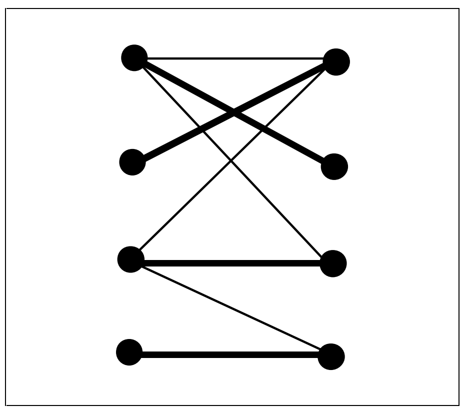
7. תרגיל זה הוא קצת יותר חידה מבעיה. כזכור הצריח במשחק שח יכול לעבור בכל צעד במאוזן או במאונך מספר כלשהו של משבצות על הלוח. נאמר שבצעד כזה הצריח **ביקר** בכל המשבצות שדרכן הוא עבר.
   א. הוכיחו שהצריח יכול לבקר בכל משבצות הלוח תוך 15 צעדים.
   ב. הוכיחו שלא ניתן לבקר בכל המשבצות במספר צעדים קטן יותר.

5.4. זיווגים בגרפים

הנושאים שיוצגו: *בעיית הזיווג, זיווג, זיווג מושלם, משפט Hall (משפט החתונה), מסלול מתחלף ומסלול הרחבה, משפט Tutte, מטריצה דו-סטוכסטית, הפרמננטה.*

בסעיף זה נתבונן במצב הבא: יש לפנינו קבוצה של n גברים ושל n נשים עם יחסי היכרות ביניהם. אנו רוצים לשדך ביניהם (גבר אחד לאישה אחת ולהיפך), כאשר ניתן לשדך רק גבר ואישה שיש ביניהם יחס היכרות. הבעיה היא האם אכן ניתן למצוא שידוך כזה, במצב נתון של יחסי היכרות. על מנת לנסח את הבעיה במונחי תורת הגרפים נגדיר תחילה את מושג הזיווג בגרף.

הגדרה 5.4.1: יהי $G = (V,E)$ גרף לא-מכוון. **זיווג** ב- G הוא אוסף M של צלעות שלאף שתיים מהן אין קדקוד משותף. הזיווג M נקרא **מושלם** אם כל קדקודי הגרף משתתפים בזיווג. אם $\{u,v\}\in M$ נאמר שהקדקודים u ו- v **מזווגים** על ידי הזיווג M.



תרשים 5.4.1: זיווג מושלם בגרף דו-צדדי. צלעות הזיווג מודגשות.

בניסוח של תורת הגרפים הבעיה שלנו היא זו: נתון גרף דו-צדדי $G = (V_1,V_2,E)$ כך ש- $|V_1| = |V_2| = n$. בדוגמה שלנו V_1 היא קבוצת הגברים, V_2 קבוצת הנשים, ויש צלע בין גבר לאישה אם יש ביניהם יחס היכרות. באילו תנאים יש בגרף G זיווג מושלם?
לפני שניגש לפתרון השאלה, נעיר כי שאלות מסוג זה מופיעות בבעיות מעשיות רבות של אופטימיזציה. במקום לשדך גברים ונשים, אנו יכולים למשל לחשוב על השמה של עובדים לתפקידים, כאשר יש צלע $\{x,y\}\in E$ כש- x עובד ו- y תפקיד אם x כשיר למלא את התפקיד y.

המשפט הבא, הידוע גם בשם **משפט החתונה**, מגדיר את התנאים שבהם יש זיווג מושלם בגרף דו-צדדי. נזכיר שאם S קבוצה של קדקודים, אז $\Gamma(S)$ מסמן את קבוצת הקדקודים השכנים לקדקודי הקבוצה S (ראו הגדרה 5.1.3).

משפט 5.4.2 (Hall): בגרף דו-צדדי $G = (V_1,V_2,E)$, $|V_1| = |V_2|$, יש זיווג מושלם אם ורק אם לכל קבוצה $S\subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(S)| \geq |S|$.

הוכחה: עלינו להוכיח הכרחיות ומספיקות.

