TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

BÁO CÁO MÔN HỌC

GIẢI TÍCH SỐ

ĐỀ TÀI 16

PHƯƠNG PHÁP NỘI SUY LAGRANGE

GV hướng dẫn: TS. HÀ THỊ NGỌC YẾN

Nhóm sinh viên thực hiện: Nhóm 16

Họ và tên	MSSV
Trương Tuấn Khang	20183560
Đỗ Hải Nam	20181663

Hà Nội, 2020

Mục lục

Mở đầu

Bài toán nội suy là một trong những bài toán cơ bản của toán lý thuyết cũng như toán ứng dụng. Công thức nội suy giúp ta xác định được một đa thức nhờ một vài giá trị đã biết của đa thức đó thông qua một vài điểm cho trước. Nhiều bài toán về đa thức nội suy dẫn đến những kết quả lý thú hoặc phải dùng cách chứng minh đặc sắc. Chúng có tác dụng phát triển tư duy logic, phát triển tính linh động và sáng tạo khi nghiên cứu toán. Đồng thời sự phát hiện những ứng dụng đa dạng của đa thức nội suy trong đại số cũng luôn đem lại sự hấp dẫn đối với giáo viên và sinh viên khi nghiên cứu. Chính vì vậy, nhóm 14 chúng em đã chọn trình bày đề tài: "Đa thức nội suy Lagrange".

Xin cảm ơn TS. Hà Thị Ngọc Yến đã giúp chúng em chỉnh sửa và hoàn thành bản báo cáo lần này. Do hạn chế về thời gian cũng như kiến thức nên bản báo cáo không tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong cô và các bạn góp ý để chúng em hoàn thiện và bổ sung.

Hà Nội, ngày 3 tháng 1 năm 2021

Nhóm 16

1 Trình bày bài toán

1.1 Ví dụ

Một chiếc tàu với vận tốc không đổi đi ngang qua một hòn đảo. Thuyền trưởng cứ mỗi giờ lại đo khoảng cách từ tàu đến đảo. Vào lúc 12, 14 và 15 giờ tàu cách đảo các khoảng cách tương ứng là 7, 5 và 11 km. Hỏi vào lúc 13 giờ tàu cách đảo bao nhiêu km?

Nhận xét: Do tàu đi với vận tốc không đổi nên khoảng cách của tàu đến đảo là một hàm phụ thuộc vào thời gian. Tuy nhiên, ta chưa biết biểu thức của hàm mà chỉ biết giá trị của hàm tại một số điểm.

Trên thực tế, ta thường gặp những hàm số không biết biểu thức cụ thể của chúng hoặc biểu thức hàm số quá phức tạp. Bằng đo đạc, thực nghiệm ta thu được một bảng số các giá tri x_i tại các điểm x_i tương ứng $(i = \overline{0, n})$ thuộc đoạn $[a, b]$. Ta muốn biết giá trị của y tại điểm $x = x_i$.

Ta tìm cách thay hàm fx bởi hàm $P(x)$ đơn giản hơn để sai lệch của $P(x)$ và fx không đáng kể. Thường $P(x)$ được chọn là đa thức (giá trị tính và các phép đạo hàm, tích phân dễ dàng thực hiện).

1.2 Bài toán nội suy

Ta phải xây dựng đa thức $P(x)$ sao cho :

$$P(x_i) = y_i = f(x_i) \quad \text{với} \quad (i = \overline{0, n}); \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

$$P(x) \approx f(x) \quad \text{trên đoạn} \quad [a, b]$$

Bài toán xây dựng hàm $P(x)$ gọi là bài toán nội suy

$P(x)$ gọi là đa thức nội suy của fx trên $[a, b]$

Các điểm x_i $(i = \overline{0, n})$ gọi là các mốc nội suy.

Giá trị $y = P(x) = f(x)$ là giá trị nội suy nếu $x \in (a, b)$

1.3 Vì sao chọn đa thức để nội suy

Đa thức đại số thường được sử dụng vì các lý do đơn giản sau đây : Các phép toán cộng trừ nhân chia đạo hàm tích phân dễ dàng được thực hiện trên đa thức. Hơn thế nữa nếu $P(x)$là một đa thức thì $P(x + c)$ và $P(cx)$ cũng là đa thức.

