

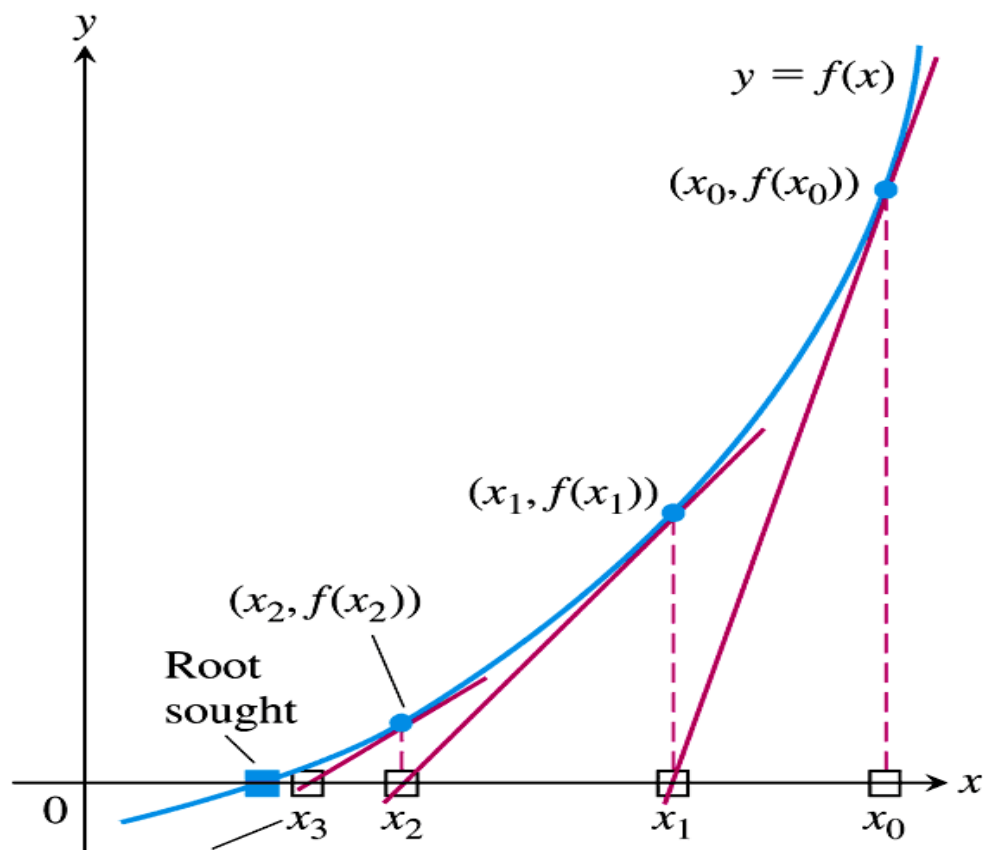
PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN

GIẢI PT $f(x)=0$

Hà Thị Ngọc Yến

Hà nội, 01/2019

Ý tưởng phương pháp



Ý tưởng phương pháp

- Thay thế đường cong $y = f(x)$ trên $[a,b]$ bằng **TIẾP TUYẾN**
- Tìm giao điểm của dây cung với trục hoành thay cho giao điểm đường cong với trục hoành

Xây dựng công thức

Xét phương trình $f(x) = 0$ và k.c.l nghiệm (a,b) .

Gọi $M(x, f(x))$ là điểm Fourie nếu $f(x)f''(x) > 0$.

Chọn điểm Fourie là điểm ban đầu, tức là

Chọn $x_0 : f(x_0)f''(x_0) > 0$ và đặt $M_0(x_0, f(x_0))$.

Gọi d_k là tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_k .

Xây dựng công thức

$$d_0 \cap Ox \equiv (x_1, 0) \Rightarrow M_1(x_1, f(x_1))$$

$$d_1 \cap Ox \equiv (x_2, 0) \Rightarrow M_2(x_2, f(x_2))$$

.....

$$d_{n-1} \cap Ox \equiv (x_n, 0) \Rightarrow x_n \approx x^*$$

Xây dựng công thức

- Phương trình đường thẳng d_k :

