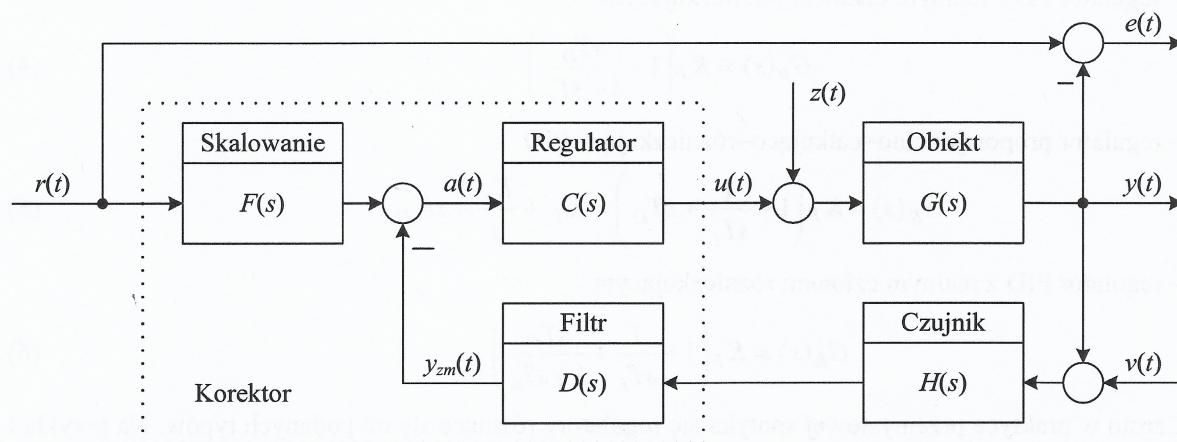


Badanie układu sterowania z regulatorem PID

Mirosław Tomera

1. WPROWADZENIE

W układzie regulacji porównywana jest wartość pomierzona ze sygnałem zadanym i określana jest odchyłka służąca do wyznaczenia sygnału sterującego, który będzie zmniejszał tę odchyłkę do zera lub do bardzo małe wartości. Sposób w jaki regulator automatyczny wyznacza sygnał sterujący nazywa się rodzajem sterowania. Ogólna struktura układu sterowania z pojedynczą pętlą ujemnego sprzężenia zwrotnego pokazana została na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat blokowy typowego układu regulacji z pojedynczą pętlą ujemnego sprzężenia zwrotnego, gdzie:

- $r(t)$ – sygnał zadany (odniesienia),
- $u(t)$ – sygnał sterujący,
- $y(t)$ – wyjście z obiektu (wielkość regułowana),
- $e(t)$ – sygnał uchybu = $r(t) - y(t)$,
- $a(t)$ – sygnał wykonawczy,
- $y_{zm}(t)$ – wyjście z pętli sprzężenia (zmierzona i odfiltrowana wielkość regułowana),
- $D(s)$ – transmitancja filtru,
- $H(s)$ – transmitancja czujnika,
- $C(s)$ – transmitancja regulatora,
- $F(s)$ – przetwarzanie sygnału wejściowego (skalowanie),
- $z(t)$ – zakłócenia działające na obiekt,
- $v(t)$ – szумy pomiarowe,

Do wymagań najczęściej stawianych układom regulacji należą [3]:

- przeregulowanie $M_{p\%} = 0...5\%$ oraz minimalny czas regulacji t_R (przebiegi zbliżone do aperiodycznych)
- przeregulowanie $M_{p\%} = 15...25\%$ oraz minimalny czas regulacji t_R
- minimum całki z kwadratu uchybu: $\min \int_0^{\infty} e^2(t)dt$

Dopuszczalne ustalone zmiany uchybu regulacji zwykle przyjmuje się równe $\pm(0.5,...5)\%$ wartości maksymalnej sygnału regulowanego $y(t)$.

2. RODZAJE REGULATORÓW TYPU PID

Spośród regulatorów uniwersalnych w praktyce wykorzystywane są następujące [1]:

- regulator proporcjonalny P

$$G_R(s) = K_P \quad (1)$$

- regulator proporcjonalno-całkujący PI

$$G_R(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right) \quad (2)$$

- regulator proporcjonalno-różniczkujący PD

$$G_R(s) = K_P (1 + sT_D) \quad (3)$$

- regulator PD z realnym członem różniczkującym

$$G_R(s) = K_P \left(1 + \frac{sT_D}{1 + sT_n} \right) \quad (4)$$

- regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący PID

$$G_R(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right) = K_P + \frac{K_I}{s} + sK_D \quad (5)$$

- regulator PID z realnym członem różniczkującym

$$G_R(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} + \frac{sT_D}{1 + sT_n} \right) \quad (6)$$

Często w praktyce przemysłowej spotyka się regulatory różniące się od podanych typów. Na przykład charakterystyki regulatora PID osiąga się przez szeregowe połączenie członów PI oraz PD. W tym przypadku transmitancja regulatora PID jest następująca

$$G_r(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right) \cdot \left(\frac{1 + sT_D}{1 + sT_n} \right) \quad (7)$$

W innych wykonaniach regulatorów spod działania różniczkującego wyklucza się sygnał wartości zadanej y_z i uzyskuje się nieinteraktywną strukturę regulatora PID

$$U(s) = \left(K_P + \frac{1}{sT_I} \right) \cdot E(s) - \left(\frac{sT_D}{1 + sT_n} \right) \cdot Y(s) \quad (8)$$

Istnieje również struktura regulatora o postaci

$$U(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right) \cdot \left[Y_z(s) - \left(\frac{1 + sT_D}{1 + sT_n} \right) \cdot Y(s) \right] \cdot Y(s) \quad (9)$$

gdzie:

K_P – współczynnik wzmacnienia regulatora, określany niekiedy przez zakres proporcjonalności $x_P = 100\% / K_P$

T_I – stała czasowa całkowania

T_D – stała czasowa różniczkowania

T_n – stała czasowa filtra inercyjnego występującego czasami w członach różniczkowania; najczęściej $T_n \approx (0.05 \div 0.25)T_D$

Dodać należy, że w układzie regulacji optymalne nastawy regulatora są na ogół różne dla uchybu nadążeniowego oraz uchybu spowodowanego zakłóceniem. W praktycznych zastosowaniach, regulator PID strojony jest w układzie regulacji w którym akurat jest zastosowany. Reguły strojenia w skrócie można streszczyć następująco:

1. Ustalenie wartości K_p celem uzyskania wymaganej prędkości odpowiedzi. Zwiększenie wzmocnienia proporcjonalnego zwiększa prędkość odpowiedzi i redukuje uchyb w stanie ustalonym.
2. Dobór sterowania całkującego $1/T_I$ celem osiągnięcia pożądanej jakości w stanie ustalonym (może zaistnieć konieczność skorygowania wartości wzmocnienia K_p). Zwiększenie działania całkującego $1/T_I$ pogarsza stabilność, ale służy do likwidacji uchybu w stanie ustalonym.
3. Dodanie sterowania różniczkującego celem zredukowania przeregulowań i poprawy czasu regulacji. Zwiększenie stałej różniczkowania poprawia stabilność i służy do tłumienia oscylacji.

