

# Notas do Tales

Tales da Silva Amaral

7 de junho de 2024

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Lógica</b>	<b>6</b>
2.1	Cálculo Proposicional . . . . .	6
2.2	Organizar . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Teoria de conjuntos</b>	<b>7</b>
3.1	Axioma da Extensão . . . . .	7
3.2	Organizar Ainda . . . . .	9
3.3	Produto Cartesiano . . . . .	13
3.4	Relações . . . . .	13
3.4.1	Definições iniciais . . . . .	13
3.4.2	Relações de Equivalência . . . . .	13
3.4.3	Relação de Ordem . . . . .	15
3.4.4	Funções . . . . .	15
3.5	Números Naturais . . . . .	15
3.5.1	Axiomas de Peano . . . . .	15
3.5.2	Soma nos Naturais . . . . .	16
3.5.3	Ordem nos Naturais . . . . .	19
3.5.4	Produto nos Naturais . . . . .	20
3.5.5	Exercícios . . . . .	25
3.6	Conjuntos Finitos e Infinitos . . . . .	26
3.6.1	Conjuntos Finitos . . . . .	26
3.6.2	Conjuntos Infinitos . . . . .	28
3.6.3	Exercícios . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Anéis</b>	<b>35</b>
4.1	Definições iniciais . . . . .	35
4.1.1	Exercícios . . . . .	37
4.2	Invertibilidade . . . . .	37
4.3	Corpos, domínios e anéis reduzidos . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Aritmética</b>	<b>40</b>
<b>6</b>	<b>Análise Real</b>	<b>40</b>
6.1	Números Reais . . . . .	40
6.1.1	Corpos ordenados . . . . .	40
6.1.2	Números reais . . . . .	42
6.2	Sequências e Séries de Números Reais . . . . .	43
6.2.1	Sequências . . . . .	43
6.2.2	Limite de uma sequência . . . . .	45
6.2.3	Propriedades aritméticas dos limites . . . . .	47
6.2.4	Subsequências . . . . .	47
6.2.5	Sequências de Cauchy . . . . .	49

6.2.6	Limites infinitos . . . . .	49
6.2.7	Séries numéricas . . . . .	49
6.3	Topologia da Reta . . . . .	49
6.3.1	Conjuntos abertos . . . . .	49
6.3.2	Conjuntos fechados . . . . .	49
6.3.3	Pontos de acumulação . . . . .	49
6.3.4	Conjuntos compactos . . . . .	49
6.4	Limites de Funções . . . . .	49
6.4.1	Definição e propriedades do limite . . . . .	49
6.4.2	Exemplos de limites . . . . .	49
6.4.3	Limites laterais . . . . .	49
6.4.4	Limites no infinito . . . . .	49
6.4.5	Valores de aderência de uma função; $\limsup$ e $\liminf$ . . . . .	49
6.5	Funções Contínuas . . . . .	49
6.5.1	A noção de função contínua . . . . .	49
6.5.2	Descontinuidades . . . . .	49
6.5.3	Funções contínuas em intervalos . . . . .	49
6.5.4	Funções contínuas em conjuntos compactos . . . . .	49
6.5.5	Continuidade uniforme . . . . .	49
6.6	Derivadas . . . . .	49
6.6.1	Definição e propriedades da derivada num ponto . . . . .	49
6.6.2	Funções deriváveis num intervalo . . . . .	49
6.6.3	Fórmula de Taylor . . . . .	49
6.6.4	Série de Taylor, funções analíticas . . . . .	49
6.7	Integral de Riemann . . . . .	49
6.7.1	Integral superior e integral inferior . . . . .	49
6.7.2	Funções integráveis . . . . .	49
6.7.3	O Teorema Fundamental do Cálculo . . . . .	49
6.7.4	Fórmulas clássicas do Cálculo Integral . . . . .	49
6.7.5	A integral como limite de somas . . . . .	49
6.7.6	Caracterização das funções integráveis . . . . .	49
6.7.7	Logaritmos e exponenciais . . . . .	49
6.8	Sequências e Séries de Funções . . . . .	49
6.8.1	Convergência simples e convergência uniforme . . . . .	49
6.8.2	Propriedades da convergência uniforme . . . . .	49
6.8.3	Séries de potências . . . . .	49
6.8.4	Funções analíticas . . . . .	49
6.8.5	Equicontinuidade . . . . .	49
6.9	Organizar . . . . .	49
<b>7</b>	<b>Geometria Analítica</b>	<b>50</b>
<b>8</b>	<b>Álgebra Linear</b>	<b>50</b>
8.1	Posto . . . . .	50

<b>9</b>	<b>Análise no <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>50</b>
9.1	Topologia do Espaço Euclidiano . . . . .	50
9.1.1	O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ . . . . .	50
9.1.2	Métrica, Produto interno e norma . . . . .	50
9.1.3	Números complexos . . . . .	52
9.1.4	Bolas e conjuntos limitados . . . . .	52
9.1.5	Sequências no espaço euclidiano . . . . .	52
9.1.6	Pontos de acumulação . . . . .	53
9.1.7	Aplicações contínuas . . . . .	53
9.1.8	Homeomorfismos . . . . .	53
9.1.9	Limites . . . . .	53
9.1.10	Conjuntos abertos . . . . .	53
9.1.11	Conjuntos fechados . . . . .	53
9.1.12	Conjuntos compactos . . . . .	53
9.1.13	Distância entre dois conjuntos; diâmetro . . . . .	54
9.1.14	Conexidade . . . . .	54
9.1.15	A norma de uma transformação linear . . . . .	54
9.2	Caminhos no Espaço Euclidiano . . . . .	54
9.2.1	Caminhos diferenciáveis . . . . .	54
9.2.2	Exercícios . . . . .	56
9.2.3	Integral de um caminho . . . . .	56
9.2.4	Os teoremas clássicos do Cálculo . . . . .	56
9.2.5	Caminhos retificáveis . . . . .	60
9.2.6	O comprimento de arco como parâmetro . . . . .	60
9.2.7	Curvatura e torção . . . . .	60
9.2.8	A função-ângulo . . . . .	60
9.3	Funções Reais de $n$ Variáveis . . . . .	60
9.3.1	Derivadas parciais . . . . .	60
9.3.2	Derivadas direcionais . . . . .	60
9.3.3	Funções diferenciáveis . . . . .	60
9.3.4	A diferencial de uma função . . . . .	60
9.3.5	O gradiente de uma função diferenciável . . . . .	60
9.3.6	A Regra de Leibniz . . . . .	60
9.3.7	O Teorema de Schwarz . . . . .	60
9.3.8	Fórmula de Taylor: pontos críticos . . . . .	60
9.3.9	O teorema da função implícita . . . . .	60
9.3.10	Multiplicador de Lagrange . . . . .	60
9.4	Integrais Curvilíneas . . . . .	60
9.4.1	Formas diferenciais de grau 1 . . . . .	60
9.4.2	Integral de Stieltjes . . . . .	60
9.4.3	Integral de uma forma ao longo de um caminho . . . . .	60
9.4.4	Justaposição de caminhos: caminho inverso . . . . .	60
9.4.5	Integral curvilínea de um campo de vetores e de uma função . . . . .	60
9.4.6	Formas exatas e formas fechadas . . . . .	60
9.4.7	Homotopia . . . . .	60
9.4.8	Integrais curvilíneas e homotopia . . . . .	60

9.4.9	Cohomologia . . . . .	60
9.4.10	A fórmula de Kronecker . . . . .	60
9.5	Aplicações Diferenciáveis . . . . .	60
9.5.1	Diferenciabilidade de uma aplicação . . . . .	60
9.5.2	Exemplos de aplicações diferenciáveis . . . . .	60
9.5.3	A regra da cadeia . . . . .	60
9.5.4	A fórmula de Taylor . . . . .	60
9.5.5	A desigualdade do valor médio . . . . .	60
9.5.6	Sequências de aplicações diferenciáveis . . . . .	60
9.5.7	Aplicações fortemente diferenciáveis . . . . .	60
9.5.8	O teorema da aplicação inversa . . . . .	60
9.5.9	Aplicação: o Lema de Morse . . . . .	60
9.5.10	A forma local das imersões . . . . .	60
9.5.11	A forma local das submersões . . . . .	60
9.5.12	O teorema do posto . . . . .	60
9.5.13	Superfícies no espaço euclidiano . . . . .	60
9.5.14	Superfícies orientáveis . . . . .	60
9.5.15	O método dos multiplicadores de Lagrange . . . . .	60
9.6	Integrais Múltiplas . . . . .	60
9.6.1	A definição de integral . . . . .	60
9.6.2	Conjuntos de medida nula . . . . .	60
9.6.3	Caracterização das funções integráveis . . . . .	60
9.6.4	A integral como limite de somas de Riemann . . . . .	60
9.6.5	Integração repetida . . . . .	60
9.6.6	Mudança de variáveis . . . . .	60
9.7	Integrais de Superfície . . . . .	60
9.7.1	Formas alternadas . . . . .	60
9.7.2	Formas diferenciais . . . . .	60
9.7.3	A diferencial exterior . . . . .	60
9.7.4	Partições da unidade . . . . .	60
9.7.5	Aplicações da partição da unidade . . . . .	60
9.7.6	Integrais de superfície . . . . .	60
9.7.7	Superfícies com bordo . . . . .	60
9.7.8	O Teorema de Stokes . . . . .	60
9.7.9	Grau de uma aplicação . . . . .	60
9.7.10	A integral de Kronecker . . . . .	60
9.8	Organizar . . . . .	60
9.9	Diferenciação . . . . .	61
9.10	Integração . . . . .	62
9.10.1	Exercícios . . . . .	63
<b>10</b>	<b>Geometria diferencial</b>	<b>65</b>
10.1	Superfícies Regulares . . . . .	65

# 1 Introdução

O objetivo do seguinte "livro" é ser um "dicionário" de demonstrações e definições, onde são colocados o maior número possível de detalhes. Quem nunca leu um livro e se deparou com demonstrações incompletas, repletas de "é fácil ver que" e falas similares. Meu objetivo é reduzir isso, visto que PDF não tem limite de páginas.

Esta obra tem a licença Creative Commons "Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil".



## 2 Lógica

### 2.1 Cálculo Proposicional

**Axioma 1.** Para todas fórmulas  $P, Q, R$ , são considerados teoremas as fórmulas:

$$1. P \implies (Q \implies P)$$

**Regra de Inferência 1.** É tomada como regra de inferência o *modus ponens*: Se  $P$  e  $P \implies Q$  são teoremas, então  $Q$  é um teorema. Portanto

$$\{P, P \implies Q\} \vdash Q.$$

### 2.2 Organizar

**Tomando como termos primitivos:** o alfabeto  $\{a, b, c, \dots\}$ ; e  $(\wedge)$ ; ou  $(\vee)$ ; negação  $(\neg)$ ; existe  $(\exists)$ ; igual  $(=)$ .

**Definição 2.1** ( $\equiv$ , Equivalência).  $p \equiv q$  significa  $p$  é equivalente a  $q$ .

**Definição 2.2** ( $\implies$ , Implicação).  $p \implies q \equiv \neg p \vee q$ . Diz-se " $p$  implica  $q$ ", "Se  $p$ , então  $q$ " etc.

**Definição 2.3** ( $\iff$ ).  $p \iff q \equiv (p \implies q) \wedge (q \implies p)$ . Diz-se " $p$  se, e somente se,  $q$ ".

**Definição 2.4** ( $c$ , Contradição). A letra  $c$  é reservada para a "contradição".

**Definição 2.5** ( $t$ , Tautologia). A letra  $t$  é reservada para a "tautologia".

**Definição 2.6** ( $\nexists xP(x)$ , Não existe).  $\neg(\exists xP(x)) \equiv \nexists xP(x)$ . Diz-se "Não existe  $x$  tal que  $P(x)$ ".

**Definição 2.7** ( $\forall$ , Para todo).  $\forall xP(x) \equiv \neg\exists x(\neg P(x))$ . Diz-se "Para todo  $x$ , temos  $P(x)$ ".

**Definição 2.8** ( $\exists! xP(x)$ , Existe um único).  $\exists! xP(x) \equiv \exists xP(x) \wedge \forall y(P(y) \implies y = x)$ . Diz-se "Existe um único  $x$  tal que  $P(x)$ ".

**Axioma 2.** Para quaisquer  $p, q$ , temos:

1.  $p \equiv p$
2. Se  $p \equiv q$ , então  $q \equiv p$ .
3. Se  $p \equiv q$  e  $q \equiv r$ , então  $p \equiv r$ .
4. Se  $p \equiv q$ , então  $\neg p \equiv \neg q$ .
5.  $\neg(\neg p) \equiv p$ .

**Axioma 3.** Para quaisquer  $p, q$ , temos:

1.  $p \vee q \equiv q \vee p$ .
2.  $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ .
3.  $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ .
4.  $p \vee p \equiv p$
5.  $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

## 3 Teoria de conjuntos

### 3.1 Axioma da Extensão

**Conceito Primitivo 1** (Conjunto). Temos como conceito primitivo a noção de Conjunto, Coleção. Ou seja, não tentarei definir tal conceito.

**Conceito Primitivo 2** (Elementos de um Conjunto). A noção de elementos ou membros de um conjunto também será tomada como conceito primitivo.

