TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

BÁO CÁO

Chủ đề 13:

Các phương pháp tìm đúng ma trận nghịch đảo

NGUYỄN VIỆT DŨNG 20195861
TRỊNH TÙNG HUY 20195889

Giảng viên hướng dẫn: TS. Hà Thị Ngọc Yến

Bộ môn: Giải tích hàm
Viện: Toán Ứng dụng và Tin học

HÀ NỘI, 10/2020

MỤC LỤC

1. Ma trận nghịch đảo

1.1 Định nghĩa

Cho ma trận A vuông cấp n. Ma trận B vuông cấp n thoả mãn:

$$A.B = B.A = E_n \text{ (với } E_n \text{ là ma trận đơn vị cấp n)}$$

được gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Kí hiệu: $B = A^{-1}$

Khi đó ta nói: A khả nghịch.

1.2 Tính chất

<u>*Tính chất 1:*</u> A khả nghịch $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

<u>*Tính chất 2:*</u> A khả nghịch thì A^{-1} là duy nhất.

<u>*Tính chất 3:*</u> $(A^{-1})^{-1} = A$

<u>*Tính chất 4:*</u> $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

<u>*Tính chất 5:*</u> $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

1.3 Các phương pháp tìm đúng ma trận nghịch đảo

Trong đại số tuyến tính ta có công thức sau:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$$

Trong đó, $\tilde{A}$ là ma trận phụ đại số của A.

Công thức trên là một phương pháp tìm đúng. Nhưng khối lượng tính toán lại rất lớn vì phải tính nhiều định thức.

Sau đây giới thiệu một số phương pháp tìm đúng có khối lượng tính toán ít hơn: PP Gauss – Jordan, PP Cholevsky và PP viền quanh.

2. PHƯƠNG PHÁP GAUSS – JORDAN

2.1 Ý tưởng phương pháp

Gọi ma trận $X=[x_{ij}]_n$ là ma trận nghịch đảo cần tìm của ma trận vuông $A=[a_{ij}]_n$. Có $A.X=E_n$, tức là:

$$A\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & \cdots & x_{ii} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{ni} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

Đặt $X_i=\begin{bmatrix} x_{1i} & x_{2i} & \cdots & x_{ii} & \cdots & x_{ni} \end{bmatrix}^T$ (cột thứ i của ma trận X).

Đặt $I_i=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ (cột thứ i của E_n: phần tử hàng thứ i là 1, còn lại đều là 0).

Khi đó, **(1)** viết được trong dạng n hệ phương trình n ẩn X_i dạng ma trận:

$$A.X_i=I_i,\ i=\overline{1,n} \quad \textbf{(2)}$$

Khi $\det(A)\neq 0$, các hệ **(2)** tồn tại nghiệm duy nhất.

Vì các hệ **(2)** có cùng ma trận A, ta có thể sử dụng phương pháp Gauss-Jordan để giải cùng lúc các hệ phương trình và tìm được B.

2.2 Nội dung phương pháp

Lập ma trận mở rộng $\bar{A}$ gồm ma trận A và ma trận đơn vị E_n được đặt liền kề bên phải:

$$\bar{A}=(A\,|\,E_n)=\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \dots & a_{1q} & \dots & a_{1n} & \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} & \dots & a_{pn} & E_n \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nq} & \dots & a_{nn} & \end{array}\right)$$

sau đó biến đổi sơ cấp với lưu ý chọn phần tử trội của ma trận A như sau:

- Ưu tiên chọn 1 hoặc -1
- Nếu không có 1 hoặc -1, chọn phần tử **khác 0** có giá trị tuyệt đối lớn nhất

Bước 1: Chọn được a_{pq} là phần tử trội của A. Biến đổi sơ cấp trên $\bar{A}$:

- Giữ nguyên hàng p: $a_{pi}^{(1)}=a_{pi},\ i=\overline{1,n}$
- Các phần tử khác tính theo công thức: $a_{ij}^{(1)}=a_{ij}-a_{ip}a_{pj}^{(1)},\ \forall i\neq 1,\ j$ **(3)**

