Uniwersytet Morski w Gdyni
Katedra Automatyki Okrętowej

Automatyka i Robotyka

Wprowadzenie do MATLABA – Laboratorium

Mirosław Tomera

MATLAB (**Mat**rix **Lab**oratory) jest interaktywnym oprogramowaniem wysokiego poziomu wydajnie wspierającym pracę przy projektowaniu i analizie układów sterowania. Podstawową jednostką obliczeniową jest macierz. Wektory i skalary mogą być tutaj rozpatrywane jako specjalne typy macierzy. Typowe wyrażenie macierzowe zawarte jest w nawiasach prostokątnych $[\cdot]$. Elementy w kolumnach odseparowane są od siebie spacjami lub przecinkami, wiersze natomiast średnikami lub wciśnięciem klawisza Enter.

1. PODSTAWOWE OPERACJE NA MACIERZACH

1.1. WPROWADZENIE DANYCH DO MACIERZY

Przy wprowadzaniu danych w oknie komend MATLABA, linia rozpoczyna się znakiem >> który informuje o tym, że w tym miejscu zaczyna się wprowadzana linia z danymi, komendami lub funkcjami.

W przypadku wpisywania danych do macierzy najpierw podawana jest jej nazwa (**A**), a następnie znak równości (=). Cała wpisywana macierz zawiera się w nawiasie klamrowym([...]). Wprowadzana macierz może składać się z kilku wierszy i kolumn. Macierze mogą być wprowadzane w jednej lub w wielu liniach. Wiersze mogą być oddzielone od siebie średnikiem (;) lub naciśnięciem klawisza Enter. Wciskanie klawisza Enter spowoduje, że wprowadzanie macierzy będzie odbywać się w wielu liniach. Taka praktyka jest najbardziej użyteczna przy wprowadzaniu bardzo dużych macierzy. Elementy w wierszu mogą być oddzielone od siebie znakiem spacji lub przecinkiem.

Przy wprowadzaniu macierzy nie trzeba wcześniej deklarować ich rozmiaru; pamięć dla nich przydzielana jest automatycznie. W przypadku wpisywania nowych wartości do tej samej macierzy jest ona automatycznie redefiniowana, dostrojony zostanie jej rozmiar. Elementy macierzy mogą zawierać podstawowe funkcje matematyczne, funkcje trygonometryczne, jak również liczby zespolone.

Poniższy przykład ilustruje sposób w jakim dane wprowadzane są w oknie komend MATLABA do macierzy.

Przykład 1

Przypuśćmy, że należy zapisać w MATLABIE następującą macierz **A**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4j & \sqrt{2} \\ \log(-1) & \sin(\pi/4) & \cos(\pi/3) \\ \arcsin(0.5) & \arccos(0.8) & \exp(0.8) \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Wprowadzanie macierzy **A** odbędzie się w oknie komend MATLABA.

W pierwszej linii wpisane zostały dwa pierwsze wierze macierzy **A**, pierwszy wiersz został zakończony średnikiem natomiast jego elementy zostały oddzielone od siebie przecinkami, drugi wiersz macierzy zakończony został wciśnięciem przycisku Enter, a jego elementy oddzielone zostały od siebie spacjami. W trzecim wierszu macierzy **A** poszczególne elementy zostały rozdzielone zarówno przecinkiem jak i spacją.

```
>> A=[3,-4*j,sqrt(2); log(-1) sin(pi/4) cos(pi/3)
asin(0.5),acos(0.8) exp(0.8)]
```

Po nawiasie kończącym wpisywanie macierzy ( ]) nie został wpisany średnik co stanowi informacje dla MATLABA, że należy wypisać na ekran całą zawartość wpisywanej macierzy **A**.

```
A =
   3.0000                  0 - 4.0000i   1.4142
        0 + 3.3634i   0.7071             0.5000
   0.5236             0.6435             2.2255
```

Podsumowując należy stwierdzić, że do oddzielania od siebie poszczególnych elementów (kolumn) w macierzy można zastosować zarówno przecinki jaki i spacje, a wiersze można zakończyć średnikiem lub wciśnięciem przycisku Enter. Inny przykład

1.2. OPERACJE MATEMATYCZNE NA MACIERZACH

Ważnymi podstawowymi operacjami na macierzach są dodawanie, odejmowanie, mnożenie, transpozycja, potęgowanie i tak zwane operacje na macierzach, które dotyczą manipulacji na elementach macierzy. Operacje matematyczne mające zastosowanie do macierzy, zebrane zostały w tabeli 1.

