# 1 Conjuntos Finitos e Infinitos

## 1.1 Números naturais

**Temos como conceitos primitivos o conjunto dos naturais, denotado por $\mathbb{N}$, cujos elementos são os números naturais, e uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o número $s(n)$ é o sucessor de $n$. Temos os axiomas:**

**Axioma 1.** *$s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva.*

**Axioma 2.** $\mathbb{N} - s(n) = \{1\}$. *Ou seja, só existe um número natural que não é sucessor de nenhum outro, e ele é denotado por* 1.

**Axioma 3** (Princípio de indução)**.** *Se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto tal que:*

$$\begin{cases} 1 \in X \\ \\ n \in X \implies s(n) \in X \end{cases}$$

*Então* $\mathbb{N} = X$.

**Definição 1.1** (Soma)**.** Dados $m, n \in \mathbb{N}$, sua soma $m + n$ é definida como:

$$m + n := s^n(m).$$

A soma deve obedecer

$$m + 1 = s(m) \tag{1}$$

$$m + s(n) = s(m + n) \tag{2}$$

para todos os $m, n$ naturais.

*Observação* 1.1. Dedekind prova o "Teorema da Definição por Indução" para garantir que a notação $s^n(m)$ faça sentido.

**Proposição 1** (Associatividade da Soma)**.** *Para todos $p, m, n \in \mathbb{N}$, temos $m + (n + p) = (m + n) + p$.*

*Proof.* Seja $X = \{p \in \mathbb{N} \,|\forall m, n \in \mathbb{N} \,:\, m + (n + p) = (m + n) + p\}$. Da definição de adição, temos pra qualquer $m, n$ que $n + 1 = s(n)$, logo $m + (n + 1) = m + s(n) = s(m + n) = (m + n) + 1 \implies m + (n + 1) = (m + n) + 1$. Logo $1 \in X$. Se $p \in X$, temos $m + (n + p) = (m + n) + p$. Logo

$$\begin{aligned} m + (n + s(p)) &= m + s(n + p) \\ \\ &= s\left(m + (n + p)\right) \\ \\ &= s\left((m + n) + p\right) \\ \\ &= (m + n) + s(p). \end{aligned}$$

Logo $p \in X \implies s(p) \in X$. Temos que $X = \mathbb{N}$ pelo princípio de indução. Logo a soma é associativa nos naturais. $\square$

**Lema 1** (Comutatividade da soma com o 1)**.** *Para todo* $m \in \mathbb{N}$*, temos* $m+1 = 1+m$*.*

*Proof.* Seja $X = \{m \in \mathbb{N} \,|m + 1 = 1 + m\}$. Temos $1 \in X$, pois $1 + 1 = 1 + 1$. Supondo $m \in X$, logo $m + 1 = 1 + m$. Temos

$$
\begin{aligned}
1 + s(m) &= 1 + (m + 1) \\
&= (1 + m) + 1 \\
&= (m + 1) + 1 \\
&= s(m) + 1
\end{aligned}
$$

Como $m \in X \implies s(m) \in X$ e $1 \in X$, temos $X = \mathbb{N}$. $\square$

**Proposição 2** (Comutatividade da soma)**.** *Para todos* $m, n \in \mathbb{N}$*, temos* $m+n = n+m$*.*

*Proof.* Seja $X = \{m \in \mathbb{N} \,|\forall n \in \mathbb{N} \,:\, m + n = n + m\}$. Temos $1 \in X$ pelo Lema 1. Temos $m + 1 = s(m) =$ $\square$