**Definição 3.1** (Pertinência). Se  $x$  é um elemento de  $A$ , ou  $x$  pertence a  $A$ , escrevemos  $x \in A$ .

**Definição 3.2** (Não Pertinência). Se  $x$  não pertence a  $A$ , escrevemos  $x \notin A$ . Ou seja:

$$x \notin A \iff \neg(x \in A)$$

**Axioma 4** (Axioma da Extensão). Dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuem os mesmos elementos. Ou seja:

$$A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B)$$

**Definição 3.3** (Diferente). Dois conjuntos  $A$  e  $B$  são diferentes se não são iguais e escrevemos  $A \neq B$ . Ou seja:

$$A \neq B \iff \neg(A = B)$$

**Proposição 3.1.** *Dois conjuntos  $A$  e  $B$  são diferentes se existe  $x \in A$  com  $x \notin B$  ou  $x \in B$  com  $x \notin A$ . Ou seja:*

$$A \neq B \iff \exists x((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A))$$

*Demonstração.*

$$A \neq B \iff \neg(A = B)$$

$$\iff \neg(\forall x(x \in A \iff x \in B))$$

$$\iff \exists x(\neg(x \in A \iff x \in B))$$

$$\iff \exists x(\neg((x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in A)))$$

$$\iff \exists x(\neg((x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \in A)))$$

$$\iff \exists x((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A))$$

□

**Definição 3.4** (Subconjunto). Dizemos que  $A$  é um subconjunto de  $B$  se todo elemento de  $A$  for um elemento de  $B$  e escrevemos  $A \subset B$ . Ou seja:

$$A \subset B \iff \forall x(x \in A \implies x \in B)$$

**Proposição 3.2.**

$$A \subset A$$

*Demonstração.* Temos  $p \implies p$  uma tautologia para toda fórmula  $p$ , logo  $x \in A \implies x \in A$  é uma tautologia. Portanto  $A \subset A \iff \forall x(x \in A \implies x \in A)$  é uma tautologia. □

**Proposição 3.3.**

$$A \subset B \wedge B \subset C \implies A \subset C$$

$$A \subset B \wedge B \subset C \implies A \subset C \iff \neg(A \subset B \wedge B \subset C) \vee A \subset C$$

**Definição 3.5** (Subconjunto Próprio). Se  $A$  e  $B$  são conjuntos tais que  $A \subset B$  e  $A \neq B$ , então  $A$  é chamado de subconjunto próprio.



### 3.2 Organizar Ainda

#### Proposição 3.4.

$$(A - B) \cup B = A \cup B$$

*Demonstração.*

$$x \in (A - B) \cup B \iff$$

$$(x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B \iff$$

$$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \in B) \iff$$

$$(x \in A \vee x \in B) \wedge t \iff$$

$$x \in A \vee x \in B \iff$$

$$x \in A \cup B \iff$$

□

#### Proposição 3.5.

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

*Demonstração.*

$$(x, y) \in A \times (B \cup C) \iff x \in A \wedge (y \in B \cup C)$$

$$\iff x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$$

$$\iff (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$$

$$\iff ((x, y) \in A \times B) \vee ((x, y) \in A \times C)$$

$$\iff (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

□

#### Proposição 3.6. Se $A \subset B$ e $B - A = \emptyset$ , então $A = B$ .

*Demonstração.* O caso  $A = B = \emptyset$  é trivial. Supondo  $B \neq \emptyset$ . Supondo  $A \subset B$  e  $B - A = \emptyset$ . Como já temos  $A \subset B$ , basta provar  $B \subset A$ .

Supondo  $x \in B$  e  $x \notin A$ . Como  $B - A = \emptyset$ , temos  $x \in \emptyset$  (contradição). Logo se  $x \in B$ , devemos ter  $x \in A$ . Logo  $B \subset A$ . Logo  $A = B$ . □

**Lema 1.** *Existe uma bijeção entre  $X$  e  $X \times \{a\}$ .*

*Demonstração.* Seja a função  $g : X \rightarrow X \times \{a\}$ , dada por  $g(x) = (x, a)$ . Temos  $g(p) = g(q) \iff (p, a) = (q, a) \iff p = q$ , logo  $g$  é injetiva. Dado  $(x, a) \in X \times \{a\}$ , temos  $x \in X$  e  $a \in \{a\}$ . Logo existe  $x \in X$  tal que  $g(x) = (x, a)$ . Portanto  $g$  é sobrejetiva. Como  $g$  é injetiva e sobrejetiva, temos  $g$  bijetiva.  $\square$

**Lema 2.** *Existe uma bijeção entre  $X$  e  $\mathcal{F}(\{a\}, X)$ .*

*Demonstração.* Seja a função  $g : X \rightarrow \mathcal{F}(\{a\}, X)$ , dada por  $g(x) = f_x$ , onde  $f_x : \{a\} \rightarrow X, f_x(a) = x$ . Temos  $g(p) = g(q) \iff f_p(a) = f_q(a) \iff p = q$ , logo  $g$  é injetiva. Dado  $f \in \mathcal{F}(\{a\}, X)$ , seja  $p = f(a)$ . Temos  $g(p) = f_p = f$ . Logo existe  $p \in X$  tal que  $g(p) = f$ . Portanto  $g$  é sobrejetiva. Como  $g$  é injetiva e sobrejetiva, temos  $g$  bijetiva.  $\square$

**Lema 3.** *Existe uma bijeção entre  $\mathcal{F}(X, Y) \times \mathcal{F}(\{a\}, Y)$  e  $\mathcal{F}(X \cup \{a\}, Y)$ , com  $a \notin X$ .*

*Demonstração.* Seja  $\phi : \mathcal{F}(X \cup \{a\}, Y) \rightarrow \mathcal{F}(X, Y) \times \mathcal{F}(\{a\}, Y)$ . Que associa  $f : X \cup \{a\} \rightarrow Y$  a  $(g, h)$ , onde  $g : X \rightarrow Y, g(x) = f(x)$  e  $h : \{a\} \rightarrow Y, h(a) = f(a)$ . Se  $\phi(f_1) = \phi(f_2)$ , temos  $(g_1, h_1) = (g_2, h_2)$ , que implica  $g_1 = g_2$  e  $h_1 = h_2$ . Logo  $f_1 = f_2$ . Logo  $\phi$  é injetiva.

Seja  $(g_0, h_0) \in \mathcal{F}(X, Y) \times \mathcal{F}(\{a\}, Y)$ . Seja  $f : X \cup \{a\} \rightarrow Y, f(x) = \begin{cases} g_0(x), & x \in X \\ h_0(a), & x = a \end{cases}$ .

Temos  $\phi(f) = (g_0, h_0)$ , logo  $\phi$  é sobrejetiva.

Como  $\phi$  é injetiva e sobrejetiva, temos  $\phi$  bijetiva.  $\square$

**Proposição 3.7.** *Se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  são bijeções, então  $(g \circ f) : X \rightarrow Z$  é uma bijeção.*

*Demonstração.* Temos  $g(f(a)) = g(f(b)) \implies f(a) = f(b) \implies a = b$ . Logo  $g \circ f$  é injetiva.

Tomando  $z \in Z$ . Como  $g$  é sobrejetiva, existe  $y \in Y$  tal que  $g(y) = z$ . Como  $f$  é sobrejetiva, existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Logo existe  $x \in X$  tal que  $g(f(x)) = g(y) = z$ . Logo  $g \circ f$  é sobrejetiva.  $\square$

**Proposição 3.8.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função sobrejetiva.  $f$  admite inversa à direita.*

*Demonstração.* Para todo  $y \in Y$ , temos  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ , logo existe  $x_y \in f^{-1}(y)$  tal que  $f(x_y) = y$ . Defina  $g : Y \rightarrow X$ , que associa  $y \rightarrow x_y$  (axioma da escolha). Logo temos  $f(g(y)) = f(x_y) = y$ .  $\square$

**Proposição 3.9.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função injetiva.  $f$  admite inversa à esquerda.*

*Demonstração.* Queremos definir  $g : Y \rightarrow X$ . Dado  $y \in f(X)$ , existe um único  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Defina  $g(y) = x$ . Para  $y \in Y - f(X)$ , colocamos  $g(y) = x_0$ , onde  $x_0 \in X$  qualquer. Para todo  $x \in X$ , temos  $f(x) \in f(X)$ , logo  $g \circ f(x) = x$ .  $\square$

**Proposição 3.10.** Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função então  $f' : X \rightarrow f(X)$ , definida como  $f'(x) = f(x)$ , é uma sobrejeção.

*Demonstração.* Seja  $y \in f(X)$ . Por definição de  $f(X)$ , existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Logo  $f'$  é sobrejetiva.  $\square$

**Proposição 3.11.** Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma injeção então  $f' : X \rightarrow f(X)$ , definida como  $f'(x) = f(x)$ , é uma bijeção.

*Demonstração.* Pela proposição anterior,  $f'$  é sobrejetiva. Dados  $a, b \in X$  com  $f'(a) = f(a) = f(b) = f'(b)$ . Como  $f$  é injetiva, temos  $a = b$ , logo  $f'$  é injetiva.  $\square$

**Proposição 3.12.** Se  $f : A \cup B \rightarrow C$  é uma bijeção, então  $f' : A \rightarrow C - f(B)$ ,  $a \mapsto f(a)$  é uma bijeção.

*Demonstração.* Se  $a, b \in A \subset A \cup B$ , temos  $f'(a) = f'(b) \iff f(a) = f(b) \implies a = b$  ( $f$  é injetiva). Logo  $f'$  é injetiva.

Tomando  $y \in C - f(B)$ . Como  $f$  é sobrejetiva, existe  $x \in A \cup B$  tal que  $f(x) = y$ . Se  $x \in B$ , teríamos  $f(x) \in f(B)$ , logo  $f(x) \notin C - f(B)$  (contradição). Logo devemos ter  $x \in A$ . Logo existe  $x \in A$  tal que  $f'(x) = f(x) = y$ . Logo  $f'$  é sobrejetiva.  $\square$

**Proposição 3.13.** Se  $f : A \rightarrow B$  é uma bijeção e  $C \subset B$ , então  $f' : f^{-1}(C) \rightarrow C$ ,  $x \mapsto f(x)$  é uma bijeção.

*Demonstração.* Se  $a, b \in f^{-1}(C) \subset A$ , temos  $f'(a) = f'(b) \iff f(a) = f(b) \implies a = b$  ( $f$  é injetiva). Logo  $f'$  é injetiva.

Tomando  $y \in C$ . Como  $f$  é sobrejetiva, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y \in C$ . Como  $f(x) \in C$ , temos  $x \in f^{-1}(C)$ . Logo existe  $x \in f^{-1}(X)$  tal que  $f'(x) = y$ . Logo  $f'$  é sobrejetiva.  $\square$

**Proposição 3.14.** Seja  $f : A \rightarrow B$  uma função e  $X \subset Y \subset B$ . Temos  $f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$ .

*Demonstração.* Se  $x \in f^{-1}(X)$ , temos  $f(x) \in X$ . Como  $X \subset Y$ , temos  $f(x) \in Y$ . Portanto  $x \in f^{-1}(Y)$ . Como  $x \in f^{-1}(X) \implies x \in f^{-1}(Y)$ , temos  $f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$ .  $\square$

**Proposição 3.15.** Seja  $f : A \rightarrow B$  uma função bijetiva e  $X, Y \subset B$ . Temos  $f^{-1}(X) = f^{-1}(Y) \iff X = Y$ .

*Demonstração.* Se  $X = Y$  é direto. Supondo  $f^{-1}(X) = f^{-1}(Y)$ . Se  $x \in X$ , existe  $a \in A$  tal que  $f(a) = x$ . Logo  $a \in f^{-1}(X)$ . Portanto  $a \in f^{-1}(Y)$ . Logo  $x = f(a) \in Y$ . Temos  $x = f(a) \in X \implies x = f(a) \in Y$ . Para  $y \in Y$  é análogo. Logo temos  $X = Y$ .  $\square$

**Proposição 3.16.** Se existe a bijeção  $f : \{a\} \rightarrow X$ , então  $X = \{b\}$  para algum  $b$ .

*Demonstração.* Seja  $b = f(a) \in X$ . Seja  $c \in X$ . Como  $f$  é sobrejetiva, existe  $k \in \{a\}$  tal que  $f(k) = c$ . Temos obrigatoriamente que  $k = a$ , logo  $b = f(a) = c$ . Logo  $X = \{b\}$ .  $\square$

**Proposição 3.17.** *Se  $f : A \rightarrow B$  e  $g : C \rightarrow D$  são bijeções, então  $h : A \times B \rightarrow B \times D$ ,  $h(a, c) = (f(a), g(c))$  é uma bijeção.*

*Demonstração.* Seja  $(b, d) \in B \times D$ . Como  $f$  e  $g$  são sobrejetivas, existem  $a \in A$  e  $c \in C$  tal que  $f(a) = b$  e  $g(c) = d$ . Logo existe  $(a, c) \in A \times C$  tal que  $h(a, c) = (f(a), g(c)) = (b, d)$ . Logo  $h$  é sobrejetiva.

Suponha  $h((a, b)) = h((c, d)) \iff (f(a), g(b)) = (f(c), g(d)) \iff f(a) = f(c) \wedge g(b) = g(d)$ . Como  $f$  e  $g$  são injetivas, temos  $f(a) = f(c) \implies a = c$  e  $g(b) = g(d) \implies b = d$ . Logo  $h$  é injetiva. Como  $h$  é injetiva e sobrejetiva, temos que  $h$  é bijetiva.  $\square$

**Proposição 3.18.** *Se  $f : A \rightarrow B$  é uma bijeção, então existe uma bijeção entre  $\mathcal{F}(A, C)$  e  $\mathcal{F}(B, C)$ .*

*Demonstração.* Definimos  $\phi : \mathcal{F}(A, C) \rightarrow \mathcal{F}(B, C)$ , que associa  $g : A \rightarrow C$  a  $h = g \circ f^{-1} : B \rightarrow C$ . Se  $\phi(p) = \phi(q)$ , temos  $p \circ f^{-1} = q \circ f^{-1}$ , logo  $(p \circ f^{-1}) \circ f = (q \circ f^{-1}) \circ f \implies p = q$ , logo  $\phi$  é injetiva. Seja  $p \in \mathcal{F}(B, C)$ . Seja  $h = p \circ f : A \rightarrow C$ . Temos  $h \in \mathcal{F}(A, C)$  com  $\phi(h) = (p \circ f) \circ f^{-1} = p$ , logo  $\phi$  é sobrejetiva.  $\square$

**Proposição 3.19.** *Se  $f : A \rightarrow B$  é uma bijeção, então existe uma bijeção entre  $\mathcal{F}(C, A)$  e  $\mathcal{F}(C, B)$ .*

*Demonstração.* Definimos  $\phi : \mathcal{F}(C, A) \rightarrow \mathcal{F}(C, B)$ , que associa  $g : C \rightarrow A$  a  $h = f \circ g : C \rightarrow B$ . Se  $\phi(p) = \phi(q)$ , temos  $f \circ p = f \circ q$ , logo  $f^{-1} \circ (f \circ p) = f^{-1} \circ (f \circ q) \implies p = q$ , logo  $\phi$  é injetiva. Seja  $p \in \mathcal{F}(C, B)$ . Seja  $h = f^{-1} \circ p : C \rightarrow A$ . Temos  $h \in \mathcal{F}(C, A)$  com  $\phi(h) = f^{-1} \circ (f \circ p) = p$ , logo  $\phi$  é sobrejetiva.  $\square$

