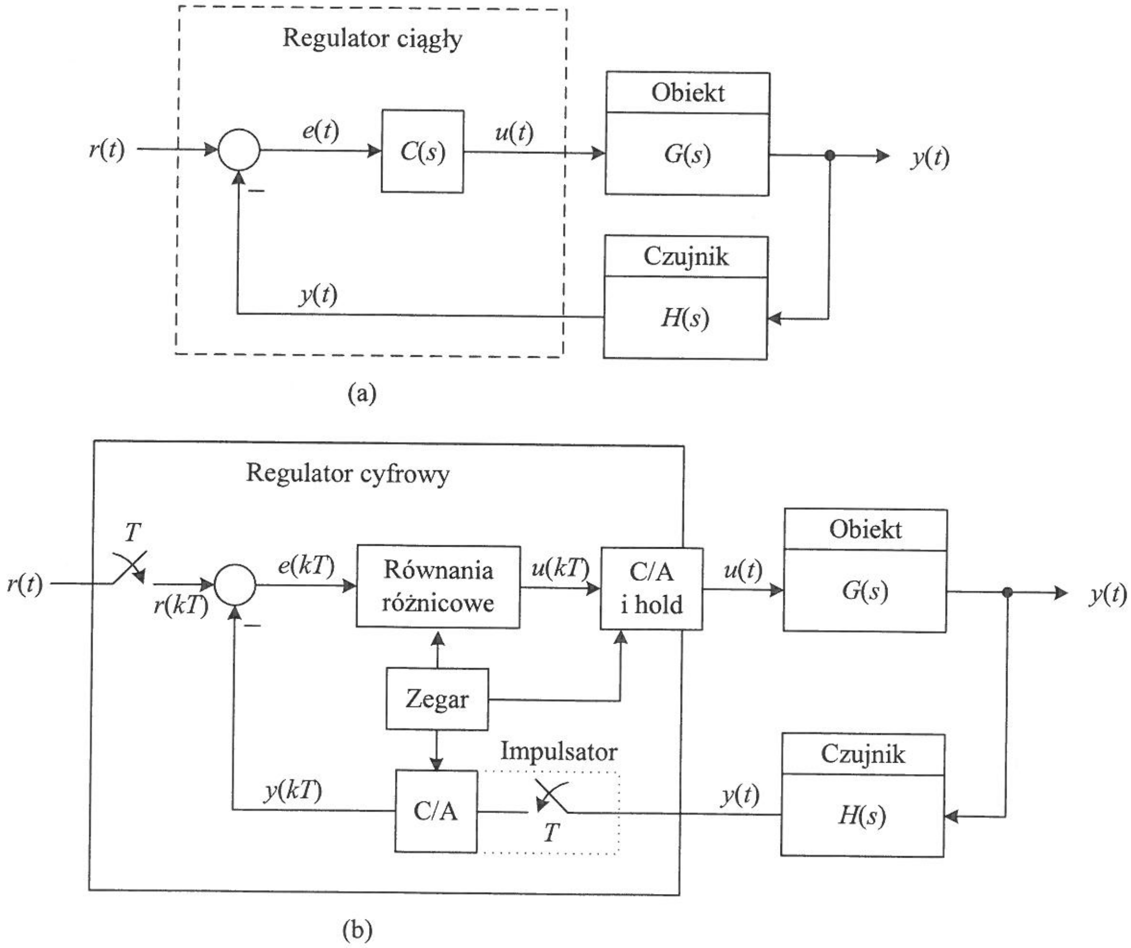
Uniwersytet Morski w Gdyni
Katedra Automatyki Okrętowej

Automatyka i Robotyka

Dyskretyzacja równań różniczkowych – Matlab

Mirosław Tomera

Można zaprojektować układ sterowania ciągłego i zaimplementować go w układach sterowania cyfrowego stosując metody aproksymacji równań różniczkowych. Układ taki będzie mógł spełniać zadane wymagania jakościowe jeśli częstotliwość próbkowania będzie przynajmniej 30 razy większa od szerokości pasma układu. Na rysunku 1(a) pokazany jest typowy układ ciągły. Obliczenie sygnału uchybu e i kompensacja dynamiczna $C(s)$ może zostać zrealizowana w komputerze tak jak pokazano to na rysunku 1(b). Podstawowe różnice pomiędzy tymi dwoma implementacjami są takie, że układ cyfrowy przetwarza próbki pomierzonego sygnału wyjściowego, a nie sygnał ciągły i dynamika opisana przez $C(s)$ jest implementowana przez równania algebraiczne, które nazywają się **równaniami różnicowymi**.



Rys. 1. Podstawowy schemat blokowy układu sterowania, (a) układ ciągły, (b) z systemem mikropcesorowym

Pewnym szczególnym sposobem zrealizowania aproksymaty dla komputera cyfrowego w celu rozwiązania równania różniczkowego jest metoda Eulera. Metoda ta wyprowadzona została z następującej definicji różniczki

$$\dot{x}(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta x(t)}{\delta t} \tag{1}$$

gdzie δx jest zmianą zmiennej x w czasie δt, nawet jeśli δt nie jest całkiem równe zero to ta zależność może być prawdziwa po zastosowaniu poniższych aproksymat. W metodzie Eulera wyróżnia się dwie metody:

- aproksymację prostokątną w przód (forward rectangular rule)

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \cong \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T} \tag{2}$$

gdzie:

$T = t_{k+1} - t_k$	okres próbkowania wyrażony w sekundach
$t_k = kT$	czas w chwili próbkowania
k	liczba całkowita
$x(kT)$	wartość $x(t)$ w chwili t_k
$x((k+1)T)$	wartość $x(t)$ w chwili t_{k+1}

- aproksymację prostokątną wstecz (backward rectangular rule)

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \cong \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} \tag{3}$$

gdzie:

$T = t_k - t_{k-1}$	okres próbkowania w sekundach)
$t_k = kT$	czas w chwili próbkowania
k	liczba całkowita
$x(kT)$	wartość $x(t)$ w chwili t_k
$x((k-1)T)$	wartość $x(t)$ w chwili t_{k-1}

Aproksymacje te mogą być używane w miejsce wszystkich pochodnych, które pojawiają się w równaniach różniczkowych po to aby uzyskać zbiór równań, które mogą być rozwiązane przez komputer cyfrowy. Równania te nazywane są **równaniami różnicowymi** i są rozwiązywane cyklicznie z krokiem czasu o długości T. Przykład pierwszy ilustruje sposób uzyskiwania równań różnicowych na podstawie równań różniczkowych metodą dyskretyzacji Eulera aproksymacją w przód.