Tabela 1. Operacje matematyczne

+	Dodawanie
–	Odejmowanie
*	Mnożenie
/	Dzielenie
^	Potęgowanie

Operacje na macierzach wymagają aby ich rozmiary były kompatybilne.

1.2.1. Dodawanie i odejmowanie macierzy

Operacje dodawania i odejmowania wymagają aby macierze były tych samych rozmiarów. Jeśli Jeśli macierz **A** ma rozmiar $n \times m$, a macierz **B** rozmiar $p \times r$ to działanie **A** ± **B** to zostanie wykonane w MATLABIE tylko wówczas gdy $n = p$ oraz $m = r$.

1.2.2. Mnożenie macierzy

Mnożenie tych macierzy **A*B** będzie możliwe jeśli $m = p$. Mnożenie macierzy przez wektor jest specjalnym przypadkiem mnożenia macierzy. Przypuśćmy, że **b** jest wektorem o długości p. Mnożenie macierzy **A** o rozmiarze $n \times m$przez wektor **b** będzie możliwe tylko wówczas jeśli $m = p$. W wyniku tego mnożenia **y** = **A*b** uzyskany zostanie wektor o rozmiarze $n \times 1$.

Przykład 2

Przykład ten ilustruje podstawowe trzy operacje matematyczne wykonywane na macierzach:

dodawanie, odejmowanie i mnożenie. Najpierw należy wprowadzić macierze na których następnie wykonywane będą te operacje.

```
>> A=[1 3; 5 9]; B=[4 -7; 10 0];
```

Dodawanie wprowadzonych macierzy

```
>> A+B
ans =
     5    -4
    15     9
```

Odejmowanie

```
>> A-B

ans =

    -3    10

    -5     9
```

Mnożenie

```
>> A*B

ans =

    34    -7
   110   -35
```

1.2.3. Transpozycja macierzy

Transpozycja macierzy realizowana jest przez użyciu apostrofu ('). W celu utworzenia skalara z dwóch wektorów, należy najpierw dokonać operacji transpozycji macierzy, a następnie mnożenia.

Przypuśćmy, że **x** oraz **y** są wektorami o rozmiarach $n \times 1$, wówczas przez zastosowanie operacji **x'*y** uzyska się skalar. Macierz zostanie uzyskana po wykonaniu mnożenia dwóch wektorów poprzez następującą operację **x*y'**. Dla dwóch wektorów o rozmiarach $n \times 1$ uzyska się macierz o rozmiarach $n \times n$ rzędu 1.

Przykład 3

Przykład ilustrujący operacje związane z transponowaniem macierzy. Najpierw wprowadzenie macierzy na których wykonane zostaną operacje transponowania

```
>> A=[1 2; 4 5]; x=[5;pi;sin(pi/2)]; y=[exp(-0.5);-13;pi^2];
```

Transpozycja macierzy

```
>> A'

ans =
     1     4
     2     5
```

Utworzenie skalara z dwóch wektorów

```
>> C=x'*y

C =
  -27.9384
```

Utworzenie macierzy z dwóch wektorów

```
>> D=x*y'

    D =
        3.0327   -65.0000    49.3480
        1.9055   -40.8407    31.0063
        0.6065   -13.0000     9.8696
```

Sprawdzenie rzędu utworzonej macierzy **D**

```
>> rank(D)

ans =
     1
```

1.3. MATEMATYCZNE OPERATORY MACIERZOWE

Poza poznanymi już podstawowymi operacjami matematycznymi zebranymi w tabeli 1 są jeszcze operacje mnożenia macierzowego, dzielenia i potęgowania, które wymagają dodania kropki jak to zostało pokazane w tabeli 2.

Tabela 2. Matematyczne operatory macierzowe

.*	Mnożenie
./	Dzielenie
.^	Potęgowanie

W przypadku gdy dane są dwie macierze o rozmiarach 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Użycie operatora macierzowego mnożenia spowoduje utworzenie nowej macierzy, której elementy będą następujące:

$$\mathbf{A}.*\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Poniższy przykład ilustruje różnice w stosowaniu wybranych operatorów matematycznych i macierzowych.

