TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

BÁO CÁO MÔN HỌC
GIẢI TÍCH SỐ

ĐỀ TÀI
PHƯƠNG PHÁP GAUSS - JORDAN
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH AX = B

Giảng viên hướng dẫn: Hà Thị Ngọc Yến

Nhóm sinh viên:

1. Tuấn Anh Chí – MSSV: 20194232
2. Bùi Xuân Thịnh – MSSV: 20192093

Hà Nội, tháng 10 năm 2020

MỤC LỤC

Lời nói đầu

Sau khi học một số môn Toán đại cương, Giải tích hàm và Đại số hiện đại, dưới sự hướng dẫn của giáo viên bộ môn Giải tích số, giảng viên Hà Thị Ngọc Yến, chúng em đã tiến hành tìm hiểu về phương pháp Gauss – Jordan để giải phương trình AX = B. Nội dung chính của bài báo cáo bao gồm: Lý thuyết cơ bản, Thuật toán, Chương trình – Hệ thống ví dụ và phần Mở rộng. Ưu điểm và nhược điểm của phương pháp Gauss – Jordan so với phương pháp Gauss thông thường cũng sẽ được trình bày trong bản báo cáo.

Với khả năng có hạn về kiến thức và thời gian nên bản báo cáo không thể tránh khỏi những thiếu sót về mặt nội dung cũng như hình thức. Rất mong giáo viên bộ môn cùng bạn đọc lượng thứ và góp ý để bản báo cáo được hoàn thiện hơn.

Lời cảm ơn

Chúng em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới giảng viên Hà Thị Ngọc Yến, người đã tận tình giúp đỡ để chúng em có thể hoàn thành báo cáo này. Nếu không có những hướng dẫn, lời góp ý của cô, chúng em khó có thể hoàn thiện bản báo cáo này một cách hoàn chỉnh.

Một lần nữa, chúng em xin chân thành cảm ơn cô!

I. GIỚI THIỆU PHƯƠNG PHÁP

Trong đại số tuyến tính, phép khử Gauss là một phương pháp nhắm tới việc giải một hệ phương trình tuyến tính. Nó thường được hiểu là quá trình biến đổi trên ma trận hệ số tương ứng. Phương pháp Gauss được đặt tên theo nhà Toán học người Đức, Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Trong phương pháp khử Gauss, các biến đổi sơ cấp trên dòng được thực hiện trên ma trận hệ số mở rộng để đưa về ma trận dạng bậc thang. Phương pháp khử Gauss được nhà Toán học Wilhelm Jordan cải tiến trong năm 1888. Tuy nhiên, phương pháp cũng được tìm thấy trên một bài báo do Clasen viết trong cùng năm. Jordan và Clasen độc lập phát hiện ra phương pháp này.

II. LÝ THUYẾT

1. Bài toán

Nhiều bài toán thực tế trong nhiều lĩnh vực khác nhau như sinh học, thương mại, hóa học, khoa học máy tính, điện, kĩ thuật và cả các khoa học xã hội dẫn đến sự cần thiết trong việc giải hệ phương trình tuyến tính.

Bài toán đặt ra vấn đề: Tìm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn hệ phương trình sau

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Trong đó a_{ij}, b_i với $i = 1,2,\dots,m; j = 1,2,\dots,n$ là các số cho trước thuộc trường số thực, x_j với $j = 1,2,\dots n$ là các ẩn.

Hay còn có thể được viết gọn dưới dạng ma trận:

AX = B

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Phương pháp Gauss – Jordan là phương pháp sử dụng các phép biến đổi sơ cấp thực hiện trên ma trận bổ sung (ma trận mở rộng): $\overline{A} = [A \mid B]$

2. Nhắc lại về lý thuyết ma trận

a. Các phép biến đổi tương đương

Ta nói hai hệ phương trình tương đương nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm. Một phép biến đổi từ một hệ phương trình thành một hệ phương trình tương đương gọi là phép biến đổi tương đương. Ba phép biến đổi sau đây trên hệ phương trình là các phép biến đổi tương đương:

P1. Đổi chỗ hai phương trình.

P2. Nhân 2 vế của một phương trình với một số khác 0.

P3. Nhân một phương trình với một số rồi cộng vào phương trình khác.

Các phép biến đổi tương đương ở trên ứng với các phép biến đổi sơ cấp trên hàng của ma trận bổ sung:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Phép biến đổi có ý nghĩa rất quan trọng. Sau khi biến đổi ta thu được một ma trận tương đương nhưng sẽ trở nên đơn giản hơn ma trận ban đầu, từ đó dễ dàng giải được hệ đã cho.

b. Ma trận bậc thang và hạng của ma trận

* Một ma trận gọi là ma trận bậc thang nếu thỏa mãn:

1) Nếu có hàng không (tức là các phần tử của hàng đều bằng 0) thì nó phải nằm dưới các hàng khác không.

2) Với hai hàng khác không, phần tử khác 0 đầu tiên kể từ trái của hàng dưới nằm ở bên phải cột chứa phần tử khác 0 đầu tiên của hàng trên.

* Hạng của ma trận bậc thang bằng số hàng khác không của nó

Ví dụ ma trận có dạng bậc thang và có hạng bằng k

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c. Điều kiện có nghiệm

Theo định lí (Kronecker – Capelli): Hệ phương trình tuyến tính có nghiệm khi và chỉ khi hạng của ma trận bổ sung $rank(A) = rank(\overline{A})$

Chúng ta có nhận xét:

$rank(A) \neq rank(\overline{A})$ thì hệ vô nghiệm

$rank(A) = rank(\overline{A}) = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất

$rank(A) = rank(\overline{A}) < n$ thì hệ có vô số nghiệm

d. Phương pháp khử Gauss

Phương pháp khử Gauss giải đúng hệ phương trình bằng cách loại trừ ẩn và thực hiện theo 2 quá trình thuận và nghịch:

1) Quá trình thuận: Đưa ma trận hệ số mở rộng về dạng ma trận bậc thang bằng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng.

