מגישים:
אמיר סבג תז 316049311
דניאל רוזנברג תז 319645735

<u>שאלה 1:</u>

נציין את מה שכבר הוכחנו בשיעור:

$$1.\ \mathrm{E}[\#trapezoids\ traversed\ when\ querying\ x] \leqslant O(logn) = c_1 log(n)$$
$$2.\ there\ is\ O\left(n^2\right) \rightarrow O\left(n^2\right)\ diffrenet\ queries$$

כעת נשתמש בשני אלו ובחסם צ'רנוף כדי להוכיח את הטענה כי ההסתברות לכך שיהיה לנו שאילתא עבורה כמות הטרפזואידים שנעבור עליהם תהיה יותר מ clogn הינה שואפת לאפס (חסומה מלמעלה ב $1/n$)

נסמן עבור שאילתא x ספציפית משתנה מקרי חדש Y (עבור נוחות הכתיבה):

$$Y = \#trapezoids\ traversed\ when\ querying\ x$$

תזכורת לחסם צ'רנוף (מויקיפדיה)

$$\Pr(X \geq (1+\delta)\mu) \leq e^{-\delta^2\mu/(2+\delta)}, \qquad 0 \leq \delta,$$

$$solution:$$
$$P[\exists x:\ \#trapezoids\ traversed\ when\ querying\ x > clogn) \leqslant$$
$$\Sigma_{i=1}^{O\left(n^2\right)} P[\#trapezoids\ traversed\ when\ quering\ x_i > clogn) \leqslant$$
$$O\left(n^2\right)P[Y \geqslant (1+\delta)\mathrm{E}[Y]] \leqslant O\left(n^2\right)e^{-\delta^2\mathrm{E}[Y]/(2+\delta)}$$
$$\leqslant O\left(n^2\right)e^{-\delta^2 c_1 log(n)/(2+\delta)} \leqslant O\left(n^2\right)*\frac{1}{n^{-\frac{\delta^2 c_1}{2+\delta}}}$$

כל שנותר לנו כעת זה לבחור את δ ואת c_1 להיות מספיק גדולים (שניהם ממשיים חיוביים)

בכדי שהמשוואה הבאה תתקיים: $2 < \dfrac{\delta^2 c_1}{2+\delta}$

הסבר אלגברי: מכיוון ש c_1 הינו מספר קבוע של $O(logn)$ אז במידה ובמקור עבור התוחלת הוא קבוע "קטן" מידי (שברי מאוד קטן), נוכל לקחת אותו כמספר 5 ובכך כל השרשור לעיל כולו ישמר כנכון.

לסיום, הראינו כי קיים קבוע בגובה c $c = 1+\delta$ אשר יקיים את הביטוי לעיל.

משל.

שאלה 2:

נציג את הפתרון בצורה הבאה:

- בניית הדוגמה
- חישוב חסם עליון לזמן הריצה
- חישוב חסם תחתון לזמן הריצה

בניית הדוגמה:

אנו נכניס את n הנקודות בסדר ובמיקום הבא:

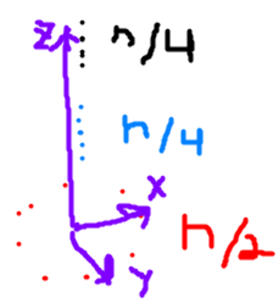
שלב ראשון:

- n/2 מן הנקודות יוכנסו בסדר מעגלי, לצורך העניין כל הנקודות ישבו על מעגל היחידה בדו מימד מבחינת קורדינטות
  - מכיוון שבאלגוריתם אנו יוצרים מהנחה שאין 4 נקודות על אותו מישור, אז הנקודות יונחו על אותו מישור "עד כדי אפסילון" (זה לא ישנה מהותית את הפתרון)
  - כלומר יהיו לנו n/2 אשר הקורדינטות x,y יחד מבטיחות לנו $l_2 - norm(x, y) \;=\; 1$ והקורדינטה z תהיה קרובה ל 0 עד כדי "אפסילון" מספיק צפוף (שוב עניין טכני, לא רלוונטי לדוגמה באמת).
- n/2 מן הנקודות יוכנסו בסדר עולה מהנמוך לגבוה כאשר הקורדינטות שלהן יהיונה מהצורה $(0, 0, z)$ כאשר z עבור כל נקודה יבחר להיות "מספיק גדול" כך ש:
  - הנקודה הנוכחית תהיינה הכי גבוהה מכל הנקודות שנכנסו עד כה
  - הנקודה הנכוחית תוכל למתוח צלעות ל n/2 הנקודות הראשונות מבלי שהן יהיו מוסתרות על ידי קדקדים/פאות שנכנסו לפניכן.

