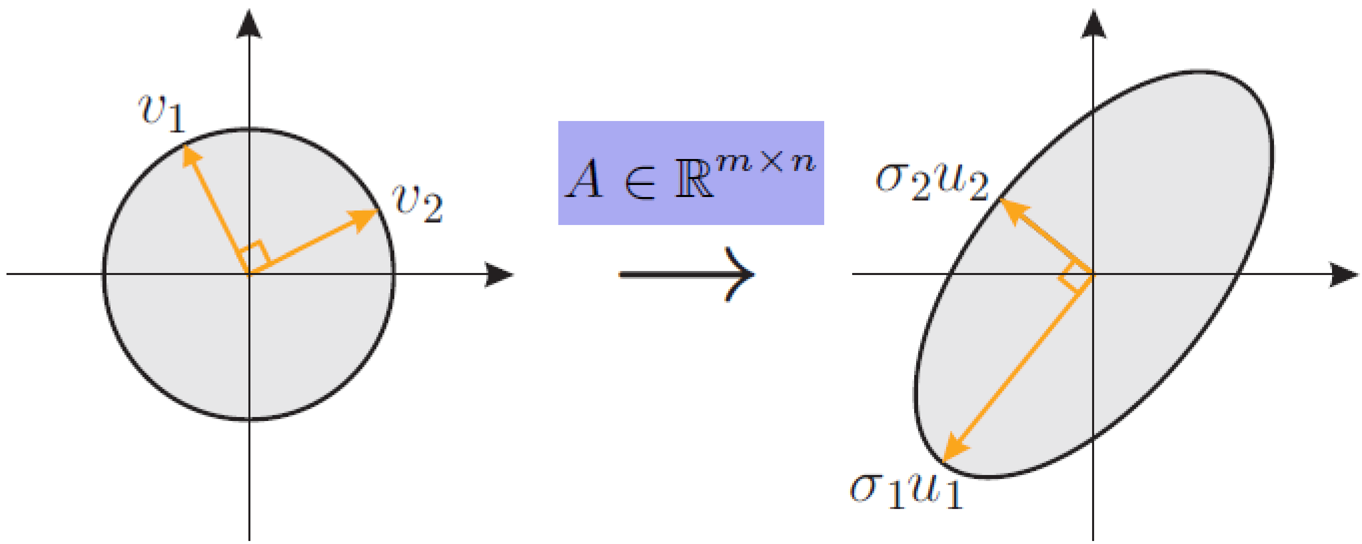
Khai triển kỳ dị của ma trận

Ảnh của hình cầu đơn vị qua axtt



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le 1 \right\} \qquad AS = \left\{ Ax \mid x \in S \right\}$$

Giá trị kỳ dị và vector kỳ dị

- Giả sử $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \; m > n, \; \text{rank} A = n.$
- Các giá trị kỳ dị của $A: \;\; \sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n > 0$
- Các vector kỳ dị trái của $A: \;\; u_1, u_2, ..., u_n$

là các vector đơn vị theo các bán trục của ellipsoid *AS*

- Các vector kỳ dị phải của $A: \;\; v_1, v_2, ..., v_n$

là các vector trực chuẩn thỏa mãn: $Av_i = \sigma_i u_i$

Khai triển kỳ dị của ma trận chữ nhật đứng hạng đủ

- Đặt
$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{bmatrix}$$
$$\Sigma = diag\left(\sigma_1, \sigma_2, \ldots., \sigma_n\right)$$
$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix}$$

- Khi đó:

$$Av_i = \sigma_i u_i \ \forall i = \overline{1,n} \Leftrightarrow AV = U\Sigma \Leftrightarrow A = U\Sigma V^T$$
$$\Leftrightarrow A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_n u_n v_n^T$$