Przykład 4

Przed wykonaniem operacji najpierw wprowadzone zostaną dane:

```
>> A=[1 2; 3 4]; B=[5 pi^2; 6 sin(pi/2)];
```

Wykonanie operacji mnożenia matematycznego (*) na tych macierzach

```
>> A*B

ans =
   17.0000   11.8696
   39.0000   33.6088
```

Wykonanie mnożenia przy użyciu operatora macierzowego mnożenia (.*) na tych macierzach

```
>> A.*B

ans =
    5.0000   19.7392
   18.0000    4.0000
```

W wyniku tych operacji uzyskane zostały dwa różne wyniki. Dla przykładu inna operacja macierzowa, potęgowanie

```
>> A^2

ans =
     7    10
    15    22

>> A.^2

ans =
     1     4
     9    16
```

2. GENEROWANIE DANYCH I ZAPISYWANIE DO PLIKU

W MATLABIE istnieje możliwość wygenerowania wektora wierszowego zawierającego pewną liczbę elementów począwszy od pewnej zadanej wartości początkowej x_p, do wartości końcowej x_k z zadanym krokiem zwiększania, dx

$$\mathbf{x} = [x_p : dx : x_k]. \qquad (3)$$

Takie wektory są szczególnie przydatne przy tworzeniu różnego rodzaju wykresów. Wygenerowane dane mogą być zapisywane do pliku przy użyciu polecenia `save`. Informacje o tym jak używać tej komendy można uzyskać po wpisaniu w oknie komend MATLABA polecenia

```
>> help save
```

Przykład 5

Wygenerować dane do wykresu funkcji $y = x\sin x$ dla x = 0, 0.1, 0.2,....10.0 i uzyskane wyniki zapisać w pliku dyskowym. Najpierw należy wygenerować tablicę z danymi x–y. Wykonanie tej operacji w MATLABIE

```
>> x=[0:0.1:1]'; y=x.*sin(x);
>> XY = [x y]

XY =
         0         0
    0.1000    0.0100
    0.2000    0.0397
    0.3000    0.0887
    0.4000    0.1558
    0.5000    0.2397
    0.6000    0.3388
    0.7000    0.4510
    0.8000    0.5739
    0.9000    0.7050
       ........
   10.0000   -5.4402
```

Po wyznaczeniu wektora x, wektor y wyznaczany jest przez zastosowanie operacji mnożenia macierzowego. Mając tak wygenerowane dane łatwo zapisać je w pliku dyskowym przy użyciu polecenia `save`. Plik ten zostanie nazwany `fun_xsinx1`. Uzyskane dane przy uzyciu funkcji `save` mogą być zapisane w pliku binarnym lub tekstowym. Zapis

```
>> save fun_xsinx1
```

powoduje zapisanie wygenerowanych wektorów w pliku binarnym z rozszerzeniem `*.mat`, co można sprawdzić poleceniem

```
>> dir *.mat
```

Zapis

```
>> save fun_xsinx2 x y -ascii
```

powoduje zapisanie wygenerowanych wektorów w pliku typu ASCII.

