Bài toán Cauchy cho phương trình vi phân thường
Nhóm phương pháp Euler

Bài toán Cauchy

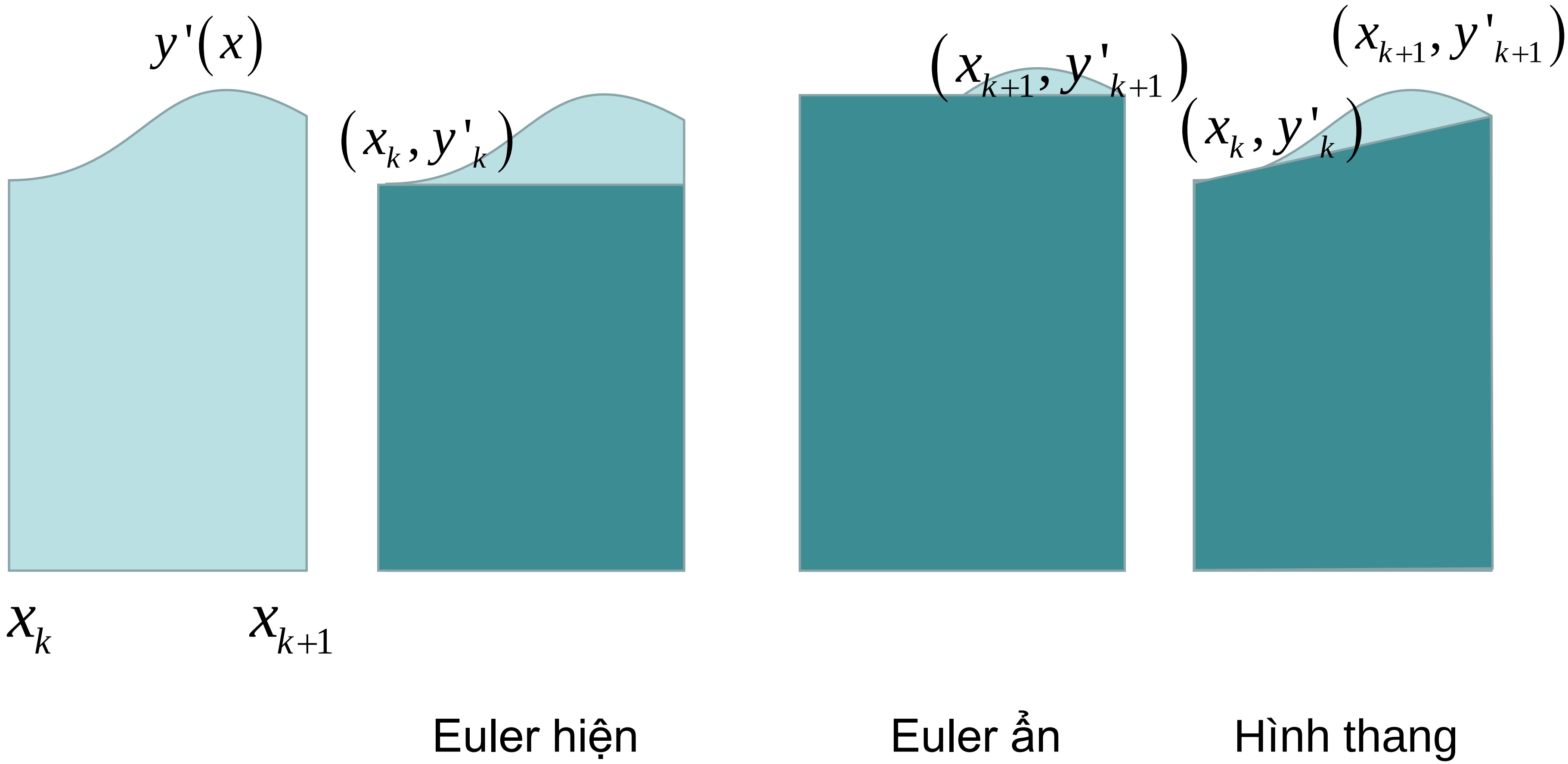
$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in I = \left[x_0, X\right], \\ y \in C^1\left(I, R^k\right) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Phương trình tích phân