**Proposição 3.20.** *Não existe sobrejeção entre  $X$  e  $\mathcal{P}(X)$ .*

*Demonstração.* Suponha que exista a sobrejeção  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ . Seja  $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ . Temos  $A \in \mathcal{P}(X)$ . Como  $f$  é sobrejetiva, existe  $p \in X$  tal que  $f(p) = A$ . Temos  $p \in A$  ou  $p \notin A$ . Se  $p \in A$ , obtemos uma contradição, pois  $x \in A \iff x \notin f(x)$  e  $f(p) = A$ . Se  $p \notin A$ , temos  $p \in A$ , pela definição de  $A$ . Em ambos os casos, obtemos uma contradição. Logo não existe sobrejeção entre  $X$  e  $\mathcal{P}(X)$ .  $\square$

**Proposição 3.21.** *Existe injeção entre  $X$  e  $\mathcal{P}(X)$ .*

*Demonstração.* Seja  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ ,  $f(x) = \{x\}$ . Temos  $f(x) = f(y) \iff \{x\} = \{y\} \iff x = y$ . Logo  $f$  é injetiva.  $\square$

**Proposição 3.22.** *Existe injeção entre  $X$  e  $\mathcal{F}(X, Y)$  se  $Y$  possui pelo menos 2 elementos.*

*Demonstração.*  $Y$  possuir 2 elementos implica na existência de  $y_1, y_2 \in Y$  com  $y_1 \neq y_2$ . Logo seja  $h : X \rightarrow \mathcal{F}(X, Y)$ , que associa  $a \in X$  a  $g_a : X \rightarrow Y$ , dada por

$$g_a(x) = \begin{cases} y_1, & x = a \\ y_2, & x \neq a \end{cases}.$$

Se  $h(a) = h(b)$ , temos  $g_a = g_b$ , logo  $g_a(x) = g_b(x)$  para todo  $x \in X$ . Em particular,  $g_a(a) = g_b(a)$ . Se  $a \neq b$ , temos  $g_a(a) = y_1 = y_2 = g_b(a)$  (contradição). Logo temos  $a = b$ . Logo  $h$  é injetiva. Logo existe injeção entre  $X$  e  $\mathcal{F}(X, Y)$ .  $\square$

**Proposição 3.23.** *Não existe função sobrejetiva entre  $X$  e  $\mathcal{F}(X, Y)$  se  $Y$  possui pelo menos 2 elementos.*

*Demonstração.* Seja  $f : X \rightarrow \mathcal{F}(X, Y)$  uma função qualquer. Logo  $f$  associa  $a \in X$  a uma função  $\phi_a : X \rightarrow Y$ . Para simplificar notação, chamaremos  $f(a) = \phi_a$ . Seja  $g : \mathcal{P}(Y) - \emptyset \rightarrow Y$  a função escolha definida em  $\mathcal{P}(Y) - \emptyset$ . Seja  $h : X \rightarrow Y$  definida por  $h(a) = g(Y - \{\phi_a(a)\})$ . Como  $Y$  tem pelo menos 2 elementos, temos  $Y - \{\phi_a(a)\} \neq \emptyset$  para todo  $a \in X$ . Pela definição de função escolha, temos  $h(a) \in Y - \{\phi_a(a)\}$ , logo  $h(a) \neq \phi_a(a)$  para todo  $a \in X$ . Logo temos  $h \neq \phi_a$  para todo  $a \in X$ . Logo  $h \notin f(X)$ . Logo  $f$  não é sobrejetiva.  $\square$

### 3.3 Produto Cartesiano

### 3.4 Relações

#### 3.4.1 Definições iniciais

**Definição 3.6** (Relação). Uma relação  $R$  entre os conjuntos  $A$  e  $B$  é um subconjunto do conjunto  $A \times B$ .

**Definição 3.7** ( $a R b$ ). Dado uma relação entre  $A$  e  $B$ , dizemos que  $a \in A$  está relacionado a  $b \in B$  se  $(a, b) \in R$ . Escrevemos nesse caso  $a R b$ . Portanto:

$$a R b \iff (a, b) \in R$$

Não utilizarei essa notação, mas algumas fontes usam.

#### 3.4.2 Relações de Equivalência

**Definição 3.8** (Relação de equivalência). Uma relação  $R \subset A \times A$  é de equivalência, se para todos  $a, b, c \in A$ :

- (Simetria)  $(a, b) \in R \iff (b, a) \in R$ .
- (Transitividade)  $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \implies (a, c) \in R$ .
- (Reflexividade)  $(a, a) \in R$ .

**Definição 3.9** ( $\overset{R}{\sim}$ ). Quando uma relação  $R$  entre  $A$  e  $B$  for de equivalência, escrevemos  $a \overset{R}{\sim} b$  no lugar de  $(a, b) \in R$ .

*Observação 3.1.* Quando não houver confusão sobre a relação que estamos tratando, escreverei somente  $a \sim b$  no lugar de  $a \stackrel{R}{\sim} b$ .

*Observação 3.2.* Re-escrevendo a definição de relação de equivalência usando a nova notação, temos:

Uma relação  $R \subset A \times A$  é de equivalência, se para todos  $a, b, c \in A$  :

- (Simetria)  $a \sim b \iff b \sim a$ .
- (Transitividade)  $a \sim b \wedge b \sim c \implies a \sim c$ .
- (Reflexividade)  $a \sim a$ .

**Definição 3.10** (Classe de equivalência). Dado uma relação de equivalência  $R \subset A \times A$ , a classe de equivalência de um elemento  $a \in A$  (denotada por  $\bar{a}$ ) é dada por

$$\bar{a} = \{x \in A \mid x \sim a\}$$

.

**Proposição 3.24.** Dada uma relação de equivalência  $R \subset A \times A$  e  $a \in A$ , temos  $a \in \bar{a}$ .

*Demonstração.* Temos  $\bar{a} = \{x \in A \mid x \sim a\}$ . Como  $a \sim a$  pela reflexividade, temos  $a \in \bar{a}$ .  $\square$

**Proposição 3.25.** Dado uma relação  $R \subset A \times A$  e  $a, b \in A$ , as afirmações abaixo são equivalentes:

- (a)  $\bar{a} = \bar{b}$
- (b)  $a \sim b$
- (c)  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$

*Demonstração.* (a)  $\implies$  (b): Supondo  $\bar{a} = \bar{b}$ . Como  $a \in \bar{a}$ , temos  $a \in \bar{b}$  pela hipótese. Logo  $a \sim b$  pela definição de  $\bar{b}$ .

(b)  $\implies$  (c): Supondo  $a \sim b$ . Logo  $a \in \bar{b}$ . Como  $a \in \bar{a}$  e  $a \in \bar{b}$ , temos  $a \in \bar{a} \cap \bar{b} \implies \bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ .

(c)  $\implies$  (a): Supondo  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , logo existe  $c \in \bar{a} \cap \bar{b}$ , logo  $c \sim a$  e  $c \sim b$ . Se  $y \in \bar{a}$ , temos  $y \sim a$ . Como  $c \sim a$ , temos  $y \sim c$ . Como  $c \sim b$ , temos  $y \sim b \implies y \in \bar{b}$ . Supondo  $y \in \bar{b}$ , logo  $y \sim b$ . De  $y \sim b \wedge b \sim c \wedge c \sim a$ , temos  $y \sim a \implies y \in \bar{a}$ . Logo  $\bar{a} = \bar{b}$ .  $\square$

### 3.4.3 Relação de Ordem

**Definição 3.11** (Ordem Parcial). Uma relação  $R \subset A \times A$  é uma ordem parcial, se para todos  $a, b, c \in A$  :

- (Anti-Simetria)  $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \iff a = b$ .
- (Transitividade)  $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \implies (a, c) \in R$ .
- (Reflexividade)  $(a, a) \in R$ .

**Definição 3.12** ( $\leq$ ). Se  $R$  é uma ordem parcial de  $A$ , geralmente escrevemos  $a \leq b$  no lugar de  $(a, b) \in R$ .

*Observação 3.3.* Re-escrevendo a definição de relação de ordem parcial usando a nova notação, temos:

Uma relação  $R \subset A \times A$  é uma ordem parcial, se para todos  $a, b, c \in A$  :

- (Anti-Simetria)  $a \leq b \wedge b \leq a \iff a = b$ .
- (Transitividade)  $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$ .
- (Reflexividade)  $a \leq a$ .

**Definição 3.13** (Comparável). Dado um conjunto  $A$  e uma relação de ordem  $R$ , dois elementos  $a, b \in A$  são comparáveis se  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ .

*Observação 3.4.* Dois elementos de um conjunto parcialmente ordenado podem não ser comparáveis.

**Definição 3.14** (Ordem Total). Uma ordem parcial  $R$  onde quaisquer dois elementos são comparáveis é uma ordem total. Outros possíveis nomes são ordem linear ou ordem simples.

### 3.4.4 Funções

**Definição 3.15** (Produto Cartesiano de uma Família). Se  $\{A_i\}_{i \in I}$  é uma família de conjuntos indexada por  $I$ , definimos  $\prod_{i \in I} A_i$  como o conjunto de todas

as funções  $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$  com  $f(i) \in A_i$  para todo  $i \in I$ .

## 3.5 Números Naturais

### 3.5.1 Axiomas de Peano

Temos como conceitos primitivos o conjunto dos naturais, denotado por  $\mathbb{N}$ , cujos elementos são os números naturais, e uma função  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o número  $s(n)$  é o sucessor de  $n$ . Temos os axiomas:

**Axioma 5.**  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é injetiva.

**Axioma 6.**  $\mathbb{N} - s(\mathbb{N}) = \{1\}$ . Ou seja, só existe um número natural que não é sucessor de nenhum outro, e ele é denotado por 1.

**Proposição 3.26.** *Todo natural diferente de 1 possui um antecessor.*

*Demonstração.* Seja  $n \neq 1$  um número natural. Suponha que não exista  $n_0$  natural com  $s(n_0) = n$ . Logo  $n \notin s(\mathbb{N})$ . Logo  $n \in \mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ . Mas  $\mathbb{N} - s(\mathbb{N}) = \{1\}$ . Logo  $n = 1$ . Contradição. Logo existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $s(n_0) = n$ .  $\square$

*Observação 3.5.* Observe que a função  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$  é injetiva por definição e sobrejetiva pela proposição 3.26, logo é uma bijeção entre um subconjunto dos naturais com os naturais.

**Axioma 7** (Princípio de indução). *Se  $X \subset \mathbb{N}$  é um subconjunto tal que:*

$$\begin{cases} 1 \in X \\ n \in X \implies s(n) \in X \end{cases}$$

*Então  $\mathbb{N} = X$ .*

### 3.5.2 Soma nos Naturais

**Definição 3.16** (Soma). Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , sua soma  $m + n$  é definida como:

$$m + n := s^n(m).$$

A soma deve obedecer

$$m + 1 = s(m) \tag{1}$$

$$m + s(n) = s(m + n) \tag{2}$$

para todos os  $m, n$  naturais.

*Observação 3.6.* Dedekind prova o "Teorema da Definição por Indução" para garantir que a notação  $s^n(m)$  faça sentido.

**Proposição 3.27** (Associatividade da Soma). *Para todos  $p, m, n \in \mathbb{N}$ , temos  $m + (n + p) = (m + n) + p$ .*

*Demonstração.* Seja  $X = \{p \in \mathbb{N} \mid \forall m, n \in \mathbb{N} : m + (n + p) = (m + n) + p\}$ . Da definição de adição, temos pra qualquer  $m, n$  que  $n + 1 = s(n)$ , logo  $m + (n + 1) = m + s(n) = s(m + n) = (m + n) + 1 \implies m + (n + 1) = (m + n) + 1$ . Logo  $1 \in X$ . Se  $p \in X$ , temos  $m + (n + p) = (m + n) + p$ . Logo

$$\begin{aligned} m + (n + s(p)) &= m + s(n + p) \\ &= s(m + (n + p)) \\ &= s((m + n) + p) \\ &= (m + n) + s(p). \end{aligned}$$



Logo  $p \in X \implies s(p) \in X$ . Temos que  $X = \mathbb{N}$  pelo princípio de indução. Logo a soma é associativa nos naturais.  $\square$

**Lema 4** (Comutatividade da soma com o 1). *Para todo  $m \in \mathbb{N}$ , temos  $m + 1 = 1 + m$ .*

*Demonstração.* Seja  $X = \{m \in \mathbb{N} \mid m + 1 = 1 + m\}$ . Temos  $1 \in X$ , pois  $1 + 1 = 1 + 1$ . Supondo  $m \in X$ , logo  $m + 1 = 1 + m$ . Temos

$$\begin{aligned} 1 + s(m) &= s(1 + m) \\ &= s(m + 1) \\ &= (m + 1) + 1 \\ &= s(m) + 1 \end{aligned}$$

Como  $m \in X \implies s(m) \in X$  e  $1 \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$ .  $\square$

**Proposição 3.28** (Comutatividade da soma). *Para todos  $m, n \in \mathbb{N}$ , temos  $m + n = n + m$ .*

*Demonstração.* Seja  $X = \{m \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$ . Temos  $1 \in X$  pelo Lema 4. Supondo  $m \in X$ , logo  $m + n = n + m$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Temos

$$\begin{aligned} n + s(m) &= s(n + m) \\ &= s(m + n) \\ &= (m + n) + 1 \\ &= 1 + (m + n) \\ &= (1 + m) + n \\ &= (m + 1) + n \\ &= s(m) + n \end{aligned}$$

Como  $1 \in X$  e  $m \in X \implies s(m) \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$  pelo princípio de indução.  $\square$