Przykład 1

Korzystając z metody Eulera w przód, dokonaj dyskretyzacji z okresem próbkowania $T = 0.1$ [s] następującego równania różniczkowego

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5\,y(t) = 10 \cdot 1(t) \tag{1.1}$$

z warunkami początkowymi

$$y(0) = -4 \tag{1.2}$$

$$y^{(1)}(0) = -10 \tag{1.3}$$

a) Na podstawie uzyskanego równania różnicowego wygeneruj w Matlabie kolejne próbki sygnału dyskretnego.

b) Zaimplementuj w Simulinku powyższe równanie różniczkowe wraz z warunkami początkowymi i rozwiąż je numerycznie.
c) Dokonaj porównania na wykresie wyników uzyskanych w punkcie (a) i (b).

Rozwiązanie. Chcąc uzyskać postać dyskretną równania różniczkowego (1.1) w pierwszej kolejności należy zastąpić pochodne odpowiednimi różnicami czyli równanie różniczkowe przechodzi w następujące równanie różnicowe

$$\frac{\Delta^2 y(kT)}{T^2} + 2\frac{\Delta y(kT)}{T} + 5\, y(kT) = 10 \cdot 1(kT) \qquad (1.4)$$

$$y(0) = -4 \qquad (1.5)$$

$$\frac{dy(0)}{dt} \approx \frac{\Delta y(0)}{T} = \frac{y(1) - y(0)}{T} = -10 \qquad (1.6)$$

Przy użyciu metody prostokątnej Eulera w przód pierwsza różnica zapisywana jest następująco:

$$\Delta y(kT) = y[(k+1)T] - y(kT) \qquad (1.7)$$

natomiast druga różnica

$$\Delta^2 y(kT) = \Delta y[(k+1)T] - \Delta y(kT) = y[(k+2)T] - 2 \cdot y[(k+1)T] + y(kT) \qquad (1.8)$$

Podstawiając różnice opisane wzorami (1.7) oraz (1.8) do równania różnicowego (1.4) i przekształcając je uzyskuje się następującą postać

$$y[(k+2)T] + (-2+2T)y[(k+1)T] + \left(1 - 2\cdot T + 5\cdot T^2\right)\cdot y(kT) = 10 \cdot T^2 \cdot 1(kT) \qquad (1.9)$$

Po podstawieniu do wzoru (1.9) okresu próbkowania $T = 0.1$ [s] uzyskuję się następujące równanie różnicowe

$$y(k+2) - 1.8 \cdot y(k+1) + 0.85 \cdot y(k) = 0.1 \cdot 1(k) \qquad (1.10)$$

Pozostaje do wyznaczenia jeszcze drugi warunek początkowy dla poszukiwanego równania różnicowego, który wyznacza się z przekształcenia równania (1.6). Na tej podstawie wyznaczona zostanie wartość drugiego warunku początkowego dla okresu próbkowania $T = 0.1$ [s]

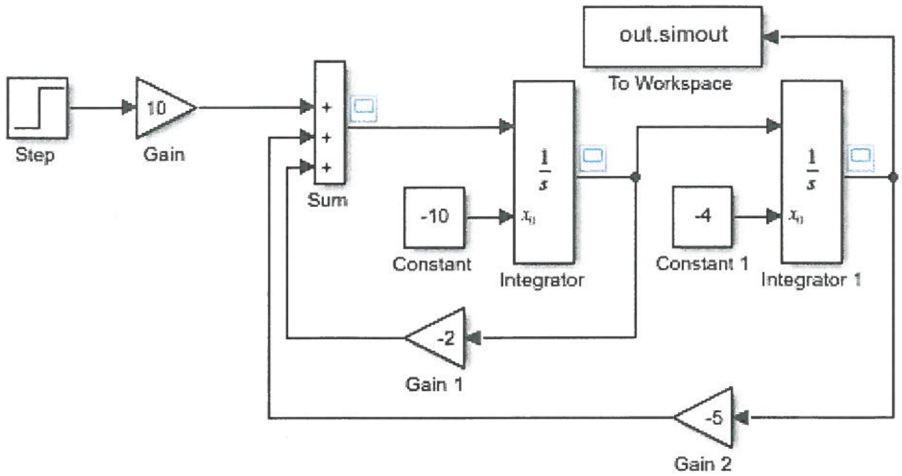
$$y(1) = \mathrm{y}(0) + T \cdot y^{(1)}(0) = -5 \qquad (1.11)$$

Równanie różnicowe (1.7) wraz z warunkami początkowymi (1.8) oraz (1.9) można rozwiązać bezpośrednio w Matlabie przy użyciu odpowiednio zapisanego programu.

