TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

GIẢI TÍCH SỐ

NỘI SUY BẰNG ĐA THỨC, SƠ ĐỒ HOOCNE VÀ ỨNG DỤNG

Giảng viên hướng dẫn: TS. Hà Thị Ngọc Yến

Nhóm sinh viên thực hiện:	Nhóm 15
Nguyễn Đình Nhật	20190080
Nguyễn Anh Minh	20194117

Ngày 3 tháng 1 năm 2021

Mục lục

1 Mở đầu

Trong thực tế, nhiều lĩnh vực ta cần tìm hàm $y = f(x)$ khi chỉ biết các giá trị y_i tại các điểm x_i thuộc khoảng $[a, b]$ $(i \in I)$ hoặc khi biểu thức giải tích $f(x)$ đã cho nhưng cồng kềnh, việc tính $f(x^*)$ với x^* là 1 giá trị cụ thể trở nên khó khăn. Khi đó đặt ra vấn đề cần tìm một $F(x)$ đơn giản hơn sao cho ta có thể tính được $F(x^*)$ với một kết quả có độ chính xác tin cậy, sai số của $F(x^*)$ so với $f(x^*)$ có thể chấp nhận được. Từ đó, khái niệm nội suy ra đời.

Nội suy là phương pháp ước tính giá trị của các điểm dữ liệu chưa biết trong phạm vi của một tập hợp rời rạc chứa một số điểm dữ liệu đã biết (các điểm đã biết dựa trên kết quả thực nghiệm)

Nội suy có nhiều ứng dụng trong nhiều lĩnh vực của cuộc sống như: công nghệ thông tin, toán tin, môi trường, kinh tế,... Cụ thể nội suy được áp dụng nhiều trong việc xây dựng thuật toán cho mạng nơron trí tuệ nhân tạo xây dựng các thuật toán dự báo thị trường trong kinh tế, nội suy không gian, nội suy để đánh giá chất lượng không khí,...

Có rất nhiều phương pháp nội suy đã ra đời như phương pháp nội suy Lagrange, phương pháp nội suy Newton, phương pháp bình phương tối thiểu,... Trong bản báo cáo này, nhóm 15 xin trình bày về **phương pháp nội suy bằng đa thức đại số**

2 Nội suy đa thức

2.1 Bài toán nội suy

Cho trước một bộ dữ liệu gồm $n + 1$ điểm

x_1	x_2	x_3	....	x_n	x_{n+1}
$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	....	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$

Chúng ta cần tìm một đa thức bậc n p_n sao cho

$$p_n(x_i) = f(x_i) \text{ với } i = 1, 2, ..., n + 1$$

Đa thức thỏa mãn điều kiện trên được gọi là **đa thức nội suy**, ký hiệu $P(f, x_1, ..., x_{n+1}(x))$. Các điểm x_i được gọi là các **mốc nội suy**.

2.2 Cơ sở của không gian đa thức

Bằng cách chọn cơ sở $p_1, p_2, ..., p_n$ cho không gian của đa thức p có bậc không quá $n - 1$, ta biểu diễn:

$$p(x) = a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + ... + a_np_n(x)$$

Chúng ta cần tìm các hệ số $a_1, a_2, ..., a_n$ sao cho :

$$p(x_1) = a_1p_1(x_1) + a_2p_2(x_1) + ... + a_np_n(x_1) = f_1$$

$$p(x_2) = a_1p_1(x_2) + a_2p_2(x_2) + ... + a_np_n(x_2) = f_2$$

$$\vdots$$

$$p(x_n) = a_1p_1(x_n) + a_2p_2(x_n) + ... + a_np_n(x_n) = f_n$$

Ký hiệu $f_i = f(x_i)$ với i = 1,2,...,n
Việc giải hệ phương trình trên tương đương với việc giải ma trận:

$$\begin{pmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \cdots & p_n(x_1) \\ p_1(x_1) & p_2(x_2) & \cdots & p_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_n) & p_2(x_n) & \cdots & p_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Việc chọn cơ sở $p_1, p_2, ..., p_n$ sao cho phương trình trên có thể giải một cách dễ dàng là rất quan trọng.