**Proposição 3.29** (Lei do corte). *Para todos  $m, n, p \in \mathbb{N}$ , temos  $m + n = m + p \implies n = p$ .*

*Demonstração.* Seja  $X = \{m \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} \forall p \in \mathbb{N} : m + n = m + p \implies n = p\}$ . Temos  $1 \in X$  pois  $1 + n = 1 + p \implies n + 1 = p + 1 \implies s(n) = s(p) \implies n = p$  pela injetividade de  $s$ . Supondo  $m \in X$ , temos  $m + n = m + p \implies n = p$  para todos  $n, p$  naturais. Temos

$$s(m) + n = s(m) + p \implies$$

$$n + s(m) = p + s(m) \implies$$

$$s(n + m) = s(p + m) \implies$$

$$n + m = p + m \implies$$

$$m + n = m + p \implies$$

$$n = p.$$

Logo  $s(m) + n = s(m) + p \implies n = p$ . Como  $1 \in X$  e  $m \in X \implies s(m) \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$  pelo princípio de indução.  $\square$

**Lema 5** (Não existem ciclos nos naturais). *Para todos  $m, p \in \mathbb{N}$ , temos  $m \neq m + p$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $m = m + p$  com  $m, p \in \mathbb{N}$ . Logo  $s(m) = s(m + p) \implies m + 1 = (m + p) + 1 \implies m + 1 = m + (p + 1) \implies 1 = p + 1 \implies s(p) = 1$ . Como 1 não é sucessor de nenhum natural, temos uma contradição. Logo  $m \neq m + p$  para todos naturais  $m, p$ .  $\square$

**Lema 6** (Unicidade da Tricotomia). *Dados dois naturais  $m$  e  $n$ , apenas uma das 3 possibilidades ocorre:*

$$\begin{cases} m = n \\ \exists p \in \mathbb{N} : m = n + p \\ \exists q \in \mathbb{N} : n = m + q \end{cases}$$

*Demonstração.* Pelo lema 5, se  $m = n$ , não podemos ter  $m = n + p = m + p$  ou  $n = m + q = n + q$  para algum  $p, q \in \mathbb{N}$ . Se  $\exists p \in \mathbb{N} : m = n + p$ , não podemos ter  $m = n$  pelo lema 5 e não podemos ter  $\exists q \in \mathbb{N} : n = m + q$ , pois teríamos  $m = n + p = (m + q) + p = m + (q + p) \implies m = m + (q + p)$ , que contradiz o lema 5.  $\square$

**Proposição 3.30** (Tricotomia). *Dados dois naturais  $m$  e  $n$ , exatamente uma das 3 possibilidades ocorre:*

$$\left\{ \begin{array}{l} m = n \\ \exists p \in \mathbb{N} : m = n + p \\ \exists q \in \mathbb{N} : n = m + q \end{array} \right.$$

*Demonstração.* Seja  $X = \{m \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} : (m = n) \vee (\exists p \in \mathbb{N} : m = n + p) \vee (\exists q \in \mathbb{N} : n = m + q)\}$ , ou seja: o conjunto dos números naturais que satisfazem pelo menos uma das condições da tricotomia para todo  $n$ .

$1 \in X$ , pois dado  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $n = 1$  ou  $n \neq 1$ . Se  $n = 1$ , temos  $m = 1 = n$ . Se  $n \neq 1$ , como  $\mathbb{N} - s(\mathbb{N}) = \{1\}$ , temos que existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $s(n_0) = n$ . Logo  $n = n_0 + 1 \implies \exists q : n = q + 1 = q + m$ .

Supondo  $m \in X$ . Dado  $n \in \mathbb{N}$ , se  $m = n$ , temos  $s(m) = s(n) = n + 1$ , logo  $\exists p \in \mathbb{N} : s(n) = n + p$ . Se  $\exists p \in \mathbb{N} : m = n + p$ , temos  $s(m) = s(n + p) = (n + p + 1) = n + s(p)$ , logo  $\exists p' \in \mathbb{N} : s(n) = n + p'$ . Se  $\exists q \in \mathbb{N} : n = m + q$  com  $q = 1$ , temos  $n = m + 1 = s(m)$ . Se  $\exists q \in \mathbb{N} : n = m + q$  com  $q \neq 1$ , existe  $q_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $s(q_0) = q$ , logo temos  $n = m + q = m + s(q_0) = m + (q_0 + 1) = m + 1 + q_0 = s(m) + q_0 \implies \exists q' \in \mathbb{N} : n = s(m) + q'$ .

Como  $1 \in X$  e  $m \in X \implies s(m) \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$ . Logo para todo par  $m, n \in \mathbb{N}$ , pelo menos uma das condições da tricotomia ocorre. Pelo lema 6, apenas uma das possibilidades ocorre.  $\square$

### 3.5.3 Ordem nos Naturais

**Definição 3.17** ( $<$ ).

$$m < n \iff \exists p \in \mathbb{N} : n = m + p$$

Dados  $m, n$  naturais, dizemos que  $m$  é menor que  $n$  ( $m < n$ ) quando existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $n = m + p$ .

**Proposição 3.31.** *Temos  $1 < n$  para todo  $1 \neq n \in \mathbb{N}$ .*

*Demonstração.* Como  $n \neq 1$ , temos pela proposição 3.26 que  $n$  possui um antecessor. Logo existe  $n_0$  tal que  $s(n_0) = n \implies n = 1 + n_0$ . Logo  $1 < n$ .  $\square$

**Definição 3.18** ( $\leq$ ).

$$m \leq n \iff (m = n) \vee (m < n)$$

**Proposição 3.32** (Transitividade da relação  $<$ ).  $m < n \wedge n < p \implies m < p$

*Demonstração.* Se  $m < n$  e  $n < p$ , temos  $n = m + q$  e  $p = n + r$  para algum par  $q, r \in \mathbb{N}$ . Logo  $p = n + r = (m + q) + r = m + (q + r)$ . Logo  $m < p$ .  $\square$

**Proposição 3.33** (Tricotomia da relação  $<$ ). *Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , exatamente uma das afirmações ocorre:  $m = n$ , ou  $m < n$ , ou  $n < m$ .*

*Demonstração.* Segue diretamente da proposição 3.30.  $\square$

**Proposição 3.34.**

$$p \leq q \wedge q \leq p \iff p = q$$

*Demonstração.* Supondo  $p = q$ , temos  $p \leq q$  e  $q \leq p$ .

Supondo  $p \leq q \wedge q \leq p$ . Se  $p = q$ , acabou a demonstração. Supondo  $p \neq q$ . Logo devemos ter  $p < q$  e  $q < p$  (contradição). Logo devemos ter  $p = q$ .  $\square$

**Proposição 3.35.** *Dados  $m, n, p$  naturais, temos*

$$m + p < n + p \iff m < n.$$

*Demonstração.* Temos  $m + p < n + p \implies \exists q \in \mathbb{N} : n + p = (m + p) + q \implies \exists q \in \mathbb{N} : n = m + q \implies m < n$ . Se  $m < n$ , existe  $q \in \mathbb{N}$  tal que  $n = m + q$ , daí  $n + p = (m + q) + p = (m + p) + q$ , logo  $m + p < n + p$ .  $\square$

**Lema 7.**

$$m < n + 1 \iff m \leq n$$

*Demonstração.* Supondo  $m < n + 1$ . Logo existe  $q \in \mathbb{N}$  tal que  $n + 1 = m + q$ . Se  $q = 1$ , temos  $n + 1 = m + 1 \implies n = m \implies m \leq n$ . Se  $q \neq 1$ , existe  $q_0$  tal que  $s(q_0) = q$ . Logo  $n + 1 = m + s(q_0) = m + q_0 + 1 \implies n = m + q_0 \implies m < n \implies m \leq n$ .

Se  $m \leq n$ , temos  $m \leq n < n + 1 \implies m < n + 1$ .  $\square$

**Lema 8.**

$$m < n \iff m + 1 \leq n$$

*Demonstração.* Pelo lema anterior:

$$m < n \iff m + 1 < n + 1 \iff m + 1 \leq n$$

$\square$

### 3.5.4 Produto nos Naturais

**Definição 3.19** (Multiplicação). Para todo  $m \in \mathbb{N}$ , seja  $f_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que associa cada  $p \in \mathbb{N}$  a  $f_m(p) = m + p$ . Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , o produto entre naturais satisfaz  $m \cdot 1 = m$  e  $m \cdot (n + 1) = (f_m)^n(m)$ .

**Lema 9** (Distributiva do sucessor).

$$m \cdot (n + 1) = mn + m$$

*Demonstração.* Se  $n = 1$ , temos  $m \cdot (1 + 1) = (f_m)^1(m) = f_m(m) = m + m = m \cdot 1 + m$ . Se  $n \neq 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $s(n_0) = n$ . Logo temos  $m \cdot (n + 1) = (f_m)^n(m) = (f_m)^{s(n_0)}(m) = f_m((f_m)^{n_0}(m)) = f_m(m(n_0 + 1)) = f_m(m \cdot n) = mn + m$ .  $\square$

**Proposição 3.36** (Distributiva à esquerda).

$$m \cdot (n + p) = mn + mp$$

*Demonstração.* Seja  $X = \{p \in \mathbb{N} \mid \forall m, n \in \mathbb{N} : n \cdot (m + p) = nm + np\}$ . Temos  $1 \in X$  pelo lema 3.5.4. Supondo  $p \in X$ . Temos

$$n \cdot (m + s(p)) = n \cdot ((m + p) + 1)$$

$$= n \cdot (m + p) + n$$

$$= nm + np + n$$

$$= nm + n(p + 1)$$

$$= nm + n \cdot s(p)$$

Como  $p \in X \implies s(p) \in X$  e  $1 \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$ .  $\square$

**Proposição 3.37** (Distributiva à direita).

$$(m + n) \cdot p = mp + np$$

*Demonstração.* Seja  $X = \{p \in \mathbb{N} \mid \forall m, n \in \mathbb{N} : (m + n) \cdot p = mp + np\}$ . Temos  $1 \in X$ , pois  $(m + n) \cdot 1 = m + n = m \cdot 1 + n \cdot 1$ . Supondo  $p \in X$ . Temos

$$(m + n) \cdot s(p) = (m + n) \cdot (p + 1)$$

$$= (m + n) \cdot p + (m + n)$$

$$= mp + np + m + n$$

$$= mp + m + np + n$$

$$= m(p + 1) + n(p + 1)$$

$$= m \cdot s(p) + n \cdot s(p)$$

Como  $p \in X \implies s(p) \in X$  e  $1 \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$ .  $\square$

**Proposição 3.38** (Associatividade).

$$m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$$

*Demonstração.* Seja  $X = \{p \in \mathbb{N} \mid \forall m, n \in \mathbb{N} : m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p\}$ . Temos  $m \cdot (n \cdot 1) = m \cdot n = (m \cdot n) \cdot 1$ , logo  $1 \in X$ .

Supondo  $p \in X$ . Temos

$$\begin{aligned} m \cdot (n \cdot s(p)) &= m \cdot (n \cdot (p + 1)) \\ &= m \cdot (n \cdot p + n) \\ &= m \cdot (n \cdot p) + m \cdot n \\ &= (m \cdot n) \cdot p + (m \cdot n) \\ &= (m \cdot n) \cdot (p + 1) \\ &= (m \cdot n) \cdot s(p) \end{aligned}$$

Como  $p \in X \implies s(p) \in X$  e  $1 \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$ . □

**Lema 10** (Comutatividade com 1).

$$m \cdot 1 = 1 \cdot m$$

*Demonstração.* Seja  $X = \{m \in \mathbb{N} \mid m \cdot 1 = 1 \cdot m\}$ . Temos  $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$ , logo  $1 \in X$ .

Supondo  $m \in X$ . Temos

$$\begin{aligned}
 s(m) \cdot 1 &= (m + 1) \cdot 1 \\
 &= m + 1 \\
 &= m \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\
 &= 1 \cdot m + 1 \cdot 1 \\
 &= 1 \cdot (m + 1) \\
 &= 1 \cdot s(m)
 \end{aligned}$$

Como  $m \in X \implies s(m) \in X$  e  $1 \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$ .  $\square$

**Proposição 3.39** (Comutatividade).

$$m \cdot n = n \cdot m$$

*Demonstração.* Seja  $X = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N} : m \cdot n = n \cdot m\}$ . Temos  $1 \in X$  pelo lema 10. Supondo  $n \in X$ . Temos

$$\begin{aligned}
 m \cdot s(n) &= m \cdot (n + 1) \\
 &= mn + m \cdot 1 \\
 &= nm + 1 \cdot m \\
 &= (n + 1) \cdot m \\
 &= s(n) \cdot m
 \end{aligned}$$

Como  $p \in X \implies s(p) \in X$  e  $1 \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$ .  $\square$

**Proposição 3.40** (Monotonicidade).

$$m < n \implies mp < np$$

*Demonstração.* Supondo  $m < n$ . Logo  $n = m + q$  com  $q \in \mathbb{N}$ . Logo  $np = (m + q)p = mp + qp$ . Como  $qp \in \mathbb{N}$ , temos  $mp < np$ .  $\square$

**Proposição 3.41** (Lei do cancelamento).

$$mp < np \implies m < n$$

*Demonstração.* Supondo  $mp < np$ . Pela tricotomia, temos  $n < m$ ,  $m = n$ , ou  $m < n$ . Se  $n < m$ , temos  $np < mp$  (contradição). Se  $m = n$ , temos  $mp = np$  (contradição). Logo devemos ter  $m < n$ .  $\square$

**Definição 3.20** (Elemento Mínimo). Dado  $X \subset \mathbb{N}$ , dizemos que  $p \in X$  é o menor elemento (ou elemento mínimo) de  $X$  se  $\forall n \in X : p \leq n$ .

*Observação 3.7.* Como  $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq n$ , temos que  $1 \in X$  implica 1 menor elemento de  $X$ .

**Proposição 3.42.** O elemento mínimo de um conjunto  $X \subset \mathbb{N}$ , quando existir, é único.

*Demonstração.* Suponha que dado um conjunto  $X \subset \mathbb{N}$ , existam  $p, q \in X$  elementos mínimos. Logo  $p \leq q$  e  $q \leq p$ . Logo  $p = q$ .  $\square$

**Definição 3.21** (Maior elemento). Dado  $X \subset \mathbb{N}$ , dizemos que  $p \in X$  é o maior elemento (ou elemento máximo) de  $X$  se  $\forall n \in X : p \geq n$ .