Aby zaimplementować w Simulinku równanie różniczkowe (1.1) wraz z warunkami początkowymi to najpierw należy to równanie zapisać w postaci zmiennych dynamicznych

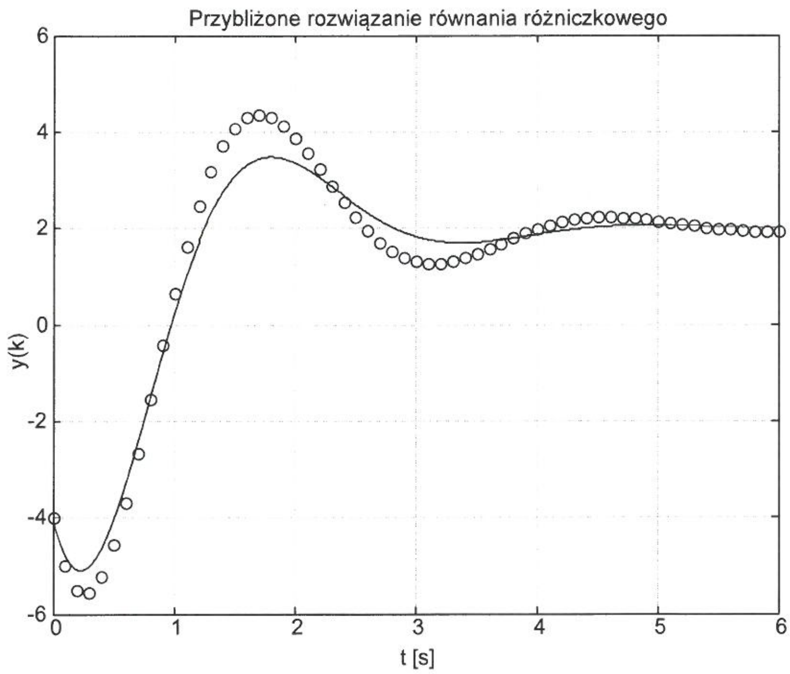
$$\begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = x_2(t) && x_1(0) = -4 \\ &\dot{x}_2(t) = -5x_1(t) - 2x_2(t) + 10 \cdot 1(t) && x_2(0) = -10 \\ &y(t) = x_1(t) \end{aligned} \qquad (1.11)$$

Równania (1.10) można zamodelować w postaci następującego modelu Simulinka (Rys. 1.1), który zachowany został pod nazwą `ex_1_sim.mdl`.



Rys. 1.1. Schemat pozwalający na rozwiązanie w Simulinku równań dynamicznych (1.11)

Na rysunku 1.2 znajdują się wyniki rozwiązania równania różniczkowego i uzyskanego równania różnicowego dla $T = 0.1$ [s].



Rys. 1.2. Uzyskane wyniki rozwiązania równania różniczkowego (linia ciągłą) i równania różnicowego (próbki) uzyskanego z dyskretyzacji dla okresu próbkowania $T = 0.1$ [s].

Wyniki przedstawione na rysunku 1.2. uzyskane zostały przy użyciu następującego kodu programu zapisanego w Matlabie.

```
close all                     % Zamknięcie wszystkich okien graficznych
clear                         % Wyczyszczenie pamięci roboczej Matlaba
clc                           % Wyczyszczenie okna Command Window

tmax = 6;                     % Czas trwania symulacji
Tp = 0.1;                     % Okres próbkowania

y0 = -4;                      % Warunki początkowe
y10 = -10;
```

```
%% Rozwiązanie równania różniczkowego w Simulinku

name_mdl = 'ex_1_sim';          % Nazwa modelu w Simulinku
open_system( name_mdl)          % Otwarcie przygotowanego modelu Simulinka
set_param( name_mdl, 'Solver','ode45', 'MaxStep', num2str(0.01))
% set_param( name_mdl, 'Solver','ode1', 'FixedStep', num2str(0.1))

out = sim( name_mdl, tmax)  % Wykonanie symulacji w zadanym odcinku
                            % czasu
tS = out.simout.time;       % Podstawienie wektora czasu
yS = out.simout.data;       % Pobranie z przestrzeni roboczej Matlaba
                            % uzyskanego rozwiązania

% Wykres rozwiązania uzyskanego w Simulinku
id1 = figure;
plot( tS, yS, 'k-.', 'LineWidth', 2)

%% Rozwiązania przybliżone - uzyskane metodami Eulera

% Rozwiązanie dyskretne uzyskane metodą Eulera w przód
y0a = y0;                     % Warunki początkowe
Dy0a = y10;
y1a = y0a + Dy0a*Tp;          % Przeliczenie wartości początkowych
                              % na wartość drugiej próbki
% Wyznaczone współczynniki równania różnicowego
a1 = -2+2*Tp;
a0 = 1-2*Tp+5*Tp^2;
b0 = 10*Tp^2;

% Ulokowanie w tablicach współrzędnych pierwszych dwóch próbek
tka(1) = 0*Tp; yka(1) = y0a;
tka(2) = 1*Tp; yka(2) = y1a;

% Wyznaczenie kolejnych wartości dyskretnych równania różnicowego
for k = 1:(tmax/Tp)-1;
    tka(k+2) = (k+1)*Tp;
    yka(k+2) = -a1*yka(k+1) - a0*yka(k) + b0*1^k;
end;

% Wykreślenie uzyskanych wyników
hold on
plot( tka, yka, 'ko')
hold off
idt1 = title('Rozwiązania równań: różniczkowego i różnicowych')
set( idt1, 'FontSize', 11, 'FontName','Arial', 'FontWeight','normal')
xlabel('t, kT  [s]')
ylabel('y(t), y(kT)')
grid on
set( id1, 'Color', [1 1 1])

id2 = figure;
stem( tka, yka, 'k')
idt2 = title('Przybliżone rozwiązanie uzyskane metodą Eulera w przód')
set( idt2, 'FontSize', 11, 'FontName','Arial', 'FontWeight','normal')
xlabel('kT  [s]')
ylabel('y(kT)')
set( id2, 'Color', [1 1 1])
```

Przykład 2

Korzystając z metody prostokątów Eulera z reguły wstecznej, dokonaj dyskretyzacji równania różniczkowego (1.1) wraz z warunkami początkowymi (1.2) i (1.3) znajdującego się w przykładzie 1. Okres próbkowania $T = 0.1$ [s]. Na wykresie dokonaj porównania wyników uzyskanych obydwoma metodami.

