Uniwersytet Morski w Gdyni
Katedra Automatyki Okrętowej

Automatyka i Robotyka

Uchyb w stanie ustalonym – Matlab

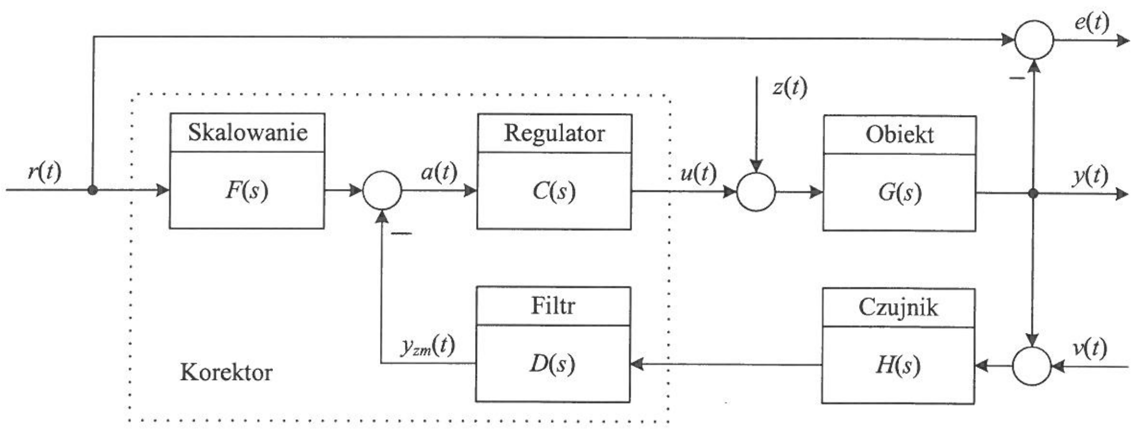
Mirosław Tomera

---

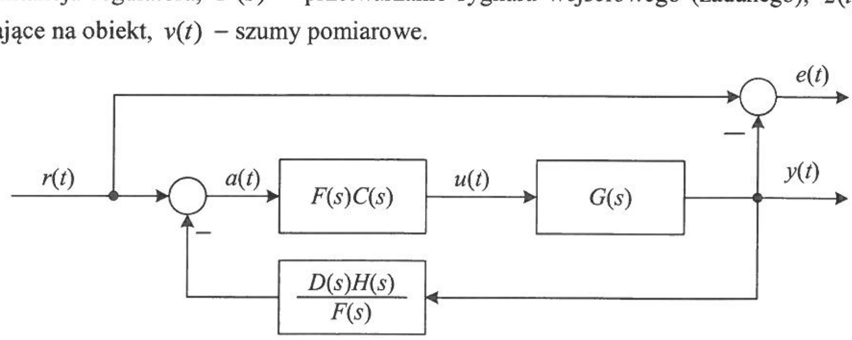
1. WPROWADZENIE

Jedno z najważniejszych wymagań większości układów sterowania polega na tym aby w stanie ustalonym odpowiedź wyjściowa układu miała taką samą wartość jak sygnał wymuszający (zadany). Różnica pomiędzy sygnałem wyjściowym, a zadanym nazywana jest uchybem regulacji.

Aby sformułować problem w kontekście ogólnym należy rozważyć układ sterowania z pojedynczą pętlą ujemnego sprzężenia zwrotnego, pokazany na rysunku 1.

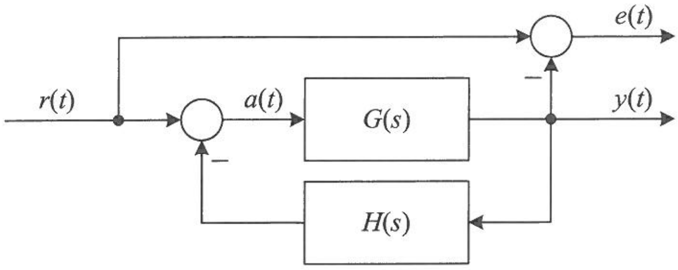


Rys. 1. Schemat blokowy typowego układu regulacji z pojedynczą pętlą ujemnego sprzężenia zwrotnego, gdzie: $r(t)$ – sygnał zadany, $u(t)$ – sygnał sterowania, $y(t)$ – wyjście z obiektu (wielkość regulowana), $e(t)$ – sygnał uchybu = $r(t) - y(t)$, $a(t)$ – sygnał wykonawczy, $y_{zm}(t)$ – pomierzona wielkość regulowana, $D(s)$ – transmitancja filtru, $H(s)$ – transmitancja czujnika, $C(s)$ – transmitancja regulatora, $F(s)$ – przetwarzanie sygnału wejściowego (zadanego), $z(t)$ – zakłócenia działające na obiekt, $v(t)$ – szumy pomiarowe.



Rys. 2. Uproszczony schemat blokowy typowego układu z pojedynczą pętlą.

W dalszych rozważaniach przyjęto $F(s) = C(s) = D(s) = 1$ i układ z rysunku 1 sprowadzony został do postaci pokazanej na rysunku 3.

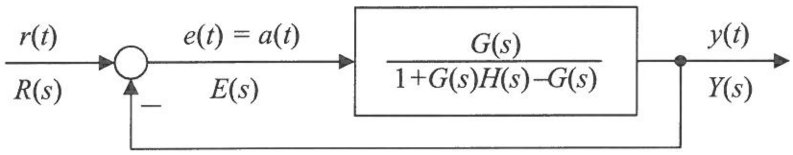


Rys. 3. Schemat blokowy zamkniętego układu sterowania z niejednostkowym sprzężeniem zwrotnym.

Układ z rysunku 3 może zostać przekształcony do postaci z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym, wówczas transmitancja bloku znajdującego się w torze głównym przyjmie postać

$$G_{\mathrm{o}}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s) - G(s)} \tag{1}$$

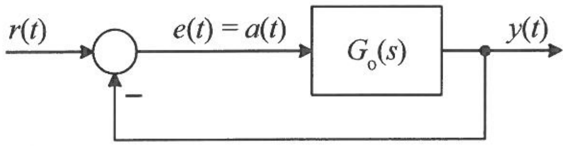
co pokazane zostało na rysunku 4.



Rys. 4. Przekształcony schemat blokowy układu sterowania z niejednostkowym sprzężeniem.

2. ANALIZA UCHYBOWA UKŁADU Z JEDNOSTKOWYM SPRZĘŻENIEM ZWROTNYM

Rozważony zostanie układ z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym, który może być reprezentowany przez uproszczony schemat pokazany na rysunku 5.



Rys. 5. Schemat blokowy układu regulacji z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym.