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t, y(t))\,dt$$

Ý nghĩa hình học của các CT



- Euler forward (hiện)

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

- Euler backward (ẩn)

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)$$

- Công thức hình thang

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f\left(x_n, y_n\right) + f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)\right)$$

- Euler forward (hiện)

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + O(h^2)$$

- Euler backward (ẩn)

$$y(x_n) = y(x_{n+1}) - hy'(x_{n+1}) + O(h^2)$$

- Công thức hình thang

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{2}\left(y'(x_n) + y'(x_{n+1})\right) + O(h^2)$$

Sự hội tụ của phương pháp

- Phương pháp được gọi là hội tụ nếu

$$\forall x \in \left[x_0, X \right], \; nh = x - x_0, \qquad \lim_{h \to 0} \left| y(x) - y_n \right| = 0$$

- Phương pháp hội tụ cấp p nếu

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left| y(x) - y_{n+1} \right|}{h^p} = \text{const.}$$

Sai số và tốc độ hội tụ

Euler hiện

- Đặt $\varepsilon_k = y(x_k) - y_k, \qquad f_k = y'(x_k)$

$$\varepsilon_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

$$= y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(t)\,dt - [y_n + hf_n]$$

$$= \varepsilon_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[f(t, y(t)) - f(t, y_n) \right] dt$$

$$+ \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[f(t, y_n) - f(x_n, y_n) \right] dt$$

Sai số và tốc độ hội tụ
Euler hiện

-

$$\left|I_1\right| \le \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left| f\left(t, y\left(t\right)\right) - f\left(t, y_n\right)\right| dt \le L \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left|y\left(t\right) - y_n\right| dt$$

$$\le L \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left| y\left(x_n\right) + y'\left(x_n\right)\left(t - x_n\right) + C_2\left(t - x_n\right)^2 - y_n \right| dt$$

$$\le Lh\left|\varepsilon_n\right| + LC_1h^2 + L\overline{C_2}h^3$$

$$\left|I_2\right| \le \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left| f\left(t, y_n\right) - f\left(x_n, y_n\right)\right| dt \le \left| \frac{\partial f\left(t^*, y_n\right)}{\partial t} \right| \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left|t - x_n\right| dt \le C_3 h^2$$

Sai số và tốc độ hội tụ
Euler hiện

- $$\begin{aligned} \left|\varepsilon_{n+1}\right| &\le \left|\varepsilon_n\right| + \left|I_1\right| + \left|I_2\right| \\ &\le \left(1+Lh\right)\left|\varepsilon_n\right| + Ch^2 \\ &\le \left(1+Lh\right)^2\left|\varepsilon_{n-1}\right| + \left(1+Lh\right)Ch^2 + Ch^2 \\ &\le \left(1+Lh\right)^{n+1}\left|\varepsilon_0\right| + Ch^2\left(\left(1+Lh\right)^n + \cdots + \left(1+Lh\right) + 1\right) \\ &\le e^{Lh(n+1)} + Ch^2\frac{\left(1+Lh\right)^{n+1} - 1}{Lh} \\ &\le e^{Lx_{n+1}}\left|\varepsilon_0\right| + Me^{Lx_{n+1}}h \end{aligned}$$

Sai số và tốc độ hội tụ
Euler ẩn

- Đặt $\varepsilon_k = y(x_k) - y_k, \qquad f_k = y'(x_k)$

$$\varepsilon_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

$$= y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(t)\,dt - \left[y_n + hf_{n+1}\right]$$

$$= \varepsilon_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[f\left(t, y(t)\right) - f\left(t, y_{n+1}\right) \right] dt$$

$$+ \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[f\left(t, y_{n+1}\right) - f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right) \right] dt$$