Rozwiązanie. Chcąc uzyskać postać dyskretną równania różniczkowego (1.1) metodą prostokątów Eulera wstecz postępuje się w podobny sposób jak w przykładzie 1. Najpierw dokonuje się dyskretyzacji równania różniczkowego oraz warunków początkowych zawierających pochodne

$$\frac{\Delta^2 y(kT)}{T^2} + 2\frac{\Delta y(kT)}{T} + 5\,y(kT) = 10 \cdot 1(kT) \tag{2.1}$$

$$y(0) = -4 \tag{2.3}$$

$$\frac{dy(0)}{dt} \approx \frac{\Delta y(0)}{T} = \frac{y(1) - y(0)}{T} = -10 \tag{2.3}$$

Następnie do równania (2.1) dokonuje się następujących podstawień: pierwsza różnica zapisywana jest następująco:

$$\Delta y(kT) = y(kT) - y[(k-1)T] \tag{2.4}$$

natomiast druga różnica

$$\Delta^2 y(kT) = \Delta y(kT) - \Delta y[(k-1)T] = y(kT) - 2 \cdot y[(k-1)T] + y[(k-2)T] \tag{2.5}$$

Podstawiając różnice opisane wzorami (2.4) oraz (2.5) do równania różnicowego (2.1) i przekształcając je uzyskuje się w ten sposób kolejną postać równania różnicowego

$$y(kT) - \frac{2 + 2T}{1 + 2T + 5T^2} y[(k-1)T] + \frac{1}{1 + 2T + 5T^2} y[(k-2)T] = \frac{10T^2}{1 + 2T + 5T^2} \cdot 1(kT) \tag{2.6}$$

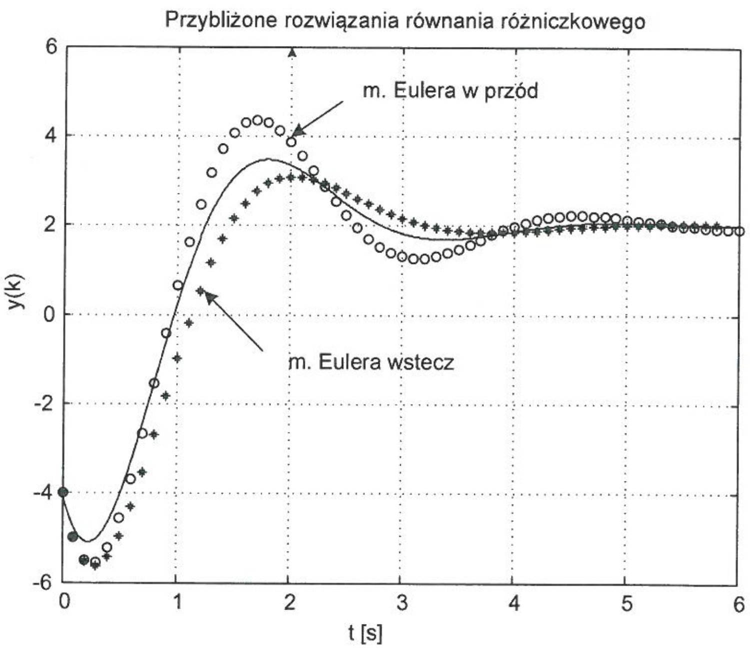
Po podstawieniu do wzoru (2.6) okresu próbkowania o wartości $T = 0.1$ [s] uzyskuje się następujące równanie różnicowe

$$y(k) - 1.76 \cdot y(k-1) + 0.8 \cdot y(k-2) = 0.08 \cdot 1(k) \tag{2.7}$$

Warunki początkowe przelicza się w identyczny sposób jak w metodzie Eulera w przód.
Z porównania uzyskanych równań (1.8) oraz (2.7) widać, że różnią się między sobą wartościami współczynników. Na rysunku 2.1 dokonane zostało porównanie uzyskanych wyników.

```
%% Rozwiązanie dyskretne uzyskane metodą Eulera wstecz
y0b = y0;                     % Warunki początkowe
Dy0b = y10;
y1b = y0b + Dy0b*Tp;          % Przeliczenie wartości początkowych
                              % na wartość drugiej próbki
% Mianownik współczynników równania różnicowego
MM = (1 + 2*Tp + 5*Tp^2);

% Współczynniki równania różnicowego
a1b = (-2-2*Tp)/MM;
a2b = 1/MM;
b0b = (10*Tp^2)/MM;

% Ulokowanie w tablicach współrzędnych pierwszych dwóch próbek
tkb(1) = 0*Tp;  ykb(1) = y0b;
```

```
tkb(2) = 1*Tp;  ykb(2) = y1b;

for k = 3:(tmax/Tp)+1;
    tkb(k) = (k-1)*Tp;
    ykb(k) = -a1b*ykb(k-1) - a2b*ykb(k-2) + b0b*1^k;
end;

% Wykreślenie uzyskanych wyników
figure( id1)
hold on
plot( tkb, ykb, 'b*')
hold off
legend('Simulink','m. Eulera w przód', 'm. Eulera wstecz')

id3 = figure;
stem( tkb, ykb, 'b')
idt3 = title('Przybliżone rozwiązanie uzyskane metodą Eulera wstecz')
set( idt3, 'FontSize', 11, 'FontName','Arial', 'FontWeight','normal')
xlabel('kT  [s]')
ylabel('y(kT)')
set( id3, 'Color', [1 1 1])
```



Rys. 2.1. Porównanie rozwiązań równań różnicowych uzyskanych z aproksymacji równania różniczkowego (linia ciągłą) metodą prostokątów Eulera przy użyciu reguł w przód i wstecz dla okresu próbkowania $T = 0.1$ [s].