Uchyb w stanie ustalonym dla tego układu (rys. 5) może zostać zapisany następująco

$$e_u = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1 + G_{\mathrm{o}}(s)} \tag{2}$$

2.1. TYPY UKŁADÓW STEROWANIA

Jasne jest, że e_u zależy od transmitancji $G(s)$. Bardziej szczegółowo można powiedzieć, że e_u zależy od liczby biegunów transmitancji $G(s)$ znajdujących się w $s = 0$, która to liczba nazywana jest typem układu sterowania. Typ układu wyznacza się z transmitancji $G(s)$ znajdującej się w torze bezpośrednim. Ogólnie $G(s)$ może zostać wyrażone w postaci następującej transmitancji

$$G_{\mathrm{o}}(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2)..(s - z_m)}{s^N (s - p_1)(s - p_2)..(s - p_n)} e^{-sT_o} \tag{3}$$

gdzie: K – wzmocnienie, z_i – zera transmitancji, p_i – bieguny transmitancji, T_o – opóźnienie.

Typ układu z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym odnosi się do bieguna transmitancji $G(s)$ w $s = 0$. Układ mający transmitancję opisaną wzorem (8) jest typu N, gdzie $N = 0, 1, 2, \ldots$. Z punktu widzenia typu układu nie jest ważna liczba czynników w liczniku i mianowniku oraz wartości współczynników, tylko liczba biegunów w $s = 0$. Poniższe przykłady ilustrują typ układu określany na podstawie transmitancji $G_o(s)$.

Przykład 1

$$G_o(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+12)} \quad \text{układ typu 1} \tag{1.1}$$

$$G_o(s) = \frac{K(s+5)}{s^3} \quad \text{układ typu 3} \tag{1.2}$$

2.2. UCHYB W STANIE USTALONYM W UKŁADZIE Z SYGNAŁEM ZADANYM O POSTACI FUNKCJI SKOKOWEJ

Sygnał zadany w układzie z rysunku 4 ma postać funkcji skokowej o amplitudzie R,

- $r(t) = R \cdot 1(t)$

gdzie R jest stałą rzeczywistą, wówczas transformata operatorowa tego sygnału $R(s) = R/s$ i uchyb w stanie ustalonym może zostać zapisany następująco w oparciu o wzór (2)

$$e_u = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G_o(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{R}{1+G_o(s)} = \frac{R}{1+\lim\limits_{s\to 0} G_o(s)} \tag{4}$$

Dla ułatwienia, zdefiniujmy

$$\boxed{K_p = \lim_{s\to 0} G_o(s)} \tag{5}$$

gdzie K_p nosi nazwę stałej uchybu pozycyjnego i wówczas równanie (4) z którego liczy się uchyb w stanie ustalonym dla tego przypadku przyjmuje następującą postać

$$\boxed{e_u = \frac{R}{1+K_p}} \tag{6}$$

2.3. UCHYB W STANIE USTALONYM W UKŁADZIE Z SYGNAŁEM ZADANYM O POSTACI FUNKCJI LINIOWO NARASTAJĄCEJ

Kiedy sygnałem zadanym do układu z rysunku 4 jest funkcja liniowo narastająca w czasie o amplitudzie R,

- $r(t) = R \cdot t \cdot 1(t)$

gdzie R jest stałą rzeczywistą, transformata Laplace'a $r(t)$ ma postać $R(s) = R/s^2$ i wówczas uchyb w stanie ustalonym zapisany w oparciu o wzór (2)

$$e_u = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G_o(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{R}{s+sG_o(s)} = \frac{R}{\lim\limits_{s\to 0} sG_o(s)} \tag{7}$$

i po zdefiniowaniu stałej uchybu prędkościowego K_v

$$\boxed{K_v = \lim_{s\to 0} s\,G_o(s)} \tag{8}$$

równanie (7) przyjmuje następującą postać

$$\boxed{e_u = \frac{R}{K_v}} \tag{9}$$

W oparciu o wzór (9) liczy się uchyb w stanie ustalonym dla przypadku kiedy sygnał zadany ma postać funkcji liniowo narastającej w czasie.

2.4. UCHYB W STANIE USTALONYM W UKŁADZIE Z SYGNAŁEM ZADANYM O POSTACI PARABOLI

Kiedy sygnał zadany podany na wejście układu regulacji ma postać standardowej funkcji parabolicznej o postaci

- $r(t) = \frac{1}{2} R \cdot t^2 \cdot 1(t)$

gdzie R jest stałą rzeczywistą, transformata Laplace'a $r(t)$ ma postać $R(s) = R/s^3$. Uchyb w stanie ustalonym dla układu z rysunku 4 przyjmuje postać

$$e_u = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G_0(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{R}{s^2 + s^2 G_0(s)} = \frac{R}{\lim\limits_{s\to 0} s^2 G_0(s)} \tag{10}$$

Definiując stałą uchybu przyśpieszeniowego jako

$$\boxed{K_a = \lim_{s\to 0} s^2\, G_0(s)} \tag{11}$$

Uchyb w stanie ustalonym przyjmuje następującą postać

$$\boxed{e_u = \frac{R}{K_a}} \tag{12}$$

W tabeli 1 zebrane zostały, typy układów w odniesieniu do równania (2) i rodzajów sygnałów wejściowych. Trzeba zaznaczyć, że wnioski te będą poprawne, jeśli układ zamknięty jest stabilny.

Tabela 1. Wartości uchybów w stanie ustalonym dla układu ze sprzężeniem jednostkowym

Typ układu	Stałe uchybu			Uchyb w stanie ustalonym e_u		
				Wejście skokowe	Wejście liniowo narastające	Wejście paraboliczne
N	K_p	K_v	K_a	$\frac{R}{1+K_p}$	$\frac{R}{K_v}$	$\frac{R}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{R}{1+K_p}$	∞	∞
1	∞	K	0	0	$\frac{R}{K_v}$	∞
2	∞	∞	K	0	0	$\frac{R}{K_a}$
3	∞	∞	∞	0	0	0

Poniżej w punktach wymienione zostały przypadki w których może być stosowana powyższa analiza dotyczącą stałych uchybu.

1. Stałe K_p, K_v , K_a są możliwe do zastosowania tylko wówczas, gdy na wejście podany jest jeden z następujących sygnałów: skokowy, liniowo narastający w czasie, paraboliczny.
2. Stałe uchybu zdefiniowane zostały w odniesieniu do transmitancji $G(s)$ znajdującej się w torze bezpośrednim, metoda ta jest do zastosowania tylko do konfiguracji układu pokazanej na rysunku 4.
3. Własności dotyczące uchybu w stanie ustalonym, zebrane w tabeli 1, dotyczą tylko i wyłącznie układu ze sprzężeniem jednostkowym.
4. Uchyb układu w stanie ustalonym z wejściem na które podano sygnał będący liniową kombinacją trzech podstawowych typów może zostać określony przez superpozycję uchybów odpowiednio na każdy składnik wejściowy.

Kiedy uchyb w stanie ustalonym jest nieskończony, wówczas uchyb narasta ciągle w czasie i metodami stałych uchybu nie da się określić jak uchyb ten zmienia się w czasie. Jest to jedna z wad metody stałych uchybu. Metoda stałych uchybu nie może zostać zastosowana do układów w których na wejście podano sygnały sinusoidalne, gdyż w takich przypadkach nie można stosować twierdzenia o wartości końcowej. Poniższe przykłady zilustrują zastosowanie stałych uchybu i ich wartości w określaniu uchybów w stanie ustalonym dla liniowych układów sterowania z ujemnym jednostkowym sprzężeniem zwrotnym.