Trường hợp hạng không đủ

- Trường hợp $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \, m > n, \, rankA = r < n$
- Các giá trị kỳ dị: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > 0$
- Các vector kỳ dị trái: $u_1, u_2, ..., u_r$
- Các vector kỳ dị phải: $v_1, v_2, ..., v_r$
- Khai triển kỳ dị của ma trận:

$$U = \left[u_1 \ldots u_r\right] \in \mathbb{R}^{m\times n}, \Sigma = diag\left(\sigma_1, ..., \sigma_r\right) \in \mathbb{R}^{r\times r}, V = \left[v_1, ..., v_r\right]$$

$$A = U\Sigma V^T = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$$

Xác định giá trị kỳ dị và các vector kỳ dị

$$A^T A = \left(U\Sigma V^T\right)^T \left(U\Sigma V^T\right) = V\Sigma^2 V^T$$

- Do đó v_i là các vector riêng ứng với các giá trị riêng khác 0 của $A^T A$
- σ_i^2 là các giá trị riêng của $A^T A$
- $\left\{v_i\right\}_{i=\overline{1,r}}$ là cơ sở trực chuẩn của kgvt $\ker A^\perp$
- $\|A\| = \sigma_1$

Xác định giá trị kỳ dị và các vector kỳ dị

$$AA^T = \left(U\Sigma V^T\right)\left(U\Sigma V^T\right)^T = U\Sigma^2 U^T$$

- Do đó u_i là các vector riêng ứng với các giá trị riêng khác 0 của AA^T
- σ_i^2 là các giá trị riêng của AA^T
- $\left\{u_i\right\}_{i=\overline{1,r}}$ là cơ sở trực chuẩn của ImA

Nghịch đảo suy rộng

(Pseudo-inverse hoặc Moore-penrose inversse)

- Giả sử A là ma trận khác 0 với khai triển kỳ dị là $A = U\Sigma V^T$ khi đó, $A^\dagger = V\Sigma^{-1}U^T$ được gọi là ma trận nghịch đảo suy rộng của A

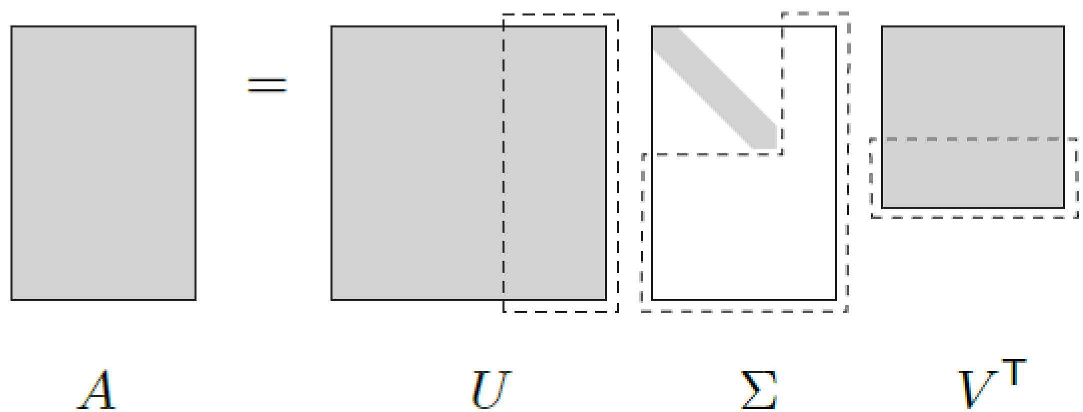
- Trường hợp $m > n$, rank$A = n$

$$A^\dagger = \left(A^T A\right)^{-1} A^T$$

$$x = A^\dagger y \in X_{ls} = \left\{ z \mid \|Az - y\| = \min_{\omega} \|A\omega - y\| \right\}$$

Khai triển SVD đầy đủ

- Bổ sung cơ sở trực chuẩn của không gian con riêng ứng với gtr 0 của ma trận $A^T A$ $\left(AA^T\right)$ tương ứng vào V và U.



Số điều kiện của ma trận

(Pseudo-inverse hoặc Moore-penrose inversse)

- Giả sử A là ma trận khả nghịch

$$y = Ax \qquad\qquad y + \delta y = A\left(x + \delta x\right)$$

$$\delta x = A^{-1}\delta y \Rightarrow \left\|\delta x\right\| \le \left\|A^{-1}\right\|\left\|\delta y\right\|$$

$$\left\|y\right\| \le \left\|A\right\|\left\|x\right\| \Rightarrow \frac{1}{\left\|x\right\|} \le \frac{\left\|A\right\|}{\left\|y\right\|} \Rightarrow \frac{\left\|\delta x\right\|}{\left\|x\right\|} \le \left\|A\right\|\left\|A^{-1}\right\|\frac{\left\|\delta y\right\|}{\left\|y\right\|}$$

$$condA = \left\|A\right\|\left\|A^{-1}\right\| = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$$