**Proposição 3.43.** Os naturais não possuem maior elemento.

*Demonstração.* Suponha que  $x \in \mathbb{N}$  seja o maior elemento de  $\mathbb{N}$ . Teríamos  $s(x) \in \mathbb{N}$  e  $x < s(x)$  (contradição). Logo os naturais não possuem maior elemento.  $\square$

**Proposição 3.44.** O elemento máximo de um conjunto  $X \subset \mathbb{N}$ , quando existir, é único.

*Demonstração.* Exercício.  $\square$

**Definição 3.22** ( $I_n$ ).

$$I_n := \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$$

**Lema 11.**

$$I_{n+1} = I_n \cup \{n+1\}$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} x \in I_{n+1} &\iff \\ x \leq n+1 &\iff \\ x < n+1 \vee x = n+1 &\iff \\ x \leq n \vee x = n+1 &\iff \\ x \in I_n \vee x \in \{n+1\} &\iff \\ x \in I_n \cup \{n+1\} \end{aligned}$$



□

**Teorema 1** (Princípio da boa Ordenação). *Todo subconjunto  $A \neq \emptyset$  dos naturais admite menor elemento.*

*Demonstração.* Dado  $A \subset \mathbb{N}$  não vazio. Se  $1 \in A$ , temos 1 menor elemento.

Supondo  $1 \notin A$ . Logo  $1 \in \mathbb{N} - A$ . Seja  $X = \{x \in \mathbb{N} \mid I_x \subset \mathbb{N} - A\}$ . Como  $1 \in \mathbb{N} - A$ , temos  $I_1 = \{1\} \subset \mathbb{N} - A$ , logo  $1 \in X$ . Como  $A$  é não vazio, existe  $a \in A$ . Logo  $a \notin \mathbb{N} - A$ . Temos  $a \leq a \implies a \in I_a$ . Logo  $I_a \not\subset \mathbb{N} - A$ . Logo  $a \notin X$ . Temos  $1 \in X$  e  $X \neq \mathbb{N}$ , logo o axioma da indução deve falhar. Logo deve existir  $n \in X$  com  $n+1 = s(n) \notin X$ .

Afirmo que  $n+1$  é o menor elemento de  $A$ . Como  $n \in X$ , temos  $I_n \subset \mathbb{N} - A$ , logo  $x \leq n \implies x \in \mathbb{N} - A$ . Como  $n+1 \notin X$ , temos  $I_{n+1} \not\subset \mathbb{N} - A$ . Logo existe um  $m \in I_{n+1}$  com  $m \notin \mathbb{N} - A \implies m \in A$ . Observe que  $m \in I_{n+1} \implies m \leq n+1 \implies m = n+1 \vee m < n+1$ . Se  $m < n+1$ , temos pelo Lema 7 que  $m \leq n$ , que implica  $m \in I_n$ , logo  $m \in \mathbb{N} - A$  (contradição). Logo devemos ter  $m = n+1$ . Temos portanto que  $n+1 \in A$ .

Suponha que exista  $p \in A$  tal que  $p < n+1$ . Teríamos  $p \leq n \implies p \in I_n \implies p \in \mathbb{N} - A \implies p \notin A$ . Contradição. Logo temos  $n+1 \leq p$  para todo  $p \in A$ . Logo  $n+1$  é o menor elemento de  $A$ . □

**Teorema 2** (Indução completa). *Seja  $X \subset \mathbb{N}$  tal que  $(\forall m \in \mathbb{N} : m < n \implies m \in X) \implies n \in X$ . Então  $X = \mathbb{N}$*

*Demonstração.* Temos  $1 \in X$ , pois  $1 \notin X$  implicaria na existência de um  $m < 1$  com  $m \notin X$ . Supondo  $X \neq \mathbb{N}$  e  $A = \mathbb{N} - X$ . Como  $X \neq \mathbb{N}$ , temos  $A \neq \emptyset$ . Logo  $A$  possui um menor elemento  $a \in A$ . Se  $p \in \mathbb{N}$  com  $p < a$ , então  $p \notin A$ , logo  $p \in X$ . Como  $\forall p \in \mathbb{N} : p < a \implies p \in X$ , temos  $a \in X$ . Contradição. Logo  $A$  é vazio. Logo  $X = \mathbb{N}$ . □

### 3.5.5 Exercícios

*Exercício 3.5.1.* Se  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é estritamente crescente, então:

(a)  $\forall n \in \mathbb{N} : \phi(n) \geq n$ .

(b)  $\phi$  é injetiva.

*Demonstração.*

(a) Seja  $X = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n) \geq n\}$ . Temos  $1 \in X$  pois  $\forall p \in \mathbb{N} p \geq 1$ . Suponha  $n \in X$ , logo  $\phi(n) \geq n$ . Daí temos  $\phi(n+1) > \phi(n) \geq n \implies \phi(n+1) > n \iff \phi(n+1) \geq n+1$ . Como  $1 \in X$  e  $n \in X \implies n+1 \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$ .

(b) Se  $a \neq b$ , temos  $a < b$  ou  $a > b$ , daí  $\phi(a) > \phi(b)$  ou  $\phi(a) < \phi(b)$ . Em ambos os casos, temos  $\phi(a) \neq \phi(b)$ .

□

## 3.6 Conjuntos Finitos e Infinitos

### 3.6.1 Conjuntos Finitos

**Definição 3.23** (Conjuntos finitos). Um conjunto  $X$  é finito quando for vazio ou quando existir para algum  $n \in \mathbb{N}$  uma bijeção  $\phi : I_n \rightarrow X$

**Definição 3.24** (Tamanho de um conjunto). Dado um conjunto finito. Dizemos que ele tem zero elementos se for vazio e que ele tem  $n$  elementos se tiver bijeção com  $I_n$ .

*Observação 3.8.* O conjunto  $I_n$  é finito e possui  $n$  elementos.

*Observação 3.9.* Denota-se  $|A|$  como o tamanho do conjunto  $A$ .

**Proposição 3.45.** Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma bijeção, então  $X$  é finito se, e somente se,  $Y$  for finito.

*Demonstração.* Se  $X$  for finito, então existe um bijeção  $\phi : I_n \rightarrow X$ . A composição  $(\phi \circ f) : I_n \rightarrow Y$  é uma bijeção, logo  $Y$  é finito. O caso  $Y$  finito é análogo.  $\square$

**Teorema 3.** Seja  $A \subset I_n$  não vazio. Se existe uma bijeção  $f : I_n \rightarrow A$ , então  $A = I_n$ .

*Demonstração.* Seja  $X = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall A \subset I_n : (\text{Existe uma bijeção } f : I_n \rightarrow A) \implies A = I_n\}$ . Temos  $1 \in X$ , pois  $I_1 = \{1\}$  e  $A \subset I_1 \implies A = \{1\} = I_1$ . Supondo  $n \in X$ . Seja  $A \subset I_{n+1}$  com uma bijeção  $f : I_{n+1} \rightarrow A$ . Restringindo  $f$  a  $I_n$ , obtemos  $f' : I_n \rightarrow A - \{f(n+1)\}$ , que é uma bijeção pela proposição 3.12.

Se  $A - \{f(n+1)\} \subset I_n$ , temos por  $n \in X$  que  $A - \{f(n+1)\} = I_n$ . Como o contra-domínio de  $f$  é  $A$  e  $A \subset I_{n+1}$ , temos que  $f(n+1) \in A \implies f(n+1) \in I_{n+1} \implies f(n+1) \in I_n \vee f(n+1) \in \{n+1\}$ . Se  $f(n+1) \in I_n$ , temos  $f(n+1) \notin A - \{f(n+1)\}$ , logo  $A - \{f(n+1)\} \neq I_n$  (contradição). Logo temos  $f(n+1) = n+1$ . Logo  $f(n+1) = n+1 \in A$ . Como  $A - \{n+1\} = A - \{f(n+1)\} = I_n$ , temos  $(A - \{n+1\}) \cup \{n+1\} = I_n \cup \{n+1\} \implies A \cup \{n+1\} = I_{n+1} \implies A = I_{n+1}$ . Logo temos  $A = I_{n+1}$ .

Se  $A - \{f(n+1)\} \not\subset I_n$ . Logo existe  $a \in A$  tal que  $a \notin I_n$  e  $a \neq f(n+1)$ . Mas  $A \subset I_{n+1}$ . Logo  $a \in I_{n+1} = I_n \cup \{n+1\}$ . Logo devemos ter  $a = n+1$ . Como  $f$  é sobrejetiva, existe  $m \in I_{n+1}$  tal que  $f(m) = n+1$ . Definindo a função

$$g : I_{n+1} \rightarrow A, \text{ como } g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq f(n+1) \wedge x \neq n+1 \\ n+1, & x = n+1 \\ f(n+1), & x = m \end{cases}. \text{ Temos } g$$

uma bijeção. Logo a restrição  $g' : I_n \rightarrow A - \{g(n+1)\}$  é uma bijeção com  $A - \{g(n+1)\} \subset I_n$ . Portanto temos  $A - \{g(n+1)\} = I_n$  com  $A = I_{n+1}$ .  $\square$

**Proposição 3.46.** Se existe uma bijeção  $f : I_n \rightarrow I_m$ , então  $I_m = I_n$ .

*Demonstração.* Se  $m \leq n$ , então existe uma bijeção  $f : I_n \rightarrow I_m$  com  $I_m \subset I_n$ . Logo pelo teorema anterior, temos  $I_m = I_n$ . Se  $n > m$ , temos a bijeção  $f^{-1} : I_m \rightarrow I_n$  com  $I_n \subset I_m$ . Logo pelo teorema anterior  $I_m = I_n$ .  $\square$

**Proposição 3.47.** *Não existe uma bijeção  $f : X \rightarrow Y$  entre um conjunto finito  $X$  e uma parte própria  $Y \subset X$ .*

*Demonstração.* Como  $X$  é finito, existe uma bijeção  $g : I_n \rightarrow X$ . Suponha que exista uma bijeção  $f : X \rightarrow Y$ . Como  $Y$  é parte própria, existe um  $x \in X - Y$ . Tome  $A = g^{-1}(Y) \subset g^{-1}(X) = I_n$ . Temos  $g^{-1}(x) \notin A$ , logo  $A$  é uma parte própria de  $I_n$ . Queremos achar uma bijeção  $h : I_n \rightarrow A$ . Restringindo  $g$  a  $A$ , obtendo a bijeção  $g' : A \rightarrow Y$ . Definindo a bijeção  $h = (g') \circ f \circ g : I_n \rightarrow A$ . Pelo teorema 3, temos que  $A = I_n$ . Uma contradição, pois  $A$  é parte própria de  $I_n$ . Logo não existe bijeção entre um conjunto finito  $X$  e uma parte própria  $Y \subset X$ .  $\square$

**Lema 12.** *Todo subconjunto  $A$  de  $I_n$  é finito e temos  $|A| \leq n$*

*Demonstração.* Seja  $X = \{n \in \mathbb{N} \mid A \subset I_n \implies A \text{ finito} \wedge |A| \leq n\}$ . Temos  $1 \in X$ , pois os subconjuntos de  $I_1 = \{1\}$  são  $\{\}$  e  $\{1\} = I_1$ , ambos finitos.

Suponha  $n \in X$ . Seja  $A \subset I_{n+1} = I_n \cup \{n+1\}$ . Se  $n+1 \notin A$ , então temos  $A \subset I_n$ . Pela hipótese de indução, temos  $A$  finito e  $|A| \leq n < n+1$ .

Supondo  $n+1 \in A$ . Se  $A = \{n+1\}$ , temos  $A$  finito e  $|A| = 1 \leq n$ . Supondo  $A \neq \{n+1\}$ , temos  $B = A - \{n+1\} \neq \emptyset$  e  $B \subset I_n$ . Logo  $B$  é finito e temos  $k = |B| \leq n$ . Como  $B$  é finito, existe a bijeção  $f : I_k \rightarrow B$ . Definindo a bijeção  $f' : I_{k+1} \rightarrow A$  pondo  $f'(x) = f(x)$  para  $x \in I_k$  e  $f'(k+1) = n+1$ . Logo  $A$  é finito e temos  $|A| = k+1 \leq n+1$ .  $\square$

**Lema 13.** *Seja  $A \subset I_n$ . Temos  $|A| = n \iff A = I_n$ .*

*Demonstração.* Se  $|A| = n$ , existe a bijeção  $f : I_n \rightarrow A$ , com  $A \subset I_n$ , logo  $A = I_n$ .  $\square$

**Teorema 4.** *Todo subconjunto  $Y$  de um conjunto finito  $X$  é finito e  $|Y| \leq |X|$ , com  $|Y| = |X| \iff X = Y$ .*

*Demonstração.* Se  $X$  é finito, existe uma bijeção  $f : I_n \rightarrow X$ . Seja  $A = f^{-1}(Y) \subset I_n$  e seja a bijeção  $f' : A \rightarrow Y$  a restrição de  $f$  a  $A$ . Como  $A \subset I_n$ , temos  $A$  finito e  $|A| \leq n$ . Logo  $Y$  é finito e  $|Y| = |A| \leq n$ . Temos  $|Y| = |A| = n = |X| \iff |A| = I_n$ . Logo  $f^{-1}(Y) = I_n = f^{-1}(X)$ . Logo  $X = Y$ .  $\square$

**Proposição 3.48.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função injetiva. Se  $Y$  é finito, então  $X$  é finito e  $|X| \leq |Y|$ .*

*Demonstração.* Como existe a injeção  $f : X \rightarrow Y$ , temos a bijeção  $f' : X \rightarrow f(X)$ , com  $f(X) \subset Y$ . Como  $Y$  é finito, temos  $f(X)$  finito e  $|f(X)| \leq |Y|$ . Como existe a bijeção  $f' : X \rightarrow f(X)$ , temos  $|X| = |f(X)| \leq |Y|$ .  $\square$

**Proposição 3.49.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função sobrejetiva. Se  $X$  é finito, então  $Y$  é finito e  $|Y| \leq |X|$ .*

*Demonstração.* Como  $f$  é sobrejetiva, ela admite inversa à direita. Seja  $g : Y \rightarrow X$  a inversa à direita de  $f$ . Se  $g(y) = g(y')$ , temos  $f(g(y)) = f(g(y'))$ , logo  $y = y'$ . Logo  $g$  é injetiva. Pela proposição anterior, temos  $Y$  finito com  $|Y| \leq |X|$ .  $\square$

### 3.6.2 Conjuntos Infinitos

**Definição 3.25** (Conjunto infinito). Um conjunto é infinito quando não for finito.

*Observação 3.10.* A função sucessor com o contradomínio reduzido é uma bijeção entre uma parte dos naturais com os naturais:

$$s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} - \{1\}$$

Logo os naturais são infinitos.