2.1. Charakterystyki sterowań P, I oraz D

Sterowanie proporcjonalne z nastawą K_p ma wpływ na zmniejszanie czasu narastania i będzie zmniejszało uchyb w stanie ustalonym, lecz nigdy nie będzie go eliminowało. Sterowanie całkujące z nastawą K_I ma wpływ na eliminowanie uchybu w stanie ustalonym, lecz pogarsza odpowiedź w stanie przejściowym. Sterowanie różniczkujące z nastawą K_D ma wpływ na zwiększenie stabilności układu, zmniejszając przeregulowanie i poprawiając odpowiedź przejściową. Wpływ nastawy każdego sterowania K_p , K_I oraz K_D na układ zamknięty zebrany został w tabeli pokazanej poniżej (tabela 1).

Tabela 1. Wpływ nastaw regulatora PID na podstawowe wskaźniki jakości regulacji

	Czas narastania	Przeregulowanie	Czas regulacji	Uchyb w stanie ustalonym
K_p	Zmniejszenie	Zwiększenie	Mała zmiana	Zmniejszenie
K_I	Zmniejszenie	Zwiększenie	Zwiększenie	Eliminacja
K_D	Mała zmiana	Zmniejszenie	Zmniejszenie	Bez zmian

Związki te nie zawsze są dokładnie takie jak podane w tabeli, faktycznie zmiana jednej z tych zmiennych może powodować zmianę pozostałych. Z tego powodu tabela ta powinna być używana jako odniesienie przy określaniu wartości K_p , K_I oraz K_D .

2.2. Ogólne wytyczne dotyczące wyboru typu i doboru nastaw regulatora PID

Przy strojeniu regulatora PID dla danego układu należy wykonać następujące kroki w celu uzyskania pożądanej odpowiedzi

1. Wyznaczenie odpowiedzi układu regulacji z obiektem, ale bez regulatora i określenie co powinno zostać poprawione;
2. Dodanie sterowania proporcjonalnego w celu poprawienia czasu narastania i zmniejszenia uchybu w stanie ustalonym;
3. Dodanie sterowania różniczkującego w celu poprawienia przeregulowania;
4. Dodanie sterowania całkującego w celu wyeliminowania uchybu w stanie ustalonym;
5. Dostrojenie każdej z nastaw K_p , T_I oraz T_D aż uzyska się pożądaną odpowiedź całego układu.

Zawsze można posilić się tabelą pokazaną w tym opracowaniu (tabela 1), aby odszukać na jakie wielkości charakterystyczne wpływają poszczególne sterowania. Nie jest konieczne zastosowanie

wszystkich trzech elementów regulatora (proporcjonalnego, różniczkującego, oraz całkującego) w pojedynczym układzie. Dla przykładu, jeśli regulator PI daje wystarczającą odpowiedź, wówczas nie ma potrzeby stosowania regulatora różniczkującego w układzie. Należy stosować możliwie najprostszy regulator.

Przykład 1

Na rysunku 1.1. przedstawiono układ sterowania temperaturą przepływu powietrza. Zbiornik z gorącą wodą dostarcza wody, która wpływa do wymiennika ciepła w celu ogrzania powietrza. Czujnik temperatury mierzy temperaturę powietrza na wylocie T_{po} i przesyła ją do układu porównującego z temperaturą odniesienia T_z . Różnica temperatur a jest przesyłana do regulatora o transmitancji $G_R(s)$. Wyjście regulatora, którym jest sygnał elektryczny jest przetwarzane na sygnał pneumatyczny przez przetwornik. Wyjście urządzenia wykonawczego steruje prędkością przepływu wody zaworem trójdrogowym. Na Rysunku 1.2 przedstawiono schemat blokowy układu.

Zdefiniowane zostały następujące parametry i zmienne: dM_w jest przyrostem przepływu cieplnego płynu $dM_w = K_M u$, $K_M = 0.054 \text{ kg/s/V}$, T_w temperatura wody $T_w = K_R dM_w$, $K_R = 65^\circ\text{C/kg/s}$, oraz T_{po} jest temperaturą wyjściową powietrza.

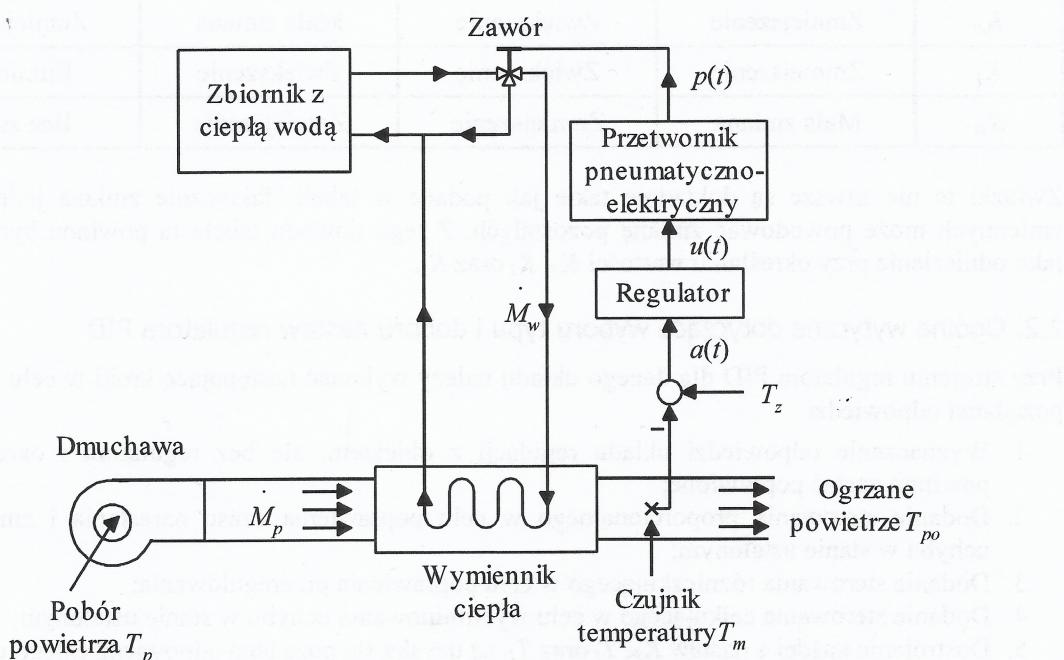
Równanie wymiany ciepła pomiędzy wodą i powietrzem

$$\tau_c \frac{dT_{po}}{dt} = T_w - T_{po} \quad \tau_c = 10 \text{ [s].} \quad (1.1)$$

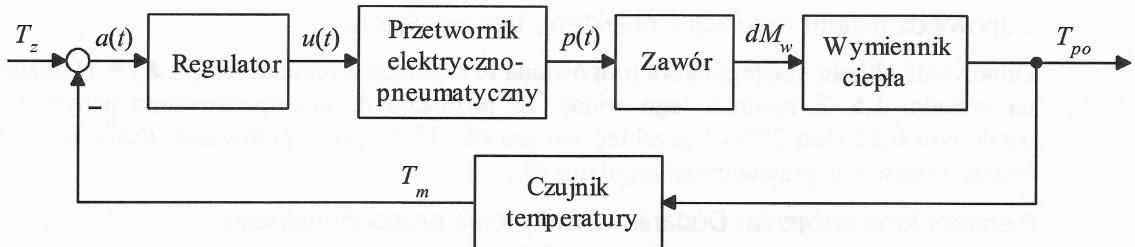
Równanie temperatury czujnika

$$\tau_m \frac{dT_m}{dt} = T_{po} - T_m \quad \tau_m = 2 \text{ [s].} \quad (1.2)$$

- Narysuj funkcjonalny schemat blokowy, który zawiera wszystkie transmitancje układu.
- Wyprowadź transmitancję $T_{po}(s)/T_z(s)$ kiedy $G_R(s) = 1$.
- Dobierz typ regulatora PID i jego parametry.

