

# 计算机应用数学课程论文

郑志浩 (11521075)

May 31, 2016

## 1 总结

多块结构网格在数值模拟完全显著优于非结构化网格，但自动生成这些模型是相当困难。这篇文章描述的是自动生成曲面高质量的多块分解。该方法具有可控性和灵活性。用于迫使的特定特征的外观的分解附加的对准约束可以容易地处理。此外，调整是根据描述目标单元的大小属性的输入度量张量场取得。一般的解决策略是基于使用四对称向量场，称为交叉场，来描述在表面的三角网格中局部网格方向。初始化是通过传播边界对齐约束快速到内部的方法。这是一种类似于波前方法，但更简单、灵活，因为网格连接关系在交叉场中不需要考虑。多块分解是通过追踪交叉场中的分界线生成思辨快。网格化分解的最终任务需要求解块分割数的整数规划问题。

## 2 介绍

带有正则 $(i, j)$ 连接关系的结构化栅格在数值模拟上有许多优点；它们产生的带状稀疏矩阵系统，它们是理想的多重网格加速器和它们促进各向异性拉伸而不导致单元质量的严重退化，仅举几例。然而，包裹一个复杂的几何结构网格同时保持边界保形可能是一个棘手的问题，并会通常会导致高水平的不良失真。刚性连接是在大多数情况下也限制性的，并且少数一些精心布置的节点，其中栅格网格结构被打乱，称为奇点，可以显着地降低了网的整体失真和提高其有用性。这导致了多块结构或有时只是块-结构化网格的想法，其中模拟几何分为四边子区域区域称为块，其中的每一字区域将填充有规则网格。多块分解本质上是一个非常粗的网格，其中每个块是空的，它充当用于限定块结构网眼的形状和拓扑的框架。网格奇点出现在多于或少于四边的块。块结构网格经常被分析师的青睐，他们有时为特定的数值方法所需要。它们将被采用如果在动态结构力学在所有可能具有显式求解分析 [1, 2]，并且是用于谱元法几乎必不可少 [3,4]。极度各向异性特性，经常出现在CFD分析，如边界层，震动和冲击方面，意味着有使用局部栅格的需要。在CFD采用局部栅格结构的优势被广泛接受，并在[5-7]报道。理想情况下，所使用的块结构的网格具有的形状和拓扑将有朝向有效地捕获解特点。产生这种网格仍然是一个挑战，最特别的是在3-D显示六面体网格。在2-D的一些方法，是为创建四边形（四）网格诸如铺路[8,9]，笛卡尔网格[10]，子映射[11]和基于中轴分解的方法[12, 13]，但它们在一个或多个方面具有缺陷。铺贴往往造成与数值不必要的网格差的网状拓扑结构。笛卡尔网格方法产生与边界不自然的网状拓扑和质量差的网格。子映射方法只能在小类的几何形状有效。中间轴分解的方法也许是最有能力的算法。他们往往能产生相当不错的质量块结构网格。然而，中轴退化和凹角并不总是以最佳的方式处理，并且在调整目标网格属性方面有局限性。手动构建块结构网格仍然是普遍的做法，因为更高质量的网格可以生成和它们的形状和拓扑结构，可以小心地控制。但是，这是一个耗时的过程，并且需要在用户部分显著技能和经验。

## 3 相关工作

近年已经有一个显著趋势用交叉场来指导网格生成。一个交叉场是一个四旋转对称场，其中每个点具有一组分配对切平面构成一个常规的横四个单位矢量。他们在计算机图形应用第一次出现的一个有用的装置，以控制映射到用于非真实感绘制[14]，纹理合成[15]和网格和全局参数化[16]的表面。N-对称场和奇异的理论是由帕拉西奥斯和张[17]和雷等人 [18]。一个等价的理论是从锥形点（其中曲率集中在一个点上）与固定角度缺陷的名义平坦的表面留学保形映射的属性，以一个任意由布宁[19]到达从不同的角度表面。一个N对称场，并在相应的网格单元尺寸变化的行为被证明是有着千丝万缕的联系，他们都基本上是由泊松方程的点源项的锥点，这是在奇点出现管辖。这一理论表明，设计的交叉领域和网格的问题是在类的逆泊松问题，其特点是从合适的负载分布必须重构势场的一些信息。很难有效地解决不适定问题这事目前所知的[20]。

### 3.1 交叉场生成

对于带弯曲曲面，众所周知的分段线性逼近的误差由对准的主曲率方向[21]元素最小化。此外，六面体网格生成铭记于心，表面的三重正交系统杜平定理[22]实际上指出六面体只保留垂直顶角如果四边形单元的边缘的恰好是那些薄片的主曲线。因此，它是有利的交叉场与表面的主曲率方向对齐。产生交叉场的由近似主曲率方向上的策略已在[16, 23, 24]被使用。这种方法具有产生由一个简单的常规耦合到固有的表面特性有吸引力的交叉字段的优点，并且奇点在脐点自然出现。这种方法主要缺点是，在大的区域，其中法曲率接近于对称的（即相似的主曲率值，1和2），这是不常见的，交叉字场定义不清。具有各向异性和各向同性正常曲率的表面的例子示于图1。此外，交叉场与表面的边界的取向不自然处理。对于具有对称曲率区域表面，大的

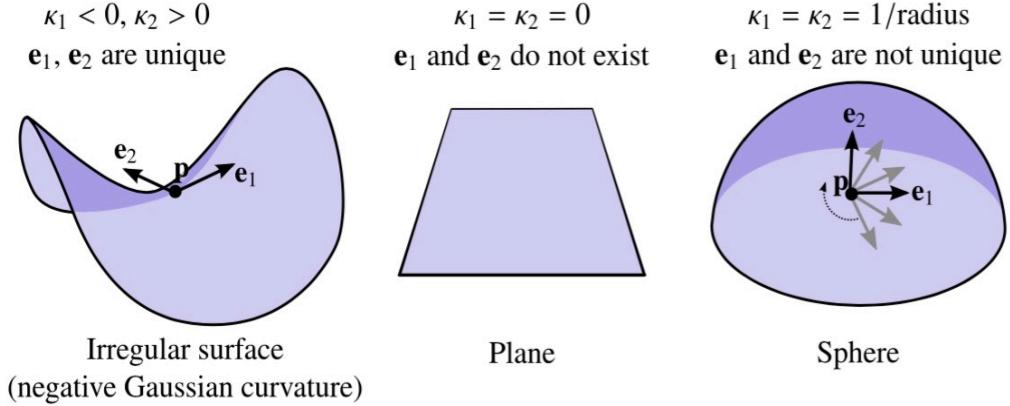


图 1: 一个带有各向异性法曲率例子和唯一主方向( $e_1, e_2$ ) (左) 和各向同性法曲率曲面 (中间) 和没有唯一主方向 (右边)。

总高斯曲率表明，奇点应该出现在附近。布宁的理论[19]（简要概述第3节）证实了这一说法。例如，一个平面具有0均匀高斯曲率；因此，它不需要奇异（在没有对准约束）。封闭表面具有总高斯曲率值，是仅依赖于它的属，这使限制上必要啮合它奇点的最小数目。在保形参数化，本-陈等 [25]设计用于通过将它们放置在与显著总高斯曲率区域的中心在一“贪婪的”优化方法确定合适的锥体奇点的方法。然而，该方法没有特别的用于与固定奇异类型交叉场设计。对2-D平面的交叉领域，奇点需要要么满足边界对齐约束或便于四元件的大小和方向的目标。布宁[26]介绍了，直接解决在平坦的表面逆泊松问题的方法。作为输入，诺伊曼（路）和狄氏（各向同性大小）的边界条件被分配，和表示网格奇点的一个点源的分布得以解决，其满足这些到一定程度。该方法从理论角度吸引力，以及一些令人印象深刻的结果所示。但是，它似乎包含需要仔细微调一些步骤，和高敏感性数值错误报告具有大量奇异的问题。在平面和带曲边曲面带交叉场共同起点是从稀疏集特征的边缘或者从一个边界表示几何边缘或者采取通过诸如数值近似[27, 28]或通过用户设置控制线。用这些作为“边界条件”，也有各种各样的已经设计找到的交叉场相关的技术。Bommes等 [29]描述了一种三角形网格的混合整数线性优化找到与奇点的平滑的交叉场（具有相应的整数的条件）。为了减少搜索空间的，最近块分配方向是通过改进的Dijkstra算法得到的，奇异被迫在分块边界发生。其混合整数解算器后跟一个局部奇异优化搜索产生良好质量的交叉场，虽然算法的复杂度高，性能取决于使用Dijkstra树的结构在很大程度上，其中包括最小的细节。Kowalski的等[30]用（单位）向量最初由帕拉西奥斯和张文献[17]中描述的交叉场。三角形网格中矢量场在两个阶段就解决了。首先，单位范数约束被松弛，带狄利克雷便捷条件的驻波热函数通过FEM分析求解。接下来迭代油画方法产生一个有效的单位向量并决定了奇点位置。缺点是，该方法不能容易地处理曲面，它不适合于调整目标元素的大小和方向。用于优化的横场的平滑性，非线性目标函数被埃尔茨曼和佐林[14]开发和Liu等人[31]利用周期性三角函数用于给模 $\pi/2$ 方式取向。拟牛顿方法可用于求解这个函数最小化的交叉场，但一个有效的初始化是必要的，因为奇点的出现会导致非凸面和随机初始场将不可避免地导致大量不必要的奇点。Liu等人[31]从对齐约束推断信息用于初始化一个“轻量”的方法。元素的队列通过，直到它是空的迭代；如果一个元件具有足够的邻居使用分配十字架，一个新的元素被计算并且从队列中删除。有通过更改以确保该约束具有影响的公平分配区域时底层三目是不同大小的，以提高该方法显著范围。此外，进行调整，用于容纳目标元素的大小也是可能的。这些差距是由在本文提出的新方法初始化填补。