**Definição 3.26** (Conjunto limitado). Um conjunto  $X \subset \mathbb{N}$  é limitado quando existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \in X : n \leq p$ .

**Teorema 5.** Seja  $X \subset \mathbb{N}$  não vazio. As seguintes afirmações são equivalentes:

- $X$  é finito.
- $X$  é limitado.
- $X$  possui maior elemento.

*Demonstração.* (a)  $\implies$  (b)

Seja  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid |X| = n \implies X \text{ limitado}\}$ . Se  $|X| = 1$ , temos que  $X = \{a\}$  para algum  $a \in \mathbb{N}$ . Logo  $X$  é limitado pelo  $a$ , pois  $a \leq a$ . Supondo  $n \in X$ . Seja  $|X| = n + 1$ . Logo existe uma bijeção  $f : I_{n+1} \rightarrow X$ . Tomando a bijeção  $f' : I_n \rightarrow X - \{f(n+1)\}$ . Logo  $X - \{f(n+1)\}$  tem tamanho  $n$ . Pela hipótese de indução, temos  $X - \{f(n+1)\}$  limitado por um  $p \in \mathbb{N}$ , ou seja:  $\forall t \in X - \{f(n+1)\} : t \leq p$ . Se  $f(n+1) \leq p$ , temos que  $p$  limita  $X$ . Se  $p \leq f(n+1)$ , temos para todo  $t \in X - \{f(n+1)\}$  que  $t \leq p \leq f(n+1)$  e  $f(n+1) \leq f(n+1)$ , logo  $f(n+1)$  limita  $X$ .

Como  $1 \in A$  e  $n \in A \implies n+1 \in A$ , temos  $A = \mathbb{N}$

(a)  $\implies$  (b) [Outra forma]

Seja  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , defina  $a = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ . Temos  $x \leq a$  para todo  $x \in X$ , logo  $X$  é limitado.

(b)  $\implies$  (c)

Como  $X$  é limitado, existe um  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \in X : n \leq p$ . É natural pensar que o maior elemento será o menor dos "limitadores". Logo seja  $A = \{p \in \mathbb{N} \mid \forall n \in X : n \leq p\}$ .  $A$  é não vazio, logo é limitado inferiormente por um  $a \in A$ . Se  $a \in X$ ,  $a$  é o maior elemento de  $X$ . Supondo  $a \notin X$ . Logo temos para todo  $n \in X$  que  $n \leq a$ , mas nunca  $n = a$ , logo temos  $n < a$ . Se  $a = 1$ ,

temos  $n < 1$  (contradição). Se  $a \neq 1$ , existe  $a_0$  tal que  $a_0 + 1 = a$ . Pelo lema 7, obtemos  $n < a_0 + 1 \implies n \leq a_0$  para todo  $n \in X$ . Uma contradição, pois  $a_0 \in A$  com  $a_0 < a$  ( $a$  é o menor elemento de  $A$ ). Logo devemos ter  $a \in X$ . Logo  $X$  possui maior elemento.

(c)  $\implies$  (a)

Seja  $p \in X$  o maior elemento de  $X$ . Conjecturo que  $|X| \leq p$ . Vamos mostrar que  $X \subset I_p$ . Seja  $x \in X$ . Como  $p$  é o maior elemento de  $X$ , temos  $x \leq p$ . Como  $X \subset \mathbb{N}$ , temos  $x \in \mathbb{N}$ . Como  $x \in \mathbb{N}$  e  $x \leq p$ , temos  $x \in I_p$ . Como  $x \in X \implies x \in I_p$ , temos  $X \subset I_p$ . Logo  $X$  é finito e  $|X| \leq p$ .  $\square$

**Teorema 6.** *Sejam  $X, Y$  conjuntos finitos disjuntos, então  $X \cup Y$  é finito e  $|X \cup Y| = |X| + |Y|$ .*

*Demonstração.* Sejam  $f_x : I_n \rightarrow X$  e  $f_y : I_m \rightarrow Y$  bijeções. Seja  $f_{xy} : I_{n+m} \rightarrow X \cup Y$  definida como:

$$f_{xy}(p) = \begin{cases} f_x(p), & p \leq n \\ f_y(r), & n < p \leq n + m \end{cases}$$

Se  $n < p$ , existe  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $p = n + r$ . Como  $p \leq n + m$ , temos  $r \leq m$ .

Supondo  $f_{xy}(p) = f_{xy}(q)$  com  $p \neq q$ . Logo  $p < q$  ou  $q < p$ . Supondo sem perda de generalidade que  $p < q$ . Se  $n < q \leq n + m$  e  $p \leq n$ , temos  $f_x(p) = f_y(q)$ , mas  $X$  e  $Y$  são disjuntos, logo devemos ter ou  $p < q \leq n$  ou  $n < p < q \leq m + n$ . Se  $p < q \leq n$ , temos  $f_x(p) = f_x(q) \implies p = q$  ( $f_x$  injetiva). O caso  $n < p < q \leq m + n$  é analógico. Logo  $f_{xy}(p) = f_{xy}(q) \implies p = q$  (contradição). Logo devemos ter  $p = q$ . Logo  $f_{xy}$  é injetiva.

Seja  $p \in X \cup Y$ . Logo  $p \in X$  ou  $p \in Y$ . Supondo  $p \in X$ . Como  $f_x$  é sobrejetiva, existe  $n_x \in I_n$  tal que  $f_x(n_x) = p$ . Como  $n_x \leq n$ , temos  $f_{xy}(n_x) = f_x(n_x) = p$ . Se  $p \in Y$ . Como  $f_y$  é sobrejetiva, existe  $n_y \in I_m$  tal que  $f_y(n_y) = p$ . Como  $n_y \leq m$ , temos  $n < n + n_y \leq m + n$  e  $f_{xy}(n + n_y) = f_y(n_y) = p$  ( $n_y = r$ ). Logo  $f_{xy}$  é sobrejetiva.

Logo  $f_{xy}$  é bijetiva.

Logo  $X \cup Y$  é finito e tem tamanho  $n + m = |X| + |Y|$ .  $\square$

**Proposição 3.50.** *Sejam  $X, Y$  conjuntos finitos, então  $X \cup Y$  é finito e  $|X \cup Y| \leq |X| + |Y|$ .*

*Demonstração.* Sejam  $f_x : I_n \rightarrow X$  e  $f_y : I_m \rightarrow Y$  bijeções. Seja  $f_{xy} : I_{n+m} \rightarrow X \cup Y$  definida como:

$$f_{xy}(p) = \begin{cases} f_x(p), & p \leq n \\ f_y(r), & n < p \leq n + m \end{cases}$$

Se  $n < p$ , existe  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $p = n + r$ . Como  $p \leq n + m$ , temos  $r \leq m$ .

Seja  $p \in X \cup Y$ . Logo  $p \in X$  ou  $p \in Y$ . Supondo  $p \in X$ . Como  $f_x$  é sobrejetiva, existe  $n_x \in I_n$  tal que  $f_x(n_x) = p$ . Como  $n_x \leq n$ , temos  $f_{xy}(n_x) =$

$f_x(n_x) = p$ . Se  $p \in Y$ . Como  $f_y$  é sobrejetiva, existe  $n_y \in I_m$  tal que  $f_y(n_y) = p$ . Como  $n_y \leq m$ , temos  $n < n + n_y \leq m$  e  $f_{xy}(n + n_y) = f_y(n_y) = p$  ( $n_y = r$ ). Logo  $f_{xy}$  é sobrejetiva.

Logo  $X \cup Y$  é finito e  $|X| + |Y| \leq |X| + |Y|$ . □

**Proposição 3.51.** *Temos para todos  $m, n \in \mathbb{N}$  que  $I_n \times I_m$  é finito e  $|I_n \times I_m| = n \cdot m$ .*

*Demonstração.* Seja  $X = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N} : |I_n \times I_m| = n \cdot m\}$ . Temos  $1 \in X$ , pois para qualquer  $m \in \mathbb{N}$ , existe uma bijeção entre  $I_m$  e  $I_m \times I_1$ , logo  $I_m \times I_1$  é finito e  $|I_m \times I_1| = |I_m| = m = 1 \cdot m$ .

Supondo  $n \in X$ . Dado  $m \in \mathbb{N}$ , seja  $I_m \times I_{n+1} = I_m \times (I_n \cup \{n+1\}) = (I_m \times I_n) \cup (I_m \times \{n+1\})$ . Temos  $(I_m \times I_n)$  finito e  $|I_m \times I_n| = m \cdot n$  (hipótese de indução) e  $I_m \times \{n+1\}$  finito com  $|I_m \times \{n+1\}| = m$ . Logo  $|I_m \times I_{n+1}| = |(I_m \times I_n) \cup (I_m \times \{n+1\})| = mn + m = m \cdot (n+1)$ .

Como  $1 \in X$  e  $n \in X \implies n+1 \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$ . □

**Proposição 3.52.** *Sejam  $X, Y$  conjuntos finitos, então  $X \times Y$  é finito e  $|X \times Y| = |X| \times |Y|$ .*

*Demonstração.* Sejam  $f_x : I_n \rightarrow X$  e  $f_y : I_m \rightarrow Y$  bijeções. Logo  $g : I_n \times I_m \rightarrow X \times Y$ , definida por  $g(p, q) = (f_x(p), f_y(q))$  é uma bijeção. Logo  $|X \times Y| = |I_n \times I_m| = m \cdot n = |X| \times |Y|$ . □

**Proposição 3.53.** *Temos para todos  $m, n \in \mathbb{N}$  que  $\mathcal{F}(I_n, I_m)$  é finito e  $|\mathcal{F}(I_n, I_m)| = m^n$ .*

*Demonstração.* Seja  $X = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N} : |\mathcal{F}(I_n, I_m)| = m^n\}$ . Temos  $1 \in X$ , pois para qualquer  $m \in \mathbb{N}$ , existe uma bijeção entre  $I_m$  e  $\mathcal{F}(I_1, I_m)$ , logo  $\mathcal{F}(I_1, I_m)$  é finito e  $|\mathcal{F}(I_1, I_m)| = |I_m| = m = m^1$ .

Supondo  $n \in X$ . Temos  $\mathcal{F}(I_{n+1}, I_m) = \mathcal{F}(I_n \cup \{n+1\}, I_m)$ . Existe uma bijeção entre  $\mathcal{F}(I_n \cup \{n+1\}, I_m)$  e  $\mathcal{F}(I_n, I_m) \times \mathcal{F}(\{n+1\}, I_m)$ . Existe uma bijeção entre  $\mathcal{F}(\{n+1\}, I_m)$  e  $\mathcal{F}(I_1, I_m)$ . Logo existe uma bijeção entre  $\mathcal{F}(I_n, I_m) \times \mathcal{F}(\{n+1\}, I_m)$  e  $\mathcal{F}(I_n, I_m) \times \mathcal{F}(I_1, I_m)$ . Como  $\mathcal{F}(I_n, I_m)$  é finito e possui tamanho  $m^n$  e  $\mathcal{F}(I_1, I_m)$  é finito e possui tamanho  $m^1$ , temos  $\mathcal{F}(I_n, I_m) \times \mathcal{F}(I_1, I_m)$  finito e de tamanho  $m^n \cdot m = m^{n+1}$ . Como existe uma bijeção entre  $\mathcal{F}(I_n, I_m) \times \mathcal{F}(I_1, I_m)$  e  $\mathcal{F}(I_{n+1}, I_m)$ , temos  $\mathcal{F}(I_{n+1}, I_m)$  finito e de tamanho  $m^{n+1}$ .

Como  $n \in X \implies n+1 \in X$  e  $1 \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$ . □

**Definição 3.27** (Conjunto Enumerável). Um conjunto é dito enumerável se é finito ou se existe uma bijeção  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ .

**Lema 14.**  $\mathbb{N}$  é enumerável

*Demonstração.* Seja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  a função identidade.  $f$  é uma bijeção, logo  $\mathbb{N}$  é enumerável. □

**Proposição 3.54.** *Se existe uma injeção  $f : \mathbb{N} \rightarrow Y$ , então  $f(\mathbb{N})$  é enumerável.*

*Demonstração.* Definindo a bijeção  $f' : \mathbb{N} \rightarrow f(\mathbb{N}), f'(x) = f(x)$ . Temos  $f(\mathbb{N})$  contável.  $\square$

**Proposição 3.55.** *Todo conjunto infinito  $X$  tem um subconjunto enumerável.*

*Demonstração.* Basta construir uma injeção  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ . Seja  $A = \mathcal{P}(X) - \emptyset$ . Temos  $\bigcup A = X$  e  $\emptyset \notin A$ . Seja  $g : A \rightarrow X$  a função escolha aplicada em  $A$ . Logo temos  $g(a) \in a \subset X$  para todo  $a \in A$ . Seja  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  definida indutivamente por

$$\begin{cases} f(1) = g(A) \\ f(n+1) = g(A - f(I_n)) \end{cases}.$$

Se  $A - f(I_n) = \emptyset$ , teríamos  $A = f(I_n)$ , uma contradição, pois  $A$  é infinito e  $f(I_n)$  é finito. Logo  $A - f(I_n) \neq \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo  $g(A - f(I_n))$  está sempre definida.

Queremos mostrar que  $f$  é injetiva. Suponha  $f(m+1) = f(n+1)$  com  $m \neq n$ . Suponha sem perda de generalidade que  $n < m$ . Logo temos  $n+1 \in I_m \implies f(n+1) \in f(I_m)$ . Por definição, temos  $f(n+1) = f(m+1) = g(A - f(I_m)) \in A - f(I_m)$ . Contradição, pois  $f(n+1) \in f(I_m) \implies f(n+1) \notin A - f(I_m)$ . Logo  $f(m+1) = f(n+1) \implies m = n$ . Logo  $f$  é injetiva. Logo  $f' : \mathbb{N} \rightarrow f(\mathbb{N})$  é bijetiva e  $f(\mathbb{N})$  é contável. Logo existe um subconjunto  $f(\mathbb{N})$  de  $X$  contável.  $\square$

**Proposição 3.56.** *Um conjunto  $X$  é infinito se, e somente se, existir uma bijeção entre  $X$  e uma parte própria.*

*Demonstração.* Pela proposição 3.6.1, se existir bijeção  $X$  não é finito.