Khi đó, $\bar{A}$ trở thành:

$$\bar{A}^{(1)} = \left(\begin{matrix} a_{11}^{(1)} & \dots & 0 & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{p1}^{(1)} & \dots & a_{pq}^{(1)} = a_{pq} & \dots & a_{pn}^{(1)} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n1}^{(1)} & \dots & 0 & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{matrix} \right| \left. a_{ij}^{(1)} \quad \begin{matrix} i = \overline{1,n} \\ j = \overline{(n+1),(2n)} \end{matrix} \right)$$

với nhận xét: Trên cột q, các phần tử đều bằng 0 trừ phần tử giải.

Bước 2: Lặp lại Bước 1 với ma trận $\bar{A}^{(1)}$ ta thu được ma trận $\bar{A}^{(2)}$.

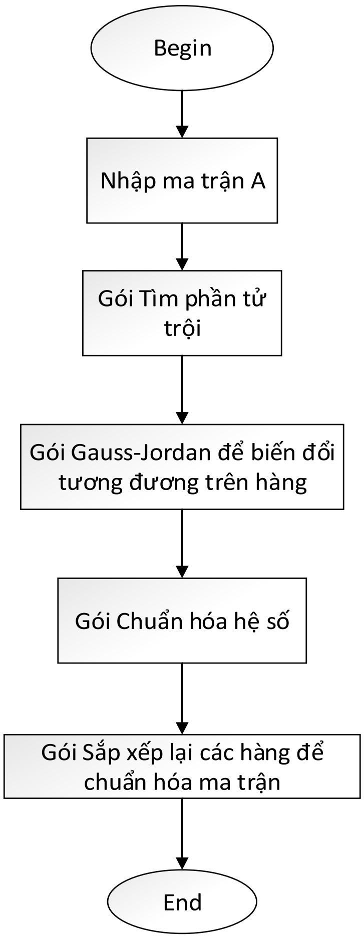
- ***Lưu ý:*** Ở lần chọn phần tử trội tiếp theo không được chọn ở vị trí cùng hàng hoặc cột với các phần tử trội đã chọn trước đó.

Tiếp tục như vậy ta thu được $\bar{A}^{(3)}$, $\bar{A}^{(4)}$ …cho đến khi không thể chọn được phần tử trội nữa.

Bước 3: Xử lý kết quả biến đổi sau Bước 2

- Nếu có ít nhất 1 hàng toàn phần tử 0 => A không khả nghịch
- Nếu có dạng $E_n^{'} | C'$ ($E_n^{'}$ là E_n bị đảo vị trí hàng), ta sắp xếp lại thứ tự các hàng của dạng $E_n^{'} | C'$ để nó trở thành dạng $E_n | C$. Khi đó ma trận C chính là ma trận A^{-1} cần tìm.

2.3 Thuật toán



2.4 Ví dụ minh hoạ

Tìm A^{-1}, với $A = \begin{pmatrix} 50 & 107 & 36 \\ 25 & 54 & 20 \\ 31 & 66 & 21 \end{pmatrix}$

Kết quả chạy:

```
[[ 50. 107.  36.]
 [ 25.  54.  20.]
 [ 31.  66.  21.]]
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Gauss-Jordan method to find the inversed matrix

Ma trận nghịch đảo là:
[[-185.9999999999  128.9999999999  195.9999999999]
 [  95.            -66.           -100.          ]
 [ -24.             17.             25.          ]]
=======================================================
```

3. PHƯƠNG PHÁP CHOLEVSKY

Phương pháp Cholevsky được sử dụng để tìm ma trận nghịch đảo của một ma trận đối xứng.

3.1 Ý tưởng phương pháp

Phân tích ma trận đối xứng A thành tích của 2 ma trận tam giác trên và dưới là chuyển vị của nhau.