### 3.2 利用指导性的交叉场生成网格

QuadCover算法[24]生成除了在交叉场中奇点外全局连续近似正交的参数化，其中等参线用于描述四边形网格。在奇点明确定义交叉场和参数的梯度之间的差的平方被最小化。通过放松忽略整数约束问题的近似解决方案是通过线性代数发现，一个可行的解决方案，然后通过四舍五入到最接近的整数寻求。该方法将最经常能够产生小单元尺寸的有效四边形网格。然而，四舍五入策略过于简单不能够有效地处理粗网格大小。迭代四舍五入计划由刘等人使用[31]可以用较粗的大小更好地应对。Bommes等[29, 32]已经设计出复杂的方法来整数网格映射生成从敏感的尺寸输入交叉场的四边形网格。他们结合贪心策略求解混合整数规划问题。除了参数化，用于产生网格的另一种方法是通过创建适合交叉场的多块分解。这自动化了传统多块网格生成过程中的分解阶段。不含有奇点的交叉场的常规区域可以被映射到一个网格；因此，交叉场的流线连接到奇点具有将表面分隔成在那里可以产生网格块的效果。这些形式一起形成了被称为基复合体[33]，四边块复形[34]和分割图[17, 30]由不同的作者。用于与边界的表面，连接于角部的流线也应包括在内。通过首先由分界面图形分解表面生成的网状物提出科瓦尔斯蒂等[30]。上产生一个多块分解的网格，即满足块模板约束整数分割数必须首先解决。虽然方法已为这个任务[35-38]开发，一些改进的功能仍然需要，如将要解释。这种方法的一个主要问题是，分割线可能会无限期地盘旋约孔。另一个原因是，它们可以形成细长的块与高度比目标元件尺寸小得多。这些问题在本文中搜索，并提出了通过使用多嵌段分解与块接口部分邻接的解决方案。

## 4 处理网格生成的支配等式

非结构化网格生成的连续体理论是由布宁[19]中描述。它恰恰概括了跨场弯曲和网目尺寸变化之间的相互关系，以及它网格奇点的根本重要。布宁的文章的主要结果如下：两个曲面  $S$  和  $\tilde{S}$  之间的保形映射通过泊松等式支配，后者是带有一些锥点的局部平面：

$$\Delta_S \phi = K + \sum_{i=1}^N k_i \frac{\pi}{2} \delta_{p_i}, k_i \in \mathbb{Z} \geq -4 \quad (1)$$

$\Delta_S$  是拉普拉斯 – 贝尔特拉米算子， $K$  是曲面  $S$  高斯曲率， $\delta_{p_i}$  项是带权狄利克雷函数用于描述  $\tilde{S}$  上有着曲率离散总和为  $k_i\pi/2$  的锥点  $p_i$ 。锥点对应于网格奇点，它们的类型通过整数  $k_i$  表现。整数值可以被松散地解释为在四边形网格顶点上超过四的数目，更加靠谱解释为在多边形网格顶点模版超过四的数目。 $-\phi$  场带有不同的类型的奇异点例子在图1。

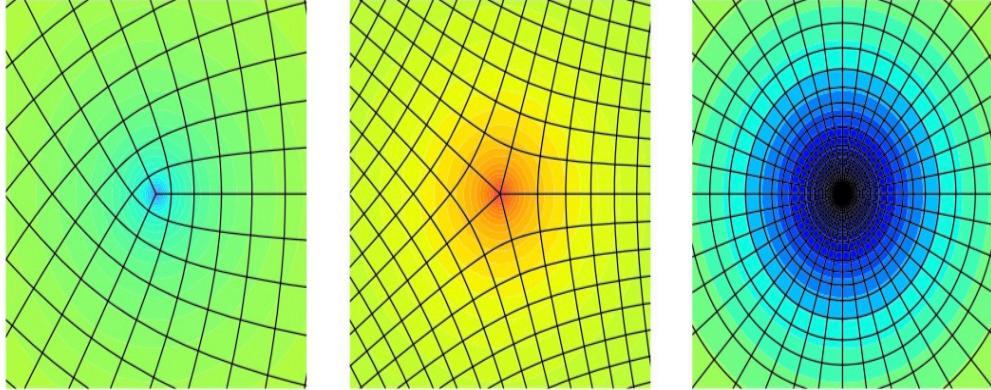


图 2: 网格奇点和对应的 $-\phi$ 场。

若一个单位栅格被画在  $\tilde{S}$ ，它在  $S$  的像是局部各向同性的栅格，具有大小

$$h = e^{-\phi}. \quad (2)$$

在曲面  $S$  上栅格边的曲率关于  $\phi$  – 场的变量通过下式子联系：

$$\kappa_g = \frac{\partial \phi}{\partial e} \equiv \langle \nabla_S \phi, e \rangle \quad (3)$$

其中  $\kappa_g$  表示边的测地距离。固有法向， $e$  被定义为  $e = n \times t$ ，其中  $n$  是曲面法向  $t$  是在曲面上边的切向，因此  $\partial/\partial e$  表示沿着固有法向上的方向偏微。这可以通过图2解释。交叉场在点  $p_1$  和  $p_2$  在带

有弯曲边界点曲面上的角度变化，可以被衡量为

$$\Delta\theta = \angle(PT_{p_1 \rightarrow p_2}c(p_1), c(p_2)) \quad (4)$$

其中PT是平行转换算子，而且c表示四个交叉向量中的一个。然后，公式3有对应的微分表达式

$$\kappa_g \equiv \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial e} \quad (5)$$

公式将 $\phi$ -场和交叉场中的相关角度联系起来。

$\phi$ 场表现为一个连续的描述无穷小店各项同性四边形网格，或者说是交叉场。一旦有效的网格奇点配置被设定，标准的有限元方法被用于寻找强迫边界对齐约束的诺伊曼边界条件的解。

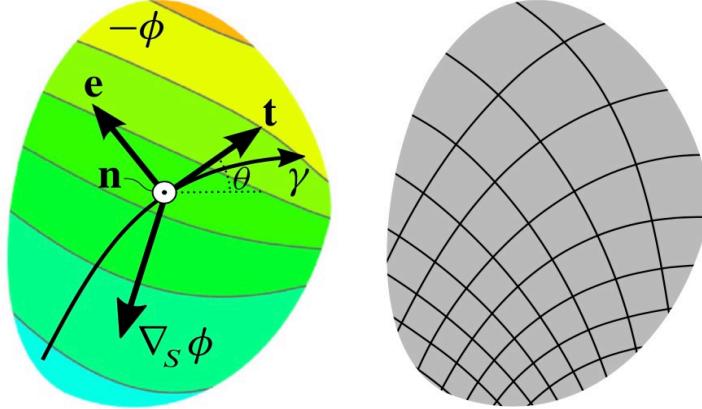


图 3: 一个网格边， $\gamma$ ,局部沿着 $-\phi$ 场弯曲（左）并且对应于各向同性网格的草图（右）。

## 5 交叉场的生成

这里介绍的主要思想是在一个整个表面由通过一个快速行进方法[39]中传播的约束到内部预上边界划线杂交初始化的交叉场。该策略是有效地进行关于非结构化三角形网格，并可以产生与奇点的有序交叉推到表面的中轴。新交叉通过使最大化交叉场的平滑性和提高与描述网格元件的理想尺寸的目标大小字段其兼容性之间的折衷在传播前面计算的。平滑的少量的需要以改善整个中轴交叉场，并进行微调。该方法是最适合的平面结构域或与众多边界特征球形块，它也可以适用于一般的曲面。

### 5.1 目标网格性质

定义在曲面上的测度空间可以有效地将网格的理想大小属性包裹在内。该理论完整的数学描述可以在[40]中找到，更全面的网格自适应总结在[41,42]。实际上，他们可以被表示为测度张量场，他们可以重新定义在局部衡量距离和角度。在测度空间中切向量的长度（在参数化相关的切空间基上）可以通过下式计算

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{M}} = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{M}}} = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}} \quad (6)$$

以及相关角度计算为

$$\cos v_M = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{M}}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{M}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{M}}}, \quad (7)$$

其中 $\mathbf{M}$ 是局部测度张量，一个 $2 \times 2$ 对称正定矩阵。测度空间中的单位球可以给出为

$$\mathbf{B}_{\mathbf{M}}(1) = \{ \mathbf{x} | \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{M}}^2 \leq 1 \} = \{ \mathbf{x} | \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} \leq 1 \}, \quad (8)$$

其中 $\mathbf{x} = (x, y)$ 是切平面上的向量。利用一个等温坐标系统（无论在何处都可以建立），一个在切平面上坐标变化到关于 $\mathbf{M}$ 特征向量的正交基 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 通过 $\mathbf{b} \rightarrow [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2]^T \mathbf{x}$ 执行。因此，椭圆的等式为，

$$\mathbf{B}_{\mathbf{M}}(1) = \{ \mathbf{x} | (x/h_1)^2 + (y/h_2)^2 \leq 1 \}, \quad (9)$$

其中 $h_1$ 和 $h_2$ 时 $\mathbf{M}$ 的特征值的平凡根的倒数。将欧几里德测度空间上的单位球映射到无力空间上的解释可以观察图??（左）。

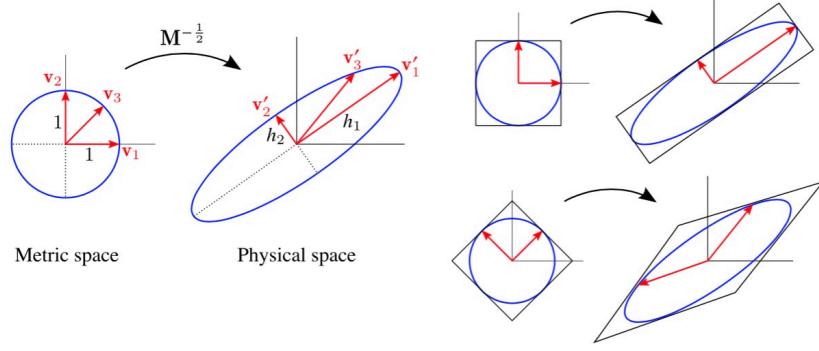


图 4: 从欧几里德测度空间到物理空间的映射 (基于[42]) (左) 和解释依赖于拟单位长单元关于扭转方向 (右)。

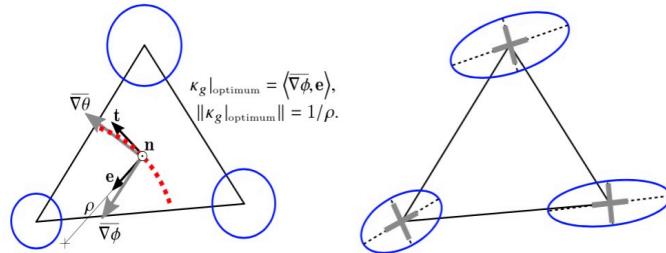


图 5: 目标张量场的属性通过张量场来显现。在各向同性的变化给了一个交叉场目标梯度 (左), 以及各向异性给了目标交叉的朝向 (右)。

测度张量暗示四边形单元两个需求的属性。第一个, 他们的边有单位长度当在测度空间中衡量时。第二点, 他们的边石岩者特征向量, 所以可以维持正交的角点角度。保留有正交的角点和扭转的拟单位单元分别时对齐和不对 $\mathbf{M}$ 特征向量的情况, 如图?? (右) 所示。