2.3 Xây dựng đa thức nội suy bằng đơn thức

Bằng cách chọn bộ cơ sở $(p_1, p_2, ..., p_n)$ là $(1, x, x^2, ..., x^{n-1})$, ta biểu diễn đa thức P_{n-1} dưới dạng:

$$p(x) = a_1.1 + a_2.x + ... + a_n.x^{n-1}$$

Chúng ta cần tìm các hệ số $a_1, a_2, ..., a_n$ sao cho :

$$p(x_1) = a_1.1 + a_2.x_1 + ... + a_n.x_1^{n-1}$$

$$p(x_2) = a_1.1 + a_2.x_2 + ... + a_n.x_2^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$p(x_n) = a_1.1 + a_2.x_n + ... + a_n.x_n^{n-1}$$

Việc giải hệ phương trình trên tương đương với việc giải ma trận:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Ma trận:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận **Vandermonde**
Dễ dàng chứng minh được rằng ma trận **Vandermonde** là ma trận có định thức luôn khác không:

$$\det(V_n)(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

Do đó đa thức nội suy luôn **tồn tại** do định thức của ma trận luôn khác 0, hạng của ma trận Vandemonde bằng hạng của ma trận hệ số bổ sung

2.4 Sự duy nhất của đa thức nội suy

- **Định lý cơ bản của Đại số**: Mọi đa thức có bậc n, các hệ số không đồng thời bằng không thì có đúng n nghiệm (bao gồm các nghiệm bội). Các nghiệm này có thể là số thực hoặc số phức.

- **Định lý về sự duy nhất của đa thức nội suy**:

  Với $n+1$ điểm phân biệt cho trước $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ cho trước cùng với các giá trị tương ứng $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_{n+1})$ luôn tồn tại duy nhất một đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n thỏa mãn

  $$P(x_i) = f(x_i) \text{ với } i = 1, 2, ..., n+1$$

  Chứng minh:
  Giả sử tồn tại hai đa thức P_1, P_2 có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n thỏa mãn $P_1(x_i) = P_2(x_i) = f(x_i)$ với $i = 1, 2, ..., n+1$
  Chúng ta xét đa thức hiệu $Q(x) = P_1(x) - P_2(x)$, cũng là đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n
  Mặt khác $H(x_i) = P_1(x_i) - P_2(x_i) = 0$ với $i = 1, 2, ..., n+1$
  Đa thức bậc n có ít nhất $n+1$ nghiệm nên $H(x) \equiv 0$

Kết luận : Đa thức nội suy luôn tồn tại duy nhất

2.5 Đa thức nội suy Lagrange

Với bộ dữ liệu gồm n+1 điểm cho trước:

x_1	x_2	x_3	....	x_n	x_{n+1}
$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	....	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$

Đa thức nội suy $P_n(x)$ theo Lagrange được xác định như sau:

Bước 1. Xác định các đa thức Lagrange cơ bản: gọi $L_i^{(n)}(x)$ là đa thức có dạng:

$$\begin{aligned} L_i^{(n)}(x) &= \frac{(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)(x_i-x_{n+1})} \\ &= \prod_{j\neq i, j=1}^{n+1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \end{aligned}$$

Với đa thức trên , ta có nhận xét như sau :

$$L_i^{(n)}(x) = \begin{cases} 1 & (k = i) \\ 0 & (k \neq i) \end{cases}$$

Bước 2. Đa thức nội suy Lagrange được xác định bởi:

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i L_i^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i \prod_{j\neq i, i=1}^{n+1} \frac{x-x_i}{x_i-x_j}$$

2.6 Đa thức nội suy Newton

Chọn cơ sở $(p_0, p_1, ..., p_n)$ lần lượt là $1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), ..., (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$ Ta biểu diễn P_n trở thành:

$$P_n = a_0p_0 + a_1p_1 + ... + a_np_n \text{ với } P_n(x_i) = y_i (i = 1, .., n)$$

Từ hệ $Ax = y$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & \cdots & x_n - x_{n-1} \end{pmatrix}$$

và $x = (x_0, x_1, ..., x_n)^T$, $y = (y_0, y_1, ..., y_n)^T$ thì $x = A^{-1}y$. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi A là ma trận khả nghịch (điều này luôn đúng do A là ma trận tam giác dưới) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất do

$$\det(A) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_1)...(x_n - x_{n-1}) \neq 0 \ \forall i = (0..n)$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} a_0 &= y_0 = f(x_0) \\ a_1 &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_0, x_1) \\ &\vdots \\ a_n &= f(x_0, x_1, ..., x_n) \end{aligned}$$