Przykład 2

W układzie z rysunku 4 wyznaczyć uchyb w stanie ustalonym pojawiający się w układzie po podaniu sygnału zadanego o postaci funkcji

- $r(t) = 5 \cdot t \cdot 1(t)$

Transmitancja operatorowa:

$$G_o(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+2)(s+5)} = \frac{L_o(s)}{M_o(s)} \tag{2.1}$$

Rozwiązanie. W pierwszej kolejności należy sprawdzić czy układ o transmitancji (2.1) w torze bezpośrednim będzie stabilny. W tym celu należy wyznaczyć transmitancję zastępczą całego układu.

$$T(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{\dfrac{L_o(s)}{M_o(s)}}{1+\dfrac{L_o(s)}{M_o(s)}} = \frac{L_o(s)}{M_o(s)+L_o(s)} = \frac{10s+1}{s^3+7s^2+20s+10} \tag{2.2}$$

Równanie charakterystyczne układu

$$M(s) = s^3 + 7s^2 + 20s + 10 = 0 \tag{2.3}$$

Układ ten będzie stabilny jeśli wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego będą znajdowały się w lewej półpłaszczyźnie. Przy użyciu MATLABA łatwo to sprawdzić przy użyciu funkcji `roots`.

```
>> roots([1 7 20 10])

ans =
  -3.1879 + 2.4202i
  -3.1879 - 2.4202i
  -0.6242
```

Z rozwiązania widać, że wszystkie pierwiastki znajdują się w lewej półpłaszczyźnie, czyli układ ten jest stabilny. Sygnał zadany ma postać funkcji liniowo narastającej o amplitudzie $R = 5$, dlatego też uchyb w stanie ustalonym wyznaczany będzie ze wzoru (14). Do tego wzoru potrzebne jest wyznaczenie stałej uchybu prędkościowego K_v

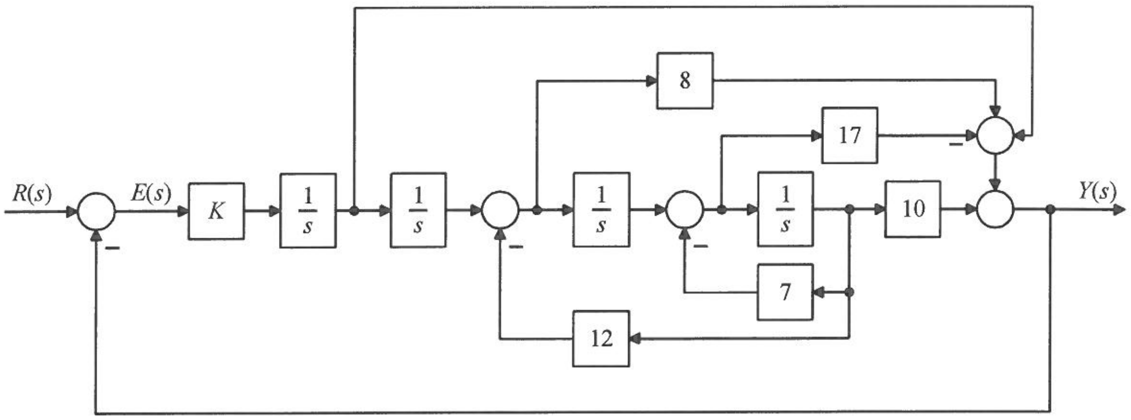
$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G_o(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{10(s+1)}{s(s+2)(s+5)} = 1 \qquad (2.4)$$

i uchyb w stanie ustalonym ma wartość

$$e_u = \frac{R}{K_v} = \frac{10}{1} = 10 \qquad (2.5)$$

Przykład 3

Dla układu z rysunku 3.1



Rys. 3.1. Schemat blokowy układu regulacji z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym.

wyznacz uchyb w stanie ustalonym pojawiający się w układzie regulacji po podaniu za wejście sygnału zadanego o postaci funkcji

- $r(t) = 5 \cdot t^2 \cdot 1(t)$

Przy użyciu kryterium Routha sprawdź zakres strojonego parametru K dla którego układ ten jest stabilny i uzyskany wynik jest poprawny.

Rozwiązanie. Najpierw wyznaczona zostanie transmitancja w torze bezpośrednim przy użyciu reguły wzmocnień Masona.

$$G_o(s) = \frac{K\frac{1}{s}\left(1+\frac{7}{s}+\frac{12}{s^2}\right) + K\frac{8}{s^2}\left(1+\frac{7}{s}\right) + K\frac{-17}{s^3} + K\frac{10}{s^4}}{1-\left(-\frac{7}{s}-\frac{12}{s^2}\right)} = \frac{K\left(s^3+15s^2+51s+10\right)}{s^2\left(s^2+7s+12\right)} \qquad (3.1)$$

Sygnał zadany ma postać funkcji parabolicznej

$$r(t) = 5 \cdot t^2 \cdot 1(t) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 \cdot 1(t) \qquad (3.2)$$

czyli amplituda tego sygnału wynosi $R = 10$. Uchyb w stanie ustalonym dla sygnałów zadanych o postaci funkcji parabolicznej wyznaczany jest ze wzoru (14), wymaga on jednak wcześniejszego wyznaczenia stałej uchybowej K_a

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G_o(s) = \lim_{s\to 0} s^2 \frac{K(s^3+15s^2+51s+10)}{s^2(s^2+7s+12)} = \frac{5}{6}K \tag{3.3}$$

i wartość uchybu w stanie ustalonym

$$e_u = \frac{R}{K_a} = \frac{10}{\frac{5}{6}K} = \frac{12}{K} \tag{3.4}$$

Uchyb w stanie ustalonym będzie wynosił dokładnie tyle ile wynika ze wzoru (3.4) jeśli układ z rysunku 3.1. będzie stabilny i dlatego też teraz należy sprawdzić dla jakiego zakresu parametru strojonego K układ z rysunku 3.1 będzie stabilny. Sprawdzenie to zostanie wykonane przy użyciu kryterium Routha. W tym celu najpierw należy znaleźć transmitancję układu zamkniętego

$$T(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{\frac{L_o(s)}{M_o(s)}}{1+\frac{L_o(s)}{M_o(s)}} = \frac{L_o(s)}{M_o(s)+L_o(s)} = \frac{K(s^3+15s^2+51s+10)}{s^4+(K+7)s^3+(15K+12)s^2+51Ks+10K} \tag{3.5}$$

Równanie charakterystyczne układu z rysunku 3.1

$$s^4+(K+7)s^3+(15K+12)s^2+51Ks+10K=0 \tag{3.6}$$

Tablica Routha

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 15K+12 & 10K \\
s^3 & K+7 & 51K & \\
s^2 & \dfrac{15K^2+66K+84}{K+7} & 10K & \\
s^1 & \dfrac{755K^3+3226K^2+3794K}{15K^2+66K+84} & & \\
s^0 & 10K & &
\end{array}$$