用于控制网格大小的恰当的测度张量场可以通过后验店仿真近似解[21,42]获得。解的信息一般是比较难获得的, 一个基于几何特征的先验技术用于构建恰当的测度张量场已经被开发[43-45]. 人造测度张量场已经被用于当前的工作中, 这个张量场是通过定义一个解析函数活着通过在CADfix[46]中的工具来插值一些特定点点测度张量。

等式2和5暗示单元大小的变化造成交叉角度的变化。在一个定义在三个顶点各向同性测度张量三角形网格中, 在它们大小变化 $\bar{h}$ 预示着交叉在这个三角形单元上最佳的角度变化。对于 $\bar{\phi}$ 的值可以通过 $-ln\bar{h}$  (等式2) 来计算。用三角形网格单元来用平面局部近似曲面, 并且假设参数是线性变化的, 一个常数最优梯度 $\Delta\phi$ 可以被计算出。从公式5可以看出在伴随目标交叉角度梯度 $\Delta\theta$ 有着同样的量级而且仅在方向上关于曲面法向差距 $-\pi/2$ 。图?? (左) 是关于目标梯度通过计算三角形网格顶点上的测度张量的草图。一条网格边上最优的曲率 (红虚线) 关于切向 $\mathbf{t}$ 如图解释。当没有各向不同性的张量杯涉及到, 平均特征值会被用于目标梯度。

各向异性测度张量场描述了四边形单元更受偏好的朝向, 四边形单元的边同张量场的特征向量对齐。目标朝向的重要程度取决于各向异性的主大小, 即 $\max(h_1, h_2)/\min(h_1, h_2)$ 。图?? (右) 展示了目标交叉朝向同各向异性的测度张量, 其中右下方向的测度张量的重要性最大, 左下方的重要性最小。

## 5.2 边界对齐约束

边界相一致的是网格的典型要求。因此, 寻求交叉场应具有通过边界边的流线。换句话说, 边界边上交叉相关联的两个正交方向 (即, 一维子空间) 是沿着或垂直于边界边切向。然而, 一个交叉不能同时具有沿着在一般的拐角的连接边缘的两个切线向量的方向。最佳拟合交叉具有要么与角平分线对齐或与之有 $\pi/4$ 的偏移的方向对齐。整数

$$n_c = \text{round} \frac{\theta_c}{\pi/2} \quad (10)$$

表示在角点以角度 $\theta_c$ 的交叉来最佳的交叉拟合。 $b_c$ 的奇偶性表明角点处交叉最佳对齐性是否需要对齐角平分线或弥补：偶，对齐；奇，弥补。直观地， $n_c$ 描述在拐角处出现的网格单元的数量。

### 5.3 惩罚能量函数

有一个用于衡量交叉场局部质量的方法是非常重要的。所有事等价的，交叉角度的快速变化都是不想遇见的，这将降低交叉场的光滑性。布宁的 $\phi$ -场的狄利克雷能量函数事非常自然的方式用于获得光滑性，

$$\begin{aligned} E_{smoo} &= \int \|\Delta\phi\|^2 dA \\ &= \int \|\Delta\theta\|^2 dA(). \end{aligned} \quad (11)$$

单元大小分量跟目标大小分量的偏差可以通过下式衡量

$$E_{grad} = \int \|\Delta\theta - \bar{\Delta}\theta\|^2 dA. \quad (12)$$

类似的对于交叉从目标方向的偏差衡量，

$$E_{direc} = \frac{1}{A_{total}} \int (\theta - \bar{\theta})^2 dA, \quad (13)$$

其中总面积分母被包含在内，这样表达式产生了一个维度无关的值。总能量函数是将上述三个单独的三项的一种组合，

$$E = E_{smoo} + \omega E_{grad} + \omega E_{direc}, \quad (14)$$

其中权重， $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R} > 0$ , 用于分配目标大小梯度和方向的重要性或者不重要性程度。举个例子 $\omega_1$ 决定于分配的大小有多么至关重要， $\omega_2$ 应当正比于测度张量场的各向异性。一个简单的公式在初始化的方法中被采用用于求解对于三角形网格单元自由的顶点局部最优的交叉场。 $\theta, \bar{\phi}$ 和 $\bar{\theta}$ 被假设为分段线性的。

### 5.4 算法总览

提出用于生成交叉场的方法包含有的高层次的步骤详细列在Algorithm 1中。

不同的步骤解释都在图3。

这个方法涉及到在每一个节点上寻找最优的交叉并且截下来考虑局部的交叉场。通过依据离边界的距离遍历顶点，最后的解除了在中轴附近都是光滑的。奇异点一般会出现在中轴上，除非在高先验的梯度和各向异性的情况下。

---

#### Algorithm 1 Generate cross-field

---

1. Generate a tri-mesh on the surface.
  2. Assign crosses on boundaries.
  3. Propagate the cross-field from the boundaries to the interior. New crosses are solved at the propagation front by minimising Equation (14). The method is organised in the manner of the *fast marching method*.
  4. Apply some smoothing to the cross-field.
  5. Identify singularities in tri-elements by a simple check.
- 

### 5.5 适当的三角形网格

当选择用于该方法的三角形网格大小时需要考虑很多事情。交叉场被视为在三角形网格单元上线性变化，以便在三角形网格的尺寸应足够小以捕获它的特征。另一方面，有一种激励，以限制节点和效率单元数目。虽然该解决方案的具体细节是未知的，开始时，对正比于边缘曲率边缘节点间距始终是合适的。另外，三角形网格应该是表面的嵌合表示与元件尺寸小到足以重现小的特性。如果它希望在表面的小几何特征是从四边形网格上不存在，则它们可以简单地通过将三角形网格“网格覆盖”。由于输入度量张量场指示如何四边形网格将理想的行为，谨慎的

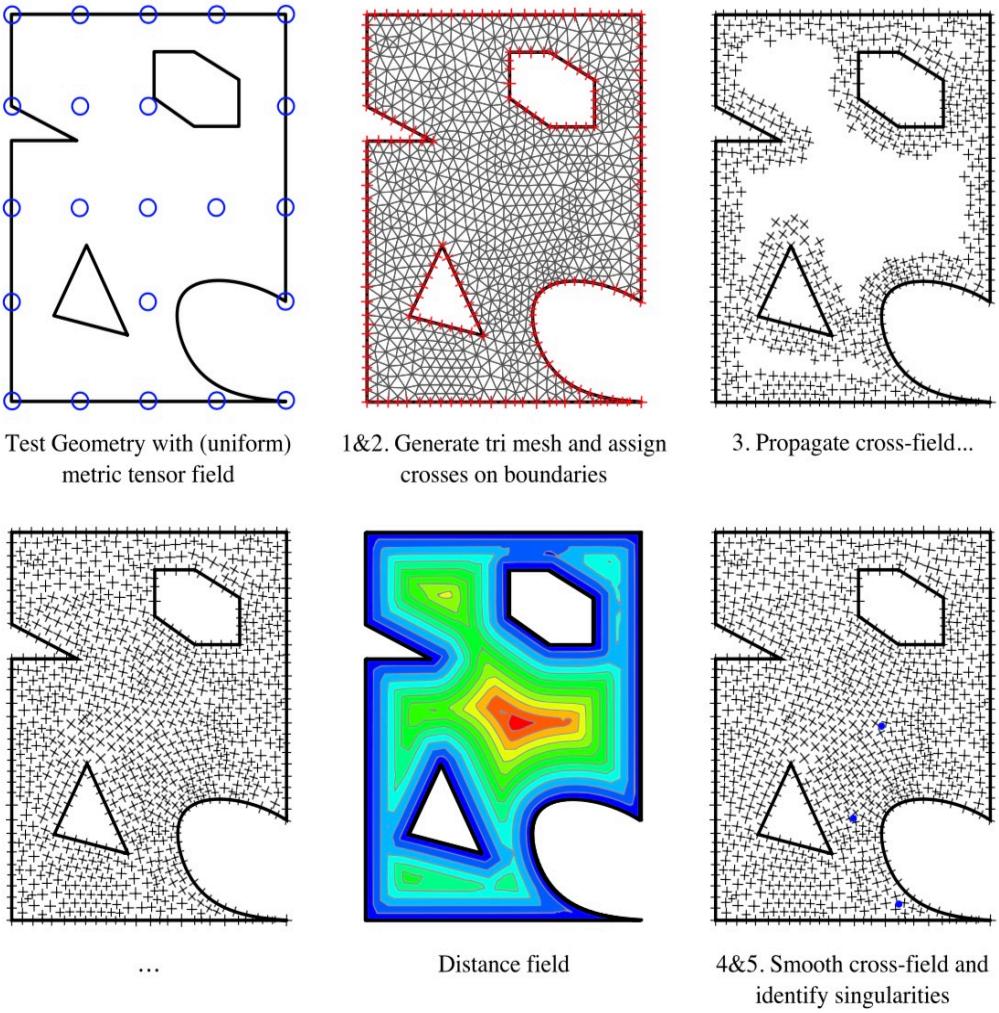


图 6: 交叉场生成过程。

做法是使用一个三角形网格能够捕捉这种行为的。最后，对于弯曲的表面，在正常曲率穿带上于实现的表面的足够的分段线性逼近的最大尺寸的限制

虽然方法的性能不是过于依赖三网格的质量，它仍然会在较差的三角形网格下生成合理的解，良好的性能是通过采取一些注意查看三角形网格单元有合理的角度保证和平滑变化的尺寸。鉴于有效的三角形网格生成和改进方法广泛应用，没有理由使用质量较差的三角形网格。在边界上值为0点标准程函方程求解以得到距离场。其目的是为了指导在其中新的交叉计算公平分配的每个边界的影响的区域，促进正则性。一个快速行进方法的是基于在[47]中描述的有限元方法被用于此。