W przykładzie 2 przedstawione zostało porównanie aproksymacji rozwiązań równania różniczkowego przy użyciu metody prostokątnej Eulera. Z rysunku 2.1 wynika, że jeśli do aproksymacji zastosuje się regułę Eulera w przód wówczas uzyskuje się rozwiązania z nadmiarem, natomiast przy zastosowaniu reguły Eulara wstecz rozwiązania z niedomiarem.

Przykład 3

Wyznaczyć dyskretną aproksymację poniższych równań stanu i wyjścia

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) \tag{3.1}$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) + u(t) \tag{3.2}$$

$$\dot{x}_3(t) = x_1(t) + x_2(t) - 2x_3(t) - u(t) \tag{3.3}$$

$$y(t) = x_1(t) + x_3(t) \tag{3.4}$$

Okres próbkowania $T = 0.2$ [s].

a) Zamodelować powyższe równania różniczkowe i wyjścia w Simulinku i rozwiązać je metodą numeryczną.

b) Wyznaczone równania różnicowe również zamodelować w Simulinku i porównać uzyskane wyniki z tymi, uzyskanymi w punkcie (a).

Rozwiązanie. W celu wyznaczenia aproksymacji dyskretnej przeprowadzona została dyskretyzacja równań stanu i wyjścia

$$\frac{\Delta x_1(kT)}{T} = -x_1(kT) + x_2(kT) \tag{3.5}$$

$$\frac{\Delta x_2(kT)}{T} = x_1(kT) - x_2(kT) - x_3(kT) + u(kT) \tag{3.6}$$

$$\frac{\Delta x_3(kT)}{T} = x_1(kT) + x_2(kT) - 2x_3(kT) - u(kT) \tag{3.7}$$

$$y(kT) = x_1(kT) + x_3(kT) \tag{3.8}$$

Różnice, w dyskretnych równaniach stanu wyznaczone zostały metodą Eulera w przód

$$\frac{x_1((k+1)T) - x_1(kT)}{T} = -x_1(kT) + x_2(kT) \tag{3.9}$$

$$\frac{x_2((k+1)T) - x_2(kT)}{T} = x_1(kT) - x_2(kT) - x_3(kT) + u(kT) \tag{3.10}$$

$$\frac{x_3((k+1)T) - x_3(kT)}{T} = x_1(kT) + x_2(kT) - 2x_3(kT) - u(kT) \tag{3.11}$$

Po przekształceniach, uzyskuje się następujące aproksymacje dyskretne równań stanu

$$x_1((k+1)T) = (1-T)\cdot x_1(kT) + T\cdot x_2(kT) \tag{3.12}$$

$$x_2((k+1)T) = T\cdot x_1(kT) + (1-T)\cdot x_2(kT) - T\cdot x_3(kT) + T\cdot u(kT) \tag{3.13}$$

$$x_3((k+1)T) = T\cdot x_1(kT) + T\cdot x_2(kT) + (1-2T)\cdot x_3(kT) - T\cdot u(kT) \tag{3.14}$$

Aproksymacja równania wyjścia opisana jest wzorem (3.8).

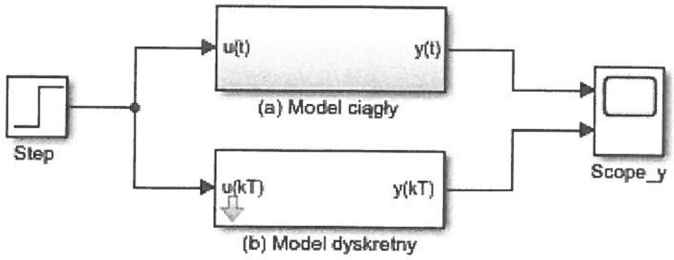
Aby bezbłędnie zaimplementować w Simulinku równania stanu i wyjścia opisane wzorami (3.1)-(3.4), wyznaczony został równoważny zapis w postaci wektorowo-macierzowej. W tym, zapisie równania stanu opisane są następująco

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot u(t) \tag{3.15}$$

natomiast równania wyjścia poniższym wzorem

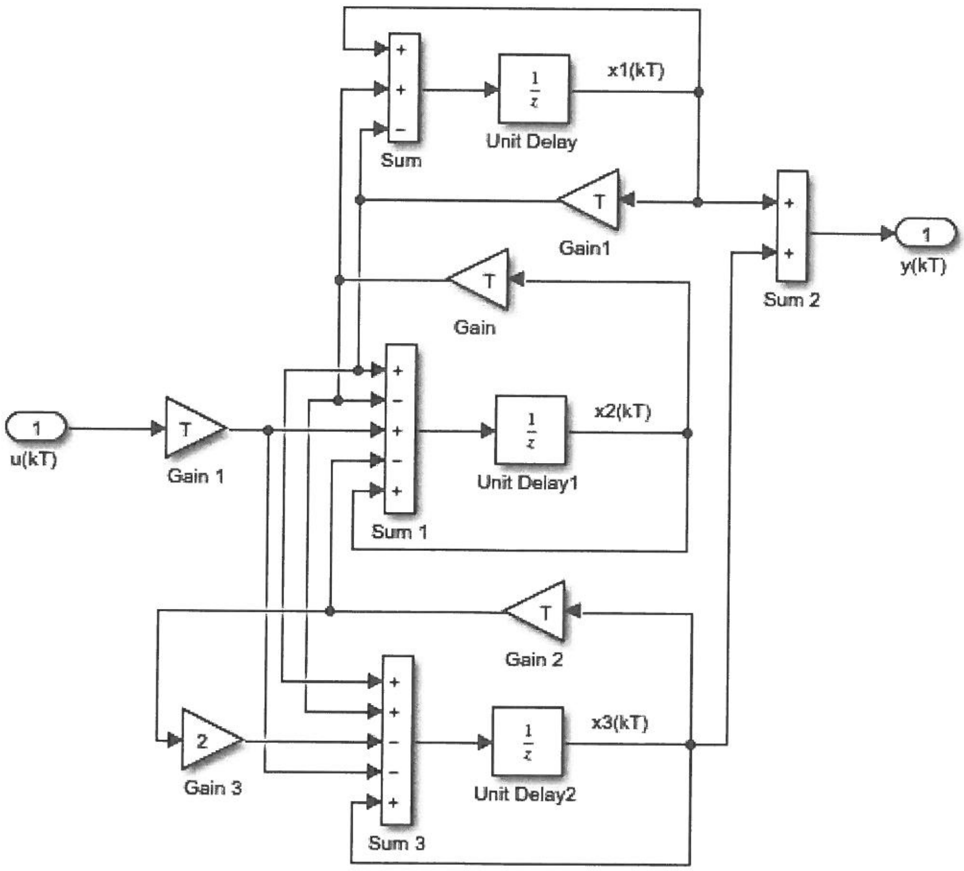
$$y=[1 \quad 0 \quad 1]\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Na rysunku 3.1 pokazana została implementacja w Simulinku modelu ciągłego i uzyskanej aproksymaty dyskretnej.