Układ ten będzie stabilny jeśli wszystkie elementy pierwszej kolumny mają wartość większe od zera, daje to cztery warunki na parametr strojony K:

$$\begin{aligned}
&1^\circ)\ K+7>0 \\
&2^\circ)\ 15K^2+66K+84>0 \\
&3^\circ)\ 755K^3+3226K^2+3794K>0 \\
&4^\circ)\ 10K>0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Po rozwiązaniu układu czterech nierówności (3.7) okazuje się, że układ regulacji z rysunku 3.1. będzie stabilny gdy

$$K>0 \tag{3.8}$$

3. UCHYB W STANIE USTALONYM W UKŁADACH Z NIEJEDNOSTKOWYM SPRZĘŻENIEM ZWROTNYM

Badanie uchybu w stanie ustalonym dla układu z niejednostkowym sprzężeniem zwrotnym według schematu blokowego z rysunku 3 można sprowadzić do badania układu z jednostkowych sprzężeniem zwrotnym przekształcając schemat z rysunku 3 do postaci z rysunku 4. Dla układu z rysunku 4 można stosować wszystkie te wzory, które wyprowadzone zostały w rozdziale 2 dla układu z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym.

Przykład 4

Układ pokazany na rysunku 3 ma następujące transmitancje:

$$G(s)=\frac{3.51K}{10s+1} \qquad H(s)=\frac{1}{2s+1} \tag{4.1}$$

wyznacz uchyb w stanie ustalonym pojawiający się w układzie po podaniu sygnału zadanego o postaci funkcji

- $r(t)=10\cdot 1(t)$

Rozwiązanie. Transmitancja układu w torze bezpośrednim po przekształceniu go do postaci z rysunku 5 jest następująca:

$$G_0(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)-G(s)}=\frac{3.51K(2s+1)}{20s^2+(12-7.02K)s+1} \tag{4.2}$$

Sygnał zadany ma postać funkcji skokowej o amplitudzie R = 10 i dlatego też uchyb w stanie ustalonym wyznaczany będzie ze wzoru (11), wymaga on jednak wcześniejszego wyznaczenia stałej uchybowej K_p

$$K_p=\lim_{s\to 0}G_0(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{3.51K(2s+1)}{20s^2+(12-7.02K)s+1}=3.51K \tag{4.3}$$

Uchyb w stanie ustalonym

$$e_u=\frac{R}{1+K_p}=\frac{10}{1+3.51K} \tag{4.4}$$

Zakres strojonego parametru w którym układ ten jest stabilny można wyznaczyć przy pomocy dowolnego kryterium badania stabilności, tutaj zadanie to zostanie wykonane przy użyciu kryterium Routha. Równanie charakterystyczne układu z przykładu 4

$$20s^2+12s+1+3.51K=0 \tag{4.5}$$

W tym przypadku nie trzeba nawet budować tablicy Routha, wystarczy skorzystać z warunku koniecznego, które mówi, że układ jest stabilny jeśli wszystkie współczynniki równania charakterystycznego będą większe od zera. Daje to warunek

$$1+3.51K>0 \tag{4.6}$$

Wyniki te są poprawne jeśli wartość parametru strojonego K znajduje się wewnątrz zakresu odpowiadającego stabilnemu układowi zamkniętemu, czyli $-0.285<K<\infty$.

ĆWICZENIA W MATLABIE

M1. Dla układu z rysunku 4 określ typy układów i wyznacz odpowiednie stałe uchybowe oraz powstające uchyby w stanie ustalonym po podaniu na wejście następujących sygnałów zadanych o postaci funkcji:

1) skokowej: $r(t)=8\cdot 1(t)$;
2) liniowo narastającej: $r(t)=15t\cdot 1(t)$;
3) parabolicznej: $r(t)=5t^2\cdot 1(t)$.

Dla następujących transmitancji w torze bezpośrednim:

a) $G_o(s) = \dfrac{5(s+1)}{s^2(s+12)(s+5)}$

b) $G_o(s) = \dfrac{s^3 + 11s^2 + 38s + 40}{s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 2s}$

c) $G_o(s) = \dfrac{s^3 + 8s^2 + 17s + 10}{s^4 + 7s^3 + 12s^2}$

d) $G_o(s) = \dfrac{16(s+3)}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 34s + 52}$

e) $G_o(s) = \dfrac{6(s+2)}{s^4 + 8s^3 + 15s^2 + 20s + 12}$

f) $G_o(s) = \dfrac{100(s+1)}{s^2(s^2 + 10s + 100)}$

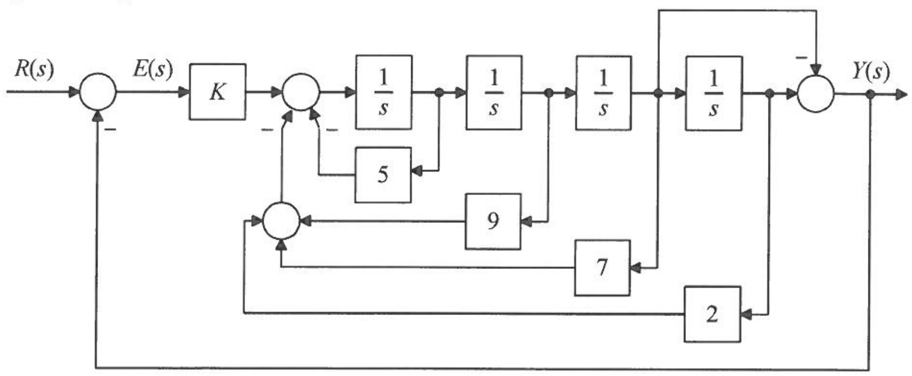
g) $G_o(s) = \dfrac{5(2s+1)(4s+1)}{s^2(s^2 + s + 1)}$

h) $G_o(s) = \dfrac{s+5}{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 5s + 5}$

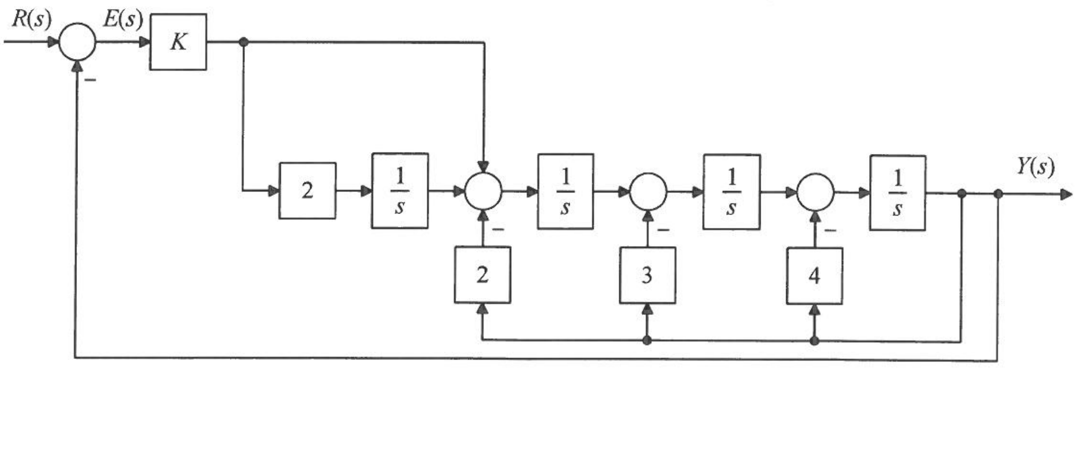
Uwaga: Sprawdź, czy badane układy ze sprzężeniem jednostkowym są stabilne.