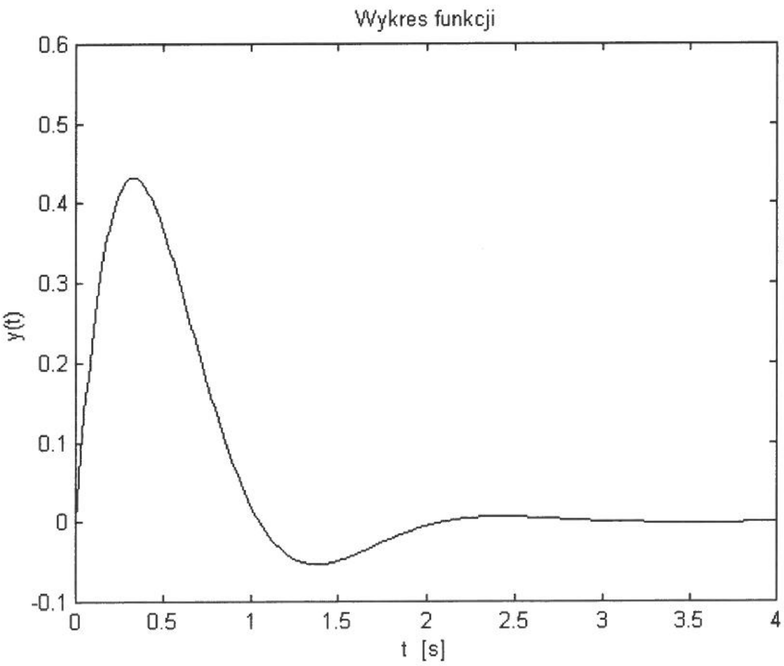
3. GRAFIKA

MATLAB ma rozszerzone własności wyświetlania wektorów i macierzy w postaci wykresów, jak również ich opisywania. Najczęściej używaną funkcją graficzną jest funkcja `plot`, która daje różne postacie wykresów zależne od argumentów wejściowych. Jeśli y jest wektorem, wówczas komenda `plot(y)` pozwala na uzyskanie kawałkami liniowego wykresu elementów y w funkcji indeksów elementów tego wektora y. Jeśli natomiast określone zostaną dwa wektory argumentów, wówczas komenda `plot(x,y)` daje wykresy y w funkcji x.

Przykład 6

Przedstawić na wykresie funkcję

$$y(t) = e^{-2t} \sin 3t\,. \tag{6.1}$$



Rys. 6.1. Wykres funkcji $y(t) = e^{-2t} \sin 3t$.

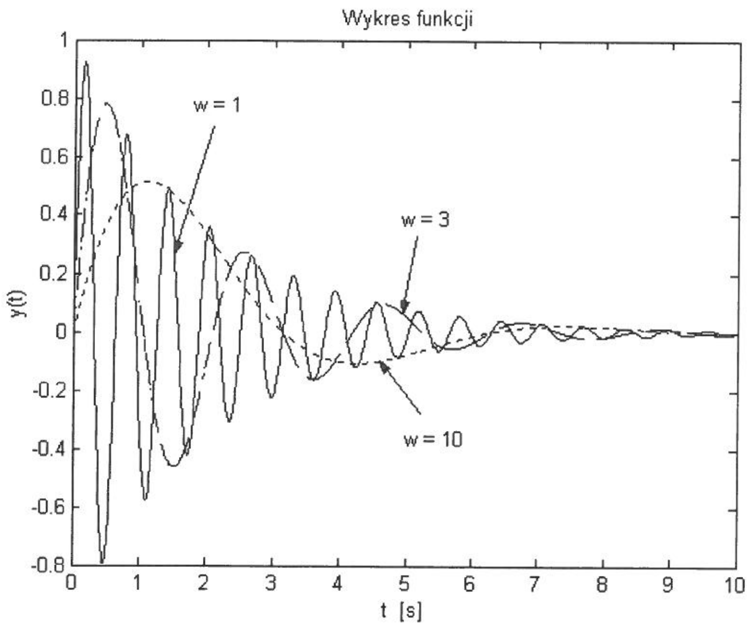
Aby wykreślić w Matlabie funkcję (6.1) najlepiej w tym celu uruchomić edytor do pisania skryptów poleceniem **File/New/M-File** i zapisać następujący kod programu

```
clear                      % Wyczyszczenie pamięci roboczej Matlaba
close all                  % zamknięcie wszystkich okien graficznych
t = [0:0.01:4];            % Wygenerowanie argumentu funkcji
y = exp(-2*t).*sin(3*t);   % Wyznaczenie wartości funkcji
id1 = figure(1)            % Otwarcie nowego okna graficznego
plot( t, y, 'k-')          % Wykreślenie funkcji
xlabel('t  [s]')           % Opis osi x
ylabel('y(t) ')            % Opis osi y
title('Wykres funkcji')    % Tytuł wykresu
grid on                    % Siateczka na wykresie
```

Skrypt ten zapisać do pliku pod nazwą `wykres.m` i uruchomić go metodą: "krok po kroku". Uzyskany zostanie wykres przedstawiony na rysunku 6.1.

Przykład 7

Przedstawić na wykresie funkcję $y(t) = e^{-0.5t} \sin \omega t$, w przedziale $0 \le t \le 10$ sekund z krokiem 0.01. Zastosuj trzy wartości ω = 1, 3, 10 rad/s. Wszystkie trzy przebiegi umieścić na tym samym wykresie.



Rys. 7.1. Wykres funkcji $y(t) = e^{-0.5t} \sin \omega t$, dla trzech różnych wartości parametru ω.