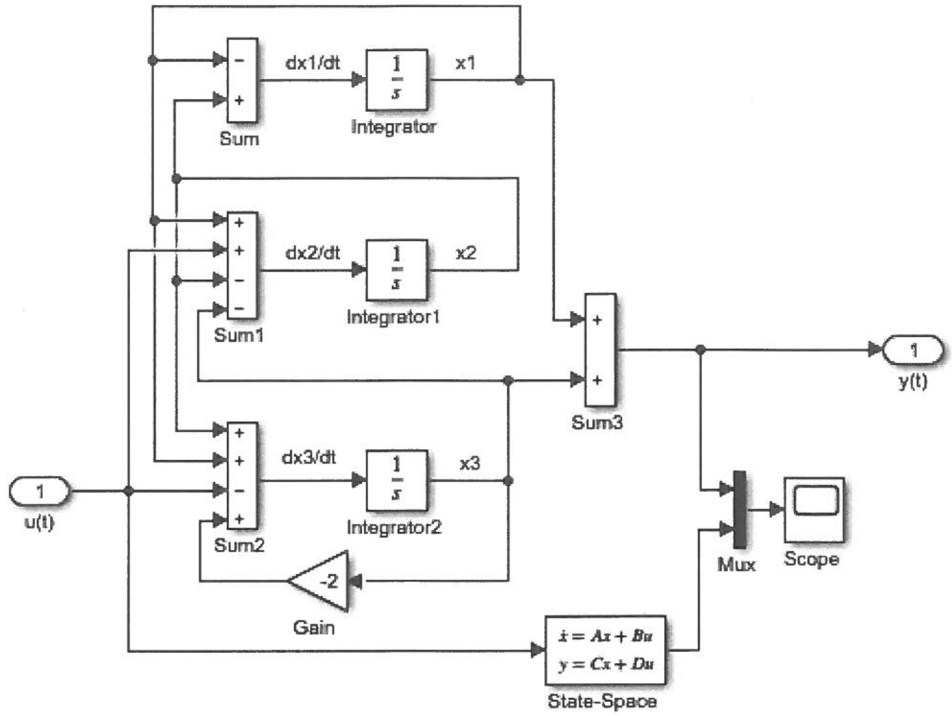


Rys. 3.1. Porównanie rozwiązań modeli ciągłego i dyskretnego w Simulinku

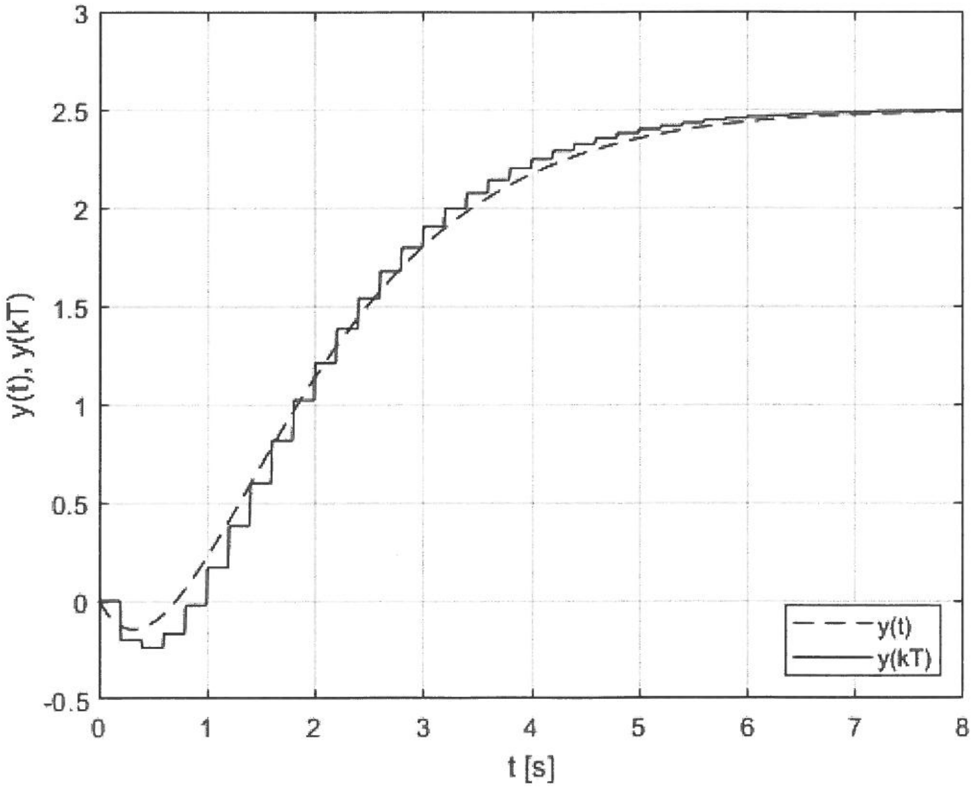
Na bloku 'Model dyskretny' została maska pozwalająca na zadawanie okresu próbkowania. Wnętrza bloków: 'Model dyskretny' i 'Model ciągły' pokazane zostały na rysunkach 3.2 i 3.3. Na rysunku 3.4 pokazane zostały uzyskane odpowiedzi skokowe dla rozważanych modeli matematycznych.