该算法的伪代码在Algorithm 2给出。程函数双曲线性质的优势被采用，其中解只受“逆风”影响。这些节点标记要么“活着”（已经计算过且被固定的距离），窄带（仅刚被计算过距离）或遥远的（尚未触及）。尚未分配的距离可以在节点通过外推过三要素计算具有两个节点分配了距离和标记为活着。在距离场假设的局部线性变化和单位范数的梯度足以让此计算。用新计算的距离的节点重新标记为窄带。通过反复该方法进行重标记具有最小距离的窄带节点作为活，然后检查是否其遥远的邻居的距离可以被计算出来。在该新的距离被解决节点也通过局部最小化公式10分配的一个交叉。

最小堆优先队列用于有效地找到在narrowbandList的最小距离的节点。该过程的计算复杂性是 $\mathcal{O}(N \log N)$ 。

传播方法的结果示于图7为简单的例子，其中两个杂交已分配在一个平面上。定期的三目与分配的交叉节点使用。因为简单的分段线性逼近是善于捕捉两个分配点近距离轮廓的高曲率无效网格的印记出现在距离场的解决方案。结果示于三个不同的度量张量场，由蓝色省略号所指示的。可观察到在三个结果在整个中轴的交叉是不连贯的，在这种情况下中轴恰好是y-轴。

---

**Algorithm 2** Cross-field propagation

---

▷ *Initialisation:*

```
narrowBandList ← []
for every node  $i$  do
    If node  $i$  on boundary then
        mark node  $i$  as alive
         $cross_i$  ← boundary aligned cross
         $d_i$  ← 0
    else
        mark node as far-away
for neighbour elements of all alive nodes do
    —Repeated Block—
    if neighbour element has two alive nodes (1,2) and one far-away or narrowband (3) then
         $d_3^*$  ← compute  $d$  ... (linear interpolation of  $d, \nabla d = 1$ )
        if  $d_3$  = None or  $d_3^* < d_3$ 
             $d_3 \leftarrow d_3^*$ 
             $cross_3$  ← compute  $cross$  ... (by minimising Equation (14))
            mark node 3 as narrowband
            heapq.push(narrowBandList, ( $d_3$ , node 3))
```

---

▷ *Loop:*

```
while narrowBandList ≠ [] do
    ( $d_{\text{smallest}}, trial$ ) ← heapq.pop(narrowBandList)
    mark  $trial$  as alive
    for neighbour elements of  $trial$  do
        —Repeated Block—
        ...
    ...
```

---

## 5.6 交叉场的光滑化

一个光滑化方法可以被用于去除初始化后交叉在跨越中轴所具有的不连续。制定一个平滑方法的标准方法是定义交叉的失真的量度为目标函数，然后使用一种优化方法，以创建改进的场能量最小化。狄利克雷能量（公式7）的弹簧作为适合的（二次）的目标函数，但奇异需要定义或其他整数变量必须用来处理它们的出现。更吸引人的选择是使用一个非多项式目标函数是仅通过使用四倍角三角函数在杂交的角模 $\pi/2$ 的差异敏感。这样一来，它的不重要是否在一个三角形网格单元发生奇点相对于所述失真值。然而，它与主要的非凸明显周期；因此，基于梯度的优化只能希望找到那些高度依赖于初始交叉场局部最佳解决方案。

光滑性函数通过埃尔茨曼和佐林[14]来衡量两个交叉之间的不对齐性

$$\xi(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}(1 - \cos(4\theta_1 - 4\theta_2)), \quad (15)$$

其中 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 是四个交叉方向中的任意一个方向同一个局部的参考轴之间的角度。函数的图象被画在图8。一个在三角形网格单元 $e$ 上关于 $\theta_1$ 近似的总失真函数为

$$\Xi_e = \frac{1}{A_{\text{total}}} \int_e \xi^{(e)}(\theta_1, \theta(\mathbf{x})) dA, \quad (16)$$

其中一个简单的（即，线性的）多项式被用于在单元上插值 $\xi$ 。在总的交叉场中的总失真是通过将所有三角形单元上的失真进行求和，

$$\Xi = \sum_e \Xi_e. \quad (17)$$

最小化该组在每一个节点上带有一个交叉的角度的目标函数是一个大且数值性要求的问题。为了简化这个问题，它被划分为一系列降维的问题，仅涉及最重要的几个解变量。这产生了一

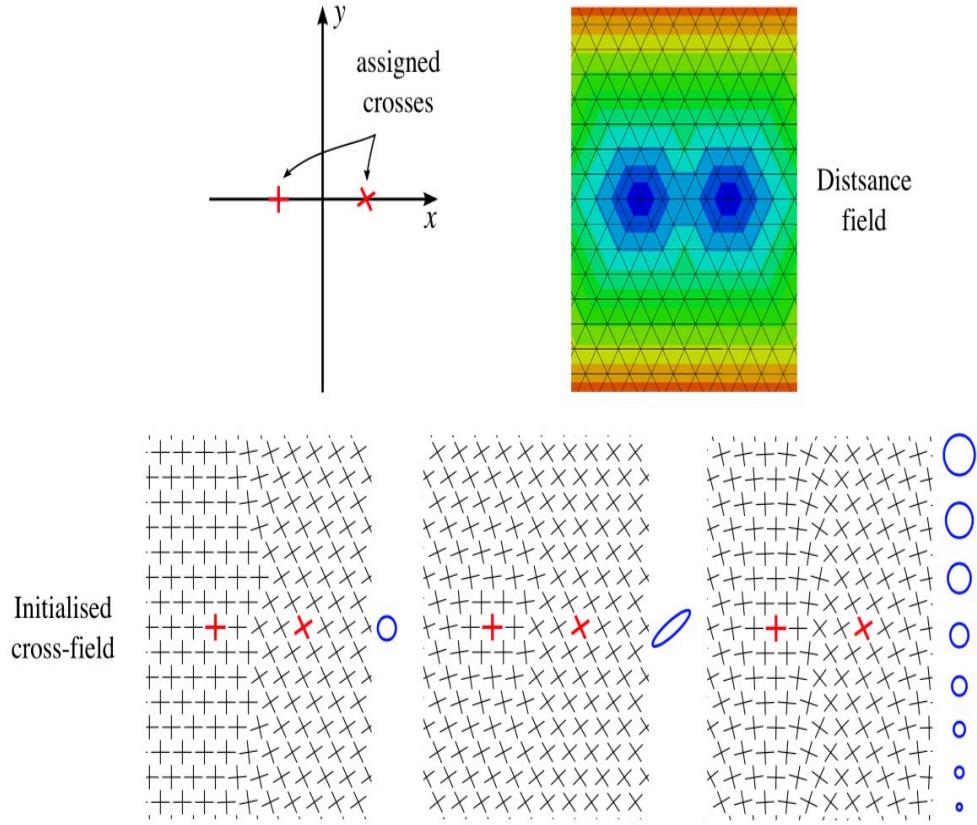


图 7: 描述对于在平面上固定有两个交叉的交叉场初始化方法, 分别在三中不同的测度张量场 – 各向同性均匀的, 各项异性均匀的和各向异性变化的。

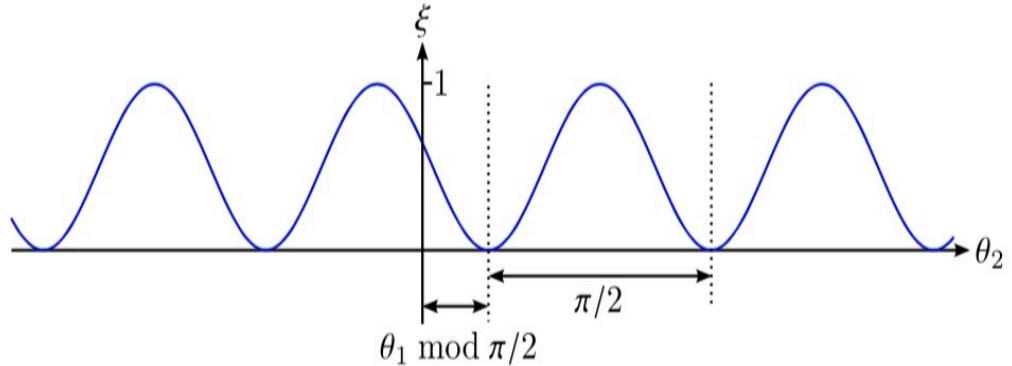


图 8: 两个交叉之间的光滑性周期函数

个更可控制的问题, 并且求解起来更加高效。因此, 等式13的最小化三角形网格中所有N个节点的交叉被拆分为N个问题, 用于最小化N个问题, 每一次仅考虑目标节点相邻的单元。该解决方案的过程涉及然后反复解决这个为依次在每个节点上, 希望收敛到真正的解决方案。为一个节点,  $i$ , 其中使用线性内插函数的本地目标函数数值方程, 是

$$\Xi_i = \sum_j \omega_j \xi(\theta_1, \theta_2), \quad (18)$$

其中 $j$ 是与节点*i*直接相邻的第一层环, 其中 $\omega_i$ 是两个共享有边 $ij$ 三角形单元的面积和。

---

**Algorithm 3** Smooth cross-frame field

---

```

settings: numIterations,  $\Delta\xi_{threshold}$ 
activeNodes  $\leftarrow$  {all nodes (except those with fixed crosses)}
iteration  $\leftarrow 1$ 
while (iteration  $\leq$  numIterations and activeNodes  $\neq \{\}$ )do
    nextActiveNodes  $\leftarrow \{\}$ 
    for nodei in activeNodes do
        Locally optimise crossi ... (Minimise Equation (18) by BFGS solver)
         $\Delta\xi \leftarrow \xi(\theta_i, \theta_j)$ 
        if  $\Delta\xi > \Delta\xi_{threshold}$  then
            Add nodei and {nodej} to nextActiveNodes
    activeNodes  $\leftarrow$  nextActiveNodes
    iteration++