Với Q là ma trận tam giác trên thoả mãn, ta có:

$$\begin{aligned} A &= Q^T.Q \\ \Leftrightarrow A^{-1} &= (Q^T.Q)^{-1} \\ \Leftrightarrow A^{-1} &= Q^{-1}.(Q^T)^{-1} \\ \Leftrightarrow A^{-1} &= Q^{-1}.(Q^{-1})^T \ \textbf{(1)} \end{aligned}$$

Bài toán quy về việc tìm Q và Q^{-1} hay tìm ma trận nghịch đảo của ma trận tam giác.

3.2 Nội dung phương pháp

Ta có A là ma trận đối xứng. Từ $A = Q^T.Q$, ta có:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ q_{12} & q_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{1n} & q_{2n} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

Bước 1: Tìm Q bằng công thức:

$$\begin{cases} q_{11} = \sqrt{a_{11}} & \\ q_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{q_{11}} & \forall j = \overline{2,n} \\ q_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} q_{ki}^2} & \forall i = \overline{2,n} \\ q_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} q_{ki}.q_{kj}}{q_{ii}} & \forall i < j \\ q_{ij} = 0 & \forall i > j \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

Ta có: $\det(A) = \det(Q^T.Q) = \det(Q^T).\det(Q) = \prod_{i=1}^{n} q_{ii} \prod_{i=1}^{n} q_{ii} = \prod_{i=1}^{n} q_{ii}^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow q_{ii} \neq 0, i = \overline{1,n}$

Vì vậy nếu trong quá trình làm mà gặp $q_{ii} = 0$ thì kết luận ngay ma trận A không khả nghịch.

Với $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$, tìm Q^{-1}

Đặt $Q^{-1} = [p_{ij}]$. Từ điều kiện $Q^{-1}.Q = E_n$ ta có:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Bước 2: Tìm Q^{-1} bằng công thức:

$$\begin{cases} p_{jj} = \dfrac{1}{q_{jj}} & \\ p_{ij} = -\dfrac{\sum_{k=1}^{j-1} p_{ik} q_{kj}}{q_{jj}} & i < j \quad \textbf{(3)} \\ 0 & i > j \end{cases}$$