M2. Dla poniższych układów regulacji wyznacz uchyb w stanie ustalonym po podaniu na wejście układu sygnału zadanego $r(t)$. Przy użyciu kryterium Routha wyznacz zakres parametru K dla którego te odpowiedzi są poprawne i układ jest stabilny.

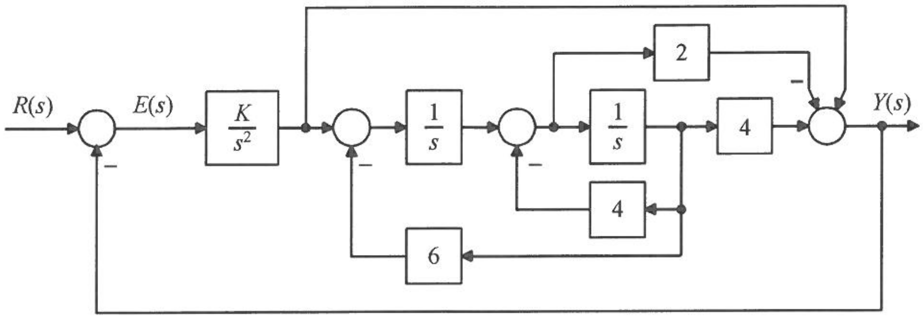
a) $r(t) = 5t \cdot 1(t)$



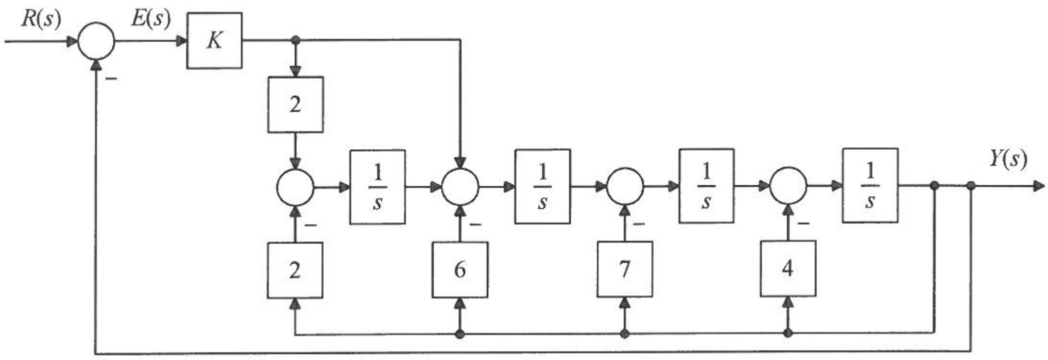
b) $r(t) = 4t \cdot 1(t)$



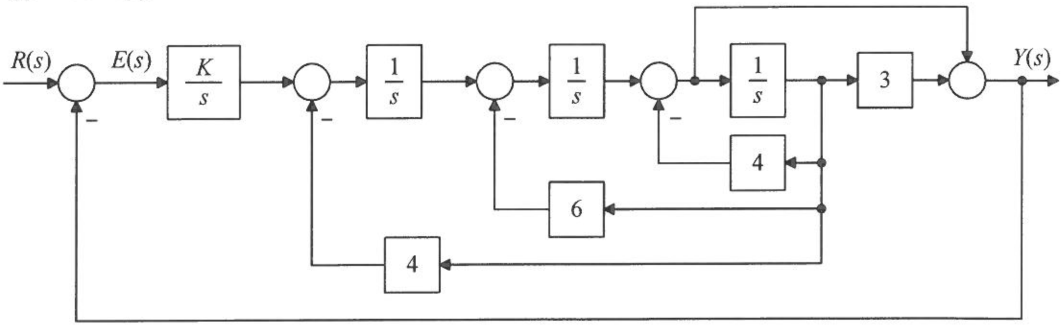
c) $r(t) = 3t^2 \cdot 1(t)$



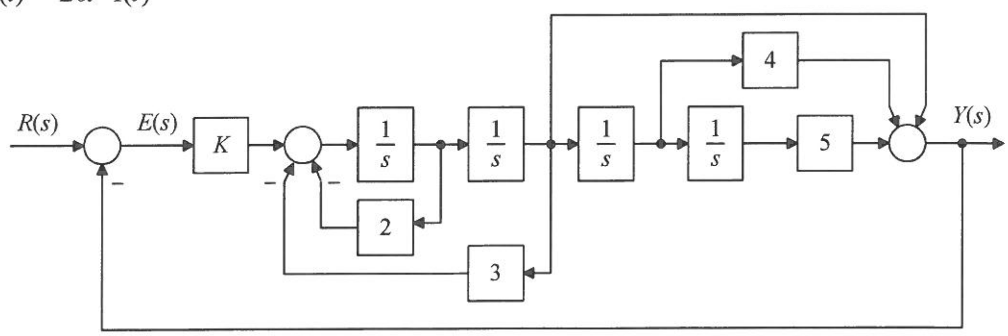
d) $r(t) = 2 \cdot 1(t)$



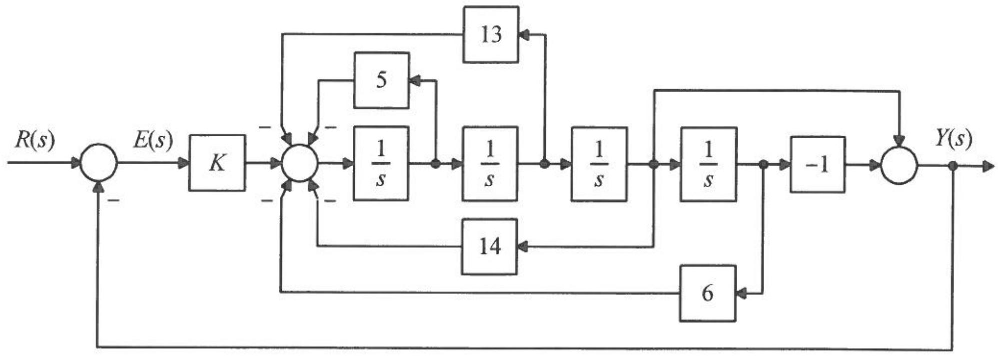
e) $r(t) = 10 \cdot 1(t)$



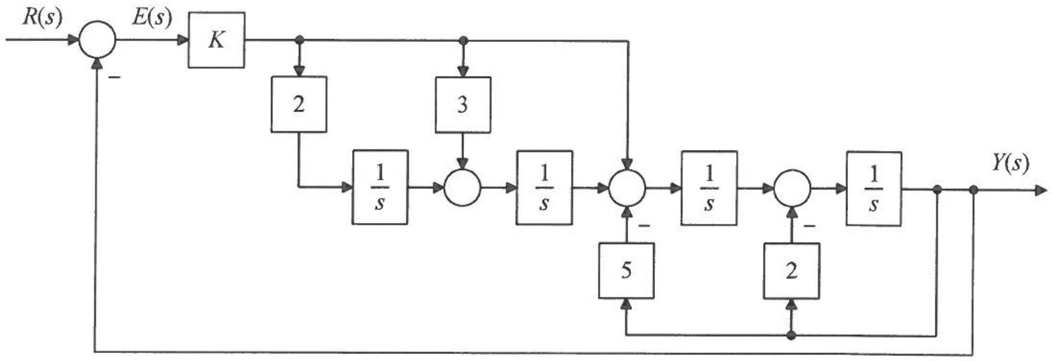
f) $r(t) = 20t \cdot 1(t)$