```

---

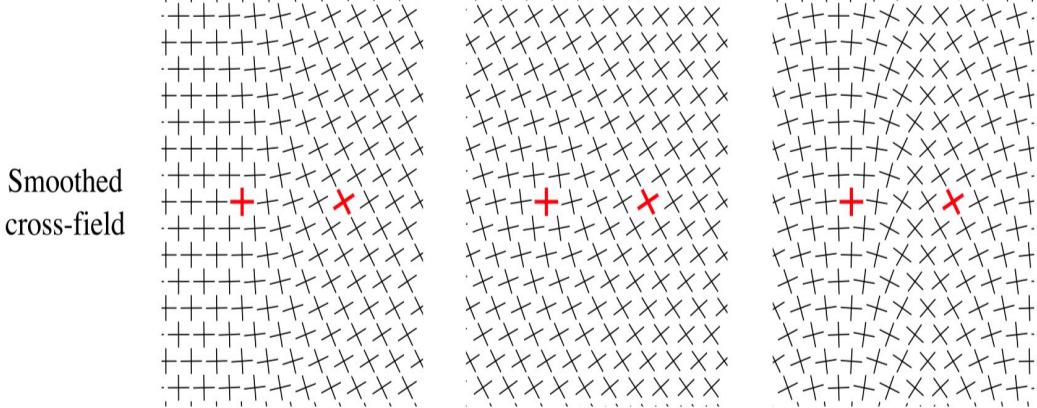


图 9: 提高7的交叉场通过三次光滑迭代。

一个数值化过程用于优化交叉场可以提高它的光滑性被列在Algorithm 3中。交叉是增量式地被光滑化，在网格上一个接一个。每一次调整都是依据当前附近节点的值。至于次序不是特别重要。一个预先设置的迭代次数可以被执行，或者连续两次的交叉之间的角度小于某个阈值。在一次迭代完之后，接下来的迭代代价显著降低，之后的迭代只发生在前一次有变化的节点或相邻的交叉上。一个显著的变化被设为 $\xi_{threshold} = 0.01$ ,大概对应了 $3^\circ$ 交叉角度的变化。这个技术大大加速了收敛速率。

光滑化的一个不期望结果是将初始化到交叉场中的性质（用于调整网格大小和方向）去除掉。为了消除这个副作用，可以在能量函数中添加一些其余项，尽管并没有被探索过。因此需要避免过多的光滑化过程，最多光滑化三次是被允许的在这篇文章。

光滑化的结果被用于图7的初始化交叉场中显示于9。

## 5.7 识别奇点

在每一个节点建立了一个交叉之后，奇点就可以被提取了。每一条边被赋予一个最小的角度变化， $\Delta\theta$ ,在区间 $(-\pi/4, \pi/4]$ 来移动一个节点到另外一节点的变化。如果曲面的法向没有对齐，则一个交叉将通过平行转换算子被旋转至另外一个切平面上来获取衡量。奇点讲出现在那些三角形单元中若该单元中的交叉不可以关于边上 $\Delta\theta$ 被连续地线性插值出来。对于有顶点1, 2 和3的三角形网格单元，在传统的逆时针顺序下，它将服从布宁的[19],其中的奇异点指标有下式给出

$$k = -\frac{2}{\pi}(\Delta\theta_{12} + \Delta\theta_{23} + \Delta\theta_{31} + \int_e \int_e K dA). \quad (19)$$

总的高斯曲率项可以被忽视，若三角形网格是通过曲率敏感的生成方式生成的，并且曲面方向

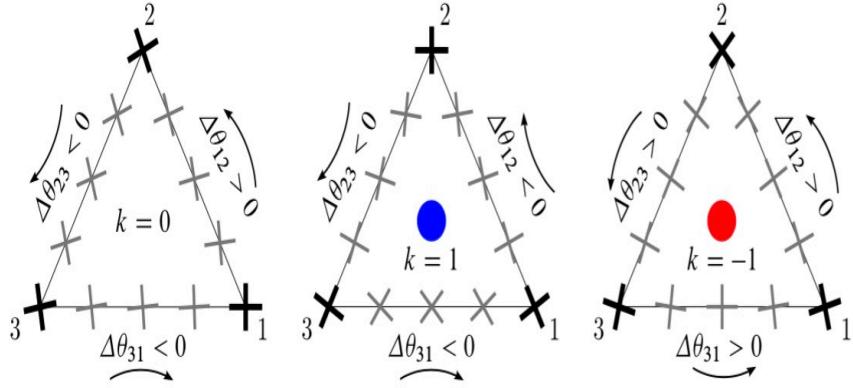


图 10: 通过在边上的交叉角度变化来进行奇点识别。

在相邻的节点不大，并且可以充分地将 $k$ 近似到整数。只有最简单的奇点( $k = \pm 1$ )会生成若最小的角度变化(在范围 $[-\pi/4, \pi/4]$ )被分配到边上。奇点识别方法被展示在10。

除非在网格大小上有非常重要的目标变化，非常不希望有两种不同类型的奇点出现在比较靠近的领域，因为这将导致非常严重的失真出现。正-负奇点对出现在相邻的三角形单元内可以通过简单地重现定义边上的角度变化来去除

$$\Delta\theta \rightarrow \Delta\theta - \text{sign}(\Delta\theta) \frac{\pi}{2}. \quad (20)$$

这个技巧可以被采用在实现了的算法中，但是事实上，光滑化过程会自动消除这些。

## 6 生成多块分解

交叉场描述了四边形网格单元的朝向，并且构建了网格奇点的位置。接下来一步是分解曲面到块，每一个块里可以被投射低失真的正则栅格。从奇点和边界角点出发的分割线能将曲面分割成拓扑上的四边块。因此，在三角形网格单元上追踪这些是生成多块分解掉基础步骤。

### 6.1 数值性的流线追踪

目前存在很多方法用于生成(速度)向量场的流线， $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ，通过数值地积分等式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}). \quad (21)$$

为了追踪交叉场的流线，需要一个额外的步骤来确认局部交叉四个向量中的哪个向量作为初始方向作为接下来前进的方向。一个方法如陈列在[50]中被用于追踪流线通过三角形网格单元。算法采用显式两阶龙格-库塔方法。曲面在每个三角形单元上都被视为平面对待，节点上的交叉通过3D上最小的旋转角被旋转至单元平面上。

龙格-库塔方法不会被应用到有奇点到单元上，因为需要交叉的连续性。因此，一些基本的工作策略是必须的。三个新的边通过连接原来三角形的三个顶点与中心。它们的 $\Delta\theta$ 值被设为最小的旋转角度关于交叉在原始点和奇异星点除(接下来将讨论)。为了在这些新的单元中追踪流线，霍伊恩的方法，通过科瓦尔斯基因人[30]描述，被用于寻找哪个向量是必须的在三角形网格单元边上。解释这些图可以通过看11右，其中流水线被画出红色点线。

出了奇点处(有 $k$ 星有向方向)外，交叉场中每一点都是有四个方向。它们都是均匀分布在奇点处，间隔都是 $2\pi/(k+4)$ ，如布宁[26, Appendix A]中所证明。为了寻得正确的奇点星角度方向，一条射线从一个位置到原始边沿着交叉场方向被寻找，找到了奇点到恰当方向，剩下的几个方向可以通过旋转 $(k+4)$ 次的 $2\pi/(k+4)$ 。

$$t = \frac{\alpha_0 - \theta_0}{\Delta\theta - (\alpha_1 - \alpha_0)} \quad (22)$$

其中符号的定义显示在11(左边)。这样寻找到了奇点到恰当方向，剩下的几个方向可以通过旋转 $(k+4)$ 次的 $2\pi/(k+4)$ 。

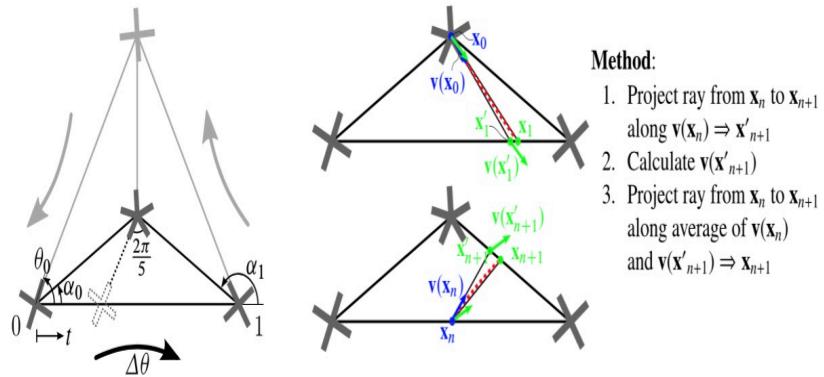


图 11: 朝向一个奇异点的方向 (左) 和数值地追踪流线在奇异子三角形单元中从奇点星方向中 (右上) 以及对于任意地流线通过 (右下)。

## 7 结果

一系列的交叉场生成方法和它们的追踪后的分界线将被检查。

在图12中显示了对于一个测试曲面，其只是一个简单的平面带有一些测试特质，例如三种不同的目标测度张量场。多块分割结果在视觉上还是比较愉悦的，可以作为第一个好的测试来证明它们的质量。其中唯一一个拓扑特质导致不良结果是极栅格拓扑在几何的右下角。一个极栅格拓扑会带有一个拓扑高阶  $k = -4$  的类型奇点（图1（右边））。有时候这类网格模版是不会被允许的，但是对于这类几何任何其他方法都有可能产生高失真单元。若一个极网格如果出现，需要将角度先截断。第一个测度场试单位和均一的，这是默认的，切塔的结果是简单的块结果拓扑的。第二个和第三个的测度场是常数各向异性和梯度各向同性，分别，并且它们造成了奇点的位置和数目的变化，以至于多块分割的结果不同更适合于目标单元大小。在公式10中  $\omega_1$  和  $\omega_2$  的值被设为 50。增加或者减少它们的值可以分别改变该方法对大小变量或者各向异性的敏感度，同时随着它们的值越来越接近 0，它们的解逐渐接近第一个的解。

在图13中，作为高先验目标梯度的网格结果，交叉场的解在矩形中包含两个正、负奇点。结果不是非常对称由于数值误差在不正则的三角形网格中初始化方法中出现的。一个更好的优化了的三角形网格会引起一定的对称性。

在图14中俄外的固定对齐约束被添加作为一个例子。为了准确地求解在一个CFD仿真中的震动前沿，网格单元需要对齐震动特质不可避免在求解器[51]中被窃需要尽可能的在不引起严重扭曲的情况下具有各向异性梯度。“lambda震动”被陈列出，被窃一个震动方向控制特质被粗略地从实验性流体像描绘出。它们被包含作为抓痕特质，即带有两个几何炒香的表示了崩裂的洞，它们被视为额外的边界带有硬性对齐约束。一个后段的技术被发展来从流线解中提取这些流特质和部分收敛点流解[52,53]。它们同时页包含了基于准确的经验的先验知识，被展现在这里，来引导分割出一个准确的拓扑来允许有效的r-类型自适应到解中。