2) Quá trình nghịch: Giải nghiệm của hệ phương trình bằng cách giải thế dần các phương trình từ dưới lên của hệ phương trình thu được từ quá trình thuận.

Vấn đề phát sinh trong quá trình nghịch là khi giải nghiệm ta phải chia cho $\boldsymbol{a_{ii}} \approx \mathbf{0}$ thì nghiệm sẽ phải gặp sai số lớn.

3. Phương pháp Gauss-Jordan

Từ phương pháp Gauss, để giải ra được kết quả tốt, ta nên chọn phần tử trụ là phần tử sao cho khả năng gây sai số là ít nhất khi thực hiện chia trong quá trình giải. Tùy theo tính chất của ma trận hệ số để đưa ra lựa chọn tốt nhất.

a. Ý tưởng phương pháp

Nội dung phương pháp là loại trừ ẩn, song loại trừ ẩn nào trước là tùy thuộc cách chọn phần tử giải của hệ số a_{ij}. Ý tưởng khá tương đồng với phương pháp Gauss nhưng khi khử ẩn Gauss chỉ làm những hệ số dưới phần tử trụ về "0", đối với Gauss – Jordan thì mọi phần tử trên cột của phần tử trụ (hay là phần tử giải) trừ phần tử đó đều về "0". Do sự thay đổi của cách chọn phần tử giải nên đưa các phần tử trên cột để kiểm soát vị trí các phần tử giải dễ hơn.

Sau khi quá trình khử thì ma trận mở rộng sẽ có dạng:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & a_{12} & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 & b_2 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Ta có nhận xét rằng trong đa số trường hợp ngoại trừ cột hệ số, thì mỗi cột và mỗi hàng của ma trận hệ số *A* chỉ có duy nhất 1 phần tử hoặc không có phần tử nào. Từ đây nhận xét ta tìm được $rank(A)$ và $rank(\overline{A})$ dẫn đến kết luận được nghiệm dễ dàng và tránh được sai số của phương pháp Gauss.

b. Xây dựng công thức

Bước 1: Xét ma trận mở rộng $\overline{A}^{(0)} = [A \mid B]$

$$\overline{A}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1q} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{iq} & \dots & a_{in} & b_i \\ a_{p1} & \dots & a_{pj} & \dots & a_{pq} & \dots & a_{pn} & b_p \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mq} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Ta nói phần tử a_{pq} là phần tử giải của ma trận nếu $|a_{pq}| = \max|a_{ij}|$; $1 \le i \le m$; $1 \le j \le n$ và khi đó a_{pq} được gọi là phần tử giải, hàng *p* gọi là hàng giải, cột *q* gọi là cột giải.

Đặt $\alpha_i = \dfrac{a_{iq}}{a_{pq}}$; ($i = \overline{1, n}$, $i \ne p$). Lấy hàng p nhân tất cả với α_i, rồi lần lượt lấy hàng $i = 1, 2, \ldots$ tương ứng trừ đi nó (trừ hàng p) ta được

$$\overline{A}^{(1)} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{i1} - a_{p1}\alpha_i & \dots & a_{ij} - a_{pj}\alpha_i & \dots & a_{iq} - a_{pq}\alpha_i & b_1 - b_p\alpha_i \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pj} & \dots & a_{pq} & b_p \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \end{array}\right]$$

Đặt $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{pj}\alpha_i = a_{ij} - \dfrac{a_{pj}a_{iq}}{a_{pq}}$

Với cách đặt trên thì sau bước này ta thu được ma trận $\overline{A}^{(1)}$ có các phần tử được tính như sau:

Trên cột q các phần tử đều bằng 0 trừ phần tử giải

Trên hàng p các phần tử được giữ nguyên

Các phần tử còn lại tính theo công thức (kể cả cột hệ số)

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{pj}a_{iq}}{a_{pq}}$$

Ma trận sau bước này sẽ có dạng

$$\overline{A}^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{1j}^{(1)} & 0 & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ a_{i1}^{(1)} & a_{ij}^{(1)} & 0 & a_{jn}^{(1)} & b_i^{(1)} \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ a_{p1}^{(1)} & a_{pj}^{(1)} & a_{pq}^{(1)} & a_{pn}^{(1)} & b_p^{(1)} \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(1)} & a_{mj}^{(1)} & 0 & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array}\right]$$

Bước 2: Lặp lại quá trình như bước 1 với ma trận $\overline{A}^{(1)}$ để có ma trận $\overline{A}^{(2)}$. Trong đó phần tử giải này là $a_{rs}^{(1)}$ với điều kiện $r \neq p, q \neq s$. Tiếp tục như vậy cuối cùng ta thu được ma trận mà mỗi hàng chỉ gồm 1 phần tử với ẩn x_k và cột vế phải từ đó suy ra nghiệm của hệ.

Chú ý: Khi tìm phần tử giải mà gặp phần tử có trị tuyệt đối bằng 1 thì nên chọn phần tử đó làm phần tử giải để tránh phép chia.

Ta xét ví dụ đơn giản sau:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

Ma trận mở rộng

$$\overline{A}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

a_{11} là phần tử 1 nên ta chọn làm phần tử giải

Tính $\alpha_2^{(1)} = \dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 2, \alpha_3^{(1)} = \dfrac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 2$. Tính theo công thức ta thu được ma trận

$$\overline{A}^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

Tiếp tục a_{33} là phần tử giải mà khác dòng khác cột với a_{11}(phần tử giải ở bước trước) nên ta chọn là phần tử giải

Tính $\alpha_2^{(2)} = \dfrac{a_{23}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = 2$, $\alpha_1^{(2)} = \dfrac{a_{13}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = -2$. Tiếp tục tính theo công thức ta được

$$\overline{A}^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

Còn lại a_{22} cuối cùng ta chọn làm phần tử giải

Tính $\alpha_1^{(3)} = \dfrac{a_{12}^{(3)}}{a_{22}^{(3)}} = \dfrac{-7}{5}, \alpha_3^{(3)} = \dfrac{a_{32}^{(3)}}{a_{22}^{(3)}} = \dfrac{-4}{5}$. Tiếp tục ta thực hiện ta được

$$\overline{A}^{(3)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{17}{5} \\ 0 & -5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & \dfrac{9}{5} \end{array}\right]$$

Vậy $X = \begin{bmatrix} \dfrac{17}{5} & \dfrac{-6}{5} & \dfrac{9}{5} \end{bmatrix}^T$

c. Đánh giá phương pháp

Phương pháp Gauss – Jordan được đánh giá có độ chính xác cao hơn phương pháp Gauss vì đã tránh được sai số lớn. Lý do chính bởi sự làm tròn của máy tính khi chia cho số quá bé, dẫn đến thương sẽ cho sai số là rất lớn.