Rys. 3.3. Wnętrze bloku 'Model dyskretny'



Rys. 3.2. Wnętrze bloku 'Model ciągły'



Rys. 3.4. Porównanie uzyskanych odpowiedzi skokowych

ĆWICZENIA W MATLABIE

M.1. Poniższe równania różniczkowe zaimplementuj w postaci schematów Simulinka, następnie korzystając z metody prostokątów Eulera w przód (ang. *forward rectangular rule*) wyznacz aproksymujące równania różnicowe. Okres próbkowania $T = 0.1$ [s]. Sekwencyjnie przy użyciu Matlaba wykreśl rozwiązania równań różnicowych i porównaj je z rozwiązaniami uzyskanymi w Simulinku.

a) $\dfrac{d^3y(t)}{dt^3} + 5\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\dfrac{dy(t)}{dt} = 2\delta(t)$
$y(0) = 1$
$y^{(1)}(0) = -1$
$y^{(2)}(0) = 1$

b) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\dfrac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 2e^{-t}$
$y(0) = 0$
$y^{(1)}(0) = -2$

c) $\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 6\cos 2t$
$y(0) = -2$

d) $\dfrac{d^3y(t)}{dt^3} + 4\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\dfrac{dy(t)}{dt} = 3\delta(t)$
$y(0) = -1$
$y^{(1)}(0) = -1$
$y^{(2)}(0) = 1$

e) $\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \dfrac{1}{2}t^2$
$y(0) = -1$

f) $\dfrac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 4\sin 4t$
$y(0) = 1$

g) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\dfrac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 1(t)$
$y(0) = -3$
$y^{(1)}(0) = 2$

h) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3e^{-3t}$
$y(0) = 0$
$y^{(1)}(0) = 1$

i) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \sin 2t$
$y(0) = 2$
$y^{(1)}(0) = -3$

j) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = 5\cdot 1(t)$
$y(0) = 1$
$y^{(1)}(0) = -2$

k) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + \dfrac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \cos 3t$
$y(0) = 1$
$y^{(1)}(0) = 2$

l) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\dfrac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = e^{-2t}\sin 3t$
$y(0) = 0$
$y^{(1)}(0) = 3$

m) $\dfrac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 2\cos t$
$y(0) = 4$

n) $\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = \sin 4t$
$y(0) = -2$

o) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\dfrac{dy(t)}{dt} + 17y(t) = 4\cdot 1(t)$
$y(0) = 10$
$y^{(1)}(0) = -2$

p) $\dfrac{d^3y(t)}{dt^3} + 4\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3\cos 2t$
$y(0) = 1$
$y^{(1)}(0) = -1$
$y^{(2)}(0) = 2$

M.2. Przy użyciu metody prostokątów Eulera wstecz (ang. *backward rectangular rule*) wyznacz aproksymujące równania różnicowe dla równań różniczkowych znajdujących się w zadaniu M.1. Okres próbkowania $T = 0.1$ [s]. Sekwencyjnie przy użyciu Matlaba wykreśl rozwiązania i porównaj je z rozwiązaniami uzyskanymi w zadaniu M.1.

M3. Wyznaczyć dyskretną aproksymację równań stanu i wyjścia. Okres próbkowania T = 0.1 s. Uzyskane dyskretne równania stanu i wyjścia zamodelować w Simulinku i dokonać porównania uzyskiwanych wyników symulacji z rozwiązaniami ciągłymi.

a) $$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -2x_1(t) - 3x_3(t) + u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) + x_3(t)\\ \dot{x}_3(t) &= x_2(t) + x_3(t) - u(t)\\ y(t) &= 3x_1(t) + x_2(t) + 2x_3(t)\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -2x_1(t) - 5x_2(t) - 6x_3(t) + u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) - u(t)\\ \dot{x}_3(t) &= x_2(t) + u(t)\\ y(t) &= x_1(t) + 3x_2(t) + 6x_3(t)\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_2(t) - x_3(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + u(t)\\ \dot{x}_3(t) &= 5x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) - u(t)\\ y(t) &= 2x_1(t) + 3x_2(t) + 5x_3(t)\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -7x_1(t) - 2x_2(t) + u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) - x_3(t)\\ \dot{x}_3(t) &= x_2(t)\\ y(t) &= 3x_1(t) + x_2(t) + 3x_3(t)\end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -4x_1(t) - 4x_2(t) - 2x_3(t) + u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) + 2u(t)\\ \dot{x}_3(t) &= x_2(t) + x_3(t) - u(t)\\ y(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) + 2x_3(t)\end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -4x_1(t) - x_2(t) - 2x_3(t) + u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t)\\ \dot{x}_3(t) &= x_2(t) + x_3(t) - u(t)\\ y(t) &= 3x_1(t) + 6x_2(t) + 8x_3(t)\end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -2x_1(t) - x_2(t) - 5x_3(t) + u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)\\ \dot{x}_3(t) &= -x_1(t) + x_2(t) - x_3(t)\\ y(t) &= 2x_1(t) + 3x_2(t) + 5x_3(t)\end{aligned}$$

h) $\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t) + u(t)$

$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) - 2u(t)$

$\dot{x}_3(t) = -x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) - u(t)$

$y(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + 3x_3(t)$

ODPOWIEDZI DO WYBRANYCH ĆWICZEŃ

M1.