Zadanie to może zostać zrealizowane przy pomocy następującego kodu programu

```
clear
close all
t = [0:0.01:10];
w = [1 3 10];
for i=1:3,
     y(i,:) = exp(-0.5*t).*sin(w(i)*t);
id1 = figure(1)
plot( t, y, 'k-')
xlabel('t  [s]')
ylabel('y(t) ')
title('Wykres funkcji')
```

Uzyskany zostanie wykres przedstawiony na rysunku 7.1.

4. ODCZYT DANYCH Z PLIKU DYSKOWEGO

Możliwe jest również wykreślanie danych zawartych w pliku dyskowym. Odczyt danych z pliku odbywa się przy użyciu funkcji `load`. Więcej informacji o stosowaniu tej funkcji można uzyskać po wpisaniu polecenia

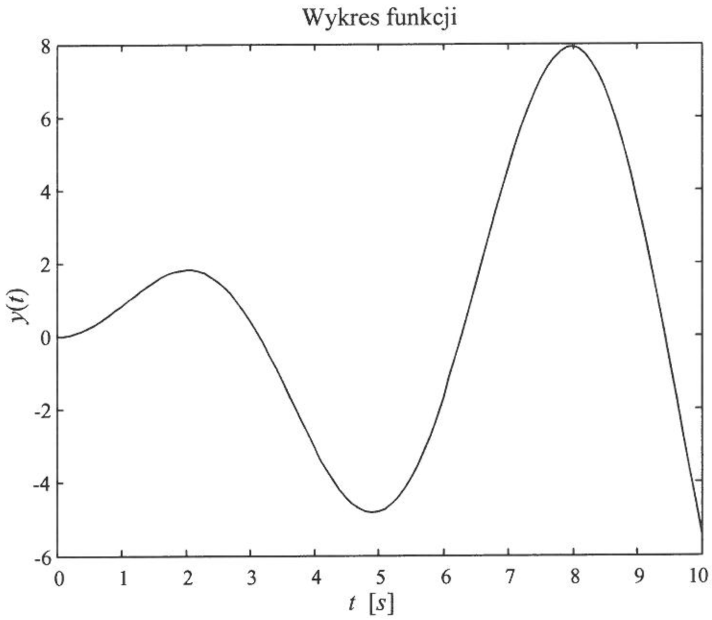
```
>> help load
```

Przykład 8

Przedstawić na wykresie dane wygenerowane w przykładzie 5 i zapisane w pliku dyskowym. Poniższy kod programu zapisać w postaci skryptu.

```
clear                   % Wyczyszczenie przestrzeni roboczej Matlaba
load fun_xsinx1               % Odczyt z pliku binarnego
plot( x, y, 'k-')             % Wykreślenie danych na wykresie
xlabel('t  [s]')              % Opis osi x
ylabel('y(t)')                % Opis osi y
title('Wykres funkcji')       % Tytuł wykresu
```

Uzyskany w ten sposób wykres pokazany został na rysunku 8.1.



Rys. 8.1. Wykres funkcji z przykładu 8.

5. ZAPISYWANIE WYKRESÓW DO PLIKU

Uzyskiwane w MATLABIE wykresy mogą być przechowywane na dysku celem późniejszego umieszczenia ich w dokumentach np. pisanych w Wordzie. Po wygenerowaniu wykresu używa się opcji File/Export i zachowuje się w pliku z rozszerzeniem *.emf.

ĆWICZENIA W MATLABIE

M1. Rozważ następujące dwie macierze

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & 2\pi \\ 6j & 10+\sqrt{2}j \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 6j & -13\pi \\ \pi & 16 \end{bmatrix}$$

Korzystając z oprogramowania narzędziowego MATLAB, wykonaj następujące działania:

a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$

b) $\mathbf{A}*\mathbf{B}$

c) $\mathbf{A}^2$

d) $\mathbf{A}^T$

e) $\mathbf{B}^{-1}$

f) $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

g) $\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2-\mathbf{A}*\mathbf{B}$

M2. Wykonaj mnożenia macierzowe dwóch następujących wektorów.

$$\mathbf{A}=[2+j3 \quad \sin(\pi/2) \quad \exp(-2)]$$

$$\mathbf{B}=[\mathrm{atan}(0.5) \quad -2-j4 \quad \log(2)]$$

M3. Dla poniższych funkcji napisz dwa skrypty:

1) `Dane.m` – generuje dane t, y w przedziale $0 \le t \le 10$ sekund z krokiem 0.01, według zadanych wzorów i zapisuje te dane do pliku pod nazwą funkcja i tworzy wykres przy użyciu funkcji plot.