Ví dụ:

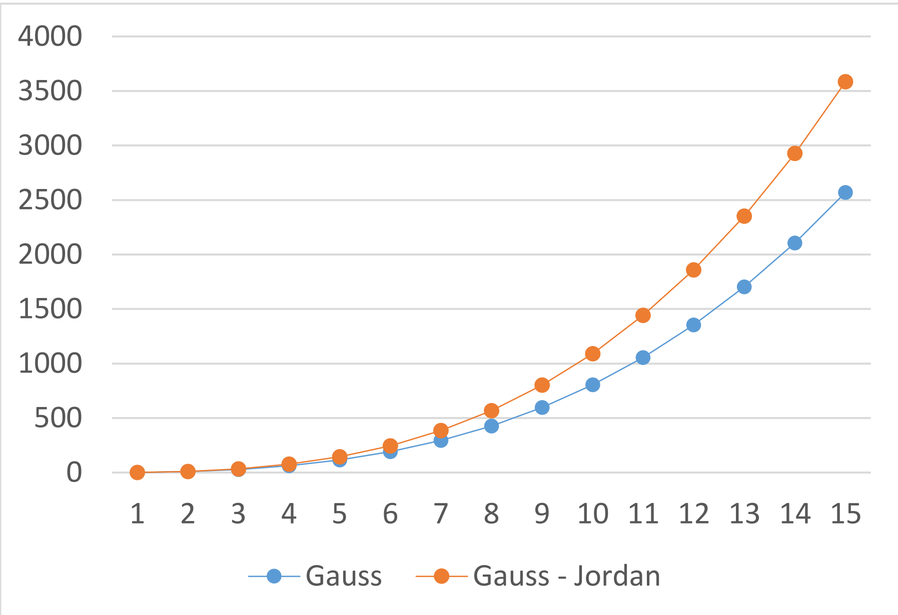
$$\frac{15}{0{,}000015} = 1000000 \text{ và } \frac{15}{0{,}00002} = 750000$$

Do sự làm tròn của máy tính chỉ là 0.000005 nhưng sai số là 250000.

Vì vậy phương pháp Gauss – Jordan được sử dụng cho các loại máy tính, đặc biệt là máy tính bỏ túi.

Số phép tính của phương pháp Gauss so với số phép tính của phương pháp Gauss – Jordan với ma trận vuông và có định thức khác 0[*]:

		Gauss	Gauss - Jordan
Cộng	Thuận	$\sum_{i=2}^{n} i(i-1)$	$(n-1)\sum_{i=1}^{n} i$
	Nghịch	$\frac{(n-1)n}{2}$	0
Nhân	Thuận	$\sum_{i=2}^{n} (i^2-1)$	$(n-1)\sum_{i=1}^{n} (i+1)$
	Nghịch	$\frac{n(n+1)}{2}$	n
Tổng	Cộng	$\frac{n}{6}(2n^2+3n-5)$	$\frac{n(n^2-1)}{2}$
	Nhân	$\frac{n}{3}(n^2+3n-1)$	$\frac{n(n^2+2n-1)}{2}$
	Cộng và nhân	$n(\frac{2}{3}n^2+\frac{3}{2}n-\frac{7}{6})$	$n(n^2+n-1)$



Kết luận: Trong nhiều trường hợp, số phép tính của phương pháp Gauss – Jordan nhiều hơn số phép tính của phương pháp Gauss nên phương pháp Gauss nhanh hơn phương pháp Gauss - Jordan.

Liên hệ với đại số tuyến tính, phương pháp Gauss - Jordan được biết đến với quá trình khử để đưa ma trận hệ số ban đầu về ma trận đơn vị từ đó cột hệ số sau khi biến đổi chính là nghiệm. Phương pháp này rất thuận tiện đối với những hệ phương trình đẹp cho nghiệm không quá lớn hay quá nhỏ. Nhưng đối với giải tích

[*] Chi tiết chứng minh ở phụ lục (tr 20)

số, yếu tố sai số là yếu tố làm ảnh hưởng rất nhiều tới bài toán nên hãy suy nghĩ khi lựu chọn phương pháp cho mình.

Các phương pháp đều có điểm mạnh, điểm yếu riêng, và cũng có phương pháp đặc trưng chỉ có thể giải một vài bài toán đặc trưng. Nhìn nhận bài toán đưa ra phương pháp tối ưu mới là mục tiêu mà môn học Giải tích số hướng tới.