הכרחיות: הוכחת ההכרחיות פשוטה ביותר. ודאי שלא ניתן לשדך את כולם אם יש קבוצה של גברים שאוסף כל הנשים שהם מכירים קטן ממספרם. פורמלית נאמר כך: נניח שיש בגרף G זיווג מושלם, ותהי $S\subseteq V_1$. לכל קדקוד $s\in S$ יש בן-זוג בזיווג, ולכן $|\Gamma(S)| \geq |S|$ (זהו למעשה מקרה פרטי של עיקרון שובך היונים, ראו סעיף 4.5).

מספיקות: נניח כעת שלכל קבוצה $S\subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(S)| \geq |S|$. נוכיח באינדוקציה על מספר הקדקודים n ב- V_1 שיש זיווג מושלם M ב- G.

בסיס האינדוקציה: $|V_1| = |V_2| = n = 1$. הגרף G כולל במקרה זה שני קדקודים וצלע ביניהם, ולכן הטענה מובנת מאליה.

שלב האינדוקציה: נניח כעת נכונות לגרפים שבהם $|V_1| = n-1$ ונוכיח לגרפים שבהם $|V_1| = n$.

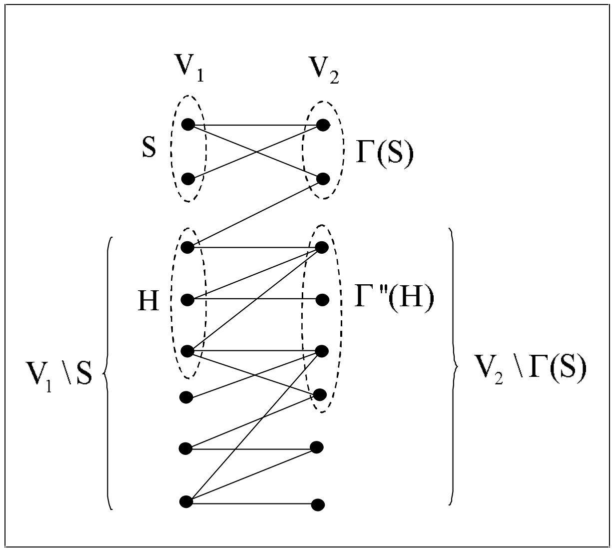
ייתכנו שני מקרים:

1. לכל קבוצה חלקית ממש $S \subsetneq V_1$ מתקיים אפילו האי-שוויון החזק יותר $|\Gamma(S)| \geq |S| + 1$: יהי $x\in V_1$ קדקוד כלשהו. לפי ההנחה יש ל- x שכן (בעצם על פי ההנחה יש ל- x אפילו לפחות שני שכנים). נבחר אחד מהם $y\in V_2$. נכלול את הצלע $\{x,y\}$ בזיווג M המבוקש ונשמיט את הקדקודים x,y מהגרף. יהי $G' = G\backslash\{x,y\}$ הגרף החדש, ונסמן על ידי $\Gamma'(S)$ את קבוצת השכנים של S בגרף G'. קל לראות שבגרף החדש G' לכל קבוצה $S\subseteq V_1\backslash\{x\}$ מתקיים $|\Gamma'(S)| \geq |S|$. לכן, לפי הנחת האינדוקציה יש זיווג מושלם ב- G'. נוסיף לזיווג הזה את הצלע $\{x,y\}$ ונקבל זיווג מושלם בגרף המקורי G.
2. קיימת לפחות קבוצה אחת חלקית ממש $S \subsetneq V_1$, כך ש- $|\Gamma(S)| = |S|$: במקרה זה נתבונן בגרף הדו-צדדי $G_S = (S, \Gamma(S), E_S)$, כאשר E_S היא קבוצת כל הצלעות בין קדקודים מ- S ל- $\Gamma(S)$. קל לוודא שגם הגרף הזה מקיים את הנחת המשפט, וכן שבגרף הזה יש פחות קדקודים מאשר בגרף המקורי G, שהרי $|S| < |V_1|$. לכן, לפי הנחת האינדוקציה קיים זיווג מושלם M_S ב- G_S. נשמיט מהגרף G את קבוצות הקדקודים S ו- $\Gamma(S)$ ואת כל הצלעות ביניהם. יהי $G'' = (V_1\backslash S, V_2\backslash\Gamma(S), E'')$ הגרף המתקבל, ותהי $H\subseteq V_1\backslash S$ קבוצה כלשהי. נסמן על ידי $\Gamma''(H)$ את קבוצת השכנים של H בגרף G''. אז מתקיים $|\Gamma''(H)| \geq |H|$. אחרת, אם נניח בשלילה ש- $|\Gamma''(H)| < |H|$, אז בגרף G היה מתקיים:

$$|\Gamma(H\cup S)| = |\Gamma''(H)| + |\Gamma(S)| < |H| + |S| = |H\cup S| .$$

השוויון הראשון נכון כיוון שהקבוצות $\Gamma(S)$ ו- $\Gamma''(H)$ מהוות חלוקה של קבוצת השכנים של $H\cup S$ ב- G. ואילו השוויון האחרון נכון כיוון ש- H,S קבוצות זרות (ראו תרשים 5.4.2). אולם זאת סתירה לכך שבגרף G לכל קבוצה $T\subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(T)| \geq |T|$ (הסתירה מושגת לקבוצה $T = S\cup H$). לכן גם הגרף G'' מקיים את תנאי המשפט. מכאן לפי הנחת האינדוקציה יש בגרף G'' זיווג מושלם M''. נוסיף לזיווג הזה את הזיווג M_S ונקבל זיווג מושלם $M = M_S \cup M''$ בגרף G המקורי.

קיבלנו בכל מקרה זיווג מושלם M ב- G, ולכן המשפט נכון. □



תרשים 5.4.2: מקרה 2 בהוכחת הכיוון השני של משפט Hall.

מסקנה 5.4.3: יהי $G = (V_1,V_2,E)$ גרף דו-צדדי d-רגולרי. אז יש ב- G זיווג מושלם.
הוכחה: תהי $S\subseteq V_1$ ותהי F קבוצת כל הצלעות החלות ב- S. הגרף d-רגולרי ולכן $|F| = d\cdot|S|$. תהי H קבוצת כל הצלעות החלות ב- $\Gamma(S)$. שוב מכיוון שהגרף d-רגולרי אז $|H| = d\cdot|\Gamma(S)|$. אולם $F \subseteq H$, כי כל צלע שחלה בקדקוד של S חלה גם ב- $\Gamma(S)$. ולכן, $|F| \le |H|$. לכן, $d\cdot|S| \le d\cdot|\Gamma(S)|$ ומכאן $|S| \le |\Gamma(S)|$ לכל קבוצה $S\subseteq V_1$. לכן, לפי משפט 5.4.2 יש זיווג מושלם ב- G. □

את מושג הזיווג בגרף דו-צדדי אפשר להרחיב גם לגרפים כלליים. כאמור זיווג M הוא אוסף של צלעות ללא קדקודים משותפים, והזיווג M מושלם אם כל קדקוד ב- G חל בצלע כלשהי של M. מושג הזיווג מעורר באופן טבעי את הבעיות האלגוריתמיות הבאות: בהינתן גרף $G = (V,E)$ נרצה לחשב מהו הגודל המירבי של זיווג ב- G, ובפרט נרצה להכריע האם יש ב- G זיווג מושלם. אף כי הנושא לא יידון במלואו בספר זה, אנו נוכיח את המשפט הבא שעומד ביסודם של כמה מהאלגוריתמים היעילים לפתרון הבעיה.

הגדרה 5.4.4: יהי M זיווג בגרף $G = (V,E)$, ויהי P מסלול פשוט מהצורה $P = (x_1,\ldots,x_k)$, כלומר $x_i \ne x_j$ לכל $i \ne j$. נאמר ש- P הוא **מסלול מתחלף** אם צלעותיו נמצאות לסירוגין מחוץ ל- M וב- M. נאמר ש- P **מסלול הרחבה** לזיווג M אם מתקיימים התנאים הבאים:
1. הקדקודים x_1, x_k (הראשון והאחרון במסלול P) אינם מכוסים על ידי אף צלע של M.
2. P מסלול מתחלף, היינו: $\{x_1,x_2\} \notin M, \{x_2,x_3\} \in M, \{x_3,x_4\} \notin M,\ldots, \{x_{k-1},x_k\}\notin M$.

קל לראות שמסלול הרחבה P כנ"ל מאפשר לנו לעבור מהזיווג M לזיווג גדול יותר M' המוגדר על ידי:

$$M' = M \setminus \{\{x_2,x_3\}, \{x_4,x_5\},\ldots\} \cup \{\{x_1,x_2\}, \{x_3,x_4\},\ldots,\{x_{k-1},x_k\}\}.$$