2 Ý tưởng phương pháp

2.1 Sự duy nhất của đa thức nội suy

Từ bảng số $y_i = f(x)$ với $i = \overline{0,n}$ và $x_i \in (a,b)$ (1)

Ta xây dựng $P_n(x_i) = y_i$ với $i = \overline{0,n}$ ($P_n(x_i)$ bậc n) (2)

Đa thức $P_n(x)$ sinh ra từ bảng số (1) sẽ thỏa mãn điều kiện (2) là tồn tại duy nhất.

Thật vậy, việc đi tìm đa thức nội suy $P_n(x)$ là đi giải hệ phương trình, có hệ $1, x, x^2, \ldots, x^n$ là hệ cơ sở.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \ldots \\ p_n \end{pmatrix}$$

Ma trận vuông vế trái là ma trận Vandermonde, có $det = \prod_{0 \le i < j \le n}(x_i - x_j) \neq 0$

Do đó hệ phương trình tồn tại nghiệm duy nhất.

2.2 Ý tưởng

Hệ phương trình trên có thể giải dễ dàng nếu ma trận vuông vế trái là ma trận đơn vị. Ta tìm cách đưa hệ cơ sở cũ $1, x, x^2, \ldots, x^n$ về hệ cơ sở mới $L_0x, L_1x, \ldots, L_nx$ sao cho $P(x) = b_0L_0x + b_1L_1x + \ldots + b_nL_nx$

$$\begin{pmatrix} L_0(x_0) & \ldots & L_n(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L_0(x_n) & \ldots & L_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ta xây dựng $L_j(x)(i = \overline{0,n})$ sao cho ma trận vuông trên là ma trận đơn vị, nghĩa là:

Vì $x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ là nghiệm của $L_j(x) = 0$, do đó

$$L_j(x) = k \prod_{0 \le i \neq j \le n} (x - x_j) \quad (k \quad \text{là hệ số, vì } L_j(x) \quad \text{có bậc} \le n)$$

Thay $x = x_j$ ta được :

$$k \prod_{0 \le i \neq j \le n} (x - x_j) = L_j(x_j) = 1$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{\prod_{0 \le i \neq j \le n}(x - x_j)}$$

Vậy $L_j(x) = \dfrac{\prod_{0 \le i \neq j \le n}(x - x_i)}{\prod_{0 \le i \neq j \le n}(x_j - x_i)}$

Từ đó chọn $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x)y_j$ dễ dàng suy ra :

$$P_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x_i) y_j = y_i \quad i = \overline{0, n} \quad (*)$$

3 Xây dựng công thức

Để thuận tiện cho việc tính toán và đánh giá sai số, ta đặt :

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

$$\Rightarrow \omega'_{n+1}(x_i) = \lim_{x \to x_i} \frac{\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)}{x - x_i} = \lim_{x \to x_i} \prod_{0 \leq i \neq j \leq n} (x - x_j)$$

$$\Rightarrow \omega'_{n+1}(x_i) = \prod_{0 \leq i \neq j \leq n} (x_i - x_j)$$

Công thức $(*)$ được viết lại thành :

$$P_n(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} = \omega_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(x - x_i)D_i}$$

Trong đó $D_i = \omega'_{n+1}(x_i) = \prod_{0 \leq j \neq i \leq n}(x_i - x_j)$. Để tính $P_n(x)$ theo công thức $(**)$, ta có thể mô tả theo bảng sau :

$\underline{x - x_0}$	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$	$\ldots$	$x_0 - x_n$	D_0	$\frac{y_0}{D_0(x - x_0)}$
$x_1 - x_0$	$\underline{x - x_1}$	$x_1 - x_2$	$\ldots$	$x_1 - x_n$	D_1	$\frac{y_1}{D_1(x - x_1)}$
$x_2 - x_0$	$x_2 - x_1$	$\underline{x - x_2}$	$\ldots$	$x_2 - x_n$	D_2	$\frac{y_2}{D_2(x - x_2)}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_n - x_0$	$x_n - x_1$	$x_n - x_2$	$\ldots$	$\underline{x - x_n}$	D_n	$\frac{y_0}{D_n(x - x_n)}$

$D_i \quad (i = \overline{0, n})$ là tích các phần tử của hàng tương ứng trừ phần tử trên đường chéo.