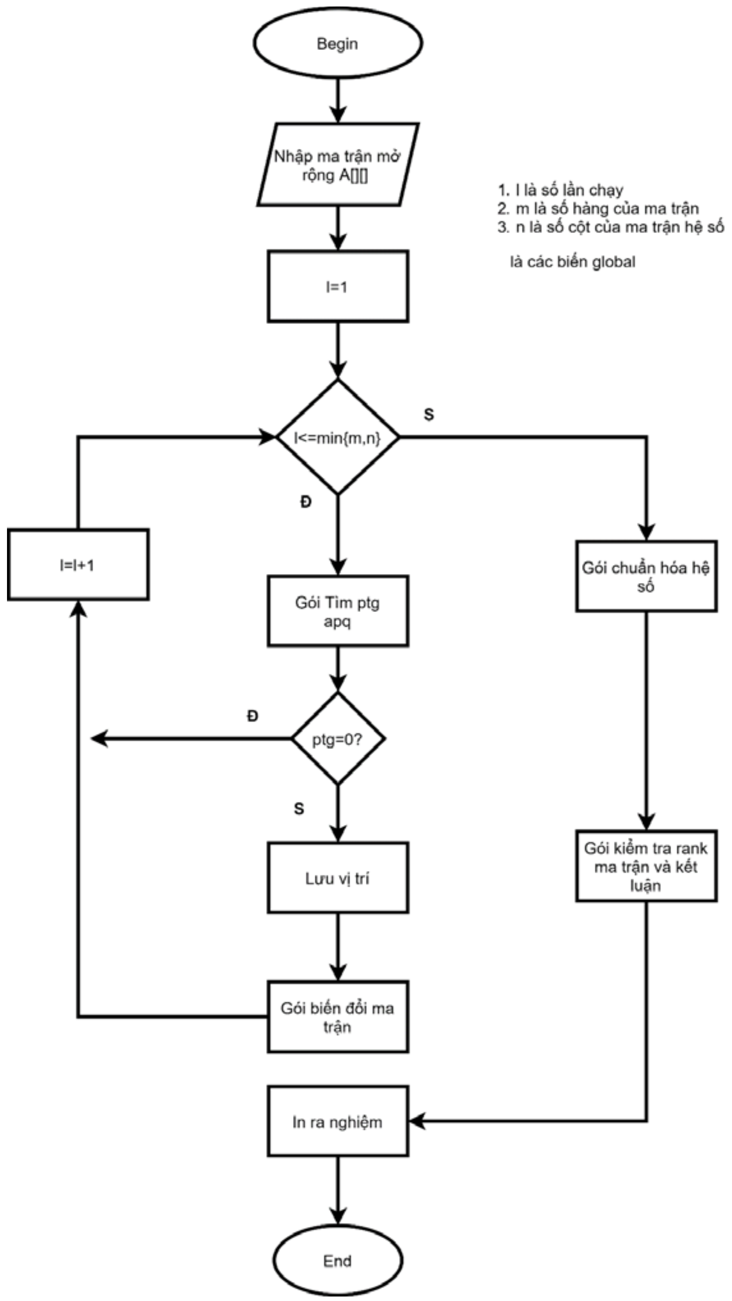
III. Thuật toán

1. Chương trình chính

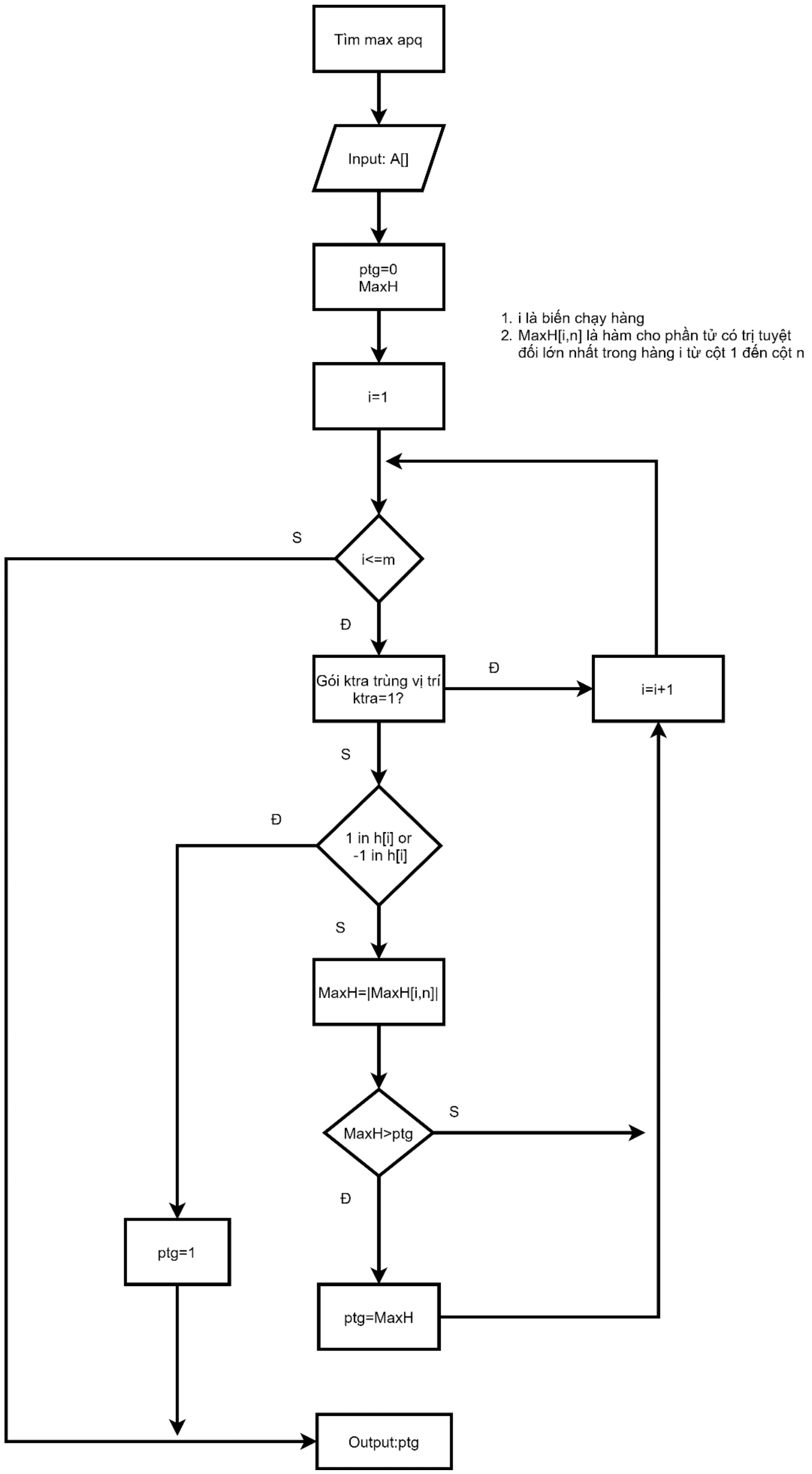
(Áp dụng với X là ma trận có dạng nx1)