Ta gọi a_i chính là các tỷ hiệu $(i = 0, 1, ..., n)$. Vậy

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + ... + (x - x_0)...(x - x_{n-1})f(x_0, .., x_n)$$

gọi là đa thức nội suy Newton

3 Sai số của đa thức nội suy

Với x cố định, $x \neq x_i$ với $i = 1, 2, ..., n + 1$, ta đặt:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

là sai số tại điểm x của đa thức nội suy. Hàm số $R_n(x)$ đạt giá trị 0 tại $n + 1$ điểm $x_1, .., x_{n+1}$, do đó hàm số có thể viết lại dưới dạng

$$R_n(x) = u(x) \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i) = u(x)l(x)$$

Với $u(x)$ là đa thức chưa biết $l(x)$ là đa thức bậc n được định nghĩa là

$$l(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i)$$

Để tìm hàm $u(x)$, ta cần xây dựng hàm số $F(t)$ sao cho:

$$F(t) = R_n(t) - u(x)\prod_{i=1}^{n+1}(t - x_i) = f(t) - P_n(t) - u(x)\prod_{i=1}^{n+1}(t - x_i)$$

Hàm số t có giá trị bằng 0 tại $t = x$

$$F(x) = R_n(x) - u(x)\prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i) = R_n(x) - R_n(x) = 0$$

Chúng ta thấy rằng $F(t)$ có $n+2$ nghiệm tại $x_1, x_2, .., x_{n+1}$ và x. Theo định lý Roll, $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ thỏa mãn $f(a) = f(b) = 0$, thì $\exists c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0$. Với định lý trên, hàm số $F(t)$ có $n+2$ nghiệm nên $F'(t)$ phải có ít nhất $n+1$ nghiệm, tiếp tục như vậy $F''(t)$ có ít nhất n nghiệm,... và $F^{(n+1)}$ có ít nhất một điểm $\xi \in (a,b)$ thỏa mãn $F^{(n+1)}(\xi) = 0$ và

$$\begin{aligned}
F^{(n+1)}(\xi) &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left[f(t) - P_n(t) - u(x)\prod_{i=1}^{n+1}(t - x_i)\right] \\
&= \left[f^{(n+1)}(t) - P_n^{(n+1)}(t) - u(x)\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\prod_{i=1}^{n+1}(t - x_i)\right]_{t=\xi} \\
&= f^{(n+1)}(\xi) - u(x)(n+1)!
\end{aligned}$$

Điều này có được là do $P_n(t)$ và $\prod_{i=1}^{n+1}(t - x_i)$ lần lượt là đa thức bậc n và $n+1$. Từ phương trình trên ta được

$$u(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

Bây giờ ta có thể viết lại R_n thành

$$R_n(x) = u(x)\prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}l(x)$$

$\xi(x)$ là một điểm bất kì giữa $a = x_1$ và $b = x_{n+1}$, phụ thuộc vào x. Sai số được đánh giá theo hàm dựa trên chuẩn loại 2 của $R_n(x)$

$$\varepsilon = \|R_n(x)\|_2 = \left(\int_a^b R_n^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sai số đánh giá theo từng điểm :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}l(x) \Rightarrow |R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|l(x)|$$

Với $M = \sup|f^{(n+1)}(x)|, \forall x \in [a,b]$

4 Chọn mốc nội suy tối ưu

Từ hai cách xác định sai số đã cho ở trên, ta thấy rằng sai số của phép nội suy chỉ còn phụ thuộc vào $l(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$. Bài toán đặt ra là phải chọn các mốc nội suy $a \leq x_0 < x_1 < ... < x_n \leq b$ sao cho sai số đạt giá trị nhỏ nhất. Nói cách khác, ta cần tìm

$$\min\left(\max_{a\leq x\leq b} l(x)\right)$$

4.1 Đa thức Chebysev

$$T_n(x) = \cos(n.\arccos x) \text{ với } |x| \leq 1$$

Đặt $\theta = \arccos(x)$ và dễ thấy $\cos[(n \pm 1)\theta] = \cos(\theta)\cos(n\theta) \mp \sin(\theta)\sin(n\theta)$, ta được $\cos[(n+1)\theta] + cos[(n-1)\theta] = 2\theta\cos(n\theta)$ hay:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Ngoài ra $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = \cos[2\arccos x] = 2x^2 - 1$