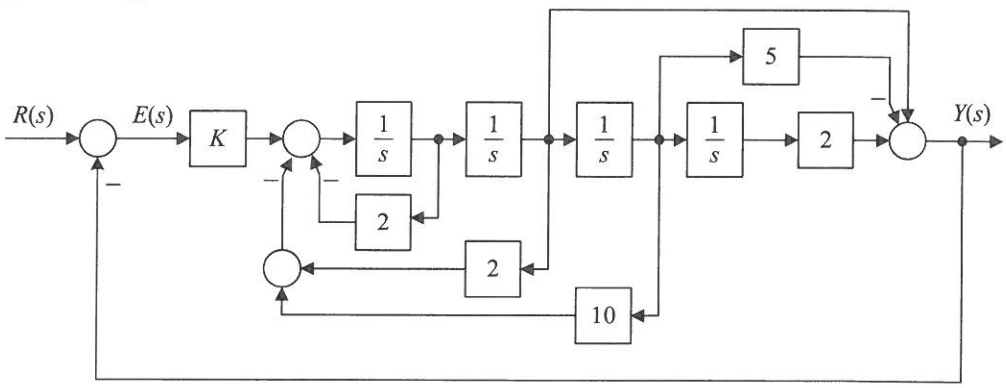
g) $r(t) = 15 \cdot 1(t)$



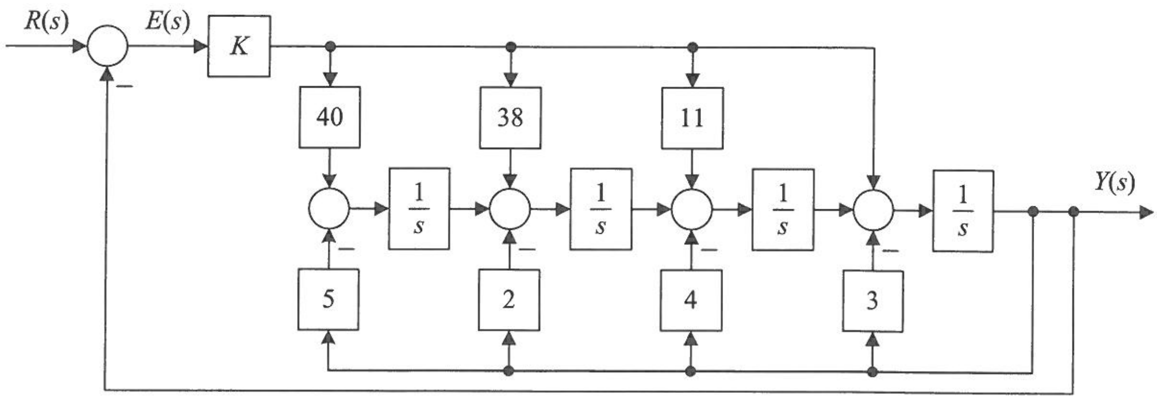
h) $r(t) = 12t \cdot 1(t)$



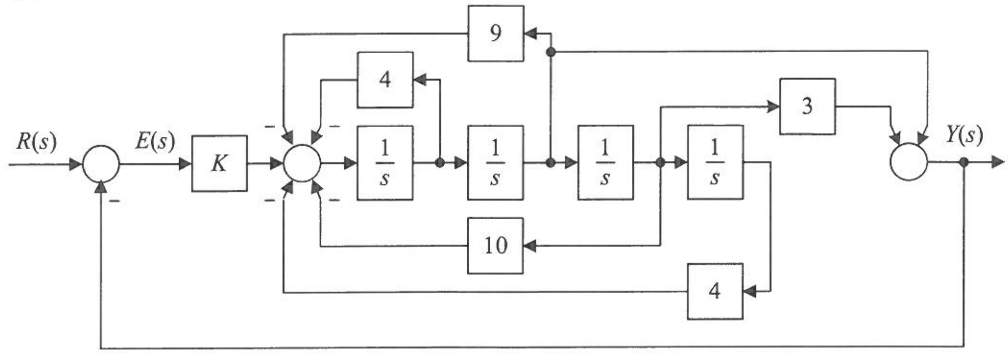
i) $r(t) = 20t \cdot 1(t)$



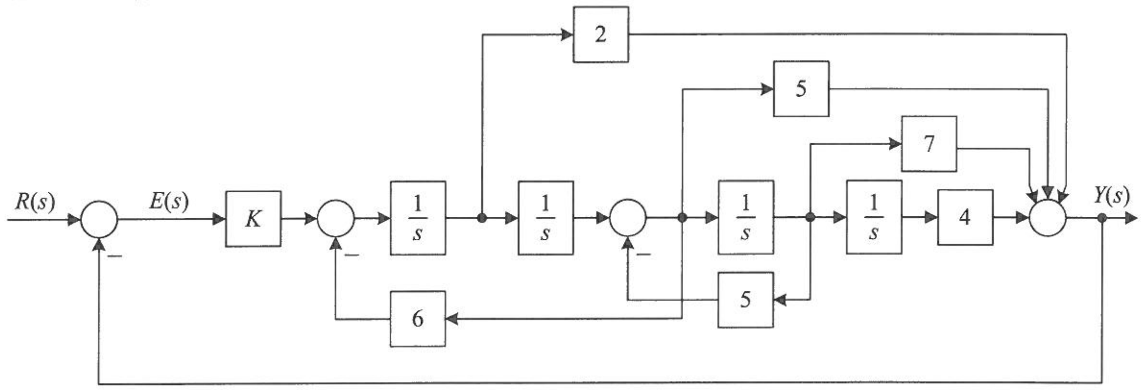
j) $r(t) = 12 \cdot 1(t)$



k) $r(t) = 10 \cdot 1(t)$



l) $r(t) = 5t^2 \cdot 1(t)$



M3. Znajdź uchyby w stanie ustalonym dla układów objętych niejednostkowym sprzężeniem zwrotnym po podaniu na wejście trzech podstawowych wymuszeń jednostkowych ($R = 1$) skokowego, liniowo narastającego i parabolicznego $(t^2/2)1(t)$. Wyznacz zakres parametru K dla którego te odpowiedzi są poprawne.