Input: Ma trận hệ số mở rộng [A|B] cỡ mx(n+1)

Output: Kết luận nghiệm của hệ phương trình

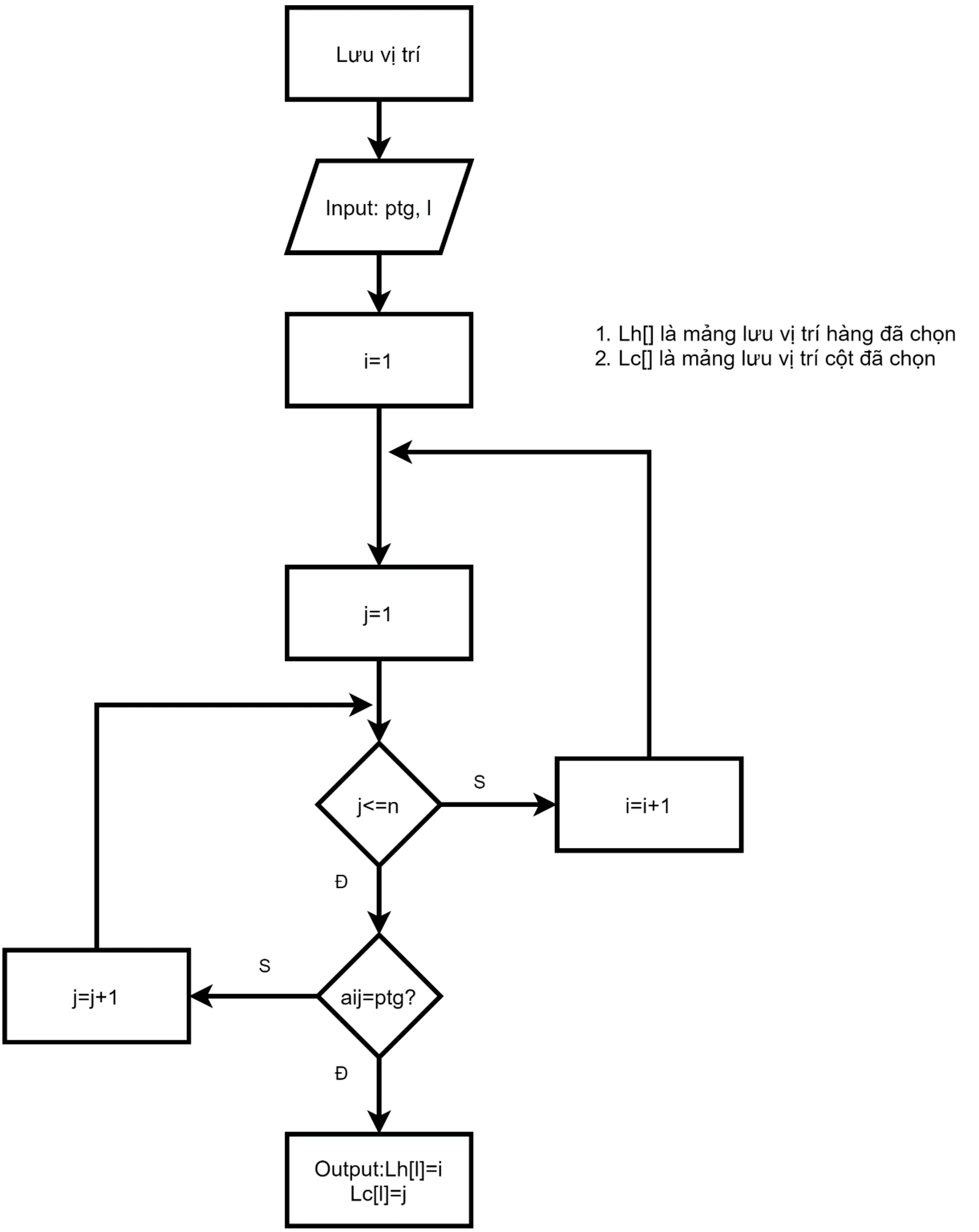


2. Gói tìm phần tử giải



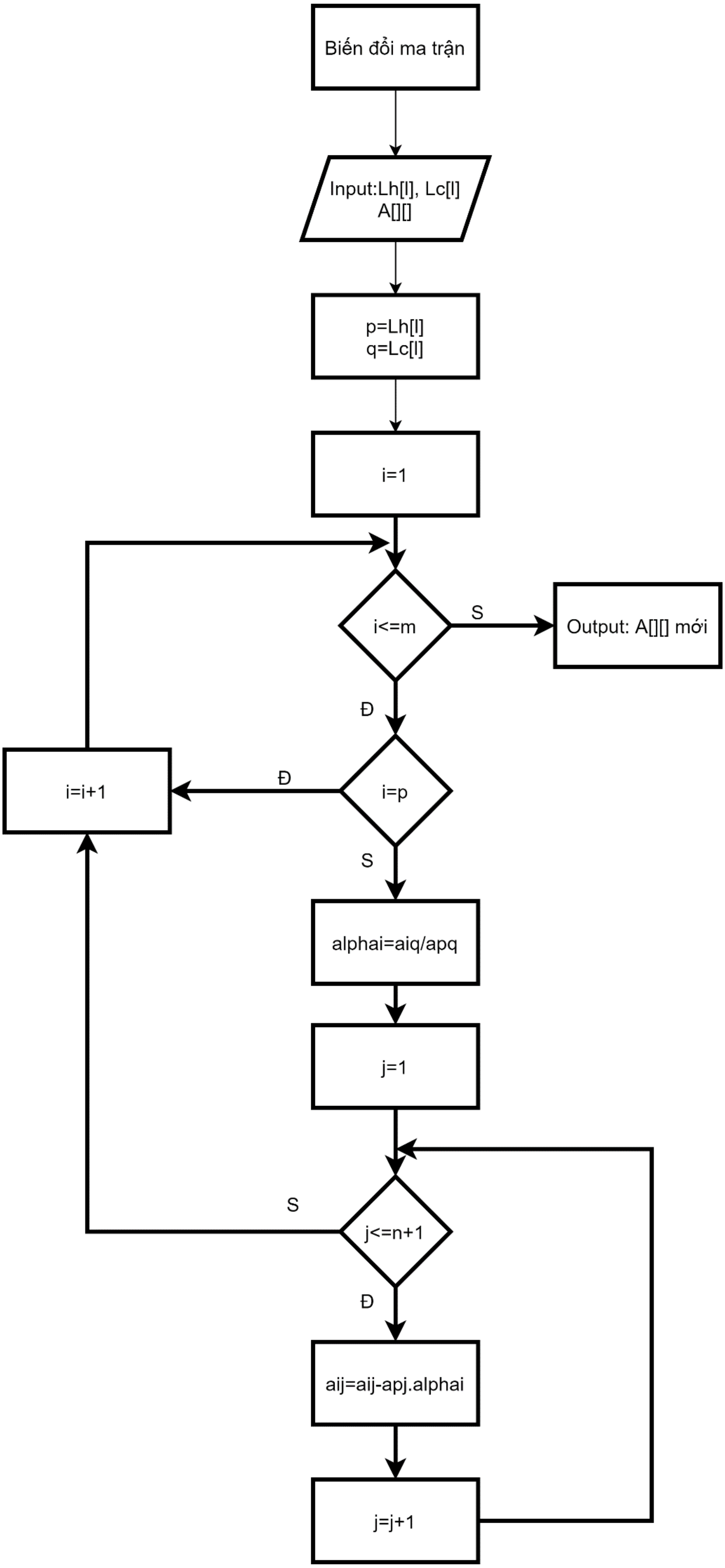
Chú ý: Gói tìm phần tử giải a_{pq} thì hàng giải p và cội giải q phải khác so