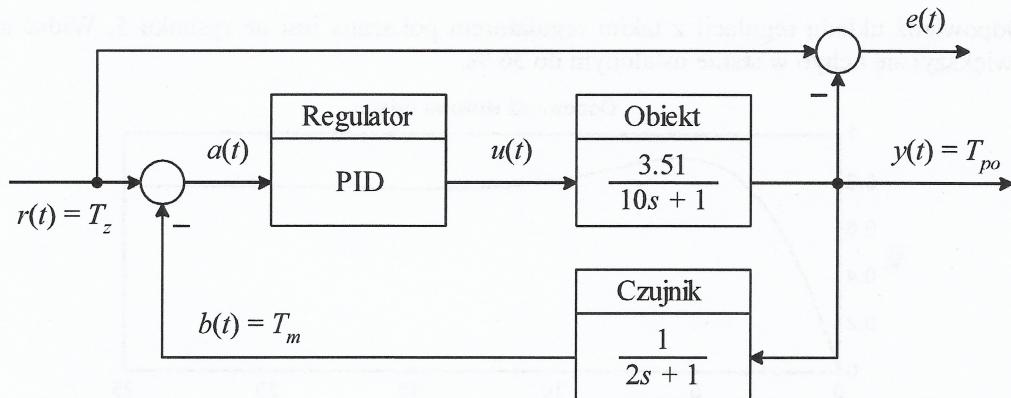


Rys. 1.1. Schemat funkcjonalny układu sterowania temperaturą przepływu powietrza



Rys. 1.2. Schemat blokowy układu sterowania temperaturą przepływu powietrza

Rozwiązanie. Schemat blokowy zawierający transmitancje wyznaczone w oparciu o równania różniczkowe (1.1) oraz (1.2) przedstawiony został na rysunku 1.3.

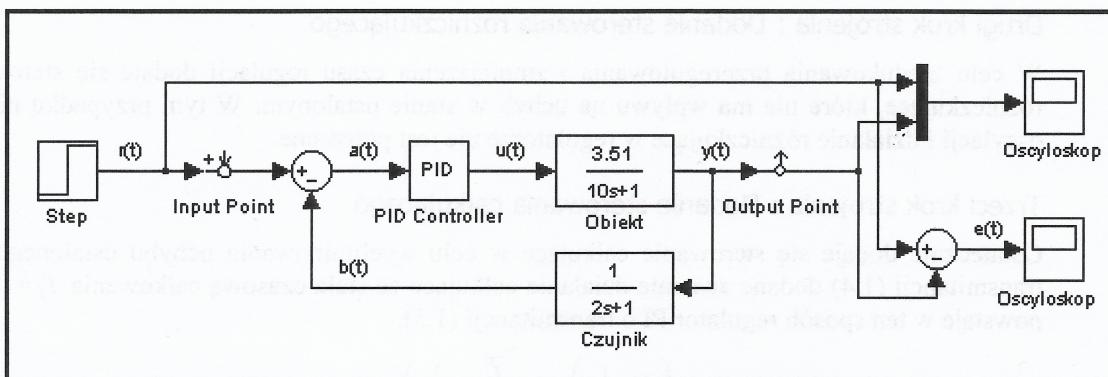


Rys. 1.3. Schemat blokowy układu sterowania temperaturą przepływu powietrza

Transmitancja wypadkowa układu z rysunku 1.3 przy założeniu transmitancji regulatora $G_R(s) = 1$ jest następująca:

$$G_w(s) = \frac{7.02s + 3.51}{20s^2 + 12s + 4.51} \quad (1.3)$$

Układ z rysunku 1.3 zaimplementowany został w SIMULINKU według schematu pokazanego na rysunku 1.4. Uzyskiwane wyniki symulacji przeglądane były w LTIView-erze przy użyciu następujących poleceń Tools/Linear analysis z menu modelu SIMULINKU oraz poleceń Simulink/Get Linearized Model z menu LTIView-era.



Rys. 1.4. Model Simulinka do badania układu sterowania temperaturą przepływu powietrza

Odpowiedź układu regulacji z obiektem, bez regulatora

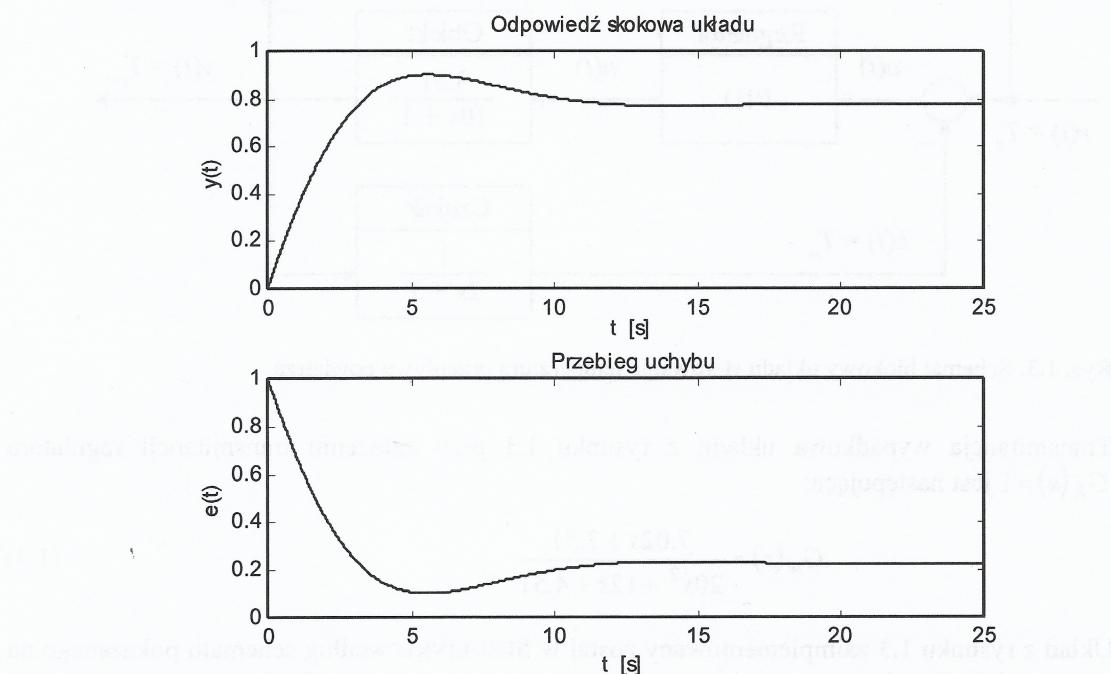
Odpowiedź układu bez regulatora (odpowiada to regulacji z regulatorem P, $K_P = 1$) znajduje się na rysunku 1.5. Z rysunku tego widać, że pozostaje do skompensowania uchyb w stanie ustalonym 0.22 (lub 22%) i przebieg ten ma ok. 15 % przeregulowanie. Oznacza, że trzeba będzie zastosować przynajmniej regulator PI.