Bước 3: Sử dụng công thức **(1):** $A^{-1} = Q^{-1}.(Q^{-1})^T$

Trường hợp A không là ma trận đối xứng. Đặt $B = A^T.A$

Ta có: $B^T = (A^T.A)^T = (A)^T.(A^T)^T = A^T.A = B$

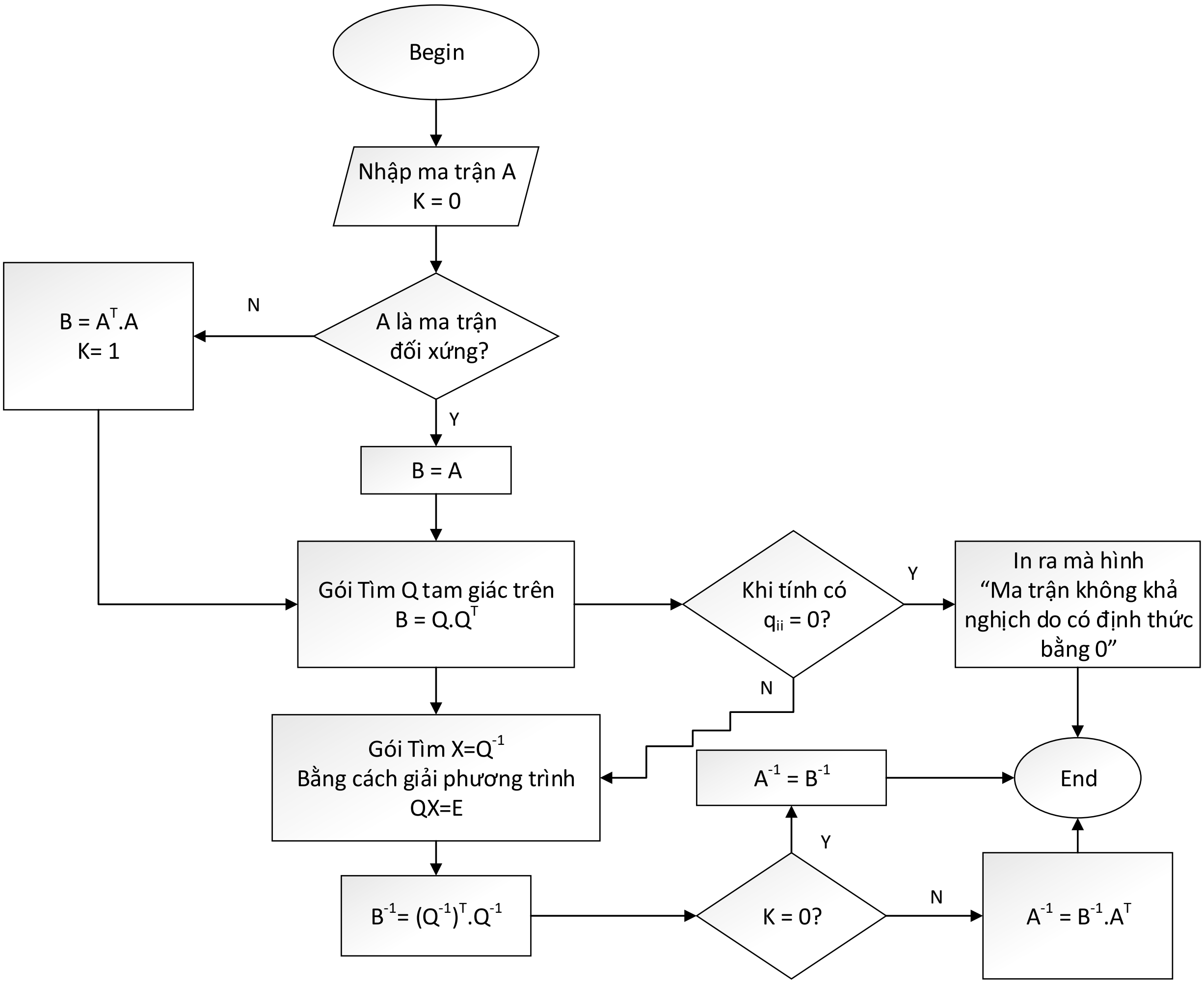
nên B là ma trận đối xứng. Áp dụng Cholevsky cho B, tìm được B^{-1}

Lại có: $\det(B) = \det(A^T.A)^T = \det(A^T).\det(A)$

Do đó nếu B không khả nghịch thì A cũng sẽ không khả nghịch và nếu B khả nghịch thì A cũng khả nghịch, khi đó:

$$\begin{aligned} & A^T.A = B \\ \Leftrightarrow \quad & (A^T.A)^{-1} = B^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad & (A)^{-1}.(A^T)^{-1} = B^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad & A^{-1} = B^{-1}.A^T \end{aligned}$$

3.3 Thuật toán



3.4 Ví dụ minh hoạ

Tìm A^{-1}, với $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 6 \\ 7 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Kết quả chạy:

```
The input matrix is:
[[ 1.+0.j  3.+0.j -2.+0.j]
 [ 3.+0.j  4.+0.j -5.+0.j]
 [-2.+0.j -5.+0.j  3.+0.j]]

=============================================================
The inverse matrix is:
[[-3.25+0.j  0.25+0.j -1.75+0.j]
 [ 0.25+0.j -0.25+0.j -0.25+0.j]
 [-1.75+0.j -0.25+0.j -1.25+0.j]]
===============================================================
```

4. PHƯƠNG PHÁP VIỀN QUANH

4.1 Ý tưởng phương pháp

Cho $A_n = \left[a_{ij} \quad \begin{matrix} i = \overline{1,n} \\ j = \overline{1,n} \end{matrix} \right]$ Chia ma trận A_n thành 4 khối:

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

trong đó:

$A_{11} = \left[a_{ij} \quad \begin{matrix} i = \overline{1,(n-1)} \\ j = \overline{1,(n-1)} \end{matrix} \right] = A_{n-1}$ (cỡ (n-1)(n-1))

$A_{12} = \left[a_{in} \quad i = \overline{1,(n-1)} \right]$ (cỡ (n-1)1)

$A_{21} = \left[a_{ni} \quad i = \overline{1,(n-1)} \right]$ (cỡ 1(n-1))

$A_{22} = a_{nn}$

Ma trận A_n dược chia theo dạng như trên gọi là ma trận dạng viền quanh

Tìm A_n^{-1} dạng viền quanh tương ứng:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

Với giả thiết A_{11}^{-1} tồn tại.

