PP LẶP ĐƠN – LẶP JACOBI

Hà Thị Ngọc Yến

Hà nội, 2/2017

Ý tưởng phương pháp

- Đưa về phương trình tương đương

$$Ax = b \Leftrightarrow x = Bx + d$$

- Lập dãy số

$$x_n = Bx_{n-1} + d,\ x_0 \in \mathbb{R}^m$$

- Nếu dãy hội tụ thì giới hạn là nghiệm của phương trình

Chuẩn của véctơ

- Định nghĩa: chuẩn là một ánh xạ thỏa mãn các tính chất sau:

$$\|.\|: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$$

$$\|u\| \geq 0, "=" \Leftrightarrow u = 0$$

$$\|ku\| = |k|\|u\| \quad \forall k \in \mathbb{R}\ \forall u \in \mathbb{R}^m$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Chuẩn véctơ

- Các chuẩn thường gặp

$$\|x\|_\infty = \max_{i=\overline{1,m}} \{|x_i|\}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$$

Sự hội tụ của dãy véctơ

- Định nghĩa:

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^* \Leftrightarrow \left\| x_n - x^* \right\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Leftrightarrow x_{ni} \xrightarrow{n\to\infty} x_i^* \ \forall i = \overline{1,m}$$

- Chuẩn tương đương: Hai chuẩn p và q được gọi là tương đương nếu

$$\exists C_1, C_2 > 0,\ \ C_1 \left\| x \right\|_p \le \left\| x \right\|_q \le C_2 \left\| x \right\|_p$$

Sự hội tụ của dãy véctơ

- Nếu hai chuẩn p và q tương đương thì dãy véctơ hội tụ theo chuẩn p khi và chỉ khi nó hội tụ theo chuẩn q

- Mọi chuẩn trong không gian véctơ hữu hạn chiều đều tương đương

Chuẩn của ma trận

$$\|A\|_p = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p=1}\|Ax\|_p$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=\overline{1,m}}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_{j=\overline{1,m}}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \max_{i}\sqrt{\lambda\left(A^T A\right)}$$

Sự hội tụ của PP lặp đơn

- Nếu $\|B\| < 1$ thì dãy $x_n = Bx_{n-1} + d,\ x_0 \in \mathbb{R}$ hội tụ tới nghiệm đúng duy nhất của phương trình $x = Bx + d$ theo đánh giá

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{\|B\|^n}{1 - \|B\|}\|x_1 - x_0\|$$

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}\|x_n - x_{n-1}\|$$

Các bước cm sự hội tụ của PP

- Dãy $\left\{x_n\right\}$ là dãy Cauchy nên hội tụ
- Giới hạn của dãy là nghiệm duy nhất của phương trình
- Cm hai công thức sai số

Phương pháp lặp Jacobi

- Ma trận chéo trội hàng

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \left|a_{ij}\right|$$

- Ma trận chéo trội cột

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \left|a_{ji}\right|$$

PP lặp Jacobi

A là ma trận chéo trội hàng

$$T = diag\left(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \cdots, \frac{1}{a_{mm}}\right);$$

$$Ax = b \Leftrightarrow x = (I - TA)x + Tb,$$

$$B = I - TA,\ d = Tb$$

$$x^{(0)} \in \mathbb{R}^m,\ \ x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + d.$$

PP lặp Jacobi

A là ma trận chéo trội hàng

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{-a_{1m}}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & \frac{-a_{2m}}{a_{22}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{-a_{m1}}{a_{mm}} & \frac{-a_{m2}}{a_{mm}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \qquad d = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_m}{a_{mm}} \end{bmatrix}$$

$$\|B\|_\infty = \max_{i=\overline{1,m}} \left\{ \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |a_{ij}| \right\} < 1$$

PP lặp Jacobi
A là ma trận chéo trội cột

$$T = diag\left(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \cdots, \frac{1}{a_{mm}}\right);\ D = T^{-1};\ x = Ty$$

$$Ax = b \Leftrightarrow ATy = b \Leftrightarrow y = \left(I - AT\right)y + b,$$

$$B_1 = I - TA$$

$$y^{(0)} \in \mathbb{R}^m,\ \ y^{(n+1)} = B_1 y^{(n)} + b.$$

PP lặp Jacobi
A là ma trận chéo trội cột

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-a_{12}}{a_{22}} & \cdots & \dfrac{-a_{1m}}{a_{mm}} \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{11}} & 0 & \cdots & \dfrac{-a_{2m}}{a_{mm}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{-a_{m1}}{a_{11}} & \dfrac{-a_{m2}}{a_{22}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\|B\|_1 = \max_{j=\overline{1,m}} \left\{ \frac{1}{|a_{jj}|} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} |a_{ij}| \right\} < 1$$

PP lặp Jacobi
A là ma trận chéo trội cột

$$y^{(n+1)} = B_1 y^{(n)} + b$$

$$\Leftrightarrow Ty^{(n+1)} = T\left(I - AT\right)DTy^{(n)} + Tb$$

$$\Leftrightarrow x^{(n+1)} = \left(I - TA\right)x^{(n)} + Tb$$

$$\Leftrightarrow x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + Tb$$

PP lặp Jacobi
A là ma trận chéo trội cột

- Liên hệ về chuẩn qua phép đổi biến:

$$\|x\| = \|Ty\| \le \|T\|\|x\| = \frac{\|x\|}{\min|a_{ii}|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

$$\|y\| = \|Dx\| \le \|D\|\|x\| = \max|a_{ii}|\|x\| \quad \forall y \in \mathbb{R}^m$$

PP lặp Jacobi
A là ma trận chéo trội cột

- Hệ quả là:

$$\left\|x^{(n)} - x^*\right\|_1 \le \lambda \frac{\|B_1\|_1}{1-\|B_1\|_1}\left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\|_1$$

$$\left\|x^{(n)} - x^*\right\|_1 \le \lambda \frac{\|B_1\|_1^n}{1-\|B_1\|_1}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_1$$

$$\lambda = \frac{\max|a_{ii}|}{\min|a_{ii}|}.$$