Sai số và tốc độ hội tụ
Euler ẩn

-

$$\left|I_1\right| \le \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left| f\left(t, y(t)\right) - f\left(t, y_{n+1}\right) \right| dt \le L \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left| y(t) - y_{n+1} \right| dt$$

$$\le L \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left| y\left(x_{n+1}\right) + y'\left(x_{n+1}\right)\left(t - x_{n+1}\right) + C_2\left(t - x_{n+1}\right)^2 - y_{n+1} \right| dt$$

$$\le Lh\left|\varepsilon_{n+1}\right| + LC_1 h^2 + L\overline{C_2} h^3$$

$$\left|I_2\right| \le \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left| f\left(t, y_{n+1}\right) - f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right) \right| dt \le \left| \frac{\partial f\left(t^*, y_{n+1}\right)}{\partial t} \right| \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left| t - x_{n+1} \right| dt \le C_3 h^2$$

Sai số và tốc độ hội tụ
Euler ẩn

- $$\begin{aligned}
\left|\varepsilon_{n+1}\right| &\le \left|\varepsilon_n\right| + \left|I_1\right| + \left|I_2\right| \\
&\le \left|\varepsilon_n\right| + Lh\left|\varepsilon_{n+1}\right| + Ch^2 \\
\left|\varepsilon_{n+1}\right| &\le \frac{1}{1-Lh}\left[\left|\varepsilon_n\right| + Ch^2\right] \qquad \left(\left|1-Lh\right| > 1\right) \\
&\le \frac{1}{\left(1-Lh\right)^{n+1}}\left|\varepsilon_0\right| + Ch^2\left[\frac{1}{\left(1-Lh\right)^{n}} + \frac{1}{\left(1-Lh\right)^{n-1}} + \cdots + 1\right] \\
&\le e^{Lx_{n+1}}\left|\varepsilon_0\right| + Me^{Lx_{n+1}}h
\end{aligned}$$

Miền ổn định tuyệt đối

- Phương trình thử:

$$y' = \lambda y, \quad \mathrm{Re}\left(\lambda\right) < 0.$$

- Đặc tính nghiệm:

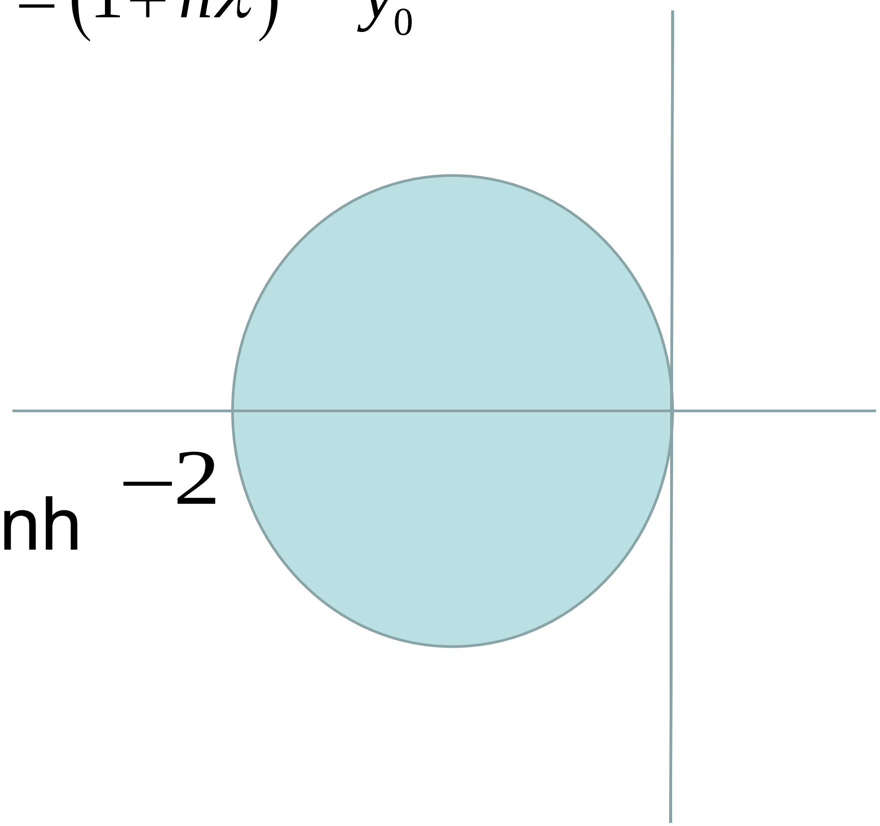
$$\left|y\left(t\right)\right| = \left|e^{\left(a+ib\right)t}\right| = \left|e^{at}\left(\cos bt + i\sin bt\right)\right| \xrightarrow[t\to\infty]{a<0} 0$$