4.2 Nội dung phương pháp

Từ định nghĩa ma trận nghịch đảo:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

với E là ma trận đơn vị được chia theo dạng viền quanh, ta được:

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B_{11}A_{11} + B_{12}A_{21} = E & \textbf{(1)} \\ B_{11}A_{12} + B_{12}A_{22} = 0 & \textbf{(2)} \\ B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0 & \textbf{(3)} \\ B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = 1 & \textbf{(4)} \end{cases}$$

Theo giả thiết A_{11}^{-1} tồn tại. Nhân $A_{11}^{-1}A_{12}$ vào bên phải 2 vế của **(1)**, ta có:

$$B_{11}A_{12} + B_{12}A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = A_{11}^{-1}A_{12}$$

Cho **(2)** trừ kết quả trên và biến đổi:

$$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) \textbf{(5)}$$

Từ **(1)** ta cũng có:

$$B_{11} = A_{11}^{-1} - B_{12}A_{21}A_{11}^{-1} \quad \textbf{(6)}$$

Từ **(3)** ta có:

$$B_{21} = -B_{22}A_{21}A_{11}^{-1} \quad \textbf{(7)}$$

Thay **(7)** vào **(4)** ta được:

$$B_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \quad \textbf{(8)}$$

Đưa vào các ký hiệu:

$X = A_{11}^{-1}A_{12} \quad ; \qquad Y = A_{21}A_{11}^{-1}$

$\theta = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = A_{22} - A_{21}X = A_{22} - YA_{12}$

Từ **(5)(6)(7)(8)** suy ra:

$$\begin{cases} B_{11} = A_{11}^{-1} + X\theta^{-1}Y \\ B_{12} = -X\theta^{-1} \\ B_{21} = -\theta^{-1}Y \\ B_{22} = \theta^{-1} \end{cases} \quad (10)$$

Vậy nếu biết A_{11}^{-1} thì ta tìm được A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} = A_{11}^{-1} + X\theta^{-1}Y & B_{12} = -X\theta^{-1} \\ B_{21} = -\theta^{-1}Y & B_{22} = \theta^{-1} \end{pmatrix} \quad \textbf{(11)}$$

Như vậy, ta thực hiện phương pháp này như sau:

Giả sử: $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Tìm $A_2^{-1} = \dfrac{1}{\det(A_2)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$. Đặt $A_{11}^{-1} = A_2^{-1}$; $A_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$; $A_{21} = a_{31} \quad a_{32}$; $A_{22} = a_{33}$

Ta tìm được A_3^{-1} của $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ theo công thức **(11)**

Tiếp tục áp dụng phương pháp, ta sẽ tìm được A_3^{-1}, A_4^{-1},… A_n^{-1}

Nếu A có định thức con chính bằng 0 thì phương pháp này không áp dụng được.

