)$ ולכן נוכל להיעזר בנוסחאות שהוצגו בהרצאה:

$$\rho_0^{part} = 1$$

$$\rho_1^{part} = \rho_1 = 0.4$$

$$\rho_2^{part} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{2}{7}$$

$$\rho_3^{part} = \phi_3 = \frac{1}{8}$$

$$\rho_{y}^{part} = 0$$

משום ש-X_t מהווה הזזה של Y_t בקבוע, נקבל כי מקדמי המתאם החלקיים זהים גם לאלה של Y_t.

3. נתונה הסדרה $X_t = \frac{3}{2}X_{t-1} - \frac{1}{2}X_{t-2} + \epsilon_t - \frac{1}{3}\epsilon_{t-1}$

א. הראו כי הסדרה אינה סטציונרית.

ב. בצעו טרנספורמציה מתאימה על מנת להפוך את הסדרה לסטציונרית.

ג. נתון כי $\gamma_0 = \frac{1}{2}$ ו-$\gamma_1 = -\frac{1}{12}$, מצאו את 3 מקדמי המתאם הראשונים של הסדרה הסטציונרית מסעיף ב.

א. מתקיים כי הסדרה מהצורה:

$$X_t - \frac{3}{2}X_{t-1} + \frac{1}{2}X_{t-2} = \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\left(1 - \frac{3}{2}B + \frac{1}{2}B^2\right)}_{\text{שורשי הפולינום } \{1,2\}} X_t = \left(1 - \frac{1}{3}B\right)\varepsilon_t$$

נשים לב כי הפולינום השמאלי מכיל שורש שאינו מחוץ למעגל היח׳.

$$\Downarrow$$

משמע, הסדרה אינה סטציונרית (שכן מדובר במודל ARMA).

ב. מתקיים:

$$\left(1 - \frac{1}{2}B\right)(1-B)X_t = \left(1 - \frac{1}{3}B\right)\varepsilon_t$$

נגדיר $Z_t = (1-B)X_t$, ונקבל:

$$\left(1-\tfrac{1}{2}B\right)Z_t=\left(1-\tfrac{1}{3}B\right)\varepsilon_t$$

זהו מודל ARMA ביחס ל-Z_t והפיך סיבתי. שכן כל שורשי הפולינום משמאל מחוץ למעגל היח' (ב).

ג. נחשב:

$$\rho_1=\frac{\gamma_1}{\gamma_0}=\frac{-1/12}{1/2}=-1/6$$

היות שמדובר במקרה שבו $q=1$ ניתן להסיק כי:

$$\rho_2=\frac{1}{2}\cdot\left(-1/6\right)=-\frac{1}{12}$$

$$\rho_3=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{24}$$

4. יהיה נתון מודל $Y_t = 0.8Y_{t-1} + 0.1Y_{t-2} - 0.6\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

א. רשמו את המודל בהצגה $\Theta(B)\varepsilon_t = \Phi(B)Y_t$

ב. האם המודל סטציונרי? הפיך?

ג. נניח כי $Var(Y_t)=1.4,\ Cov(Y_t,Y_{t-1})=0.58$. חשבו את $Cov(Y_t,Y_{t-2})$.

א. $$(1-0.8B-0.1B^2)Y_t = (1-0.6B)\varepsilon_t$$

ב. לפנינו מודל ARMA. נבדוק את שורשי הפולינומים.

פולינום ימני - כל השורשים מחוץ למעגל היחידה ($\frac{10}{6}$)

פולינום שמאלי - נדרוש: $x^2+8x-10=0$

$$x_{1,2} = \frac{-8\pm\sqrt{64+40}}{2} = \frac{-8\pm\sqrt{104}}{2}$$

השורשים הם $\{-9.09\ldots,\ 1.09\ldots\}$ ונמצאים מחוץ למעגל היחידה.

משורשי הפולינום הימני - מתקיימת העקביות ממשפט.
משורשי הפולינום השמאלי - מתקיימת 0 יציבות ממשפט.