Suponto  $X$  infinito. Logo existe subconjunto  $Y \subset X$  enumerável. Seja  $f : \mathbb{N} \rightarrow Y$  uma bijeção (uma enumeração). Vamos usar o fato da função  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} - \{1\}$  ser uma bijeção. Seja  $A = (X - f(\mathbb{N})) \cup f(\mathbb{N} - \{1\}) = (X - Y) \cup (Y - \{f(1)\})$ . Temos  $f(1) \notin A$ , logo  $A$  é parte própria de  $X$ . Seja  $h : A \rightarrow X$  definida por

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \in X - Y \\ f(s^{-1}(f^{-1}(x))), & x \in Y - \{f(1)\} \end{cases}$$

Se  $x \in Y - \{f(1)\}$ , temos  $x \in Y$ , logo  $x \notin X - Y$ . Se  $x \in Y - \{f(1)\} = f(\mathbb{N} - \{1\})$ , temos  $f^{-1}(x) \in \mathbb{N} - \{1\}$ , logo  $s^{-1}(f^{-1}(x))$  está definida. Logo  $h$  está bem definida.

Se  $h(x) = h(y)$ , com  $x, y \in X - Y$ , temos  $h(x) = h(y) \implies x = y$ . Se  $h(x) = h(y)$  com  $x, y \in Y - \{f(1)\}$ , temos  $f(s^{-1}(f^{-1}(x))) = f(s^{-1}(f^{-1}(y))) \implies x = y$  ( $f, s^{-1}$  são bijeções). Se  $h(x) = h(y)$  com  $x \in X - Y$  e  $y \in Y - \{f(1)\}$ , temos  $h(x) = x = f(s^{-1}(f^{-1}(y))) = h(y)$ . Temos  $f(a) \in Y$  para todo  $a \in \mathbb{N}$ . Logo  $f(s^{-1}(f^{-1}(y))) = x \in Y$ . Contradição, pois  $x \in X - Y$ . Logo  $h$  é injetiva.

Seja  $x \in X$ . Temos  $x \in Y$  ou  $x \notin Y$ . Se  $x \notin Y$ , temos  $x \in X - Y$ , logo  $h(x) = x$ . Se  $x \in Y$ , temos  $x = f(n)$  com  $n \in \mathbb{N}$ . Temos  $s(n) \in \mathbb{N} - \{1\}$ , logo

$y = f(s(n)) \in Y - \{f(1)\}$ . Logo  $h(y) = f(s^{-1}(f^{-1}(y))) = f(n) = x$ . Logo  $h$  é sobrejetiva.

Como  $h : A \rightarrow X$  é bijetiva, existe bijeção entre  $X$  e uma parte própria de  $X$ .  $\square$

**Proposição 3.57.** *Todo subconjunto  $X \subset \mathbb{N}$  é enumerável.*

*Demonstração.* Se  $X$  for finito, ele é enumerável por definição. Se  $X$  for infinito. Seja  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  definida indutivamente por

$$\begin{cases} f(1) = \min(X) \\ f(n+1) = \min(X - f(I_n)) \end{cases}$$

Como  $f(I_n)$  é sempre finito, temos  $X - f(I_n) \neq \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo o princípio da boa ordenação vale para  $X - f(I_n)$ . Logo  $f$  está bem definida.

Se  $f(x+1) = f(y+1)$ , com  $x < y$  (sem perda de generalidade), temos  $x+1 \leq y$ , portanto  $x+1 \in I_y \implies f(x+1) \in f(I_y)$ . Logo  $f(x+1) \notin X - f(I_y)$ . Logo  $f(x+1) \neq f(y+1)$ , pois  $f(y+1) \in X - f(I_y)$  (contradição). Logo  $f$  é injetiva.

Suponha  $X \neq f(\mathbb{N})$ . Logo  $X - f(\mathbb{N}) \neq \emptyset$ . Seja  $y \in X - f(\mathbb{N})$ . Seja  $x \in f(\mathbb{N})$  qualquer. Logo  $x = f(n)$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $n = 1$ , temos  $x = f(1) = \min(X)$ . Como  $y \in X$ , temos  $x \leq y$ . Se  $n \neq 1 \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : n = n_0 + 1$ , temos  $x = f(n) = f(n_0 + 1) = \min(X - f(I_{n_0}))$ . Como  $y \in X - f(\mathbb{N}) \subset X - f(I_{n_0})$ , temos  $y \in X - f(I_{n_0})$ , logo  $x = f(n) = \min(X - f(I_{n_0})) \leq y$ . Ou seja:  $\forall x \in f(\mathbb{N}) : x \leq y$ . Logo  $f(\mathbb{N})$  é limitado superiormente por  $y$ . Contradição (conjunto infinito não possui limite superior). Logo  $X = f(\mathbb{N})$ .

Como  $f$  é injetiva e sobrejetiva, temos  $f$  bijetiva. Logo  $X$  é enumerável.  $\square$

*Observação 3.11.* A função construída na proposição anterior é estritamente crescente. De fato, seja  $Y = \{p \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} : f(n+p) > f(n)\}$ .

Temos  $1 \in Y$ . De fato, temos  $f(n+1) = \min(X - f(I_n))$ , logo  $f(n+1) \in X - f(I_n)$ , logo  $f(n+1) \neq f(n)$ , pois  $f(n) \in f(I_n)$ . Se  $n = 1$ , temos  $f(2) \in X - f(I_1) \implies f(2) \in X \implies f(2) \leq f(1)$ , pois  $f(1) = \min X$ . De  $f(2) \neq f(1)$ , obtemos  $f(2) < f(1)$ . Se  $n \neq 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n = n_0 + 1$ . Daí  $f(n+1) \in X - f(I_n) \subset X - f(I_{n_0})$ , logo  $f(n+1) = \min(X - f(I_n)) \leq \min(X - f(I_{n_0})) = f(n)$ . Como  $f(n+1) \neq f(n)$ , temos  $f(n+1) > f(n)$ . Logo  $1 \in Y$ . Supondo  $p \in Y$ , temos para todo  $n \in \mathbb{N}$  que  $f(n+p) > f(n)$ . Como  $1 \in Y$ , temos  $f(p+1) > f(p) > f(n)$ , logo  $p+1 \in Y$ . Logo  $Y = \mathbb{N}$ .

Se  $m > n$ , temos  $m = n + p$  para algum  $p \in \mathbb{N}$ , daí  $f(m) > f(n)$ . Logo  $f$  é crescente.

Essa é outra forma de mostrar a injetividade da função  $f$ .

**Proposição 3.58.** *Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma bijeção e  $Y$  é enumerável, então  $X$  é enumerável.*

*Demonstração.* Se  $X$  for finito, ele é enumerável. Se  $X$  for infinito, então  $Y$  é infinito. Como  $Y$  é enumerável, existe uma bijeção  $g : Y \rightarrow \mathbb{N}$ . Logo existe a bijeção  $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{N}$ . Logo  $X$  é enumerável.  $\square$



**Proposição 3.59.** *Todo subconjunto  $X$  de um conjunto enumerável  $Y$  é enumerável.*

*Demonstração.* Se  $X$  for finito, ele é enumerável. Se  $X$  for infinito, então  $Y$  é infinito. Logo existe uma bijeção  $f : Y \rightarrow \mathbb{N}$ . Seja a bijeção  $f' : X \rightarrow f(X)$  a restrição de  $f$  a  $X$ . Como  $f(X) \subset \mathbb{N}$ , temos  $f(X)$  enumerável. Como existe uma bijeção entre  $X$  e um conjunto enumerável, temos  $X$  enumerável.  $\square$

**Proposição 3.60.** *Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma injeção e  $Y$  é enumerável, então  $X$  é enumerável.*

*Demonstração.* Se  $X$  for finito, ele é enumerável. Se  $X$  for infinito, então  $Y$  é infinito. Temos  $f(X) \subset Y$  é enumerável (subconjunto de conjunto enumerável). Seja a bijeção  $f' : X \rightarrow f(X)$  a restrição de  $f$  a  $X$ . Como existe uma bijeção entre  $X$  e um conjunto enumerável, temos  $X$  enumerável.  $\square$

**Proposição 3.61.** *Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma sobrejeção e  $X$  é enumerável, então  $Y$  é enumerável.*

*Demonstração.* Como  $f$  é sobrejetiva, ela admite inversa à direita. Seja  $g : Y \rightarrow X$  a inversa à direita de  $f$ . Se  $g(y) = g(y')$ , temos  $f(g(y)) = f(g(y'))$ , logo  $y = y'$ . Logo  $g$  é injetiva. Pela proposição anterior, temos  $Y$  enumerável.  $\square$

**Lema 15.** *Um conjunto  $X$  é enumerável se, e somente se, existir uma injeção  $f : X \rightarrow \mathbb{N}$ .*

*Demonstração.* Supondo  $X$  for enumerável. Se  $X$  for finito, existe uma bijeção  $h : X \rightarrow I_n$ . Como  $I_n \subset \mathbb{N}$ , existe uma injeção  $X \rightarrow \mathbb{N}$ . Se  $X$  for infinito, existe uma bijeção  $g : X \rightarrow \mathbb{N}$ . Em ambos os casos existe uma injeção entre  $X$  e  $\mathbb{N}$ .

Supondo que existe uma injeção  $f : X \rightarrow \mathbb{N}$ . Como  $\mathbb{N}$  é enumerável, temos  $X$  enumerável.  $\square$

**Lema 16. (Teorema fundamental da aritmética)** *Todo número natural ou é primo ou se escreve de modo único como um produto de números primos.*

*Demonstração.* Aritmética, Ahbramo.  $\square$

**Lema 17.**  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  é enumerável

*Demonstração.* Seja  $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $h(m, n) = 2^m \cdot 3^n$ . Se  $h(m, n) = h(v, w)$ , temos  $2^m \cdot 3^n = 2^v \cdot 3^w$ . Pelo lema anterior, temos  $m = v$  e  $n = w$ . Logo  $(m, n) = (v, w)$ . Logo  $h$  é injetiva. Logo  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  é enumerável.  $\square$

**Proposição 3.62.** *Se  $X, Y$  são enumeráveis, temos  $X \times Y$  enumerável.*

*Demonstração.* Existem injeções  $f : X \rightarrow \mathbb{N}$  e  $g : Y \rightarrow \mathbb{N}$ . Logo a função  $h : X \times Y \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $h(x, y) = (f(x), g(y))$  é uma injeção entre  $X \times Y$  e um conjunto enumerável. Logo  $X \times Y$  é enumerável.  $\square$

**Proposição 3.63.** *Seja  $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$  uma família enumerável de conjuntos enumeráveis. Temos  $Y = \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$  enumerável.*

*Demonstração.* Como  $X_\lambda$  é enumerável para todo  $\lambda \in L$ , temos que existe uma função  $f_\lambda : X \rightarrow \mathbb{N}$  injetiva para todo  $\lambda \in L$ . Definindo  $g : Y \rightarrow \mathbb{N}$ , dada por  $g(x) = \min \{n \in \mathbb{N} | x \in X_n\}$ . Se  $x \in Y$ , temos  $x \in X_\lambda$  para algum  $\lambda \in L$ , logo  $\{n \in \mathbb{N} | x \in X_n\}$  é não vazio. Para simplificar notação, vamos chamar  $g(x) = n_x$ . Seja  $h : Y \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , definida por  $h(x) = (f_{n_x}(x), n_x)$ . Afirimo que  $h$  é injetiva. De fato, se  $h(x) = h(y)$ , temos  $(f_{n_x}(x), n_x) = (f_{n_y}(y), n_y) \iff f_{n_x}(x) = f_{n_y}(y) \wedge n_x = n_y$ . Como  $n_x = n_y$ , temos  $f_{n_x} = f_{n_y}$ , logo  $f_{n_x}(x) = f_{n_y}(x) = f_{n_y}(y)$ . Mas  $f_y$  é injetiva, logo  $x = y$ . Logo  $h$  é injetiva. Logo  $Y$  é enumerável.  $\square$

**Proposição 3.64.** *Dados dois conjuntos  $X, Y$ , apenas um das 3 possibilidades ocorre:*

- *Existe uma injeção  $f : X \rightarrow Y$  e não existe sobrejeção  $g : X \rightarrow Y$ .*
- *Existe bijeção  $f : X \rightarrow Y$ .*
- *Existe uma injeção  $f : Y \rightarrow X$  e não existe sobrejeção  $g : Y \rightarrow X$ .*

*Demonstração.* Naive Set Theory.  $\square$

**Definição 3.28.** Definimos para conjuntos infinitos  $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$  se, e somente se, existir bijeção  $f : X \rightarrow Y$ . Definimos  $\text{card}(X) < \text{card}(Y)$  se existir injeção  $f : X \rightarrow Y$  e não existir sobrejeção  $g : X \rightarrow Y$ . E  $\text{card}(X) > \text{card}(Y)$  caso contrário.

**Proposição 3.65. (Cantor-Bernstein-Schröder Theorem)** *Se existir injeções  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$ , então existe bijeção  $h : X \rightarrow Y$ .*

*Demonstração.*  $\square$

**Proposição 3.66.** *Seja  $(X_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{N}}$  uma família de conjuntos de tamanho maior ou igual a 2. Temos  $Y = \prod_{\lambda \in \mathbb{N}} X_\lambda$  não é enumerável.*

*Demonstração.* Lembrando que cada elemento de  $Y$  é uma função  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} X_\lambda$ , onde  $\phi(n) \in X_n$ . Suponha  $Y$  enumerável. Logo existe uma bijeção  $f : \mathbb{N} \rightarrow Y$ . Para simplificar a notação, denotaremos a função  $f(n)$  por  $f_n$ . Como  $X_\lambda$  possui pelo menos 2 elementos, existem  $a_\lambda, b_\lambda \in X_\lambda$  para todo  $\lambda \in \mathbb{N}$ . Seja  $h : \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} X_\lambda$ , definida por

$$h(x) = \begin{cases} a_x, & f_x(x) \neq a_x \\ b_x, & f_x(x) = a_x \end{cases}.$$

Temos  $h(n) \neq f_n(n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , logo  $h \neq f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $h \in Y$  e  $h \notin f(\mathbb{N})$ , temos que  $f$  não é sobrejetiva. Logo  $f$  não é bijetiva (contradição). Logo  $Y$  não é enumerável.  $\square$

### 3.6.3 Exercícios

*Exercício 3.6.1.* Se  $X \subset \mathbb{N}$  é infinito, então existe uma única bijeção  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow X$  estritamente crescente.