với phần tử giải a_{pq} của các vòng lặp trước đó.

3. Lưu vị trí

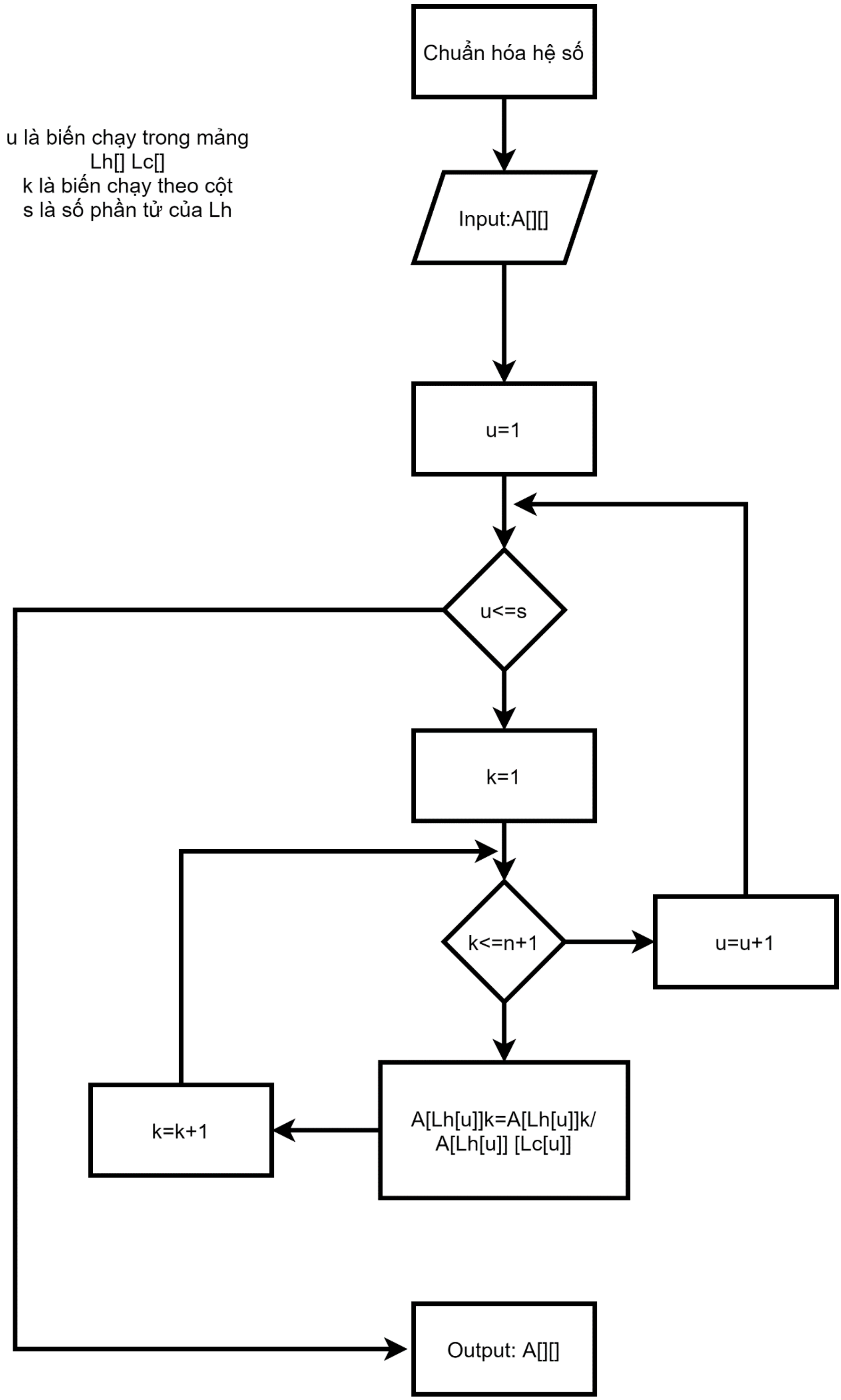


Lưu vị trí
Input: ptg, l
i=1
1. Lh[] là mảng lưu vị trí hàng đã chọn
2. Lc[] là mảng lưu vị trí cột đã chọn
j=1
j<=n
S
i=i+1
Đ
S
j=j+1
aij=ptg?
Đ
Output:Lh[l]=i
Lc[l]=j