将方法应用到带曲边的曲面上展现了两个例子在图15。这里，奇点合并没有合并不是作为不兼容的对齐性约束的结果，因为所有边界的测地曲率为0并且所有的辩解角度都是  $\pi/2$ 。此外，它们都是由于曲面的高斯曲率。

一个完美对称圆周曲面可以在图16中看到，交叉场在初始化阶段产生的和在之后的5次迭代光滑化过程分别在左边和右边展示。初始化算法给予将边界信息传播开来创造交叉场，并在中轴上产生奇点。因此奇点会聚集在中轴附近。数值误差导致了奇点并没有在中心位置重叠。光滑化过程将奇点互相拉开，并且重新组织了交叉场。

一个现实的2-D CFD域带有多个单元处于降落配置的机翼侧边在图17。主体部分和垂下部分的凹区域充分复杂，结果交界面各个曲线坐标网格你和了每个叶片，如[55]对螺旋增压器几何所完成的，是非常大的障碍，特别地当小特质被表现在网格中时。本文展现的方法能够有效的解决这块区域的块状结构，如特写的视角，奇异线行成了一个对于这个配置结构非常好的分割，即使结构非常复杂。

在有常数各向异性的带有同水平线有  $0, \pi/6$  和  $\pi/3$  角度的张量场方法重运行的结果展示在图18中。每一个都有适当的提高对于生成拉升网格在不同角度冲撞下。甚至更好的结果可以通过放置更多的工作到通过预期的流体特效的知识来铺砌更好的测度张量场来得到。举个例子，流体必须光滑地闯过机翼侧，因此在相邻的区域测度张量场的各向异性在线上必须沿着机翼侧的

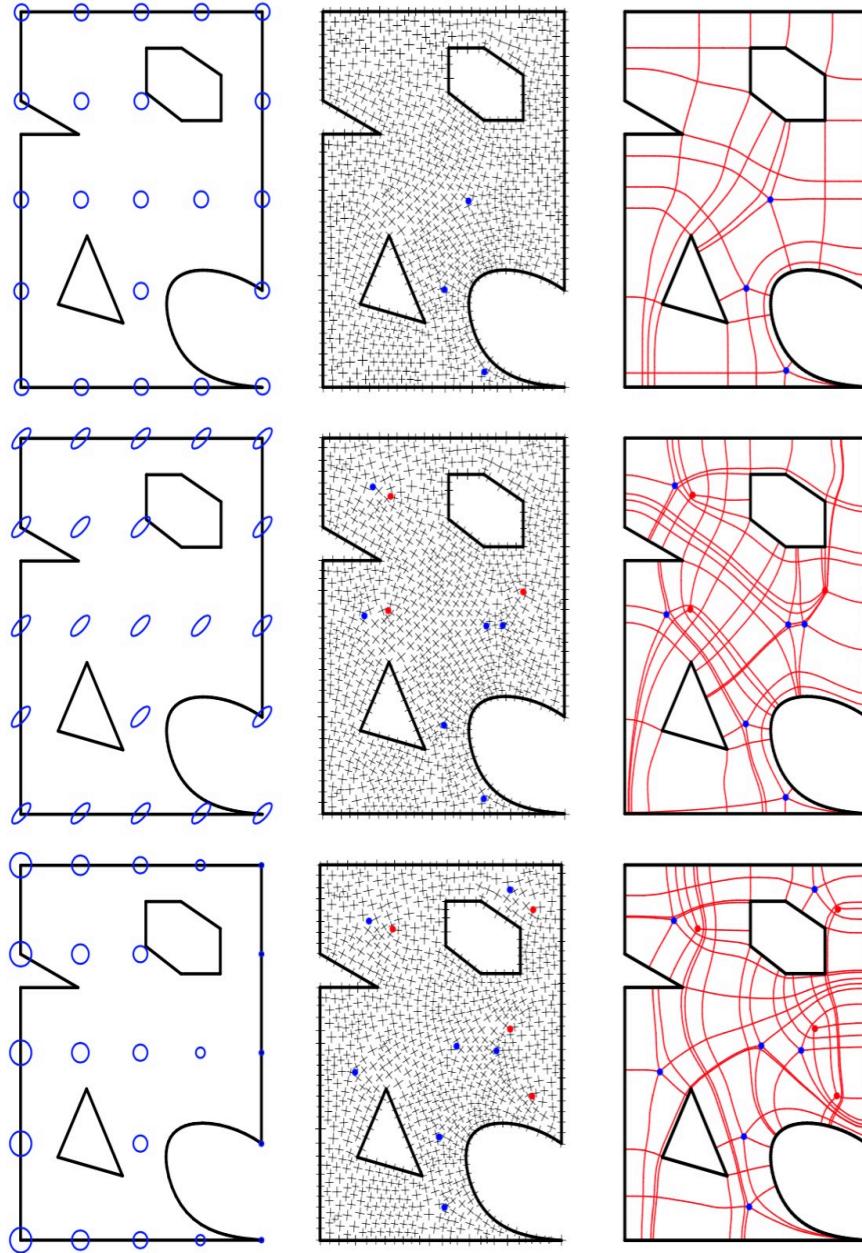


图 12: 简单的测试曲面带有不同的目标测度张量场 (行间)，目标测度张量场 (左边一列)，交叉场的解 (中心一列)，和通过追踪所有奇异流线到几何边结果多块分块 (右边一列)。

轮廓。将机翼移到距离场中，测度张量场必须逐渐地转黄导常数各向异性张量沿着主流体方向。将这种实际的测度张量场组合进去在重要区域作为额外的固定对齐约束可以提供给用户充足的对分割结果形状和拓扑的控制性。

在图19例子中高亮出了提出的方法局限性。尽管交叉场的解表面上看上去非常好，但是实际上螺旋形的流线会出现，会导致肺退化的拟合四边形网格。一条分界线无限接近洞，而且追踪时在经过最大距离超过时被强行终止（用绿色箭头标注出）。

## 8 识别问题和提出解决方案

先前的例子展示了一些由本文生成的不同类型的多块分割的结果。总的来说还是有好的拓扑和形状质量，但是有存在明显的问题在解决完才能有实际利用价值。这些是：

- (1) 存过多的块；
- (2) 存过窄的块；

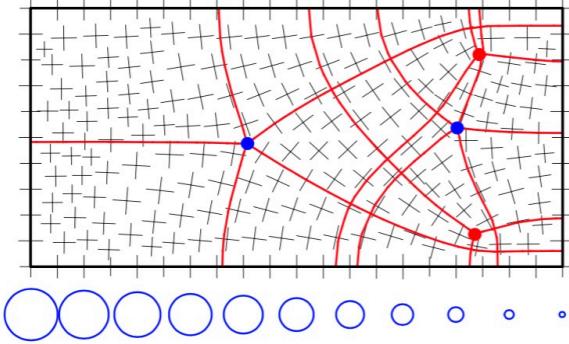


图 13: 在方形曲面上具有高先验测度张量场的结果。

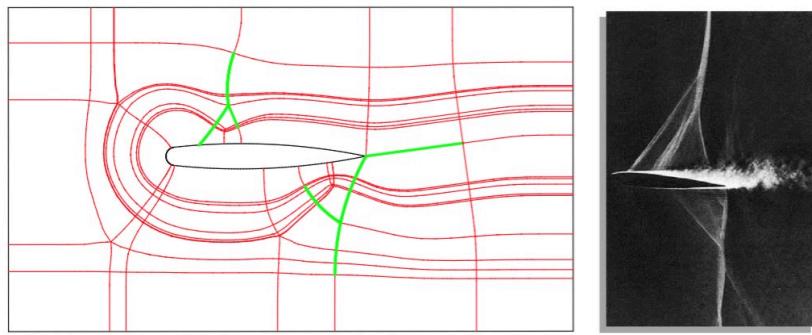


图 14: 简单的机翼侧边几何带有额外的对齐约束 (绿色) 表示震动前沿, 在接近音速下震动的结果, 如试验下的流像 (摘自 [54] )。

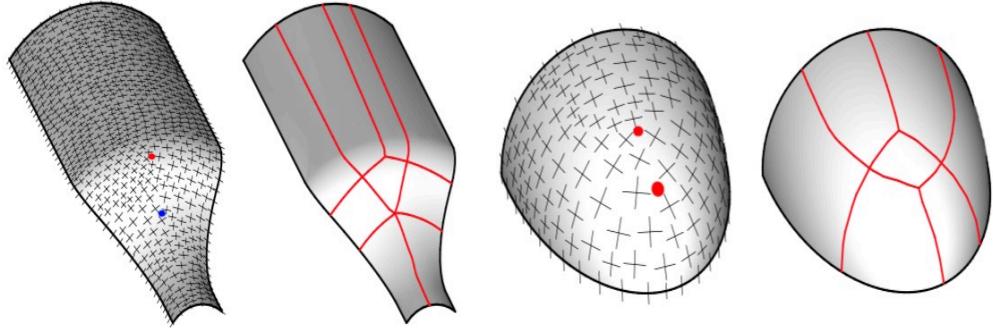


图 15: 四分之一的酒瓶和四分之一的椭球曲面。

(3)追踪线不一定会到达边界上, 但可能停在任一一处以防螺旋不停。

(4)一系列的附加块可能会导致在高度上的大变化, 可能会引起实际和目标网格大小不一致。

第一条是由于分割图比多块分割所需复杂。采用‘超大块’活着将相邻的块合并形成拓扑矩形和允许块间局部连接可以显著简化分割结果。

第二条是由于分割线互相穿插, 它们之间的距离远小于目标单元大小。理想地, 它们应当形成同一个简单块边。主要是由于两个分割线在比较小的距离经过, 而实际上它们应当合并在一起, 这样能获得更好的曲面对称性和解的对称性。这个问题来源于初始化中的数值误差以及在积分追踪线和奇异点不精确的放置。

第三个问题是螺旋状的分割线。唯一解决这个问题是嵌入额外的正 - 负奇点对来增加拓扑灵活性和造成流线方向改变。(更多可见图21。)

第四个问题来源于单元大小处理能力的限制。尽管这个方法可以调整交叉的朝向达到目标大小变量, 在实际上影响作用不够大, 主要的影响还是受对齐约束为主。因此, 最终的网格拓扑