Pierwszy krok strojenia: Dodanie wzmacnienia proporcjonalnego

Pierwszym krokiem strojenia jest zazwyczaj zwiększenie wzmacnienia regulatora K_P w celu zmniejszenia czasu narastania i zredukowania uchybu. W tym przypadku w układzie bez regulatora już występuje 15 % przeregulowanie, wydaje się że będzie trzeba zmniejszyć to wzmacnienie gdyż dodanie całkowania jeszcze pogorszy warunki stabilności.

$$G_R(s) = K_P = 0.5 \quad (1.4)$$

Odpowiedź układu regulacji z takim regulatorem pokazana jest na rysunku 5. Widać stąd, że zwiększył się uchyb w stanie ustalonym do 36 %.



Rys. 1.5. Odpowiedź układu $y(t)$ i przebieg uchybu $e(t)$ w odpowiedzi na wymuszenie skokowe układu regulacji z rysunku 1.3 przy transmitancji regulatora $G_R(s)=1$.

Drugi krok strojenia : Dodanie sterowania różniczkującego

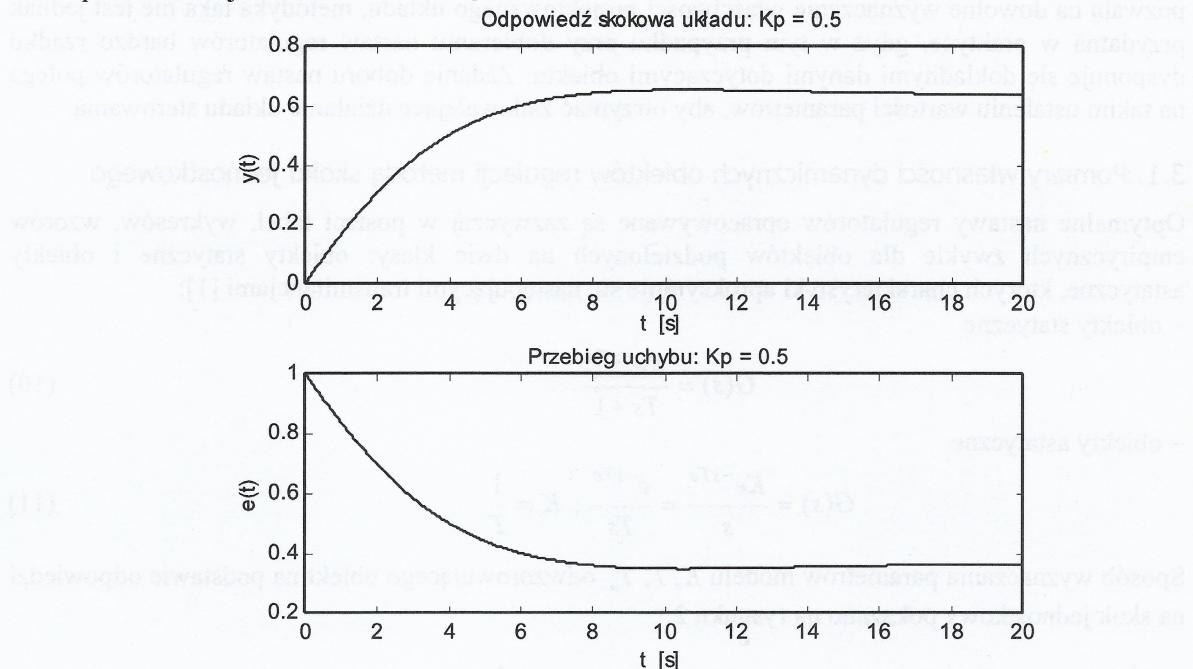
W celu zredukowania przeregulowania i zmniejszenia czasu regulacji dodaje się sterowanie różniczkujące, które nie ma wpływu na uchyb w stanie ustalonym. W tym przypadku nie ma oscylacji i działanie różniczkujące w regulatorze nie jest potrzebne.

Trzeci krok strojenia : Dodanie sterowania całkującego

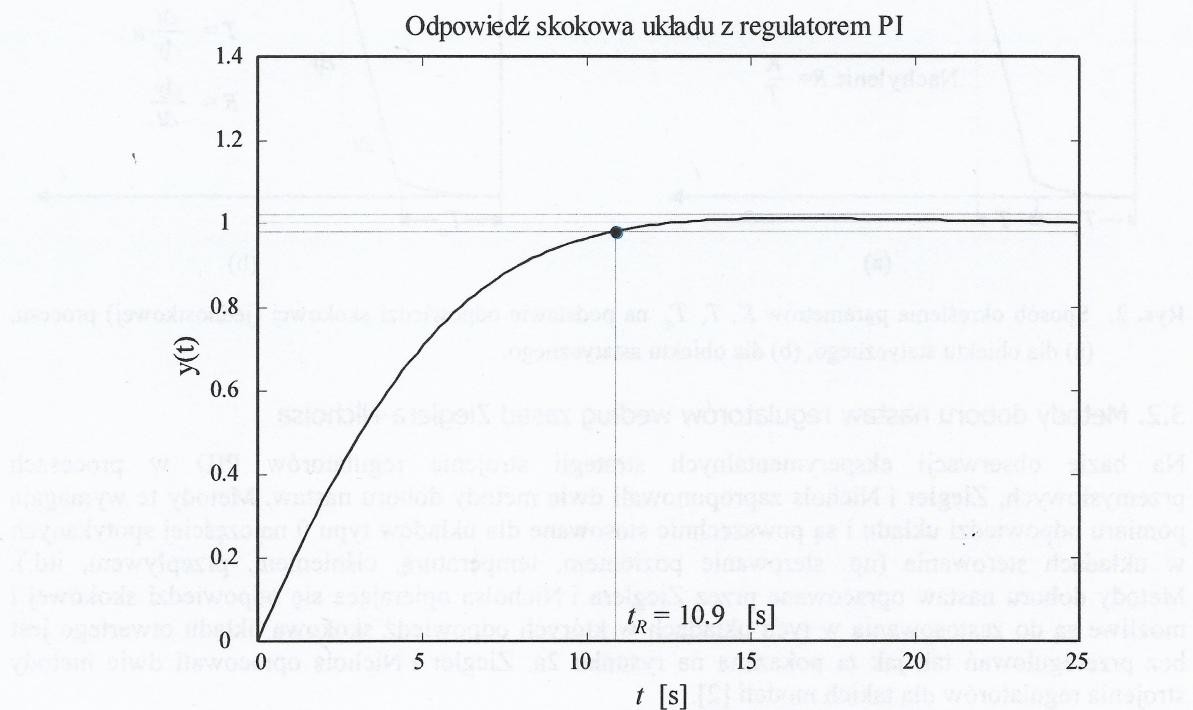
Ostatecznie dodaje się sterowanie całkujące w celu wyeliminowania uchybu ustalonego. Do transmitancji (1.4) dodane zostanie działanie całkujące ze stałą czasową całkowania $T_I = 10$ [s] powstaje w ten sposób regulator PI o transmitancji (1.5).

$$G_R(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right) = 0.5 \cdot \left(1 + \frac{1}{10s} \right) \quad (1.5)$$

Odpowiedź układu z regulatorem PI znajduje się na rysunku 1.7. Uzyskany został przebieg aperiodyczny o maksymalnym przeregulowaniu mniejszym od 2 [%]. Teraz należałoby ponownie stroić wzmocnienia K_p .