ב. נבדוק ש-4 (משוואת הפרשים):

$$y_2 = 0.8y_1 + 0.1y_0 = 0.604$$

ש-4 נתונים

5. רשמו את הצורה המפורשת $(Y_t = \ldots)$ של המודל $SARIMA(2,1,1)(1,1,2)_4$ תחת ההנחה שכל המקדמים שווים ל-0.5. בדקו סטציונריות והפיכות של הסדרה לאחר ביצוע ההפרשים.

$$(1-\Theta B^4)(1-\theta_1 B-\theta_2 B^2)(1-B^4)(1-B)Y_t$$

$$=(1-\Psi\cdot B^4-\Psi\cdot B^8)(1-\varphi B)\varepsilon_t$$

נציב מקדמים:

$$(1-\tfrac{1}{2}B^4)(1-\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{2}B^2)(1-B^4)(1-B)Y_t$$

$$=(1-\tfrac{1}{2}\cdot B^4-\tfrac{1}{2}\cdot B^8)(1-\tfrac{1}{2}B)\varepsilon_t$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\tfrac{1}{4}B^{11}-\tfrac{3}{4}B^9+\tfrac{1}{2}B^8-\tfrac{3}{4}B^7+2\tfrac{1}{4}B^5-1.5B^4+\tfrac{1}{2}B^3-1.5B+1\right)\cdot Y_t$$

$$=\left(\tfrac{1}{4}B^9-\tfrac{1}{2}B^8+\tfrac{1}{4}B^5-\tfrac{1}{2}B^4-\tfrac{1}{2}B+1\right)\varepsilon_t$$

$$\Updownarrow$$

$$Y_t = \frac{3}{2}Y_{t-1} - \frac{1}{2}Y_{t-3} + \frac{3}{2}Y_{t-4} - \frac{9}{4}Y_{t-5} + \frac{3}{4}Y_{t-7} - \frac{1}{2}Y_{t-8}$$

$$+ \frac{3}{4}Y_{t-9} - \frac{1}{4}Y_{t-11}$$

$$+ \varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-4} + \frac{1}{4}\varepsilon_{t-5} - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-8} + \frac{1}{4}\varepsilon_{t-9}$$

נבדוק סטציונריות והפיכות:

$$\left(1-\frac{1}{2}B^4\right)\left(1-\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}B^2\right)\left(1-B^4\right)\left(1-B\right)Y_t$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}B^4-\frac{1}{2}B^8\right)\left(1-\frac{1}{2}B\right)\varepsilon_t$$

בהצגה שקולה:

$$\left(1-\frac{1}{2}B^4\right)\left(1-B\right)\left(1+\frac{1}{2}B\right)\left(1-B^4\right)\left(1-B\right)Y_t$$

$$= \left(1-B^4\right)\left(1+\frac{1}{2}B^4\right)\left(1-\frac{1}{2}B\right)\varepsilon_t$$

בהצגה שקולה (נכון לכל t):

$$(1-\tfrac{1}{2}B^4)(1-B)(1+\tfrac{1}{2}B)(1-B^4)(1-B)Y_t$$

$$=(1-B^4)(1+\tfrac{1}{2}B^4)(1-\tfrac{1}{2}B)\varepsilon_t$$

נקח הפרשים: $X_t := (1-B)(1-B)(1-B^4)$

$$(1-\tfrac{1}{2}B^4)(1+\tfrac{1}{2}B)X_t$$

$$=(1-B^4)(1+\tfrac{1}{2}B^4)(1-\tfrac{1}{2}B)\varepsilon_t$$

פולינום שמאלי - השורשים: $\{\sqrt[4]{2}\,cis(90k) \mid k=\{0,1,2,3\}\} \cup \{-2\}$

פולינום ימני - השורשים $\{cis(45k) \mid k=\{0,\dots,7\}\} \cup \{2\}$

מהפולינום הימני נקבל משהו כי אין הפיכות.

מהפולינום השמאלי נקבל משהו כי ישנה סטציונריות.