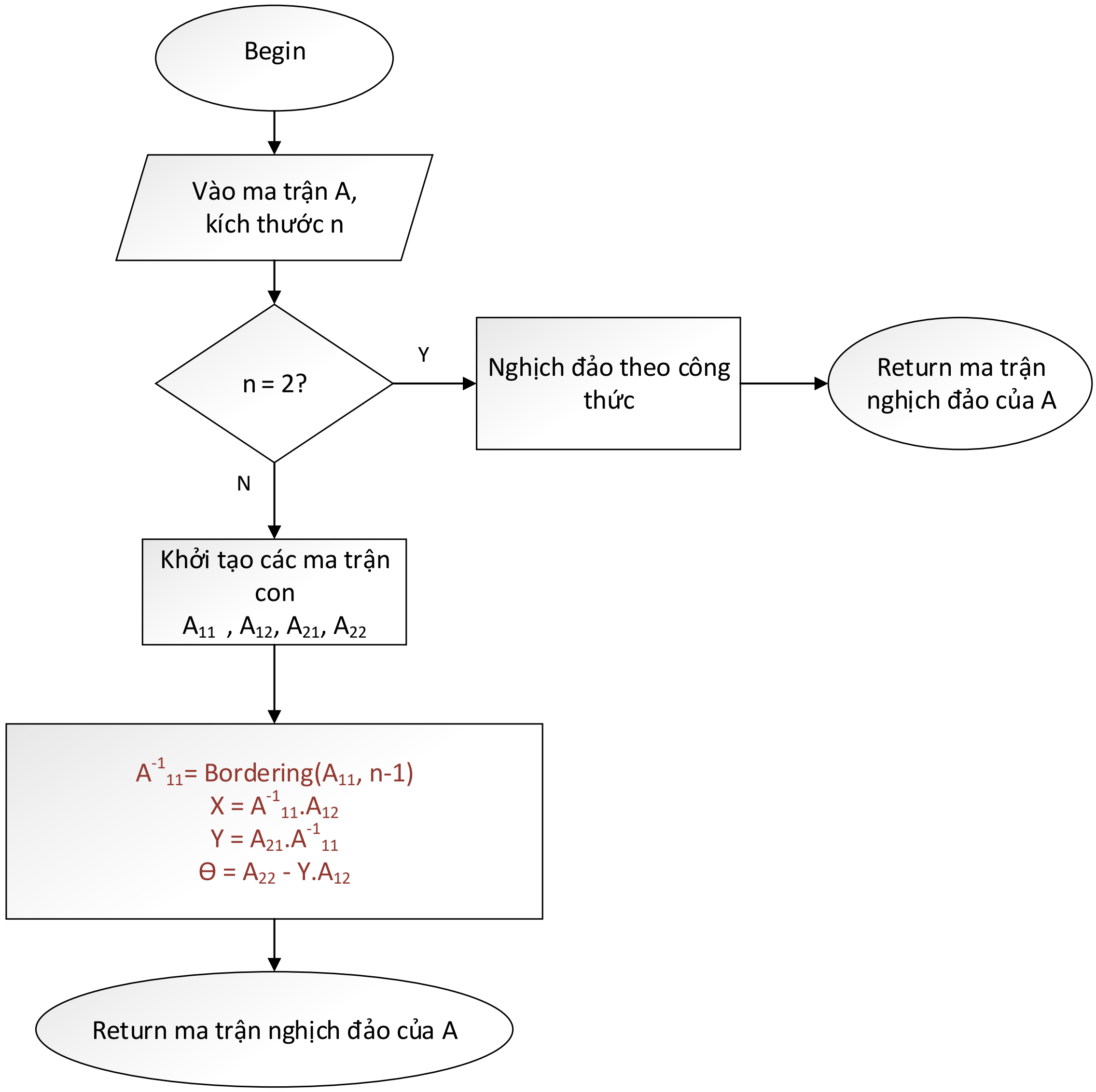
Khi đó, đặt $B = A^T.A$

Ma trận B khi đó là ma trận đối xứng nửa xác định dương.

