PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

Hà Thị Ngọc Yến

Hà nội, 12/2020

BÀI TOÁN

- Cho bộ điểm $\left(x_i, y_i\right)_{i=\overline{1,n}}$
- Cho kgvt V với hệ hàm cơ sở $\left\{\varphi_j\right\}_{j=\overline{1,m}}$

- Tìm hàm $g = \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i \in V$ để sai lệch giữa f, g là nhỏ nhất

- Khi đó $f \approx g$

Sai số trung bình phương

- Xét lưới điểm $\left\{x_i\right\}_{i=\overline{1,n}}$

- Sai lệch trung bình phương giữa hai hàm:

$$\sigma_{f-g} = \sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(x_i\right) - g\left(x_i\right)\right)^2}$$

- Sai số trung bình phương nhỏ nhất khi nào?

PP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

- Xét hàm m biến $S\left(a_1, a_2, ..., a_m\right)$

- Và cực tiểu hóa

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(a_1\varphi_1\left(x_i\right) + \cdots + a_m\varphi_m\left(x_i\right) - y_i\right)^2 \rightarrow \min_{a_i} S$$

- S luôn đạt cực tiểu tại điểm dừng $\dfrac{\partial S}{\partial a_i} = 0, i = \overline{1, m}.$

Hàm bậc nhất

- Xét V là kg các đa thức bậc không quá một

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(a x_i + b - y_i \right)^2 \to \min_{a,b} S$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(a x_i + b - y_i \right)\left(x_i \right) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(a x_i + b - y_i \right)\left(1 \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Hàm bậc hai

- Xét V là kg các đa thức không quá hai

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(a x_i^2 + b x_i + c - y_i \right)^2 \to \min_{a,b,c} S$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial c} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Trường hợp tổng quát

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(a_1 \varphi_1(x_i) + \cdots + a_m \varphi_m(x_i) - y_i \right)^2 \to \min_{a_1,\ldots,a_m} S$$

$$\varphi_i = \left(\varphi_i(x_1), \varphi_i(x_2), \ldots, \varphi_i(x_n) \right)^t, i = \overline{1,m};\ y = (y_i)^t$$

$$\Phi = \left[\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \ldots \quad \varphi_m \right]_{n \times m};\ M = \Phi^t \Phi = \left[\left\langle \varphi_i, \varphi_j \right\rangle \right]_{i,j}$$

$$\Rightarrow S = a^t M a - 2 y^t \Phi a + y^t y$$

$$\Rightarrow S' = 2a^t M - 2y^t \Phi = 0 \Leftrightarrow Ma = \Phi^t y \Leftrightarrow a = M^{-1} \Phi^t y$$

Hàm đưa được về dạng tuyến tính theo tham số

- Một số hàm chưa tuyến tính đưa được về dạng tuyến tính theo tham số

$$y = ae^{b_1\varphi_1(x)+\ldots+b_m\varphi_m(x)}$$

$$y = ax^b$$

$$y = \ln\left(b_1\varphi_1(x)+\ldots+b_m\varphi_m(x)\right)$$

Hàm đưa được về dạng tuyến tính theo tham số

$$\left(x_i, y_i\right)_{i=\overline{1,n}},\ y = ae^{b_1\varphi_1(x)+\ldots+b_m\varphi_m(x)}$$

$$y_i > 0 \forall i = \overline{1,n}$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln a + b_1\varphi_1(x) + \ldots + b_m\varphi_m(x)$$

$$y_i < 0 \forall i = \overline{1,n}$$

$$\Rightarrow \ln(-y) = \ln(-a) + b_1\varphi_1(x) + \ldots + b_m\varphi_m(x)$$

Thuật toán

- Bước 1: Nhập $\left(x_i, y_i\right)_{i=\overline{1,n}},\quad \varphi_j\left(x\right), j=\overline{1,m}$

- Bước 2: Tính

$$\Phi=\left[\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \ldots \quad \varphi_m\right]; M=\Phi^t\Phi; \quad b=\Phi^t y$$

- Bước 3: Giải PT $\quad \boldsymbol{Mx}=\boldsymbol{b}$