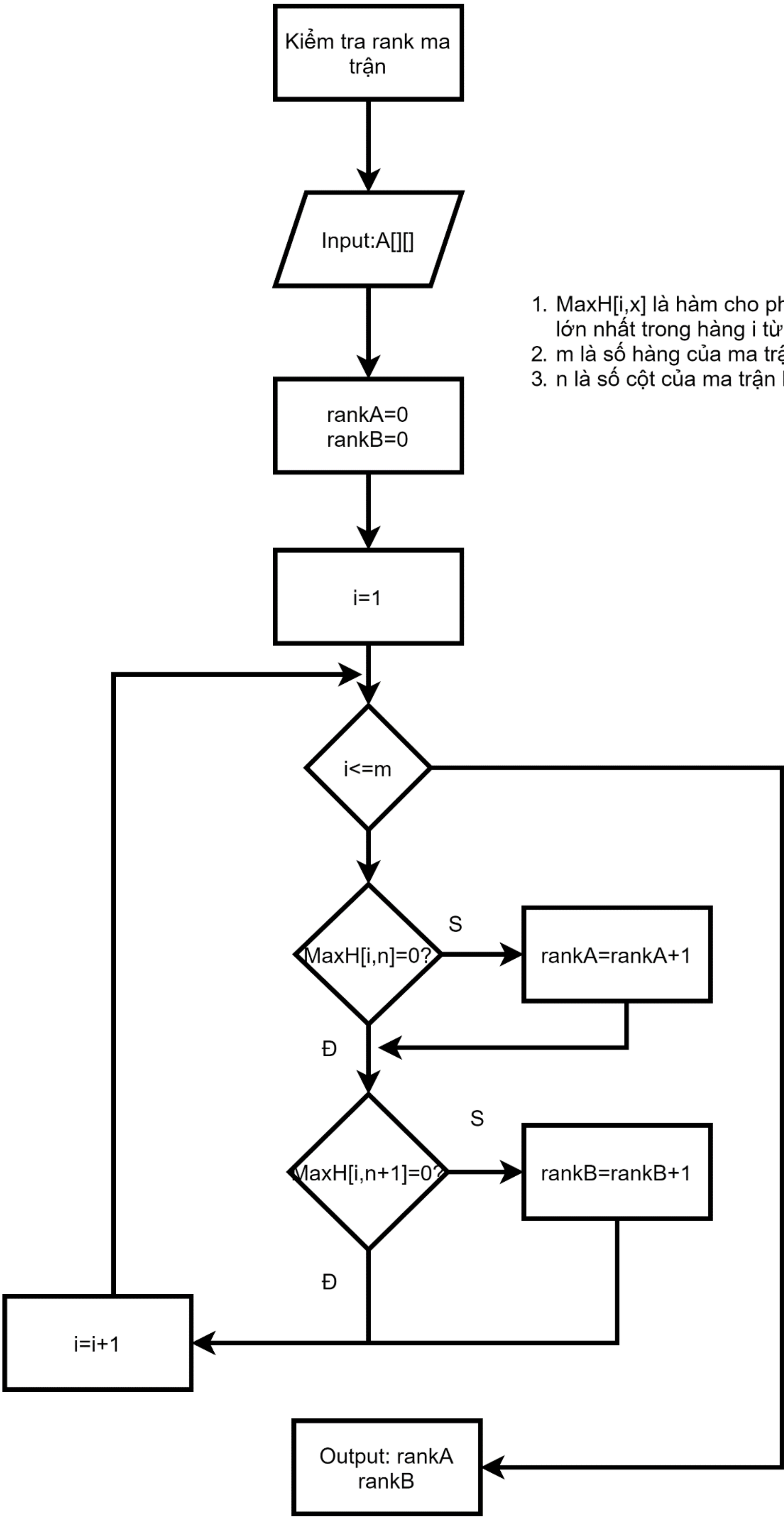
4. Gói biến đổi ma trận



5. Gói chuẩn hóa hệ số



6. Gói kiểm tra rank



1. MaxH[i,x] là hàm cho phần tử có trị tuyệt đối lớn nhất trong hàng i từ cột 1 đến cột x
2. m là số hàng của ma trận hệ số
3. n là số cột của ma trận hệ số

IV. CHƯƠNG TRÌNH – HỆ THỐNG VÍ DỤ

1. Ví dụ 01: Ma trận hệ số mở rộng n × (n+1) có nghiệm duy nhất

Input:

```
[[ 1.   1. -3.   2.   6.]
 [ 1. -2.   0. -1. -6.]
 [ 0.   1.   1.   3. 16.]
 [ 2. -3.   2.   0.   6.]]
```

Output:

```
Hệ PT có nghiệm duy nhất
          |    8.0000000000|
X =       |    6.0000000000|
          |    4.0000000000|
          |    2.0000000000|


- - - - - Kiểm tra nghiệm - - - - -
[[ 6.]
 [-6.]
 [16.]
 [ 6.]]
```

=> Input là ma trận mở rộng (trong đó A là ma trận vuông)