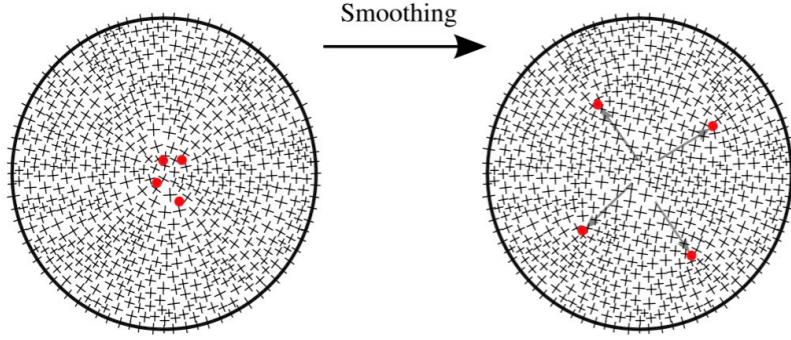


图 16: 在一个圆曲面的交叉场在光滑化之前和光滑化之后（10次迭代）结果。

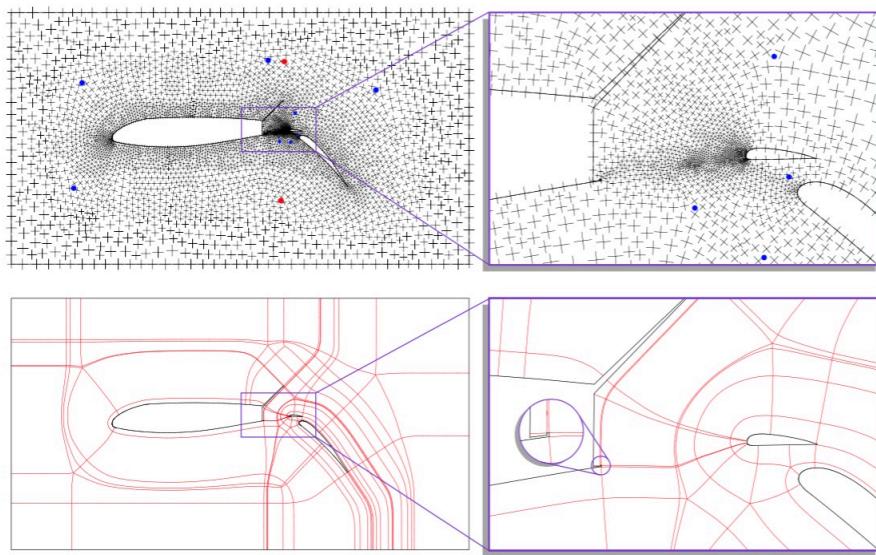


图 17: 对于ARA多单元机翼侧边在降落配置的几何实验结果。

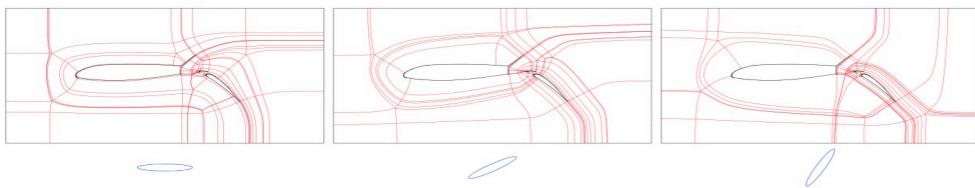


图 18: 对于ARA多单元机翼侧边在降落配置带有目标网格沿着不同方向的各项异性的几何实验结果。

可能会导致网格大小偏离目标大小。采用正 - 负奇点对在少数目的恰当选择的块中可以在一定程度上接近目标大小。这通常被称为过度元[56,Sec.17.7.5]常常被用于交互网格化分割块中。

更多可用的多块分割可以被生成通过添加一些简单的终止条件到分割线追踪的方法，在其中分割线被割断，如图20。

这里有明显更少的块在允许部分块间连续性的多块分割结果。无限螺旋的情况也看起来通过在每一个角点上允许一个任意类型的孔被阻止了。特别的，一个孔可以被视为有至少一个角点的角度为 $\pi$ 。该断言并没有被证明，它的真实性仍待考察；通过试验测试也是可以支持的。这种调整足够解决第一个和第三个问题。

为了在分割结果上生成四边形网格，恰当的整数划分还需要被计算出，通过评估目标大小场的整体沿着块边的积分结果和边长，最后近似到最近的整数。已经有一部分的工作来解决这个

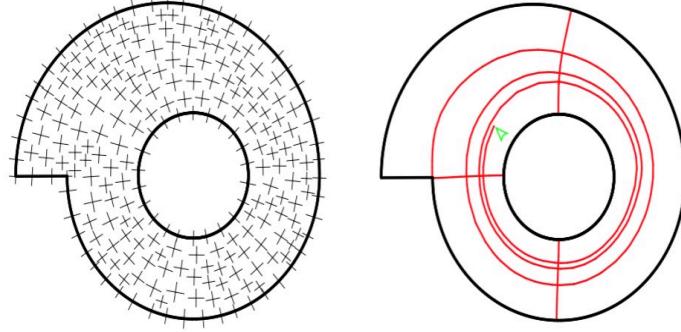


图 19: 带有螺旋分割线的简单例子。

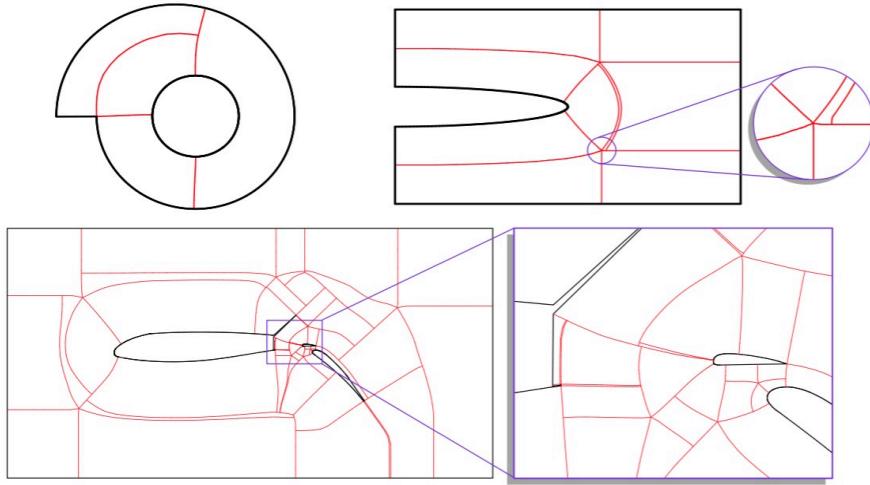


图 20: 多块分割结果带有部分块临近。

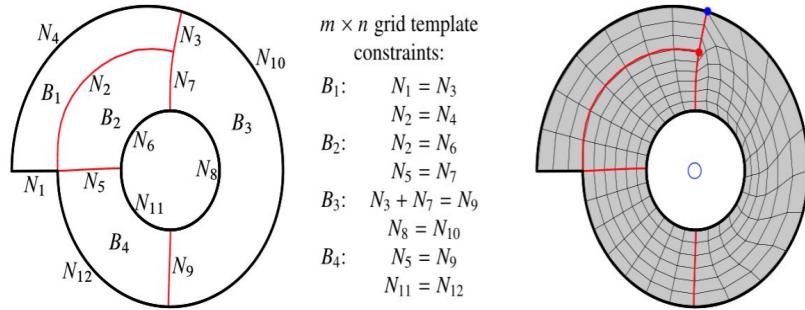


图 21: 细分对于带数字约束 $m \times n$ 栅格模版在多块分块结果（左）和网格对于其中转换模版已经被采用（右）。

问题了[35-38]。块分割结果的部分块连续性导致寻找最优解变得更加复杂了，但是寻找足够优的可行解还是可行的。默认的模板是 $m \times n$ 栅格，且它需要划分数字问题中带有等式约束来限制每一块对边，如图21所示。

随着网格元分配好，问题可以通过最小化一个涉及到边离散和它们的目标之间偏差的目标函数。一个整数规划的形式化第一次是由谭和阿姆斯特朗[35]。最近，米切尔[38]给出了一个复杂的求解器，采用分段线性目标函数可以均匀分布同目标大小的偏差。

在21中给出的约束由不一致，它们如果 $N_1 = N_3 = 0$ 才会满足约束。可以通过方法[57]的方法

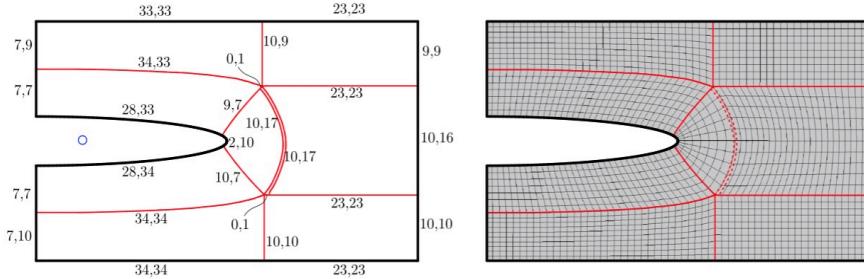


图 22: 划分数字 (目标和求解的结果) 以及对应的块结构网格在近似的尾部边曲面。

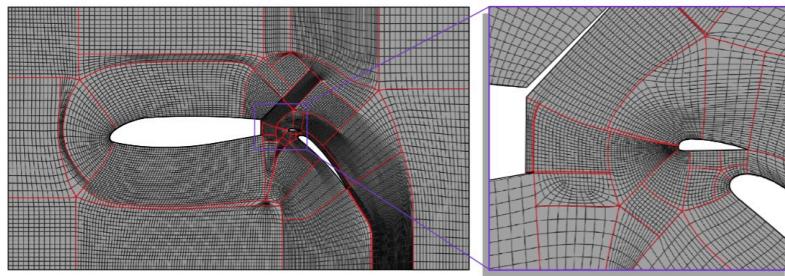


图 23: 在处于降落配置的多单元机翼的块状网格

来识别出，当0特征值被选去在约束等式中时。但是 $N_1$ 是边界上的划分数，所以不允许为0。因此一个 $m \times n$ 的模板在过渡元中必须被替换掉。块 $B_3$ 作为过度元的网格化入图21（右）所示，其中正和负奇点被蓝色和红色点高亮出。这实际上可以被CADfix自动求解。