Rys. 1.6. Odpowiedź układu $y(t)$ i przebieg uchybu $e(t)$ w odpowiedzi na wymuszenie skokowe układu regulacji z rysunku 1.3 przy transmitancji regulatora $G_R(s)=0.5$.



Rys. 1.7. Odpowiedź układu $y(t)$ i przebieg uchybu $e(t)$ w odpowiedzi na wymuszenie skokowe układu regulacji z rysunku 1.3 z zastosowaniem regulatora PI o transmitancji (1.5)

3. STROJENIE PARAMETRÓW REGULATORA PID W PRAKTYCE

Dla każdego procesu istnieje możliwość ścisłej analizy teoretycznej układów sterowania, która pozwala na dowolne wyznaczenie właściwości projektowanego układu, metodyka taka nie jest jednak przydatna w praktyce, gdyż w tym przypadku przy dobieraniu nastaw regulatorów bardzo rzadko dysponuje się dokładnymi danymi dotyczącymi obiektu. Zadanie doboru nastaw regulatorów polega na takim ustaleniu wartości parametrów, aby otrzymać zadowalające działanie układu sterowania.

3.1. Pomiarły własności dynamicznych obiektów regulacji metodą skoku jednostkowego

Optymalne nastawy regulatorów opracowywane są zazwyczaj w postaci tabel, wykresów, wzorów empirycznych zwykle dla obiektów podzielonych na dwie klasy: obiekty statyczne i obiekty astatyczne, których charakterystyki aproksymuje się następującymi transmitancjami [1]:

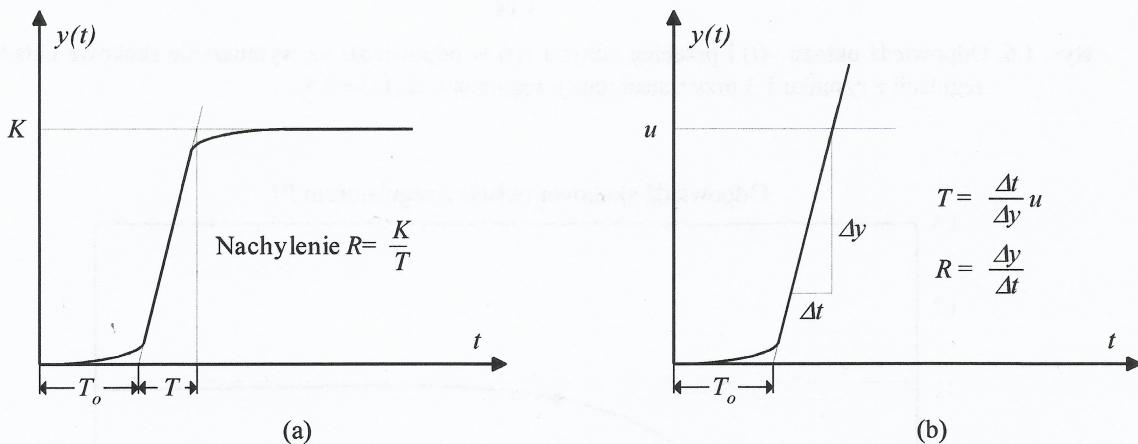
- obiekty statyczne

$$G(s) = \frac{Ke^{-sT_o}}{Ts + 1} \quad (10)$$

- obiekty astatyczne

$$G(s) = \frac{Ke^{-sT_o}}{s} = \frac{e^{-sT_o}}{Ts}; K = \frac{1}{T} \quad (11)$$

Sposób wyznaczania parametrów modelu K , T , T_o odwzorowującego obiekt na podstawie odpowiedzi na skok jednostkowy pokazano na rysunku 2.



Rys. 2. Sposób określenia parametrów K , T , T_o na podstawie odpowiedzi skokowej (jednostkowej) procesu.
(a) dla obiektu statycznego, (b) dla obiektu astatycznego.

3.2. Metody doboru nastaw regulatorów według zasad Zieglera-Nicholsa

Na bazie obserwacji eksperymentalnych strategii strojenia regulatorów PID w procesach przemysłowych, Ziegler i Nichols zaproponowali dwie metody doboru nastaw. Metody te wymagają pomiaru odpowiedzi układu i są powszechnie stosowane dla układów typu 0 najczęściej spotykanych w układach sterowania (np. sterowanie poziomem, temperaturą, ciśnieniem, przepływem, itd.). Metody doboru nastaw opracowane przez Zieglera i Nicholsa opierająca się odpowiedzi skokowej i możliwe są do zastosowania w tych układach w których odpowiedź skokowa układu otwartego jest bez przeregulowań tak jak ta pokazana na rysunku 2a. Ziegler i Nichols opracowali dwie metody strojenia regulatorów dla takich modeli [2].

3.2.1. Metoda bazująca na odpowiedzi skokowej

Ziegler i Nichols zauważyl, że odpowiedź skokowa większości układów sterowania ma kształt podobny do tego z rysunku 2a. Krzywa ta może być otrzymana z danych eksperymentalnych lub symulacji dynamicznej obiektu.

Krzywa o kształcie S jest charakterystyczna dla układów wyższych rzędów.

Transmitancja (10) aproksymuje układy wyższych rzędów prostym układem I rzędu z dodatkowym opóźnieniem T_o wyrażonym w sekundach. Stałe w równaniu (10) mogą być określone z odpowiedzi skokowej procesu. Jeśli styczna narysowana jest w punkcie przegięcia krzywej odpowiedzi, wówczas nachylenie linii jest wyznaczane ze wzoru $R=K/T$, a przecięcie stycznej z osią czasu określa czas opóźnienia T_o .

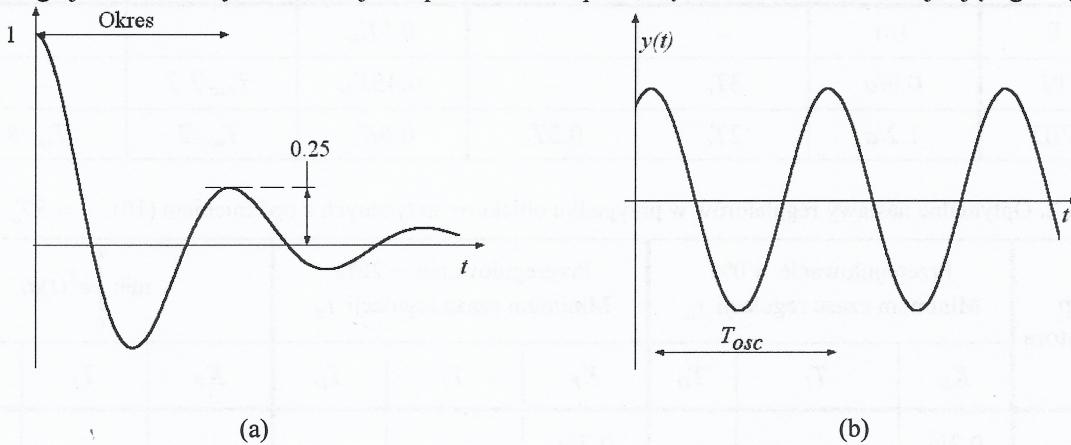
W pierwszej metodzie wybór parametrów regulatora opiera się na współczynniku zanikania równym w przybliżeniu 0.25. Oznacza to, że dominująca składowa przejściowa zanika do jednej czwartej swojej wartości maksymalnej po jednym okresie oscylacji (rys. 3a). Takie zanikanie odpowiada współczynnikowi $\zeta = 0.21$ w układzie II rzędu i wartość ta ustalona została na zasadzie kompromisu pomiędzy szybką odpowiedzią i wystarczającym zapasem stabilności.