2) `Wykres.m` – odczytuje dane z pliku `funkcja` i tworzy wykres przy użyciu funkcji `plot`.

a) $y(t)=2+\sqrt{5}e^{-t}\cos\left(2t+153^\circ\right)$

b) $y(t)=20e^{-t}+10\sqrt{5}\cos\left(2t+206^\circ\right)$

c) $y(t)=1+\frac{4\sqrt{7}}{7}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t+228.6^\circ\right)$

d) $y(t)=-\frac{35}{53}e^{-7t}+\frac{5}{\sqrt{53}}\cos\left(2t+344^\circ\right)$

e) $y(t)=2+\sqrt{5}e^{-t}\cos\left(2t+153^\circ\right)$

f) $y(t)=2-e^{-t}\left(2\cos 2t+\sin 2t\right)$

g) $y(t)=\frac{1}{5}+\frac{11}{2\sqrt{5}}e^{-2t}\cos\left(4t+153^\circ\right)$

h) $y(t)=-\frac{35}{53}e^{-7t}+\frac{35}{53}\cos 2t+\frac{10}{53}\sin 2t$

i) $y(t)=\frac{4}{\pi}\cos t+\frac{4}{9\pi}\cos 3t$

j) $y(t)=10+5e^{-t}\cos\left(2t+0.5\right)$

k) $y(t)=1.64\cdot e^{-3t}+0.8\cdot\cos\left(4t+216.9^\circ\right)$

l) $y(t)=0.2+5.441\cdot e^{-2t}\cos\left(t+126^\circ\right)$

M4. Dla poniższych funkcji wygeneruj wykresy czasowe w przedziale $0 \le t \le 10$ sekund z krokiem 0.01, dla trzech różnych wartości parametru ω = 1, 3, 10 rad/s. Wszystkie trzy przebiegi dla pojedynczej funkcji należy umieścić na tym samym wykresie. Podobnie jak w ćwiczeniu M.3, dane do wykresów wygeneruj w pierwszym programie MATLABA (`Dane.m`), a wykres w drugim (`Wykres.m`).

a) $y(t)=2+\sqrt{5}e^{-t}\cos\left(\omega t+153^\circ\right)$

b) $y(t)=20e^{-t}+10\sqrt{5}\cos\left(\omega t+206^\circ\right)$

c) $y(t)=1+\frac{4\sqrt{7}}{7}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\omega t+228.6^\circ\right)$

d) $y(t)=-\frac{35}{53}e^{-7t}+\frac{5}{\sqrt{53}}\cos\left(\omega t+344^\circ\right)$

e) $y(t)=2+\sqrt{5}e^{-t}\cos\left(\omega t+153^\circ\right)$

f) $y(t)=2-e^{-t}\left(2\cos\omega t+\sin 2\omega t\right)$

g) $y(t)=\frac{1}{5}+\frac{11}{2\sqrt{5}}e^{-2t}\cos\left(\omega t+153^\circ\right)$

h) $y(t)=-\frac{35}{53}e^{-7t}+\frac{35}{53}\cos 2\omega t+\frac{10}{53}\sin\omega t$

i) $y(t)=\frac{4}{\pi}\cos t+\frac{4}{9\pi}\cos 3t$

j) $y(t)=10+5e^{-t}\cos\left(\omega t+0.5\right)$

k) $y(t)=1.64\cdot e^{-3t}+0.8\cdot\cos\left(\omega t+216.9^\circ\right)$

l) $y(t)=0.2+5.441\cdot e^{-2t}\cos\left(\omega t+126^\circ\right)$

LITERATURA

1. Mrozek B., *MATLAB 5.0x, SIMULINK 2.x – poradnik użytkownika*, Warszawa PLJ, 1998.
2. Mrozek B., Mrozek Z., *MATLAB, Uniwersalne środowisko do obliczeń naukowo-technicznych.* Wydawnictwo PLJ, Warszawa 1996.
3. Szymkat M., *Komputerowe wspomaganie w projektowaniu układów regulacji.* WNT Warszawa 1993.
4. Zalewski A., Cegieła R., *MATLAB – obliczenia numeryczne i ich zastosowania*, Wydawnictwo Nakom, Poznań 1996.