a) $y(k+3) - 2.5y(k+2) + 2.04y(k+1) - 0.54y(k) = 0.02 \cdot \delta(k)$

$y(0) = 1$

$y(1) = 0.9$

$y(2) = 0.81$

b) $y(k+2) - 1.5y(k+1) + 0.56y(k) = 0.02 \cdot (0.9048)^k$

$y(0) = 0$

$y(1) = -0.2$

c) $y(k+1) - 0.8y(k) = 0.6 \cdot \cos(0.2 \cdot k)$

$y(0) = -2$

d) $y(k+3) - 2.6y(k+2) + 2.23y(k+1) - 0.63y(k) = 0.03 \cdot \delta(k)$

$y(0) = 1$

$y(1) = 0.9$

$y(2) = 0.81$

e) $y(k+1) - 0.8y(k) = 0.0005 \cdot k^2$

$y(0) = -1$

f) $y(k+1) - 0.7y(k) = 0.4 \cdot \sin(0.4 \cdot k)$

$y(0) = 1$

g) $y(k+2) - 1.6y(k+1) + 0.65y(k) = 0.01 \cdot 1(k)$

$y(0) = -3$

$y(1) = -2.8$

h) $y(k+2) - 1.7y(k+1) + 0.72y(k) = 0.03 \cdot (0.7408)^k$

$y(0) = 0$

$y(1) = 0.1$

i) $y(k+2) - 1.8y(k+1) + 0.82y(k) = 0.01 \cdot \sin(0.2 \cdot k)$

$y(0) = 2$

$y(1) = 1.7$

j) $y(k+2) - 1.8y(k+1) + 0.81y(k) = 0.05 \cdot 1(k)$

$y(0) = 1$

$y(1) = 0.8$

k) $y(k+2) - 1.9y(k+1) + 0.94y(k) = 0.01 \cdot \cos(0.3 \cdot k)$

$y(0) = 1$

$y(1) = 1.2$

l) $y(k+2) - 1.7y(k+1) + 0.76y(k) = 0.01 \cdot (0.8187)^k \sin(0.3 \cdot k)$

$y(0) = 0$

$y(1) = 0.3$

m) $y(k+1) - 0.7y(k) = 0.2 \cdot \cos(0.1 \cdot k)$

$y(0) = 4$

o) $y(k+2)-1.8y(k+1)+0.97y(k)=0.04\cdot 1(k)$

$y(0)=10$

$y(1)=9.80$

p) $y(k+3)-2.6y(k+2)+2.25y(k+1)-0.648y(k)=0.003\cdot\cos(0.2\cdot k)$

$y(0)=1$

$y(1)=0.9$

$y(2)=0.82$

M2.

a) $y(k)-2.6234y(k-1)+2.2727y(k-2)-0.6494y(k-3)=0.013\cdot\delta(k)$

$y(0)=1$

$y(1)=0.9$

$y(2)=0.81$

b) $y(k)-1.6026y(k-1)+0.6410y(k-2)=0.0128\cdot(0.9048)^k$

$y(0)=0$

$y(1)=-0.2$

c) $y(k)-0.8333y(k-1)=0.5\cdot\cos(0.2\cdot k)$

$y(0)=-2$

d) $y(k)-2.6783y(k-1)+2.3776y(k-2)-0.6993y(k-3)=0.021\cdot\delta(k)$

$y(0)=1$

$y(1)=0.9$

$y(2)=0.81$

e) $y(k)-0.8333y(k-1)=0.00042\cdot k^2$

$y(0)=-1$

f) $y(k)-0.7692y(k)=0.3077\cdot\sin(0.4\cdot k)$

$y(0)=1$

g) $y(k)-1.6552y(k-1)+0.6897y(k-2)=0.0069\cdot 1(k)$

$y(0)=-3$

$y(1)=-2.8$

h) $y(k)-1.7424y(k-1)+0.7576y(k-2)=0.0227\cdot(0.7408)^k$

$y(0)=0$

$y(1)=0.1$

i) $y(k)-1.8033y(k-1)+0.8197y(k)=0.0082\cdot\sin(0.2\cdot k)$

$y(0)=2$

$y(1)=1.7$

j) $y(k)-1.8182y(k-1)+0.8264y(k-2)=0.0413\cdot 1(k)$

$y(0)=1$

$y(1)=0.8$

k) $y(k)-1.8421y(k-1)+0.8772y(k-2)=0.0084\cdot\cos(0.3\cdot k)$

$y(0)=1$

$y(1)=1.2$

l) $y(k)-1.6912y(k-1)+0.7353y(k-2)=0.0074\cdot(0.8187)^k\sin(0.3\cdot k)$

$y(0)=0$

$y(1)=0.3$

o) $y(k)-1.6058y(k+1)+0.7299y(k)=0.0292\cdot 1(k)$

$y(0)=10$, $y(1)=9.80$

p) $y(k)-2.6515y(k-1)+2.3416y(k-2)-0.6887y(k-3)=0.0021\cdot\cos(0.2\cdot k)$

$$y(0)=1$$
$$y(1)=0.9$$
$$y(2)=0.82$$

M3.

a)
$$x_1(k+1)=0.8x_1(k)-0.3x_3(k)+0.1u(k)$$
$$x_2(k+1)=0.1x_1(k)+0.9x_2(k)+0.1x_3(k)$$
$$x_3(k+1)=0.1x_2(k)+1.1x_3(k)-0.1u(k)$$
$$y(k)=3x_1(k)+x_2(k)+2x_3(k)$$

LITERATURA

1. Amborski K., *Teoria sterowania. Podręcznik programowany*, PWN, Warszawa, 1985.
2. Franklin G.F, Powell J.D., Emami-Naeini A. *Digital Control of Dynamic Systems*, 3rd ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1998.