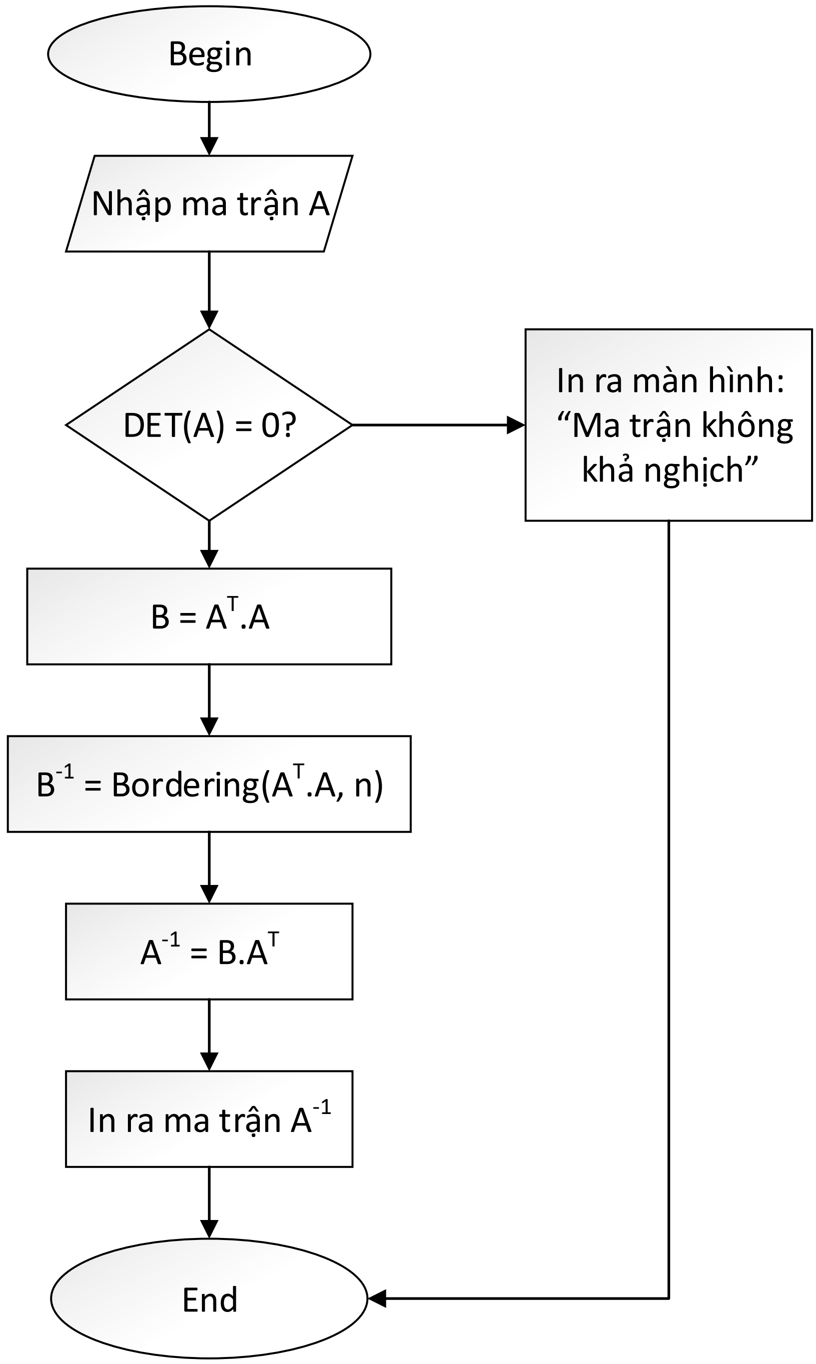
Nếu A khả nghịch thì B cũng khả nghịch, khi đó B là ma trận đối xứng xác định dương (tất cả các định thức con chính đều khác 0)

Như vậy, ta đã có thể áp dụng viền quanh lên B để tìm ra B^{-1}
Và tương tự Cholevsky ta có: $A^{-1} = B^{-1}.A^{T}$

4.3 Thuật toán



Dưới đây là sơ đồ khối của hàm Bordering trong sơ dồ thuật toán chính (cùng tên nhưng không liên quan đến hàm Bordering trong chương trình):



4.4 Ví dụ minh hoạ

VD1: Tìm A^{-1}, với $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Kết quả chạy:

```
[[ 0.          -0.083333333333  0.027777777778  0.361111111111]
 [ 0.           0.25           -0.083333333333 -0.083333333333]
 [ 0.           0.083333333333  0.305555555556 -0.027777777778]
 [ 1.           0.              0.              0.            ]]
```