$\omega_{n+1}(x)$ là tích các phần tử trên đường chéo chính.

4 Sự đúng đắn của công thức

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \omega_{n+1}(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{y_i}{(x - x_j)D_i} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{\prod_{0 \le i \ne j \le n}(x - x_i)}{\prod_{0 \le i \ne j \le n}(x_j - x_i)} y_i = \sum_{j=0}^{n} Q_i(x) \end{aligned}$$

Thay $x = x_j$ $(j = \overline{0, n})$

- Với $i \ne j$: $\quad Q_i(x_j) = 0$
- Với $i = j$: $\quad Q_i(x_j) = y_i$

Do đó, $P_n(x_i) = y_i$

5 Sai số phương pháp

Với $M = \sup_{a\leq x\leq b} |f^{(n+1)}(x)|$:

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|(x-x_0)\dots(x-x_n)|$$

- Phần dư sẽ rất lớn nếu x nằm ngoài đoạn $[x_0, x_n]$, do đó dùng công thức nội suy để thực hiện phép ngoại suy sẽ mắc phải sai số lớn.
- Phép nội suy có độ chính xác cao đối với các đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ ở trung tâm và độ chính xác thấp đối với các đoạn rìa ngoài.

6 Thuật toán

- Input : Bộ điểm x_i, y_i
- Output : Đa thức $P_n(x)$

$$\Rightarrow \quad \text{Sử dụng công thức : } \quad P_n(x) = \omega_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(x-x_i)D_i}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{\omega_{n+1}(x)y_i}{(x-x_i)D_i}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\omega_i(x)\frac{y_i}{D_i}$$

Trong đó $\omega_i = \dfrac{\omega_{n+1}(x)}{x-x_i}$ và $D_i = \omega'_{n+1}(x_i)$

Thuật toán bằng lời

- Đọc bộ điểm x_i, y_i từ file txt và kiểm tra xem có điểm nào trùng nhau hay không. Nếu trùng thì lấy điểm trước và không lấy điểm sau.
- Sử dụng 2 vòng for để tính D_i
- Tính $\omega_{n+1}(x)$
- Tính $\omega_i(x) = \dfrac{\omega_{n+1}(x)}{x-x_i}$
- Tính đa thức px

Các hàm sử dụng thêm

- Sơ đồ hoocne nhân đa thức với 1 đơn thức $(x-x_i)$
- Sơ đồ hoocne để chia đa thức cho $(x-x_i)$
- Tính giá trị của 1 đa thức cho trước tại 1 điểm

7 Một số ví dụ minh họa

7.1 Các ví dụ cơ bản

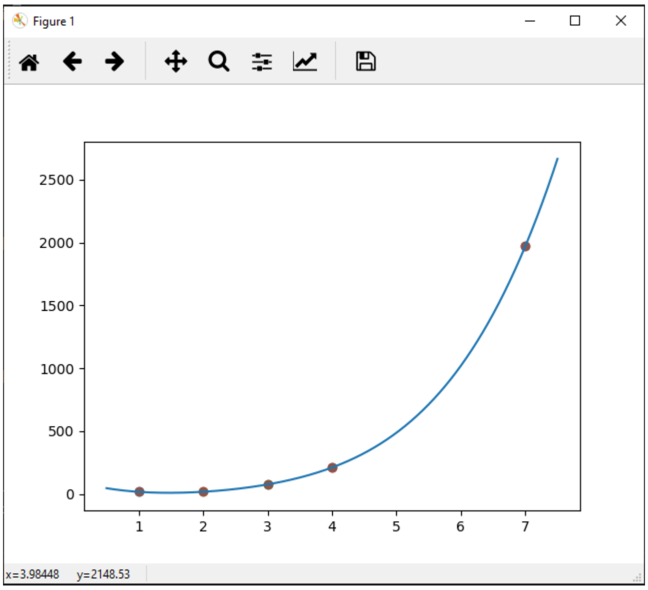
Ví dụ 7.1.1

i	0	1	2	3	4
x_i	1	2	3	4	7
y_i	17	17,5	76	210,5	1970

Hệ số đa thức xuất ra là :

```
[ 104.5 -153.5    81.    -17.     2. ]
```

Đa thức xuất ra với bộ điểm :