Autorzy symulowali równania dla różnych układów na komputerze analogowym i stroili parametry regulatorów, aż uzyskali odpowiedzi przejściowe zanikające do 25% poprzedniej wartości w jednym okresie. Metoda Zieglera-Nicholsa bazująca na odpowiedzi skokowej daje dobre rezultaty gdy spełniony jest następujący warunek [2]:

$$0.15 < \frac{T_o}{T} < 0.6$$

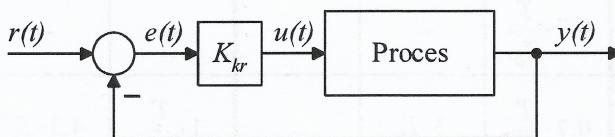
3.2.2. Metoda z wyznaczaniem wzmacnienia krytycznego

W drugiej metodzie kryterium strojenia parametrów opiera się na ocenie układu znajdującego się na



Rys. 3. Przebiegi czasowe (a) kwadratowy współczynnik zanikania, (b) układ na granicy stabilności

granicy stabilności. Ten algorytm strojenia może być stosowany dla układów typu 0 posiadających $rzad > 2$. Może być również zastosowana do samostrojenia regulatorów PID. Metoda ta możliwa jest do zastosowania jeśli możliwe jest znalezienie wzmacnienia przy którym wykres Nyquista przecina punkt krytyczny lub kiedy linia pierwiastkowa przecina oś liczb urojonych. Wzmocnienie to może być znalezione eksperymentalnie, wymaga się wówczas zwiększenia wzmacnienia w układzie zamkniętym aż na wyjściu pojawią się oscylacje o stałej amplitudzie. Jest to w niektórych zastosowaniach praktycznych bardzo niebezpieczna operacja. Zwiększa się wzmocnienie proporcjonalne aż zauważa się oscylacje o stałej amplitudzie, odpowiada to wzmacnieniu krytycznemu K_{kr} (rys. 4) i oscylacjom o okresie T_{osc} (rys. 3b). Okres oscylacji powinien być mierzony kiedy amplituda oscylacji jest dość mała [2].



Rys. 4. Określenie wzmacnienia krytycznego i okresu oscylacji

Wzmocnienie statyczne dla pętli otwartej układu

$$K_o = GH(s) \Big|_{s=0}$$

Metoda strojenia bazująca na wzmacnieniu krytycznym daje dobre rezultaty gdy spełniony jest warunek:

$$2 < K_o K_{kr} < 20$$

lecz znów odpowiedź układu zamkniętego zawiera oscylacje. Parametry regulatora zaproponowane przez Zieglera i Nicholsa dla typowego regulatora pokazane są w tabeli 1

3.2.3. Inne optymalne reguły nastaw regulatorów PID

W tabelach 2 i 3 zebrane zostały zasady doboru nastaw regulatorów dla obiektów statycznych i astatycznych opisanych transmitancjami (10) oraz (11) według kryteriów: 0% i 20% przeregulowania oraz minimum całki kwadratu uchybu [3].

Tabela 1. Nastawy parametrów według zasad Zieglera-Nicholsa,

Typ regulatora	Optymalne wartości parametrów					
	Próba skokowa ($R=K/T$, T_o , $a=RT_o$)			Granica stabilności (K_{kr} , T_{osc})		
	K_p	T_I	T_D	K_p	T_I	T_D
P	$1/a$	–	–	$0.5K_{kr}$	–	–
PI	$0.9/a$	$3T_o$	–	$0.45K_{kr}$	$T_{osc}/1.2$	–
PID	$1.2/a$	$2T_o$	$0.5T_o$	$0.6K_{kr}$	$T_{osc}/2$	$T_{osc}/8$

Tabela 2. Optymalne nastawy regulatorów w przypadku obiektów statycznych z opóźnieniem (10), $a = RT_o$

Typ regulatora	Przeregulowanie ≈ 0% Minimum czasu regulacji t_R			Przeregulowanie ≈ 20% Minimum czasu regulacji t_R			$\min \int_0^{\infty} e^2(t)dt$		
	K_P	T_I	T_D	K_P	T_I	T_D	K_P	T_I	T_D
P	$0.3/a$	–	–	$0.7/a$	–	–	–	–	–
PI	$0.6/a$	$0.8T_o + 0.5T$	–	$0.7/a$	$T_o + 0.3T$	–	$1/a$	$T_o + 0.35T$	–
PID	$0.95/a$	$2.4 T_o$	$0.4 T_o$	$1.2/a$	$2.0 T_o$	$0.4 T_o$	$1.4/a$	$1.3 T_o$	$0.5 T_o$

Tabela 3. Optymalne nastawy regulatorów w przypadku obiektów astatycznych z opóźnieniem (11)

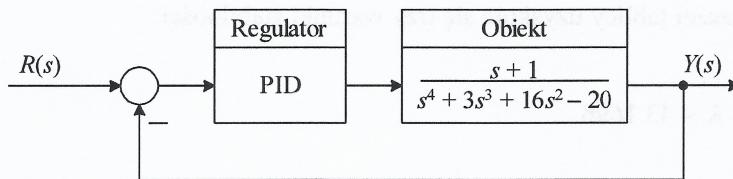
Typ regulatora	Przeregulowanie ≈ 0% Minimum czasu regulacji t_R			Przeregulowanie ≈ 20% Minimum czasu regulacji t_R			$\min \int_0^{\infty} e^2(t)dt$		
	K_P	T_I	T_D	K_P	T_I	T_D	K_P	T_I	T_D
P	$0.37 \cdot \frac{T}{T_o}$	–	–	$0.7 \cdot \frac{T}{T_o}$	–	–	–	–	–
PI	$0.46 \cdot \frac{T}{T_o}$	$5.75 \cdot T_o$	–	$0.7 \cdot \frac{T}{T_o}$	$3 \cdot T_o$	–	$1 \cdot \frac{T}{T_o}$	$4.3 \cdot T_o$	–
PID	$0.65 \cdot \frac{T}{T_o}$	$5 \cdot T_o$	$0.23 \cdot T_o$	$1.1 \cdot \frac{T}{T_o}$	$2 \cdot T_o$	$0.37 \cdot T_o$	$1.36 \cdot \frac{T}{T_o}$	$1.6 \cdot T_o$	$0.5 \cdot T_o$

4. DOBÓR NASTAW Z WYKORZYSTANIEM KRYTERIUM ROUTHIA

Strojenie tych parametrów może odbywać się ręcznie metodą prób i błędów. Jednak zanim dokona się ręcznego dostrajania parametrów regulatora warto wyznaczyć wartości nastaw analityczne i znaleźć się w pobliżu punktu optymalnego, a następnie próbować dostroić układ ręcznie metodą doświadczalną. Gdy znana jest transmitancja pętli otwartej układ regulacji to dobór nastaw regulatora PID można przeprowadzić analitycznie metodą oscylacyjną Ziegler-Nicholsa. może być w łatwy sposób wykonany z wykorzystaniem kryterium Routha lub Nyquista. Kryterium Routha może być wykorzystane w układach w których nie występuje czyste opóźnienie, natomiast Nyquista w układach z opóźnieniem. Poniższy przykład ilustruje wykorzystanie kryterium Routha do doboru nastaw regulatora PID.