Output là kết luận và nghiệm duy nhất của hệ phương trình

Ví dụ chứng minh chương trình có chạy ra nghiệm đúng

2. Ví dụ 02: Ma trận hệ số mở rộng m × (n+1) có vô số nghiệm

Input:

```
[[1. 3. 5. 7.]
 [2. 4. 6. 8.]]
```

Output:

```
Hệ PT có vô số nghiệm
      |  -0.5000000000|      |   0.5000000000|
X =   |   0.0000000000|   -  |  -1.0000000000|x2
      |   1.5000000000|      |   0.5000000000|
```

=> Input là ma trận mở rộng (trong đó A là ma trận cỡ 2x3)

Output là kết luận và biểu diễn nghiệm của hệ phương trình

Ví dụ mang ý nghĩa chương trình có thể chạy với ma trận A có kích thước bất kỳ và có thể biểu diễn nghiệm

3. Ví dụ 03: Ma trận hệ số mở rộng n × (n+1) có nghiệm duy nhất

Input:

```
[[   0.0000000001 1000.          400.           3.          ]
 [3000.             0.03          50.           4.          ]
 [  99.             1.             0.         666.          ]]
```

Output: *(Phương pháp Gauss – Jordan)*

```
Hệ PT có nghiệm duy nhất       - - - - - Kiểm tra nghiệm - - - - -
        |   5.4146163519|      [[  2.9999999999]
X  =    | 129.9529811612|       [  4.          ]
        |-324.8749529031|       [666.          ]]
```

(So sánh với phương pháp khử Gauss)

```
Required solution is:           Kiểm tra nghiệm
X1 =    5.3842086345            3.0
X2 =  129.1405000000            14.312618487205327
X3 = -322.8437500000            662.1771548150773
```

=> Input là ma trận mở rộng (trong đó A là ma trận vuông)

Output là kết luận và nghiệm duy nhất của hệ phương trình

Ví dụ thể hiện ưu điểm của phương pháp Gauss – Jordan giải hệ phương trình khi có hệ số nhỏ (Dễ thấy, phương pháp Gauss-Jordan có độ chính xác cao hơn)

V. MỞ RỘNG

1. Với X là một ma trận mxn bất kỳ

Với X là một ma trận mxn thì AX = B thực hiện được khi kích thước của A, X, B lần lượt là mxn, nxp, mxp. Tường minh ta có như sau:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mp} \end{bmatrix}$$

Ý tưởng giải tương tự với cách làm ở trên. Khi đó, ta sẽ có A là ma trận input với các hệ số của X, còn B là ma trận hệ số tự do. Với cách lập trình tương tự, ta sẽ thực hiện trên ma trận có kích cỡ mx(n+p).

2. Ứng dụng để tìm ma trận nghịch đảo

Theo định nghĩa, nếu tồn tại ma trận B để $AB = BA = I$ với I là ma trận đơn vị thì A khả nghịch và B mà ma trận nghịch đảo của A, kí hiệu $B = A^{-1}$.

Như vậy để tìm ma trận nghịch đảo ta thay B trong phương trình ma trận bằng ma trận đơn vị I. Ta thu được ma trận mở rộng $\overline{A} = \left[A \,|\, I \right]$.

Khi biến đổi ma trận ta cũng chọn phần tử giải bên ma trận A nghĩ là từ cột 1 đến cột n, sau đó thực hiện phép biến đổi trên toàn bộ ma trận $\overline{A}$ quá trình kết thúc khi thực hiện được n lần.

Sau quá trình cột n đến n+1 chính là ma trận nghịch đảo mà ta cần tìm.

Lưu ý: Chỉ có ma trận vuông và định thức khác 0 mới tồn tại ma trận nghịch đảo.

PHỤ LỤC

Chứng minh số phép tính của phương pháp Gauss – Jordan cho trường hợp ma trận vuông và có định thức ≠ 0

Vì định thức ≠ 0 nên rank($\overline{A}$) = n = rank(A)

=> Mỗi hàng cột luôn tồn tại ít nhất một phần tử

Giả sử các phần tử đó là phần tử giải tồn tại và trên đường chéo chính:

*Quá trình thuận :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Bước 1: Tính $\alpha_i^{(0)} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ có $(n-1)$ phép nhân

Biến đổi ma trận có: $\begin{cases} \text{n phép nhân} \\ \text{n phép cộng} \end{cases} \text{x } (n-1)$ hàng

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

Bước 2: Tính $\alpha_i^{(1)} = \dfrac{a_{i2}}{a_{22}}$ có $(n-1)$ phép nhân

Biến đổi ma trận có: $\begin{cases} \text{n} - 1 \text{ phép nhân} \\ \text{n} - 1 \text{ phép cộng} \end{cases} \text{x } (n-1)$ hàng

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(2)} & 0 & \dots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

.

.

.

Bước n: Tính $\alpha_i^{(n-1)} = \dfrac{a_{in}}{a_{nn}}$ có $(n-1)$ phép nhân

Biến đổi ma trận có: $\begin{cases} 1 \text{ phép nhân} \\ 1 \text{ phép cộng} \end{cases} \text{x } (\text{n} - 1) \text{ hàng}$

Sau quá trình thuận ma trận có dạng đường chéo chính

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(n-1)} & 0 & \dots & 0 & b_1^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \dots & 0 & b_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right]$$

*Quá trình nghịch:

Dễ thấy có n phép chia và 0 phép cộng.

Tổng số phép tính cộng:

$$C = \left[n(n-1) + (n-1)(n-1) + \dots + 1(n-1)\right] + 0 = (n-1)\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n-1)n(n+1)}{2} = \frac{n(n^2-1)}{2}$$

Tổng số phép tính nhân: Bằng tổng số phép tính cộng + số phép tính α

$$N = \left[C + n(n-1)\right] + n = \frac{(n-1)n(n+1)}{2} + \frac{n(2n-2)}{2} + \frac{2n}{2} = \frac{n(n^2+2n-1)}{2}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Trọng Vinh (2007). *Giáo trình Giải tích số*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
2. Bùi Xuân Diệu (2009). *Bài giảng Đại số tuyến tính,* Trường Đại học Bách khoa Hà Nội.