a) $G(s) = \dfrac{K}{s^2 + s + 2}$ $\quad H(s) = \dfrac{1}{s+1}$

b) $G(s) = \dfrac{K}{s(s+5)}$ $\quad H(s) = 5$

c) $G(s) = \dfrac{K}{s^2(s+12)}$ $\quad H(s) = \dfrac{5(s+1)}{s+5}$

d) $G(s) = \dfrac{K(s+1)}{s^2(s+2)}$ $\quad H(s) = \dfrac{s+4}{s+3}$

e) $G(s) = \dfrac{K}{s}$ $\quad H(s) = \dfrac{s-1}{s^2 + 2s + 1}$

f) $G(s) = \dfrac{s+10}{s(s+2)}$ $\quad H(s) = K(s+4)$

g) $G(s) = K(s^2 - 2s + 2)$; $H(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2}$

h) $G(s) = \dfrac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$; $\quad H(s) = \dfrac{s+6}{s+7}$

M4. Dla układu objętego niejednostkowym sprzężeniem zwrotnym pokazanego na rysunku 3, wyznacz uchyby w stanie ustalonym dla poniższych transmitancji i sygnałów zadanych.

a) $G(s) = \dfrac{s+2}{s(s+1)}$ $\quad H(s) = \dfrac{s+4}{s^2 + 2s + 1}$

Sygnały zadane: 1) $r(t) = 15 \cdot 1(t)$, 2) $r(t) = 10t \cdot 1(t)$, 3) $r(t) = 5t^2 \cdot 1(t)$.

b) $G(s) = \dfrac{(s+2)(s+5)}{s^2(s+4)}$ $\quad H(s) = \dfrac{s+2}{s+1}$

Sygnały zadane: 1) $r(t) = 20 \cdot 1(t)$, 2) $r(t) = 15t \cdot 1(t)$, 3) $r(t) = 10t^2 \cdot 1(t)$.

c) $G(s) = \dfrac{s+3}{s(s+1)}$ $H(s) = \dfrac{s+2}{s^2+2s+2}$

Sygnały zadane: 1) $r(t) = 10 \cdot 1(t)$, 2) $r(t) = 15t \cdot 1(t)$, 3) $r(t) = 10t^2 \cdot 1(t)$.

d) $G(s) = \dfrac{(s+1)(s+2)}{s(s^2+2s+4)}$ $H(s) = \dfrac{2(s+1)}{s+2}$

Sygnały zadane: 1) $r(t) = 15 \cdot 1(t)$, 2) $r(t) = 10t \cdot 1(t)$, 3) $r(t) = 5t^2 \cdot 1(t)$.

e) $G(s) = \dfrac{s+2}{(s+3)(s+4)}$ $H(s) = \dfrac{s+1}{s^2}$

Sygnały zadane: 1) $r(t) = 20 \cdot 1(t)$, 2) $r(t) = 15t \cdot 1(t)$, 3) $r(t) = 10t^2 \cdot 1(t)$.

f) $G(s) = \dfrac{s(s+3)}{(s+1)(s^2+2s+4)}$ $H(s) = \dfrac{s+3}{s+1}$

Sygnały zadane: 1) $r(t) = 10 \cdot 1(t)$, 2) $r(t) = 15t \cdot 1(t)$, 3) $r(t) = 10t^2 \cdot 1(t)$.

ODPOWIEDZI DO WYBRANYCH ĆWICZEŃ

M1.

a) Układ typu 2;
1) $K_p = \infty$, $e_u = 0$,
2) $K_v = \infty$, $e_u = 0$,
3) $K_a = \dfrac{1}{12}$, $e_u = \dfrac{5}{6}$.

b) Układ typu 1;
1) $K_p = \infty$, $e_u = 0$,
2) $K_v = 20$, $e_u = \dfrac{3}{4}$,
3) $K_a = 0$, $e_u = \infty$.

c) Układ typu 2;
1) $K_p = \infty$, $e_u = 0$,
2) $K_v = \infty$, $e_u = 0$,
3) $K_a = \dfrac{5}{6}$, $e_u = 12$.

d) Układ niestabilny. Niezależnie od rodzaju sygnału zadanego, uchyb zawsze będzie dążył do nieskończoności.

e) Układ typu 0;
1) $K_p = 1$, $e_u = 4$;
2) $K_v = 0$, $e_u = \infty$;
3) $K_a = 0$, $e_u = \infty$;

f) Układ typu 2;
1) $K_p = \infty$, $e_u = 0$,
2) $K_v = \infty$, $e_u = 0$,
3) $K_a = 1$, $e_u = 10$.

g) Układ typu 2;
1) $K_p = \infty$, $e_u = 0$,
2) $K_v = \infty$, $e_u = 0$,
3) $K_a = 5$, $e_u = 2$.

h) Układ typu 0;
1) $K_p = 1$, $e_u = 4$;
2) $K_v = 0$, $e_u = \infty$;
3) $K_a = 0$, $e_u = \infty$;

M2.

a) $G_o(s) = \dfrac{K(1-s)}{s^4+5s^3+9s^2+7s+2}$

$K_p = \dfrac{K}{2}$, $e_u = \dfrac{2}{2+K}$;

Wyniki te są poprawne jeśli parametr strojony K zawiera się w zakresie: $-2 < K < 3.6228$

b) $G_o(s) = \dfrac{K(s+2)}{s(s^3+4s^2+3s+2)}$

$K_v = K$, $e_u = \dfrac{4}{K}$;

Wyniki te są poprawne jeśli parametr strojony K zawiera się w zakresie: $0 < K < 0.807$

c) $G_o(s) = \dfrac{K(s^2+2s+10)}{s^2(s^2+4s+6)}$

$K_a = \dfrac{5K}{3}$, $e_u = \dfrac{18}{5K}$;

Wyniki te są poprawne jeśli parametr strojony K zawiera się w zakresie: $K > 28$

d) $G_o(s) = \dfrac{K(s+2)}{s^4+4s^3+7s^2+6s+2}$

$K_p = K$, $e_u = \dfrac{2}{1+K}$;

Wyniki te są poprawne jeśli parametr strojony K zawiera się w zakresie:
$-1 < K < 4.807$

e) $G_o(s) = \dfrac{K(s+3)}{s(s^3+4s^2+6s+4)}$

$K_p = \infty$, $e_u = 0$;

Wyniki te są poprawne jeśli parametr strojony K zawiera się w zakresie:
$0 < K < 2.34$

f) $G_o(s) = \dfrac{K(s^2+4s+5)}{s^2(s^2+2s+3)}$

$K_v = \infty$, $e_u = 0$;