Nhận xét :

- Đây là ví dụ cơ bản với bộ điểm x_i, y_i khác nhau, không có trùng
- Ta có thể thấy qua hình ảnh $f(x)$ rất có thể là hàm e^x

Ví dụ 7.1.2 : Mình thử nội suy một hàm đa thức xem kết quả có ra như mình mong muốn không :

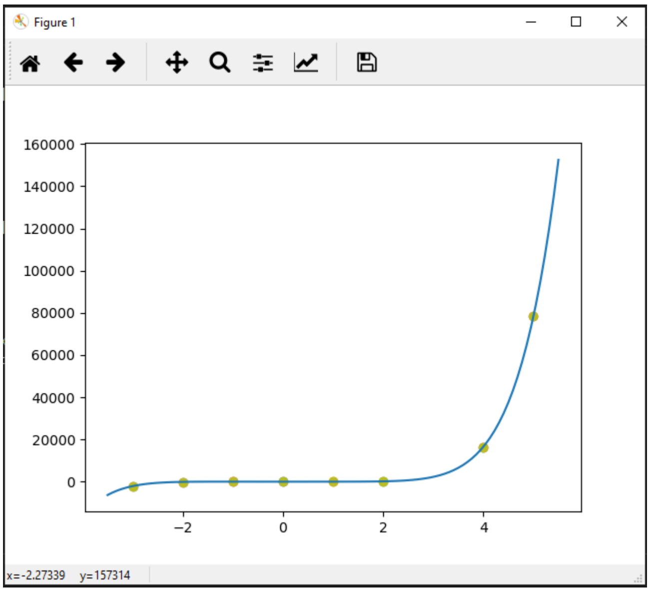
$$f(x) = x^7 + 9x^2 + 8$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0	1	2	-1	-2	4	5	-3
y_i	8	18	172	16	-84	16536	78358	-2098

Hệ số đa thức xuất ra là :

```
[ 8.00000000e+00 -7.10542736e-15  9.00000000e+00 -1.06581410e-14
 -3.55271368e-15 -7.99360578e-15 -4.44089210e-16  1.00000000e+00]
```

Đa thức xuất ra với bộ điểm :



Nhận xét :

- Đây là ví dụ cơ bản với bộ điểm x_i, y_i khác nhau, không có trùng
- Hệ số đa thức xuất ra trùng với hệ số đa thức ban đầu

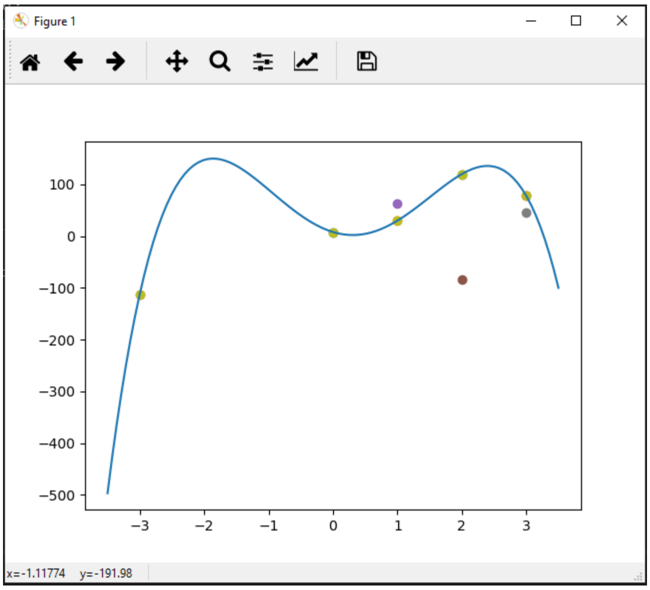
Ví dụ 7.1.3 : Với bộ điểm có nhiều điểm dữ liệu trùng nhau :