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được $T_n(x)$ là đa thức bậc n với hệ số đầu là 2^{n-1}. Nghiệm của $T_n(x)$ là $x_i = \cos\dfrac{2i+1}{2n}\pi$ với $i = 1, 2, ..., n-1$ và cực trị của nó $\max\limits_{|x|\leq 1}|T_n(x)| = 1$ đạt tại $x_i = \cos\dfrac{\pi i}{n}$ với $i = 0, 1, ..., n$

Định lý: Trong tất cả các đa thức bậc n với hệ số đầu bằng 1, đa thức Chebysev $T_n(x)/2^{n-1}$ có độ lệch so với 0 nhỏ nhất trên đoạn $[-1, 1]$. Nghĩa là, nếu:

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$$

thì

$$\max_{|x|\leq 1}|P(x)| \geq \max_{|x|\leq 1}\frac{|T_n(x)|}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Chứng minh: Giả sử tìm được đa thức

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$$

sao cho $\max\limits_{|x|\leq 1}|P(x)| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Khi đó đa thức $G(x) = \dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}} = P(x)$ có bậc không quá $n-1$, ngoài ra các điểm $x_i = \cos\dfrac{\pi i}{n}$ với $i = 0, .., n$, ta có

$$G(x_i) = \pm\frac{1}{2^{n-1}} - P(x_i)$$

Như vậy $G(x)$ luân phiên đổi dấu qua x_i với $i = 1, .., n$ do đó $G(x)$ có ít nhất n nghiệm . Suy ra $G(x) \equiv 0$ hay $P(x) \equiv \dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ mâu thuẫn với giả thiết $\max\limits_{|x|\leq 1|} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$

4.2 Chọn mốc nội suy tối ưu

Trong trường hợp $a = -1$, $b = 1$, ta lấy mốc nội suy x_i là nghiệm của đa thức Chebysev $T_{n+1}(x)$, nghĩa là:

$$x_i = \cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi \text{ với } i = 0, .., n$$

Khi đó $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n) = \dfrac{T_{n+1}(x)}{2^n}$ có độ chênh lệch nhỏ nhất, và ước lượng tốt nhất của phép nội suy là :

$$|P(x) - f(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|l(x)| \leq \frac{M}{2^n(n+1)!}$$

Trong trường hợp $a < b$ bất kỳ, ta dùng phép đổi biến $t = \dfrac{2x-b-a}{b-a}$ đưa đoạn $[a, b]$ về đoạn $[-1, 1]$. Các mốc nội suy tối ưu là nghiệm của đa thức Chebysev:

$$x_i = \frac{1}{2}\left[(b-a)\cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi + (b+a)\right] \text{ với } i = 0, .., n$$

Ước lượng tốt nhất của phép nội suy trong trường hợp này là :

$$|P(x) - f(x)| \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}$$

5 Sơ đồ Hoocne và ứng dụng trong bài toán nội suy

5.1 Xây dựng sơ đồ Thuật toán Hoocne

Từ đa thức ban đầu

$$P(x) = a_1 + a_2x + ... + a_nx^{n-1}$$

Thuật toán Hoocne là cách biểu diễn lại đa thức bằng để tạo ra thuận tiện trong việc tính toán một vài vấn đề nhất định:

$$P(x) = a_1 + \left[a_2 + \left[a_3 + \left[a_4 + ... + \left[a_{n-1} + a_n\right]...\right]x\right]x\right]x$$

5.2 Ứng dụng của sơ đồ Hoocne

- Tính giá trị của đa thức tại một điểm
- Tìm thương khi chia một đa thức cho một đơn thức
- Đổi biến
- Tính tổ hợp chập k của n
- Tính giá trị của đạo hàm tại một điểm
- Tìm tích giữa một đa thức và một đơn thức

Tính giá trị của đa thức tại một điểm

Thuật toán để thực hiện các bước tính giá trị đa thức bằng sơ đồ Hoocne:

Bước 0. Nhập vào các giá trị $x, a_1, a_2, ..., a_n$

Bước 1. $p = a_n,\ i = n - 1$

Bước 2. $p = px + a_i$

Bước 3. $i = i - 1$

Bước 4. Kiểm tra $i > 0$. Đúng thì quay lại Bước 2, sai chuyển đến bước 5

Bước 5. Xuất ra giá trị p. Kết thúc.

