Công thức nội suy trung tâm

Lê Thị Vân Anh
Lê Nguyên Bách

CTTN Toán Tin K64 - ĐHBKHN

27/11/2020

Mục lục

Công thức nội suy Gauss

Đặt vấn đề

Giả sử có $2n+1$ mốc nội suy **cách đều nhau** và được sắp xếp thứ tự

$$x_{-n}\ ,\ x_{-n+1}\ ,\ \ldots\ ,\ x_{-2}\ ,\ x_{-1}\ ,\ x_0\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_{n-1}\ ,\ x_n$$

và các giá trị $y_i = f\left(x_i\right), i = \overline{-n, n}$ tương ứng
Cần xây dựng đa thức $P(x)$ với $\deg P(x) \leq 2n$ sao cho $P\left(x_i\right) = y_i$

Công thức nội suy Gauss I

Xét đa thức có dạng

$$\begin{aligned}p(x) = a_0 &+ a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1}) + \\ &+ a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})(x-x_2) + \ldots + \\ &+ a_{2n-1}\left(x-x_{1-n}\right)(\ldots)(x-x_{-1})(x-x_0)(\ldots)(x-x_{n-1}) + \\ &+ a_{2n}\left(x-x_{1-n}\right)(\ldots)(x-x_{-1})(x-x_0)(\ldots)(x-x_{n-1})(x-x_n)\end{aligned}$$

Với

$$a_{2k-1} = \frac{\Delta^{2k-1} y_{1-k}}{(2k-1)!.h^{2k-1}} \quad , \quad a_{2k} = \frac{\Delta^{2k} y_{-k}}{(2k)!.h^{2k}}$$

Công thức nội suy Gauss I

Đặt $x = x_0 + ht \Leftrightarrow t = \dfrac{x - x_0}{h}$. Khi đó

$$
\begin{aligned}
p(x) &= p\left(x_0 + ht\right) = g(t) \\
&= y_0 + \binom{t}{1}\Delta y_0 + \binom{t}{2}\Delta^2 y_{-1} + \binom{t+1}{3}\Delta^3 y_{-1} + \binom{t+1}{4}\Delta^4 y_{-2} + \ldots + \\
&\qquad + \binom{t+n-1}{2n-1}\Delta^{2n-1} y_{1-n} + \binom{t+n-1}{2n}\Delta^{2n} y_{-n}
\end{aligned}
$$

Công thức nội suy Gauss II

Tương tự như công thức nội suy Gauss I, ở lần này ta "lùi" trước, "tiến" sau

$$p(x) = p\left(x_0 + ht\right) = g(t)$$
$$= y_0 + \binom{t}{1}\Delta y_{-1} + \binom{t+1}{2}\Delta^2 y_{-1} + \binom{t+1}{3}\Delta^3 y_{-2} + \binom{t+2}{4}\Delta^4 y_{-2} + \ldots +$$
$$+ \binom{t+n-1}{2n-1}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \binom{t+n}{2n}\Delta^{2n} y_{-n}$$

Mục lục

Công thức nội suy Stirling

Lấy **trung bình cộng** hai công thức nội suy Gauss I và II, ta được công thức nội suy Stirling

Mục lục

Công thức nội suy Bessel

Vấn đề

Tại sao thay $t \to t-1$?

Mục lục

Sai số của các phương pháp

Nội suy Stirling: $R(x) = \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(c) t \prod_{k=1}^{n} \left(t^2 - k^2\right)$

Sai số của các phương pháp

Nội suy Stirling: $R(x) = \dfrac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(c)\, t \prod_{k=1}^{n} \left(t^2 - k^2\right)$

$$\approx \frac{\Delta^{2n+1} y_{-n-1} + \Delta^{2n+1} y_{-n}}{2.(2n+1)!}\, t \prod_{k=1}^{n} \left(t^2 - k^2\right)$$

Sai số của các phương pháp

Nội suy Stirling: $R(x) = \dfrac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(c)\, t \prod_{k=1}^{n} \left(t^2 - k^2\right)$

$$\approx \frac{\Delta^{2n+1} y_{-n-1} + \Delta^{2n+1} y_{-n}}{2.(2n+1)!}\, t \prod_{k=1}^{n} \left(t^2 - k^2\right)$$

Nội suy Bessel: $R(x) = \dfrac{h^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(c)\, t(t-n-1) \prod_{k=1}^{n} \left(t^2 - k^2\right)$

Sai số của các phương pháp

Nội suy Stirling: $R(x) = \dfrac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(c) t \prod_{k=1}^{n} \left(t^2 - k^2\right)$

$$\approx \frac{\Delta^{2n+1} y_{-n-1} + \Delta^{2n+1} y_{-n}}{2.(2n+1)!} t \prod_{k=1}^{n} \left(t^2 - k^2\right)$$

Nội suy Bessel: $R(x) = \dfrac{h^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(c) t(t-n-1) \prod_{k=1}^{n} \left(t^2 - k^2\right)$

$$\approx \frac{\Delta^{2n+2} y_{-n-1} + \Delta^{2n+2} y_{-n}}{2.(2n+2)!} t(t-n-1) \prod_{k=1}^{n} \left(t^2 - k^2\right)$$

Sai số của các phương pháp

Nội suy Stirling: $$R(x) = \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(c) t \prod_{k=1}^{n} \left(t^2 - k^2\right)$$
$$\approx \frac{\Delta^{2n+1} y_{-n-1} + \Delta^{2n+1} y_{-n}}{2.(2n+1)!} t \prod_{k=1}^{n} \left(t^2 - k^2\right)$$

Nội suy Bessel: $$R(x) = \frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(c) t(t-n-1) \prod_{k=1}^{n} \left(t^2 - k^2\right)$$
$$\approx \frac{\Delta^{2n+2} y_{-n-1} + \Delta^{2n+2} y_{-n}}{2.(2n+2)!} t(t-n-1) \prod_{k=1}^{n} \left(t^2 - k^2\right)$$

- $|t| \approx 0$ hoặc $|t| \approx 1$ thì nên dùng **nội suy Newton**
- $|t| \leq \frac{1}{4}$ hoặc $\frac{3}{4} \leq |t| \leq 1$ thì nên dùng **nội suy Stirling**
- $\frac{1}{4} \leq |t| \leq \frac{3}{4}$ thì nên dùng **nội suy Bessel**