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0	1	2	3	1	2	-3	3
y_i	8	30	120	78	64	-84	-112	46

Hệ số đa thức xuất ra là :

```
[  8.          -37.63333333  58.77222222   7.7          -6.83888889]
```

Đa thức xuất ra với bộ điểm :



Nhận xét :

- Đây là ví dụ cơ bản với bộ điểm x_i, y_i có trùng, qua hình ảnh có thể thấy các điểm bị bỏ là các điểm mà hàm $P(x)$ không đi qua
- Các điểm trùng nhau thì mình sẽ lấy điểm nào xuất hiện trước trong bộ dữ liệu

7.2 Các ví dụ thực tế

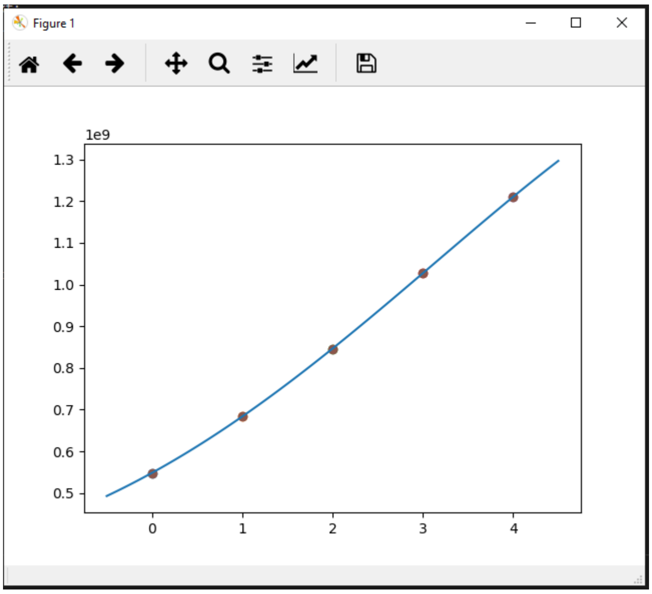
Ví dụ 7.2.1 : Với dữ liệu là dân số Ấn Độ :

i	0	1	2	3	4
Năm	1971	1981	1991	2001	2011
x_i	0	1	2	3	4
y_i	548159652	683329097	846302688	1027015247	1210193422

Hệ số đa thức xuất ra là :

```
[ 5.48159652e+08  1.19214356e+08  1.65475823e+07 -3.75486167e+05
 -2.17007250e+05]
```

Đa thức xuất ra với bộ điểm :



Nhận xét :

- Đây là ví dụ cơ bản với bộ điểm x_i, y_i không có trùng nhau
- Qua trực quan có thể thấy Ấn Độ gia tăng dân số rất nhanh, và vì trên ảnh hai trục cũng không cùng tỉ lệ nên khó trực quan là hàm ban đầu gần với hàm gì.

8 Tổng kết

Từ việc xây dựng công thức, ta có thể thấy phương pháp nội suy Lagrange không quá phức tạp về tính toán. Ta chỉ cần sử dụng các phép cơ bản cộng trừ nhân chia. Độ phức tạp thuật toán là $O(n^3)$ đã được thực hiện trong kết quả code.

Sai số của đa thức nội suy phụ thuộc vào các mốc nội suy. Do đó ta không thể khống chế được sai số như mong muốn . Thậm chí, sai số có thể tiến đến vô cùng.

Nhược điểm của phương pháp này là khi bổ sung thêm mốc nội suy ta gần như phải tính toán lại từ đầu chứ không thể dùng kết quả cũ để tính toán với số lượng phép toán ít hơn. Điều này gây trở ngại cho các bài toán nội suy có số lượng mốc nội suy lớn hoặc thêm mốc nội suy để cải thiện kết quả.

Tài liệu tham khảo

1. Bài giảng Giải tích số, TS Hà Thị Ngọc Yến, Viện Toán ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội, 2018

2. Giải tích số, Lê Trọng Vinh, Nxb. Khoa học kĩ thuật, 2007

Phân chia công việc

- Khang : Thuật toán, code, báo cáo 3,5,6,8
- Nam : Slide, báo cáo 1,2,4,7