Tính giá trị của đạo hàm tại một điểm

Định lý: Cho đa thức $P(x)$ như sau

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{x-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Nếu $b_d = a_d$ và

$$b_k = a_k + b_{k+1} x_0 \text{ với } k = n-1, n-2, ..., 1, 0$$

thì $b_0 = P(x_0)$, và $P(x)$ có thể viết lại thành

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0$$

Với $Q(x)$ được định nghĩa là

$$Q(x) = b_d x^{x-1} + b_{d-1} x^{d-2} + ... + b_2 x + b_1$$

Định lý này được chứng minh bằng tính toán trực tiếp. Với

$$P'(x) = Q(x) + (x - x_0)Q'(x)$$

ta dễ dàng tìm được đạo hàm của hàm số $P(x)$ tại điểm x_0: $P'(x_0) = Q(x_0)$, Cách tích thuận tiện này được áp dụng khi dùng phương pháp Newton để tìm mốc nội suy

Các ứng dụng còn lại của sơ đồ Hoocne đã được nhóm mình trình bày thông qua thuật toán và code

6 Ví dụ

Ví dụ 1: *Mục đích : Minh họa cho xấp xỉ hàm bằng cách nội suy bằng đơn thức*
Hàm $y = ln(x + 5)$ xấp xỉ thành $P_3(x)$ với bậc bằng 3 dựa trên 4 mốc nội suy như sau

i	0	1	2	3
x_i	1,1	1,25	1,35	2
$f(x_i)$	1,808	1,832	1,848	1,9459

Giải ma trận Vandemonde:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1,1 & 1,21 & 1,331 \\ 1 & 1,25 & 1,5625 & 1,9531 \\ 1 & 1,35 & 1,8825 & 2,460 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$V \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,808 \\ 1,832 \\ 1,848 \\ 1,864 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,65699 \\ 0,9859 \\ 0,05125 \\ -0,0135965 \end{pmatrix}$$

Suy ra $P_3(x) = 1,65699 + 0,09859x + 0,050125x^2 - 0,0135965x^3$

Ví dụ 2: *Mục đích : Xấp xỉ hàm trước và sau khi tối ưu hóa mốc nội suy, so sánh đồ thị của hai hàm xấp xỉ so với hàm ban đầu*

Xấp xỉ hàm $f(x) = x\sin(2x + \frac{\pi}{4})$ bằng 1 đa thức bậc 3 dựa trên các điểm sau:

x	-1	0	0.5	1
$f(x)$	1,9372	1	1,48853	1,3487

Dựa trên phương pháp nội suy đa thức ta có:

$$P(x) = 1 + 0,97219x + 0,64295x^2 + 0,64295x^3 - 1,26644x^3$$

Sau khi tính toán

$$f^{(4)}(x) = 16x\sin(2x + \frac{\pi}{4}) - 32cos(2x + \frac{\pi}{4})$$

Suy ra

$$R_n(x) = \frac{16x\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 32\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}{4!}(x+1)x(x-0,5)(x-1)$$

Áp dụng công thức :

$$\epsilon_1 = ||R_n(x)||_2 \approx 0,08933$$

Khi tối ưu hóa mốc nội suy:

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{8}\right)\pi \text{ với } i = 0, ..., 3$$

ta có bảng giá trị các mốc nội suy:

x	0,9238	0,38268	-0,39268	-0,9238
$f(x)$	1,4498	1,3826	0,9923	1,80687

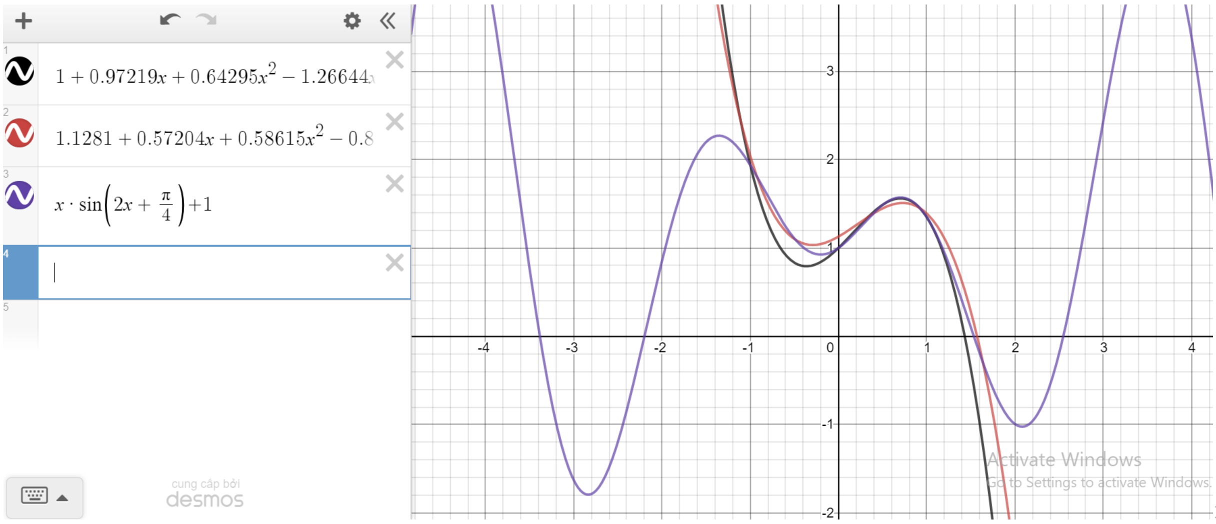
Ta tìm được đa thức nội suy sau :

$$Q(x) = 1,1281 + 0,57204x + 0,58615x^2 - 0,89676x^3$$

Áp dụng công thức:

$$\epsilon_2 = ||R_n(x)||_2 \approx 0,0147566$$

Đồ thị minh họa bằng phần mềm Geogebra



;

<u>Ví dụ 3:</u> *Mục đích : Sử dụng sơ đồ Hoocne để tính toán đa thức*
Tính giá trị của đa thức $P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 4$ tại điểm $x_0 = -1$, đồng thời tìm thương và số dư khi chia đa thức cho $(x - x_0)$ hay $(x + 1)$

Ta xây dựng một sơ đồ Hoocne như sau:

$x_0 = -1$	$a_4 = 1$	$a_3 = 0$	$a_2 = -2$	$a_1 = 3$	$a_0 = -4$
		$b_4x_0 = -1$	$b_3x_0 = 1$	$b_2x_0 = 1$	$b_1x_0 = -4$
	$b_4 = 1$	$b_3 = -1$	$b_2 = -1$	$b_1 = 4$	$b_0 = -8$

Từ sơ đồ trên ta có $P(-1) = b_0 = -8$ và :

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 4 = (x + 1)(x^3 - x^2 - x + 4) - 8$$

7 Tổng kết

Bài báo cáo cho thấy khái niệm và cách xây dựng đa thức nội suy, đặc biệt là đa thức nội suy Lagrange và đa thức nội suy Newton, đồng thời cho thấy sai số của phương pháp và sự tối ưu cách chọn mốc nội suy. Ngoài ra, bài báo cáo còn đề cập đến sơ đồ Hoocne và ứng dụng của nó trong bài toán nội suy bằng đa thức. Từ đó ta nhận thấy tính cần thiết và ứng dụng rộng rãi của bài toán nội suy trong thực tế.

Nội suy nói chung và nội suy đa thức nói riêng là một đề tài rất rộng. Do đó trong khuôn khổ của bản báo cáo, nhóm em chỉ xin phép trình bày về một phần nhỏ trong lĩnh vực này bằng những hiểu biết đã tích góp được.

Kiến thức chúng em còn nhiều hạn chế, nhưng với sự dẫn dắt tận tình và tâm huyết của cô Hà Thị Ngọc Yến, chúng em mới có thể hoàn thành được bài báo cáo trên tinh thần đoàn kết làm việc nhóm. Chúng em xin chân thành cảm ơn và mong nhận được sự đóng góp của cô để chúng em được hoàn thiện hơn về kiến thức và kĩ năng trong học tập.

Phân công

1. Nguyễn Anh Minh: Chuẩn bị nội dung, powerpoint và thuyết trình
2. Nguyễn Đình Nhật: Gõ báo cáo bằng LaTeX, code, thuật toán

Danh mục tài liệu tham khảo

1. Giáo trình giải tích số - Lê Trọng Vinh
2. Giáo trình giải tích số - Phạm Kỳ Anh
3. Introduction to Numerical Analysis – J.Stoer R. Bulirsch
4. Lecture Polynomial - Dmitriy Leykekhman
5. Wikipedia