Przykład 2

W układzie z rysunku 2.1 należy dobrać nastawy regulatora PID (5) przy użyciu oscylacyjnej reguły Zieglera-Nicholsa według wzorów zawartych w tabeli 1. Przy użyciu kryterium Routha wyznaczyć wzmacnienie krytyczne K_{kr} oraz okres oscylacji T_{osc} .



Rys. 2.1. Rozważany schemat układu.

Rozwiążanie. Transmitancja regulatora PID wyrażona wzorem (5) jest następująca

$$G_R(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right) = K_P + \frac{K_I}{s} + sK_D \quad (2.1)$$

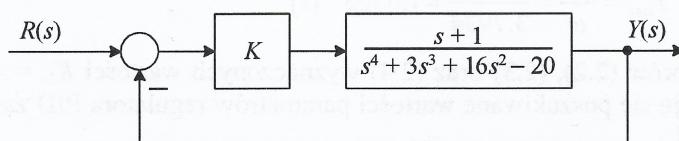
We wzorze (2.1) występują trzy parametry strojone, które wpływają na jakość pracy układu pokazanego na rysunku 2.1. Według Zieglera-Nicholsa wartości strojonych parametrów mogą być wyznaczone na podstawie tabeli 1 według następujących wzorów

$$K_P = 0.6K_{kr} \quad (2.2)$$

$$T_I = \frac{T_{osc}}{2} \quad (2.3)$$

$$T_D = \frac{T_{osc}}{8} \quad (2.4)$$

Aby wyznaczyć wartości parametrów regulatora PID potrzebna jest znajomość wzmacnienia krytyczne K_{kr} oraz okresu oscylacji T_{osc} co wykonane zostanie przy użyciu kryterium Routha w układzie z rysunku 2.2.



Rys. 2.2. Regulator PID z wyłączeniem działaniem całkującym i różniczkującym.

Dla układu z rysunku 2.2 transmitancja wypadkowa jest następująca:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s+1)}{s^4 + 3s^3 + 16s^2 + Ks + K - 20} \quad (2.5)$$

i równanie charakterystyczne:

$$M(s) = s^4 + 3s^3 + 16s^2 + Ks + K - 20 = 0 \quad (2.6)$$

Tablica Routha dla równania (2.6):

s^4	1	16	$K - 20$
s^3	3	K	
s^2	$\frac{48 - K}{3}$	$K - 20$	
s^1	$\frac{-K^2 + 39K + 180}{48 - K}$		
s^0	$K - 20$		

Na podstawie powyższej tablicy uzyskuje się trzy warunki stabilności:

$$s^2 \quad K < 48$$

$$s^1 \quad -4.1696 < K < 43.1696$$

$$s^0 \quad K > 20$$

Z rozważenia tych trzech powyższych warunków otrzymany zakres stabilności dla parametru K

$$20 < K < 43.1696 \quad (2.7)$$

Układ znajdzie się na granicy stabilności jeśli w tablicy Routha w wierszu s^1 pojawią się same zera, natomiast współczynnik w wierszu s^0 będzie większy od zera. Dla układu opisanego równaniem charakterystycznym (2.6) uzyskuje się wówczas warunek $-K^2 + 39K + 180 = 0$, czyli

$$K_{kr} = 43.1696 \quad (2.8)$$

Częstotliwość oscylacji wyznacza się z wiersza przy s^2 , w tym przypadku wielomian pomocniczy uzyskany z wiersza przy s^1

$$\frac{48 - K_{kr}}{3} s^2 + K_{kr} - 20 = 0 \quad (2.9)$$

Podstawiając do równania (2.9) warunek przy którym układ jest na granicy stabilności (2.8) czyli $K_{kr} = 43.1696$ uzyskuje się z rozwiązania dwa pierwiastki sprzężone umiejscowione na osi ukojonej w punktach

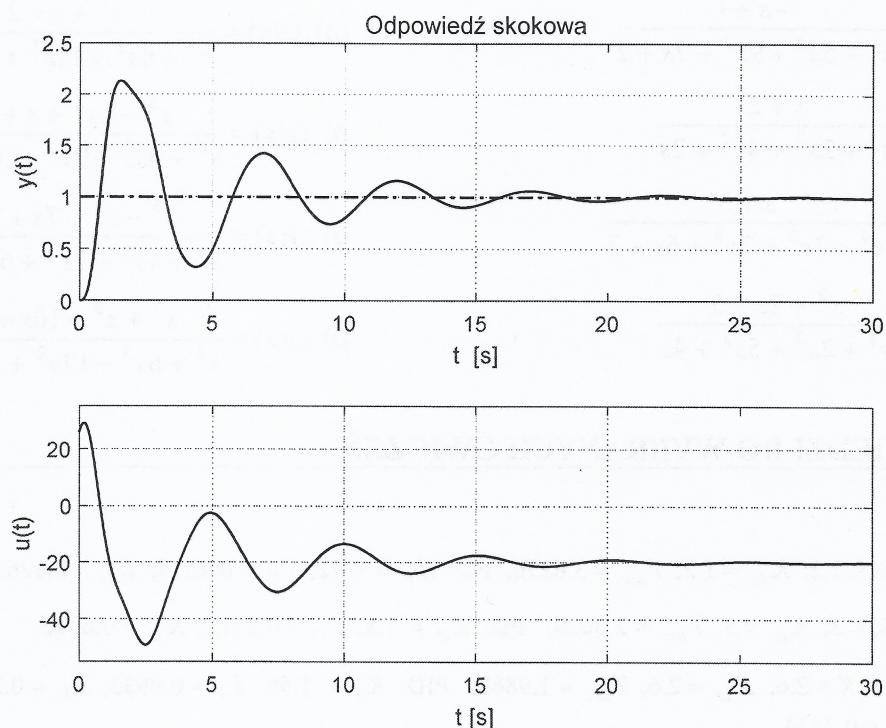
$$s_{1,2} = \pm j\omega = \pm j 3.7934 \quad (2.10)$$

W układzie z rysunku 2.2 pojawią się oscylacje o stałej amplitudzie, gdy wzmacnienie będzie wynosiło $K = 43.1696$ i okres tych oscylacji

$$T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3.7934} = 1.6563 \quad [s] \quad (2.11)$$

Po podstawieniu do wzorów (2.2), (2.3) oraz (2.4) wyznaczonych wartości $K_{kr} = 43.1696$ oraz $T_{osc} = 1.6563$ [s] uzyskuje się poszukiwane wartości parametrów regulatora PID zastosowanego w układzie z rysunku 2.1.