איור אילוסטרציה:

אדום - n/2 מן הנקודות הראשונות

כחול ושחור - n/2 מן הנקודות האחרונות



נחשב חסמים לזמן הריצה:

ראשית נזכיר כי הוכחנו בכיתה כי זמן הריצה חסום ב $O(|F| + |K|)$

כאשר F הינה כמות ה flaps ו K כמות ה conflict pairs (של flap, point)

בנוסף הראינו שממשפט אוילר נובע כי בגרף מישורי (כמו הגרפים הנ"ל) כמות הפאות היא ליניארית בגודל

כמות הקדקדים כלומר $O(n)$

חסם עליון:
עבור F, כל קדקד יכול להביא ליצירת לכל היותר $O(n)$ flaps בעת הכנסתו, מכך נקבל $|F| = O\left(n^2\right)$
עבור K, כל קדקד יכול להיות בקונפליקט עם לכל היותר כל ה flaps שהיו קיימים לכל אורך הריצה ומכך נקבע $|K| = |F|*n = O\left(n^3\right)$
ומכך קיבלנו את החסם העליון שלנו.

חסם תחתון:
- ראשית, נספור את כמות ה flaps שנוצרים החל מהכנסת הנקודה ה $n/2 + 1$ ועד ה $3n/4$ (כלומר רבע מן הנקודות שהכנסנו לאחר מחצית מהנקודות הראשונות).
  כל אחת מהנקודות הנל מבניית הדוגמה לעיל - תמתח צלע לכל אחת מ n/2 הנקודות הראשונות שהוכנסו.
  מכך קיבלנו n/2 צלעות.
  כל 2 צלעות סמוכות מתווספת לצלע מסוג horizon edge שכבר קיימת (בבסיס ה n/2 נקודות הראשונות) כלומר יוצרות יחד פאה, שהיא סמוכה ללכל הפחות פאה אחת נוספת כלומר flap נוסף.
  על n/2 צלעות, נקבל n/2 פאות ומכך n/2 flaps.
  סה"כ בשלב זה הוספנו לכל הפחות $n^2/8$ flaps.

- כעת, נבחן את n/4 הנקודות האחרונות שהוספנו.
  מבניית הדוגמה, כל אחת מנקודות אלו תגרום ל 'שבירת' הפאות שיכלו להיווצר על ידי הקדקדים שהוכנסו במקטע ה $n/2 + 1$ ועד ה $3n/4$
  כלומר, כל אחת מנקודות אלו הייתה ב conflict עם כל אחת מהפאות שציינו לעיל.
  בנוסף, כל אחת מהפאות הנ"ל, היא סמוכה ל"פאת בסיס' כלשהי (באיור אלו הפאות שקיימות אך ורק מ n/2 הקדקדים הראשונים האדומים).
  מבניית הדוגמה, ה n/4 קדקדים האחרונים שהוספנו אינם יכולים להיות בקונפליקט עם 'פאות בסיס'.
  (שהרי קדקדים אלו רואים אותם 'בכיוון ההפוך' ביחס לפאות של קדקדי הביניים שהוכנסו, שהם כן בקונפליקט $\leftarrow$ הפוך על הפוך, קיבלנו שאין קונפליקט עם 'פאות הבסיס')
  לסיכום: הראינו כי כל אחד מן n/4 הקדקדים האחרונים שהוכנסו הם ב conflict-pair עם לכל הפחות $n/2 * n/4$ flaps.

קיבלנו כי כמות ה conflict-pairs שספרנו הם $|K| \geqslant \Sigma_{i=3n/4}^{n} \frac{n}{2} * \frac{n}{4} = \frac{n*n*n}{4*2*4} = \frac{n^3}{32}$

הראינו כי $O\left(n^3\right) \leqslant |K| \leqslant \Omega\left(n^3\right) \leftarrow \theta\left(n^3\right)$
כנדרש.

<u>שאלה 3:</u>

הקבצי קוד מצורפים בתקיית ההגשה
שימו לב שלאחר הרצת קובץ ה main התוכנית תבקש שיוקלד input של שם הקובץ טקסט אותו היא צריכה לקרוא (יש להקליד גם את סיומת הקובץ!)
התוכנית מחפשת את שם הקובץ באותה תקיה בה היא מונחת אז יש לשים לב שאכן קובצי הטקסט של הבדיקה אכן הוכנסו לשם.
התוכנית בסיום ההרצה תתן פלט של קובץ בשם output.txt בו יהיו כתובים הנקודות בשלשות בסדר שנתבקשנו בקובץ המטלה.