在图22（左），对于带有目标大小显示为蓝色圆的近似机尾多块分割结果目标和求解的划分数。划分数是利用在CADfix[46]中的‘division balancing’求解的。划分是被约束之少为1以确保小边上划分数大于0。在图22中0划分数是被允许的，虚线边包括住了这一个小块，可以被看作是一条边。新的网格化方法可以被自动实现，这非常有用。它们能够处理0划分数亩会用多块分割作为灵活的框架。在这样的方式下，第二个窄块的问题可以被解决。

图23是在Abaqus[56]中生成的网格在可接受范围内修补了划分数和选择的过度元。

一个简单的方法来提高在图21、图22、图23网格单元的质量，在没有块边的约束下作几何光滑化（利用采用[58]中的方法）。特别的，在图21（右）在负奇点处多数退化的单元可以被简单地移动奇点来补救。

对所有块同时地优化划分数目和找到最恰当的网格模板是一个困难的工作。Mohring等人[36]形式化了恰当的组合问题来描述和展示了这是一个NP-完全的问题，当边界差异约束被放置。尽管这样，他们开发了一个基于网络流启发式的技巧来面对现实生活复杂的例子获得比较好的结果。这个方法可以被直接用到本文提出多块分割的结果上。

## 9 总结

本问题提出了可以有效在带边界的曲面上生成交叉场的方法。通过利用高效的快速前进方法来决定新交叉生成的顺序，可以生成出了在曲面中轴附近外比较光滑的交叉场。该方法是具有可控性，可以依据测度张量场来做调整，同时额外的对齐约束也可以很容易被解决。

同时提出了一个在交叉场上自动生成多块分割结果。在第一眼之下，交叉场的分割线可以提供一个有效分割边。然而，完整的分割图建立的不够准确，因为有过多的块，以及非常窄小的和螺旋线的情况。为了克服这些困难，一个多块分割带有部分连续的多块分割的方法被提出。在多块分割结果上生成四边块网格需要求解一个整数规划问题，并且需要在各个块上选择相应的模版。目前有血方法可以有效求解这个任务，尽管需要定制一些新方法来求解0划分数的问题，这种情况的必然性来源于最好的块结构网格。这将成为未来工作的一块。

## 10 自己体会

之所以选这篇文章是因为四边形网格和六面体网格在基于场的生成主要依赖于参数化，无论Sig还是ACM TOG上，参数化一直是作为主流，主要是以Kobelt和黄劲老师等几批人在从事这方面研究。个人感觉细网格生成已经相对粗网格生成更成熟了。粗网格实际上是对输入的曲面或体划分为四边块或者拓扑六面块，虽然也有工作通过将以场指导的参数化网格的结果作为输入，提取它的Base Complex，然后通过带约束的完美匹配问题（实际上已经转换为NP – 完全问题的二元整数规划问题）来提取最优的四边块，但实际上参数化的过程也需要求解一个混合整数问题同样代价也比较大，其实本身来说参数化后的网格提取也不是轻松的，包括数值计算误差等因素的影响，都会造成提取不出好的结果，具体可见Kobelt16年Sig上的HexEx方法。

因此想要寻找更好的方法能直接从输入的几何模型中生成粗网格，尽管13年Bommes已经有一篇参数化得到分块结果，但至少还没有推广至六面体粗网格。

这篇文章仅仅通过简单地数值积分来追踪分割线来获得划分曲面结果。本文工作在于前面的快速生成交叉场，而交叉场的生成在本文中太依赖于好的三角形网格输入，若是需要通过光滑化纠正的话就会扰乱前面将各向异性和目标网格大小的因素考虑。一个好的解决方案是通过将这方面的因素的考虑写进光滑化函数的能量函数里，而这实际上恰是江腾飞和黄劲老师在Sig15年的工作。在交叉场方面本文的优势是生成速度会快，但是仅在输入的背景网格三角形网格质量比较好的前提下。

粗网格生成显然会比细网格难，因为粗网格的块数少和在分块边对齐几何边是冲突的目标，粗网格的拓扑结构比细网格更容易评测。分块的结果（粗网格）可以直接用mapping等方法生成细网格，所以生成粗网格的整体优化目标会更多且之间的冲突会更多。

附上实现这篇文章的试验结果（相对原来文章，光滑化有所不同），第一个例子跟文章近似，接下来就出现本文其它缺陷，即追踪并不如参数化可以考虑整体，每一步的局部追踪只考虑附近的场方向，所以导致一些不太好的结果。当然也有一部分是我自己写的程序不鲁棒。

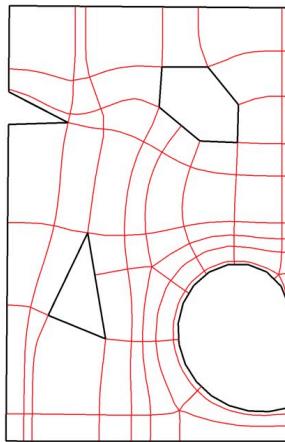


图 24: 具有弯曲边界、锋利的缩进和孔特征的二维平面测试例子，结果为二十次光滑化后的分割。

## 11 Python programming

### 11.1 Homework1

Goal: Implement polynomial curve fitting in python.

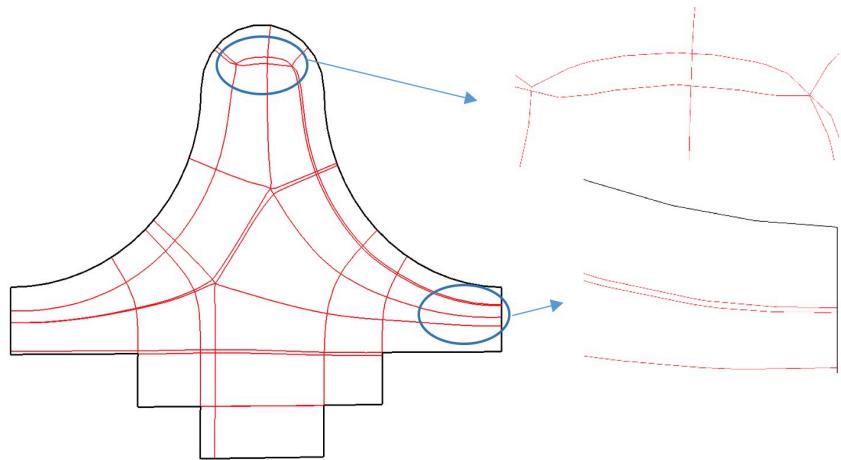


图 25: 一个有对称的二维平面模型在光滑化20次之后的结果。右边为模型中两个放大的地方，它放大了一些细小的四边子块，当然其他一些细小的四边块没有显示。

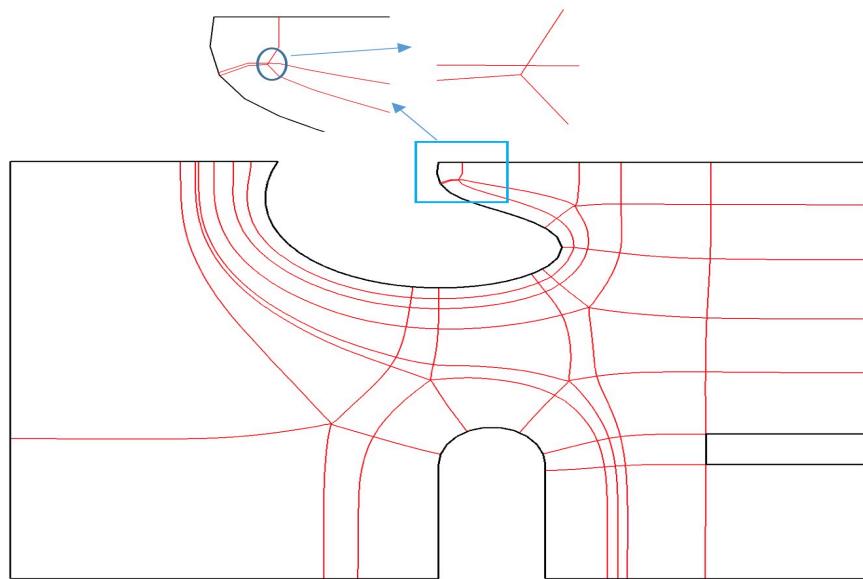


图 26: 带有多个圆弧的模型20次光滑化后的结果。结果均是拓扑四边的，其中右上中部小细块有一个放大显示。

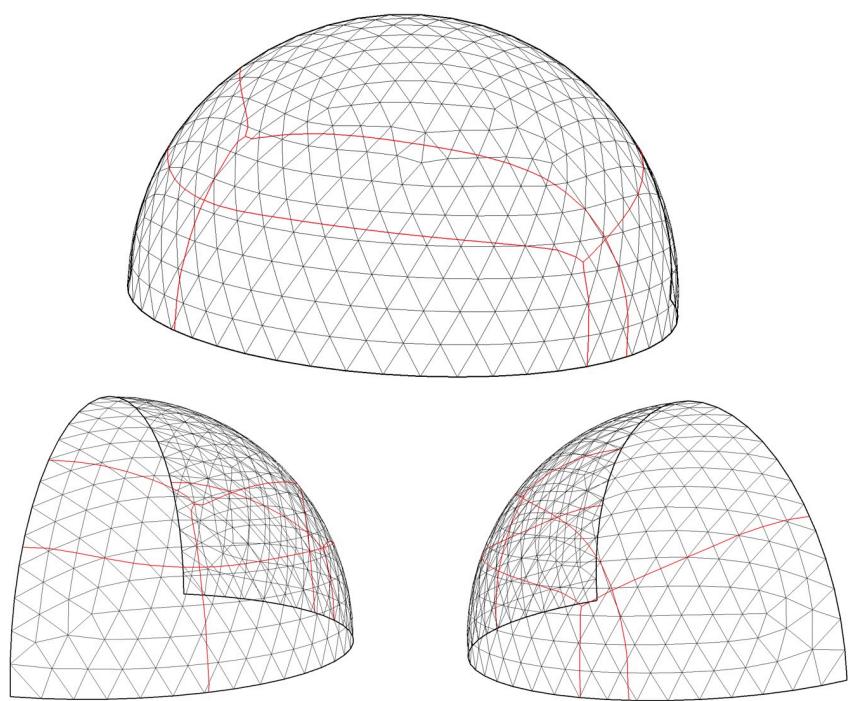


图 27: 四分之一球面20次光滑化后的分解结果。