Wyniki te są poprawne jeśli parametr strojony K zawiera się w zakresie:
$0 < K < 0.5$

g) $G_o(s) = \dfrac{K(s-1)}{s^4+5s^3+13s^2+14s+6}$

$K_p = \dfrac{-K}{6}$, $e_u = \dfrac{80}{6-K}$;

Wyniki te są poprawne jeśli parametr strojony K zawiera się w zakresie:
$-8.06 < K < 6$

h) $G_o(s) = \dfrac{K(s^2+3s+2)}{s^2(s^2+2s+5)}$

$K_v = \infty$, $e_u = 0$;

Wyniki te są poprawne jeśli parametr strojony K zawiera się w zakresie:
$0 < K < 7.34$

i) $G_o(s) = \dfrac{K(s^2-5s+2)}{s(s^3+2s^2+2s+10)}$

$K_v = \dfrac{1}{5}K$, $e_u = \dfrac{100}{K}$;

Wyniki te są poprawne jeśli parametr strojony K zawiera się w zakresie:
$1.2 < K < 1.4286$

j) $G_o(s) = \dfrac{K(s^3+11s^2+38s+40)}{s^4+3s^3+4s^2+2s+5}$

$K_p = \dfrac{1}{5}K$, $e_u = \dfrac{12}{1+8K}$;

Wyniki te są poprawne jeśli parametr strojony K zawiera się w zakresie:
$0.8259 < K < \infty$

k) $G_o(s) = \dfrac{K(s^2+3s)}{s^4+4s^3+9s^2+10s+4}$

$K_p = 0$, $e_u = 10$;

Wyniki te są poprawne jeśli parametr strojony K zawiera się w zakresie:
$-2.4283 < K < \infty$

l) $G_o(s) = \dfrac{K(2s^3+15s^2+7s+4)}{s^2(s^2+5s+6)}$

$K_a = \dfrac{2}{3}K$, $e_u = \dfrac{15}{K}$;

Wyniki te są poprawne jeśli parametr strojony K zawiera się w zakresie:
$0 < K < \infty$

M3.

a) $G_o(s) = \dfrac{K(s+1)}{s^3+2s^2+(3-K)s+2}$

Układ typu 0;

1) $K_p = \dfrac{K}{2}$, $e_u = \dfrac{2}{2+K}$;
2) $K_v = 0$, $e_u = \infty$;
3) $K_a = 0$, $e_u = \infty$;

Wyniki te są poprawne jeśli parametr strojony K zawiera się w zakresie: $-2 < K < 4$

b) $G_o(s) = \dfrac{K}{s^2+5s+K}$

Układ typu 0;

1) $K_p = \dfrac{1}{4}$, $e_u = \dfrac{4}{5}$;
2) $K_v = 0$, $e_u = \infty$;
3) $K_a = 0$, $e_u = \infty$;

Wyniki te są poprawne jeśli parametr strojony K zawiera się w zakresie: $0 < K < \infty$

c) $G_o(s) = \dfrac{K(s+5)}{s^4+17s^3+60s^2+4Ks}$

Układ typu 1;

1) $K_p = \infty$, $e_u = 0$;
2) $K_v = \dfrac{5}{4}$, $e_u = \dfrac{4}{5}R$;
3) $K_a = 0$, $e_u = \infty$;

Wyniki te są poprawne jeśli parametr strojony K zawiera się w zakresie: $0 < K < 146.2$

d) $G_o(s) = \dfrac{K(s+1)(s+3)}{s^4+5s^3+6s^2+Ks+K}$

Układ typu 0;

1) $K_p = 3$, $e_u = 0.25$;
2) $K_v = 0$, $e_u = \infty$;
3) $K_a = 0$, $e_u = \infty$;

Wyniki te są poprawne jeśli parametr strojony K zawiera się w zakresie: $0 < K < \infty$

e) $G_o(s)=\dfrac{K(s^2+2s+2)}{s^3+s^2+(2+K)s-K}$

Układ typu 0;

1) $K_p=-\dfrac{2}{3}$, $e_u=-3$;

2) $K_v=0$, $e_u=\infty$;

3) $K_a=0$, $e_u=\infty$;

Wyniki te są poprawne jeśli parametr strojony K zawiera się w zakresie: $-1<K<0$

f) $G_o(s)=\dfrac{s+10}{(1+K)s^2+(1+14K)s+40K-10}$

Układ typu 0;

1) $K_p=\dfrac{10}{40K-10}$, $e_u=\dfrac{40K-10}{40K}R$;

2) $K_v=0$, $e_u=\infty$;

3) $K_a=0$, $e_u=\infty$;

Wyniki te są poprawne jeśli parametr strojony K zawiera się w zakresie: $-\infty<K<\infty$

g) $G_o(s)=\dfrac{K(s^4-s^2+2s+2)}{-Ks^4+(1+2K)s^2+(2-4K)s+1}$

Układ typu 0;

1) $K_p=2K$, $e_u=\dfrac{R}{1+2K}$;

2) $K_v=0$, $e_u=\infty$;

3) $K_a=0$, $e_u=\infty$;

Wyniki te są poprawne jeśli parametr strojony K zawiera się w zakresie: $-0.5<K<1$

h) $G_o(s)=\dfrac{K(s^2+9s+14)}{s^4+11s^3+31s^2+(21-K)s-2K}$

Układ typu 0;

1) $K_p=-7$, $e_u=-\dfrac{1}{6}R$;

2) $K_v=0$, $e_u=\infty$;

3) $K_a=0$, $e_u=\infty$;

Układ stabilny gdy K zawiera się w zakresie: $0<K<\infty$

M4.

a) $G_o(s)=\dfrac{s^3+4s^2+5s+2}{s^4+2s^3+2s+6}$

Układ typu 0;
Układ niestabilny

b) $G_o(s)=\dfrac{s^3+8s^2+17s+10}{s^4+5s^3+5s^2+7s+10}$

Układ typu 0;

c) $G_o(s)=\dfrac{s^3+5s^2+8s+6}{s^4+2s^3-s}$

Układ typu 1;

d) $G_o(s)=\dfrac{s^3+5s^2+8s+4}{s^4+5s^3+11s^2+10s}$

Układ typu 1;

e) $G_o(s)=\dfrac{s^3+2s^2+8s+4}{s^4+6s^3+11s^2+3s+2}$

Układ typu 0;

f) $G_o(s)=\dfrac{s^3+4s^2+3s}{s^4+4s^3+11s^2+16s+4}$

Układ typu 0;

LITERATURA

1. Franklin G.F, Powell J.D., Emami-Naeini A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, 1986
2. Hostetter, C.J. Savant, R.T. Stefani R.T. *Design of Feedback Control Systems*, Saunders College Publishing, 1989.
3. Kuo B. C. *Automatic Control of Dynamic Systems,* 7th ed, Addison-Wesley & Sons Inc., 1995.