$$y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k) \quad (*)$$

- Vì $d_k \cap Ox \equiv (x_{k+1}, 0)$ nên ta có

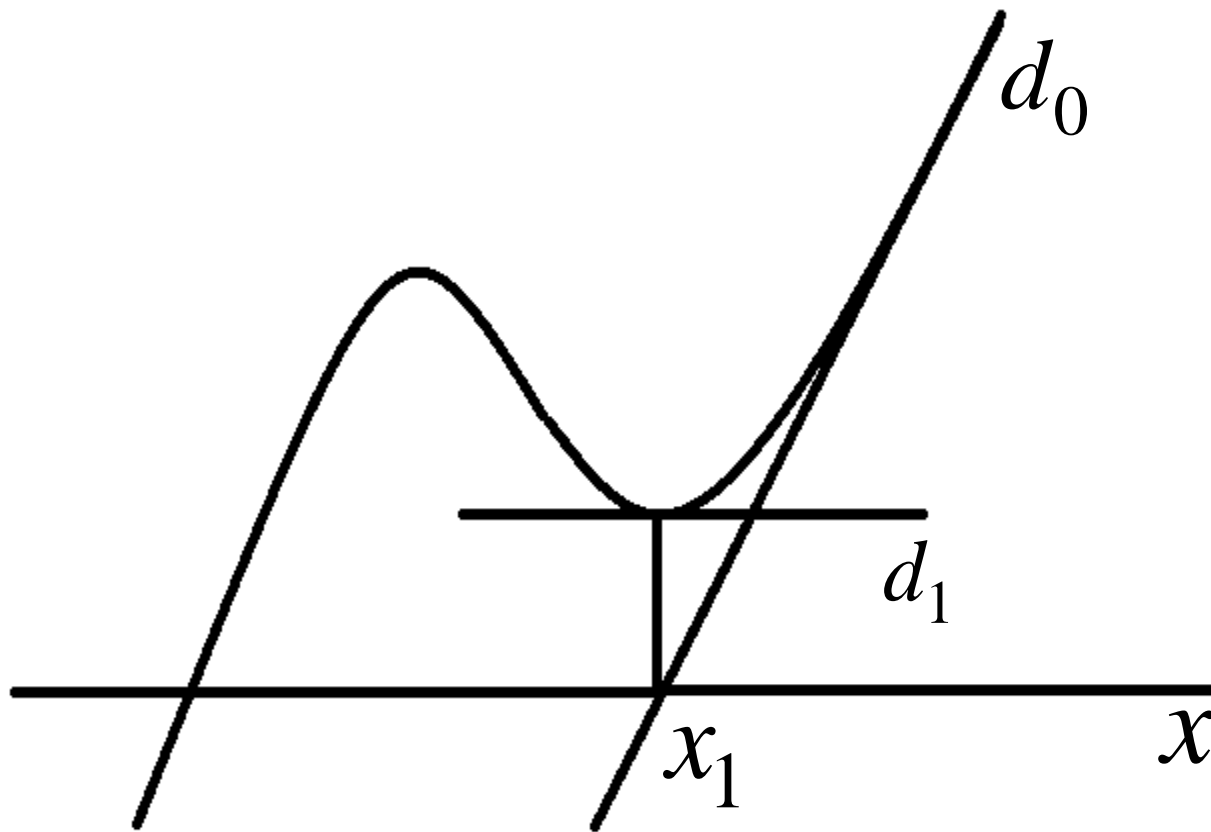
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (**)$$

Sự hội tụ của phương pháp

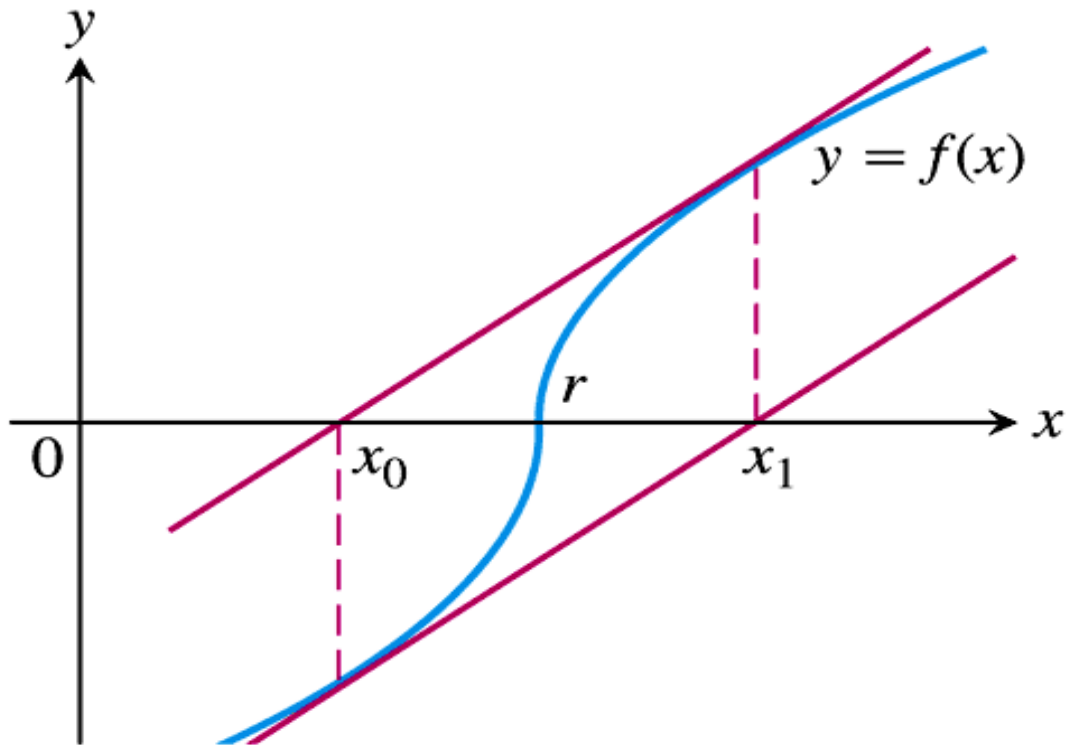
Điều kiện hội tụ:

- (a,b) là khoảng cách ly nghiệm
- f', f'' liên tục, xác định dấu không đổi trên $[a,b]$
- Chọn đúng $x_0 : f'(x_0) f''(x_0) > 0$.