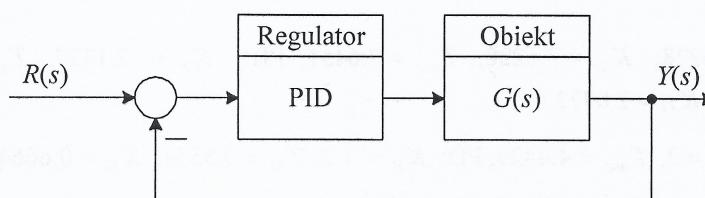
$$K_P = 25.9018, \quad T_I = 0.8288 \quad [\text{s}], \quad T_D = 0.2070 \quad [\text{s}] \quad (2.12)$$



Rys. 2.3. Odpowiedź skokowa uzyskanego układu sterowania z regulatorem PID z dobranymi nastawami metodą oscylacyjną Zieglera-Nicholsa (2.12).

ĆWICZENIA

M.1. Dla układu z rysunku M.1 dobierz parametry regulatora typu PID wykorzystując oscylacyjną metodę Ziglera-Nicholsa. Do wyznaczenia wzmacnienia krytycznego K_{kr} oraz okresu oscylacji T_{osc} zastosuj kryterium Routha.



Rys. M.1. Schemat blokowy układu regulacji

Transmitancje obiektów są następujące:

$$a) G(s) = \frac{10}{s^3 + 4s^2 + 3s}$$

$$e) G(s) = \frac{s+2}{s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 2s}$$

$$b) G(s) = \frac{s+5}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

$$f) G(s) = \frac{5s+7}{s^4 + 5s^3 + 13s^2 + 14s + 6}$$

$$c) G(s) = \frac{20}{s^3 + 6s^2 + 10s + 8}$$

$$g) G(s) = \frac{s^2 - 3s + 2}{s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 10s + 1}$$

$$d) G(s) = \frac{s^2 - 2s + 2}{s^3 + 5s^2 + 17s + 13}$$

$$h) G(s) = \frac{s^2 + 3s + 8}{s^4 + 4s^3 + 7s^2 + 9s + 4}$$

i) $G(s) = \frac{-s + 1}{s^4 + 5s^3 + 9s^2 + 7s + 2}$

j) $G(s) = \frac{s + 2}{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 2s}$

k) $G(s) = \frac{s + 3}{s^4 + 3s^3 + 7s^2 + 6s + 2}$

l) $G(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 4s}$

m) $G(s) = \frac{s^3 + s + 2}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 11s + 8}$

n) $G(s) = \frac{s^3 - 2s^2 + s + 2}{s^4 + 4s^3 + 9s^2 + 10s + 5}$

o) $G(s) = \frac{s^3 - s^2 + 7s + 2}{s^4 + 4s^3 + 7s^2 + 6s + 5}$

p) $G(s) = \frac{s^3 + s^2 + 10s + 24}{s^4 + 6s^3 + 17s^2 + 20s + 8}$

ODPOWIEDZI DO WYBRANYCH ĆWICZEŃ

M.1.

- a) $0 < K < 1.2$; $K_{kr} = 1.2$, $T_{osc} = 3.6276$, PD: $K_P = 0.72$, $T_D = 0.4534$; $K_D = 0.3265$.
- b) $0 < K < 3$; $K_{kr} = 3$, $T_{osc} = 2.8099$, PD: $K_P = 1.8$, $T_D = 0.3512$; $K_D = 0.6322$.
- c) $-0.4 < K < 2.6$; $K_{kr} = 2.6$, $T_{osc} = 1.9869$, PID: $K_P = 1.56$, $T_I = 0.9935$, $T_D = 0.2484$; $K_I = 1.5703$, $K_D = 0.3874$.
- d) $-4.8788 < K < 7.3788$; $K_{kr} = 7.3788$, $T_{osc} = 4.1959$, PI: $K_P = 3.3205$, $T_I = 3.4966$, $K_I = 0.9496$.
- e) $0 < K < 0.8062$; $K_{kr} = 0.8062$, $T_{osc} = 7.5015$, PD: $K_P = 0.4837$, $T_D = 0.9377$; $K_D = 0.4536$.
- f) $-0.8571 < K < 4.9539$; $K_{kr} = 4.9539$, $T_{osc} = 2.2564$, PID: $K_P = 2.9724$, $T_I = 1.1282$, $T_D = 0.2821$; $K_I = 2.6346$, $K_D = 0.8384$.
- g) $-0.5 < K < 2.5480$; $K_{kr} = 2.5480$, $T_{osc} = 7.0903$, PI: $K_P = 1.1466$, $T_I = 5.9086$, $K_I = 0.1941$.
- h) $-0.5 < K < 2$; $K_{kr} = 2$, $T_{osc} = 2.8099$, PID: $K_P = 1.2$, $T_I = 1.4050$, $T_D = 0.3512$; $K_I = 0.8541$, $K_D = 0.4215$.
- i) $-2 < K < 3.6228$; $K_{kr} = 3.6228$, $T_{osc} = 7.6451$, PID: $K_P = 2.1737$, $T_I = 3.8226$, $T_D = 0.9556$; $K_I = 0.5668$, $K_D = 2.0772$.
- j) $0 < K < 2$; $K_{kr} = 2$, $T_{osc} = 4.4429$, PD: $K_P = 1.2$, $T_D = 0.5554$; $K_D = 0.6664$.
- k) $-0.6667 < K < 3.3693$; $K_{kr} = 3.3693$, $T_{osc} = 3.5554$, PID: $K_P = 2.0216$, $T_I = 1.7777$, $T_D = 0.4444$; $K_I = 1.1372$, $K_D = 0.8984$.
- l) $0 < K < 3$; $K_{kr} = 3$, $T_{osc} = 2.8099$, PD: $K_P = 1.8$, $T_D = 0.3512$; $K_D = 0.6322$.
- m) $-4 < K < 3.2795$; $K_{kr} = 3.2795$, $T_{osc} = 5.0651$, PID: $K_P = 1.9677$, $T_I = 2.5325$, $T_D = 0.6331$; $K_I = 0.7770$, $K_D = 1.2458$.
- n) $-2.5 < K < 1.5266$; $K_{kr} = 1.5266$, $T_{osc} = 4.3507$, PID: $K_P = 0.9159$, $T_I = 2.1753$, $T_D = 0.5438$; $K_I = 0.4211$, $K_D = 0.4981$.
- o) $-2.5 < K < 1.4047$; $K_{kr} = 1.4047$, $T_{osc} = 3.6710$, PID: $K_P = 0.8428$, $T_I = 1.8355$, $T_D = 0.4589$; $K_I = 0.4592$, $K_D = 0.3668$.
- p) $-0.3333 < K < 3.0176$; $K_{kr} = 3.0176$, $T_{osc} = 2.6637$, PID: $K_P = 1.8105$, $T_I = 1.3318$, $T_D = 0.3330$; $K_I = 1.3594$, $K_D = 0.6028$.

Literatura

1. Arendt R., Imajew D., Kostrzewski M., Kowalski Z., Morawski L. (1995). *Laboratorium podstaw automatyki*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Morskiej w Gdyni.
2. Franklin G.F., Powell J.D., Emami-Naeini A. (1994). *Feedback Control of Dynamic Systems*, 3rd ed, Addison-Wesley.
3. Findeisen W. (red.), (1973). *Poradnik inżyniera automatyka*. Wydanie 2. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne. Warszawa.