- Miền ổn định tuyệt đối của phương pháp:

$$z = h\lambda, h > 0, A = \left\{z \in \mathbb{C} \mid y_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\right\}$$

Miền ổn định tuyệt đối
Euler hiện

- $$y' = \lambda y, \quad \mathrm{Re}(\lambda) < 0.$$
  $$y_{n+1} = y_n + hf_n = (1 + h\lambda) y_n = (1 + h\lambda)^{n+1} y_0$$
  $$\Rightarrow \{ z \in \mathbb{C} \mid |1 + z| < 1 \}$$
- *h* bị ràng buộc để
  - Thỏa mãn sai số
  - Phương pháp ổn định



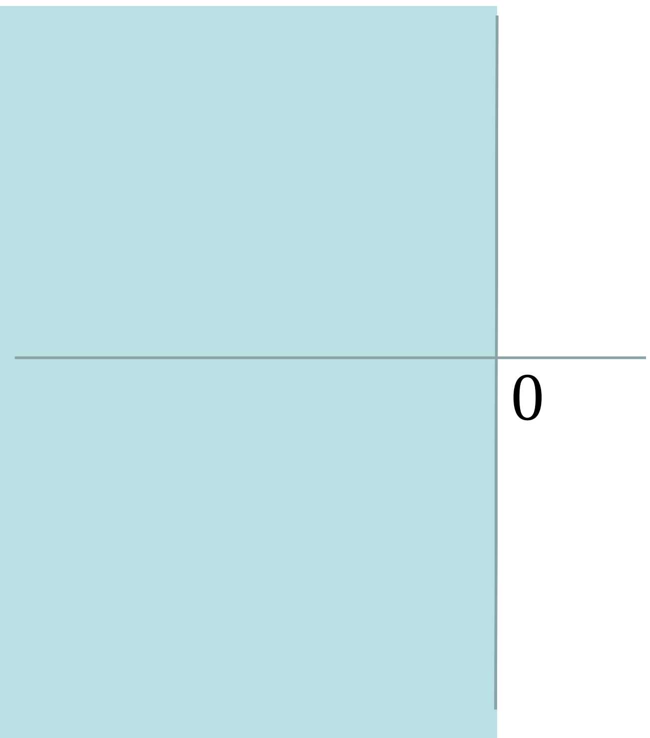
Miền ổn định tuyệt đối

Euler ẩn

- $y' = \lambda y, \quad \mathrm{Re}(\lambda) < 0.$

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda} y_n = \frac{1}{(1-h\lambda)^{n+1}} y_0$$

$$\Rightarrow \{z = h\lambda \in \mathbb{C} \mid |1-z| > 1\} = \mathbb{C}^-$$



- *Bước h*
  - bị ràng buộc bởi sai số
  - Không bị ràng buộc để ổn định

Ví dụ mô hình hệ thú mồi

$$\begin{cases} x' = rn\left(1 - \dfrac{n}{K}\right) - ap \\ p' = -\mu p + anp \end{cases}$$