Tại sao $f' \neq 0$



Tại sao $f'' \neq 0$



Định lý về sự hội tụ

Với các điều kiện đã nêu trên dãy lặp (**) hội tụ đến nghiệm đúng của phương trình theo đánh giá sau

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1} \quad (1)$$

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|^2 \quad (2)$$

$$m_1 = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|; \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

CM Định lý về sự hội tụ

- Các bước chứng minh:
 - Dãy $\{x_n\}$ đơn điệu và bị chặn.
 - Giới hạn của dãy là nghiệm của phương trình.
 - Chứng minh các công thức sai số

CM Định lý về sự hội tụ

- Dãy $\{x_n\}$ đơn điệu :

Trường hợp 1:

$$f'(x) > 0; f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a; b]$$

Xét điểm $M(t, f(t))$, $t \in [a; b]$ bất kỳ.

Khi đó $f(x) - h_t(x) > 0 \quad \forall x \in [a; b], x \neq x_0$

$$h_t(x) := f'(t)(x - t) + f(t)$$

CM Định lý về sự hội tụ

- Ta có $f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a; b] \Rightarrow f(x_0) > 0$

- Mặt khác

$$h_{x_0}(x) := f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$h_{x_0}(x_1) = 0 < f(x_0) = h_{x_0}(x_0)$$

$$\Rightarrow a < x_1 < x_0, f(x_1) > h_{x_0}(x_1) = 0$$

- Lý luận tương tự

$$x_1 : f(x_1) > 0 \Rightarrow a < x_2 < x_1, f(x_2) > 0$$

CM Định lý về sự hội tụ

- Giới hạn của dãy là nghiệm của phương trình
- Gọi

$$\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \right)$$

$$\Rightarrow \alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \Rightarrow f(\alpha) = 0.$$

CT sai số mục tiêu

- Ta có

$$f(x_n) = f(x_n) - f(\alpha) = f'(c)(x_n - \alpha)$$

$$\Rightarrow |x_n - \alpha| = \left| \frac{f(x_n)}{f'(c)} \right| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}$$

CT sai số theo hai xấp xỉ liên tiếp

- Ta có:

$$f(x_n) = h_{x_{n-1}}(x_n) + \frac{f''(c)}{2!}(x_n - x_{n-1})^2$$

$$\Rightarrow f'(c_1)(x_n - \alpha) = \frac{f''(c)}{2!}(x_n - x_{n-1})^2$$

$$\Rightarrow |x_n - \alpha| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2$$

Thuật toán

- Input: f, a, b, ε
- Bước 1: Kiểm tra điều kiện f', f'' xác định dấu không đổi trên $[a; b]$ gán biến dấu cho dấu của f'' . (Có thể làm thủ tục riêng cho bước này)
- Bước 2: Chọn $x_0 = a$ nếu $f(a).sign > 0$ trái lại chọn $x_0 = b$.

Thuật toán

- Bước 3: Tính m_1 (có thể làm gói riêng)
- Bước 4: Tính

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- Bước 5: Kiểm tra

$$\frac{|f(x_1)|}{m_1} \leq \varepsilon$$

nếu thỏa mãn thì dừng, nếu không quay lại B4

Ví dụ

- Dùng phương pháp Newton tính $\sqrt[5]{17}$ với 6 chữ số đáng tin sau dấu phẩy

Ví dụ

- $\sqrt[5]{17}$ là nghiệm của phương trình $x^5 - 17 = 0$.
- Khoảng cách li nghiệm $(1; 2)$
- Kiểm tra các điều kiện hội tụ của phương pháp

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - 17}{5x_n^4} = \frac{4}{5}x_n - \frac{17}{5x_n^4}; \quad x_0 = 2$$

Ví dụ

- Cách 1: Dùng công thức sai số mục tiêu, ta có

$$\left| f(x_n) \right| \leq m_1 \varepsilon = 2.5 \times 10^{-6}$$

| n | x_n | $f(x_n)$ |
|-----|-------------|-------------------------|
| 0 | 2 | |
| 1 | 1.8125 | 2.560956001 |
| 2 | 1.765040839 | 0.1306480311 |
| 3 | 1.762348599 | 3.9797×10^{-4} |
| 4 | 1.762340348 | 8.0875×10^{-9} |

Ví dụ

- Cách 2: Dùng CT sai số theo 2 xấp xỉ liên tiếp

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|^2 \leq 0.5 \times 10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{0.5 \times 10^{-6}}{16} = 0.177 \times 10^{-3}$$

- x_n, x_{n-1} trùng 3 chữ số sau dấu phẩy là đủ