*Demonstração.* A existência é pela observação 3.11. Se  $\phi, f : \mathbb{N} \rightarrow X$  são bijeções estritamente crescentes. Seja  $Y = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n) = f(n)\}$ . Seja  $p = f^{-1}(\min X)$ , se  $p \neq 1$ , temos  $f(p) \leq f(1)$  com  $p > 1$ . Logo  $f(1) = \min X$ . O argumento é análogo para  $\phi(1) = \min X$ . Logo  $f(1) = \min X = \phi(1) \implies 1 \in X$ . Suponha  $n \in X$ . Se  $f(n+1) \neq \phi(n+1)$ , temos  $\phi(n+1) < f(n+1)$  ou  $f(n+1) < \phi(n+1)$ . Suponha sem perda de generalidade que  $\phi(n+1) < f(n+1)$ . Seja  $p = f^{-1}(\phi(n+1))$ . Se  $p > n+1$ , temos  $f(p) < f(n+1)$  (contradição). Se  $p < n+1$ , temos  $p \neq n$ , pois  $f(p) = \phi(n+1) > \phi(n) = f(n)$ . Logo  $p < n$  com  $f(p) > f(n)$  (contradição). Logo não podemos ter  $\phi(n+1) \neq f(n+1)$ . Logo  $n+1 \in Y$ . Logo  $\phi = f$ .  $\square$

## 4 Anéis

### 4.1 Definições iniciais

**Definição 4.1** (Anel). Seja  $A$  um conjunto e  $+: A \times A \rightarrow A$ ,  $\cdot: A \times A \rightarrow A$  funções. Dizemos que  $(A, +, \cdot)$  é um anel se :

1.  $\forall x, y, z \in A : x + (y + z) = (x + y) + z$
2.  $\forall x, y \in A : x + y = y + x$
3. Existe  $0_A \in A$  tal que para todo  $x \in A$ ,

$$x + 0_A = x$$

.

4. Para todo  $x \in A$ , existe  $x' \in A$  tal que:

$$x + x' = 0_A$$

5.  $\forall x, y, z \in A : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ .

6.  $\forall x, y, z \in A :$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

7. Existe um elemnto  $1_A \in A$  tal que para todo  $x \in A$ :

$$x \cdot 1_A = 1_A \cdot x = x.$$

8.  $\forall x, y \in A : x \cdot y = y \cdot x$ .

**Proposição 4.1.** *Existe um único elemento  $0_A \in A$  tal que  $\forall x \in A : x + 0_A = x$ .*

*Demonstração.* Suponha que existam  $0_A, 0'_A \in A$  tal que  $\forall x \in A : \begin{cases} x + 0_A = x \\ x + 0'_A = x \end{cases}$ .

Como  $0_A, 0'_A \in A$ , temos  $0'_A + 0_A = 0'_A$  e  $0_A + 0'_A = 0_A$ . Logo pela comutatividade da soma  $0'_A = 0'_A + 0_A = 0_A + 0'_A = 0_A \iff 0_A = 0'_A$ . Logo existe um único  $0_A \in A$  tal que  $\forall x \in A : x + 0_A = x$ .  $\square$

**Definição 4.2** (Elemento Neutro da Soma). O único elemento  $0_A \in A$  tal que  $\forall x \in A : x + 0_A = x$  é chamado de elemento neutro da soma.

**Proposição 4.2.** *Para todo  $x \in A$ , existe um único  $y \in A$  tal que  $x + y = 0_A$ .*

*Demonstração.* Suponha que existam  $y, y' \in A$  tal que  $x + y = x + y' = 0$ . Logo  $y = y + 0_A = y + (x + y') = y + (x + y') = (y + x) + y' = (x + y) + y' = 0_A + y' = y' + 0_A = y' \iff y = y'$ .

Logo existe um único  $y \in A$  tal que  $x + y = 0_A$ .  $\square$

**Definição 4.3** (Simétrico). Dado  $x \in A$ , chamamos o único elemento  $y \in A$  tal que  $x + y = 0_A$  de simétrico e escrevemos  $y = -x$ . Logo  $x + (-x) = 0_A$ .

**Definição 4.4** (Subtração). A operação "somar com inverso" é chamada subtração e escrevemos

$$x + (-y) = x - y$$

**Proposição 4.3.** *Existe um único elemento  $1_A \in A$  tal que  $\forall x \in A : x \cdot 1_A = 1_A \cdot x = x$ .*

*Demonstração.* Suponha que existam  $1_A, 1'_A \in A$  tal que  $\forall x \in A : \begin{cases} x \cdot 1_A = x \\ x \cdot 1'_A = x \end{cases}$ .

Em particular, temos  $\begin{cases} 1'_A \cdot 1_A = 1'_A \\ 1_A \cdot 1'_A = 1_A \end{cases} \implies 1'_A = 1'_A \cdot 1_A = 1_A \cdot 1'_A = 1_A$ . Logo existe um único elemento  $1_A \in A$  tal que  $\forall x \in A : x \cdot 1_A = 1_A \cdot x = x$ .  $\square$

**Definição 4.5** (Elemento Neutro do Produto). O único elemento  $1_A \in A$  tal que  $\forall x \in A : x \cdot 1_A = 1_A \cdot x = x$  é chamado de elemento neutro do produto.

**Proposição 4.4.** *Se  $A$  é um anel  $x, y, z \in A$ , então  $x + z = y + z \implies x = y$ .*

*Demonstração.* Supondo  $x + z = y + z$ , temos  $y = y + 0_A = y + (z - z) = (y + z) - z = (x + z) - z = x + (z - z) = x + 0_A = x$ . Logo  $x + z = y + z \implies x = y$ .  $\square$

**Proposição 4.5.** Se  $A$  é um anel, então  $\forall x \in A : x \cdot 0_A = 0_A$

*Demonstração.* Temos  $x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A \iff x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A \implies x \cdot 0_A = 0_A$  pela proposição anterior.  $\square$

**Proposição 4.6.** Seja  $A$  um anel. Para todos  $x, y, z \in A$ , temos:

- (a)  $-(-x) = x$
- (b)  $-(xy) = (-x)y = x(-y)$
- (c)  $(-x)(-y) = xy$
- (d)  $(-1_A)x = -x$

*Demonstração.*

- (a) Definimos  $-y = z$  como o único elemento  $z \in A$  tal que  $y + z = 0_A$ . Logo  $(-x) + (-(-x)) = 0_A$  por definição. Mas  $x + (-x) = 0_A$ . Logo pela unicidade, temos  $x = -(-x)$ .
- (b) Temos  $(-x)y + xy = (-x + x)y = 0_A y = 0_A$  e  $x(-y) + xy = x(-y + y) = x \cdot 0_A = 0_A$ , que implica  $(-x)y$  e  $x(-y)$  inversos aditivos de  $xy$ . Da unicidade, temos  $-(xy) = (-x)y = x(-y)$ .
- (c) Pelos itens anteriores, temos  $(-x)(-y) = -(x \cdot (-y)) = -(-(xy)) = xy$ .
- (d) Do item (b), temos  $(-1_A)x = -(1_A \cdot x) = -x$ .

$\square$

#### 4.1.1 Exercícios

*Exercício 4.1.1.* Se  $A$  é um anel e  $x, y, z \in A$ , então  $x + y = x \implies y = 0_A$ .

*Demonstração.* Se  $x + y = x$ , temos  $x + y = x = x + 0_A \implies y = 0_A$ , pelo item anterior.  $\square$

## 4.2 Invertibilidade

**Definição 4.6** (Invertível). Um elemento  $x \in A$  é invertível em  $A$  se existe  $y \in A$  tal que

$$x \cdot y = 1_A.$$

**Proposição 4.7.** Se  $x \in A$  é invertível, então existe um único  $y \in A$  tal que  $x \cdot y = 1_A$ .

*Demonstração.* Dado  $x \in A$  invertível, suponha que existam  $y, y' \in A$  tal que  $x \cdot y = x \cdot y' = 1_A$ .

Logo  $y' = 1_A \cdot y' = (x \cdot y) \cdot y' = x \cdot (y \cdot y') = x \cdot (y' \cdot y) = (x \cdot y') \cdot y = 1_A \cdot y = y \iff y' = y$ .

Logo existe um único  $y \in A$  tal que  $x \cdot y = 1_A$ .  $\square$

**Definição 4.7** (Inverso multiplicativo). Dado um anel  $A$  e  $x \in A$  invertível, definimos  $x^{-1}$  como o único elemento de  $A$  tal que  $x \cdot x^{-1} = 1_A$ .

**Definição 4.8** (Conjunto dos invertíveis). Dado um anel  $A$ , o conjunto dos invertíveis em  $A$  é denotado por  $A^\times$ .

**Definição 4.9** (Conjunto dos não-nulos). Dado um anel  $A$ , o conjunto dos não-nulos em  $A$  é denotado por  $A^* = A - \{0\}$ .

**Definição 4.10** (Anel Nulo). Dizemos que um anel  $A$  é nulo se  $A = \{0_A\}$ .

### 4.3 Corpos, domínios e anéis reduzidos

**Definição 4.11** (Divisor de Zero). Dado  $A$  um anel,  $x \in A$  é um divisor de zero em  $A$  se existe  $y \in A - \{0\}$  tal que  $xy = 0_A$ .

**Proposição 4.8.** *Dado um anel não-nulo  $A$ ,  $0_A$  é um divisor de zero.*

*Demonstração.* Como  $A$  é não nulo, existe  $y \in A - \{0\}$ . Além disso,  $0_A \cdot y = 0_A$ . Logo  $0_A$  é um divisor de zero.  $\square$

**Definição 4.12** (Domínio). Um anel não nulo  $A$  é um Domínio se  $0_A \in A$  for o único divisor de zero.

**Proposição 4.9.** *Dado um anel  $A$  não nulo, as afirmações a seguir são equivalentes:*

- (a)  $A$  é um Domínio;
- (b)  $\forall x, y \in A - \{0_A\} : xy \neq 0_A$
- (c)  $\forall x, y \in A : xy = 0_A \implies x = 0_A \vee y = 0_A$

*Demonstração.* (a)  $\implies$  (b): Supondo  $A$  um domínio. Dados  $x, y \in A$  com  $x, y \neq 0_A$ , se  $xy = 0_A$ , teríamos  $x, y$  divisores de zero em  $A$ . Logo teríamos divisores de zero em  $A$  diferentes de  $0_A$ . Logo  $A$  não seria um domínio (contradição). Portanto devemos ter  $xy \neq 0_A$ .

(b)  $\implies$  (c): Supondo  $x, y \in A$  com  $xy = 0_A$ . Se  $x, y \neq 0_A$ , teríamos de (b) que  $xy \neq 0_A$ , logo devemos ter  $x = 0_A$  ou  $y = 0_A$ .

(c)  $\implies$  (a): Supondo  $x$  um divisor de zero em  $A$ , logo  $xy = 0_A$  com  $y \in A - \{0_A\}$ . De (c), temos  $xy = 0_A \implies x = 0_A \vee y = 0_A$ . Como  $y \neq 0_A$ , devemos ter  $x = 0_A$ . Mostramos que qualquer divisor de zero em  $A$  é igual a  $0_A$ . Logo  $A$  é um domínio.  $\square$

**Proposição 4.10.** *Se  $A$  é um domínio,  $n \in \mathbb{N}$  e  $x_1, \dots, x_n \in A - \{0_A\}$ , então  $x_1 \cdots x_n \neq 0_A$ .*

*Demonstração.* A prova será por indução. Para  $n = 1$ , é imediato. Para  $n = 2$ , segue da proposição anterior. Supondo válido para um  $n \in \mathbb{N}$  qualquer. Supondo  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in A - \{0_A\}$ , então  $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \cdot x_{n+1} = (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) \cdot x_{n+1}$ . Pelo passo de indução, temos  $y = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \neq 0_A$ . Como  $y \neq 0_A$  e  $x_{n+1} \neq 0_A$ , temos  $y \cdot x_{n+1} \neq 0_A$  pelo caso  $n = 2$ . Logo vale para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Proposição 4.11.** *Se  $A$  é um domínio,  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in A - \{0_A\}$ , então  $x^n \neq 0_A$ .*

*Demonstração.* Tomando  $x \in A - \{0\}$  e  $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ vezes}}$  e usando a proposição anterior com  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x \neq 0$ , temos  $x^n \neq 0$ .  $\square$

**Proposição 4.12** (Lei do Corte). *Seja  $A$  um domínio. Se  $a, x, y \in A$  e  $a \neq 0_A$ , então*

$$ax = ay \implies x = y.$$

*Demonstração.* Supondo  $a, x, y \in A$  com  $a \neq 0_A$  e  $ax = ay$ . Temos  $ax - ay = 0_A \iff a(x - y) = 0_A \implies a = 0_A \vee x - y = 0_A$ . Como  $a \neq 0_A$ , temos  $x - y = 0_A \implies x = y$ .  $\square$

**Definição 4.13** (Nilpotente). Dado um anel  $A$ . Um elemento  $x \in A$  é nilpotente se  $x^n = 0_A$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ .

**Proposição 4.13.** *Dado um anel  $A$ ,  $0_A \in A$  é nilpotente.*

*Demonstração.* Temos  $0_A^1 = 0_A$ , logo  $0_A$  é nilpotente.  $\square$

**Definição 4.14** (Anel Reduzido). Um anel  $A$  é um Anel Reduzido se o único elemento nilpotente de  $A$  for  $0_A$ .

**Definição 4.15** (Corpo). Um anel não nulo  $A$  é um corpo se  $A^* = A^\times$ , ou seja, todo elemento não nulo for invertível.

**Proposição 4.14.** *Se um anel  $A$  é um corpo, então é um domínio.*

*Demonstração.* Supondo  $A$  um corpo. Supondo  $x, y \in A$  com  $xy = 0_A$ . Queremos mostrar que  $x = 0_A$  ou  $y = 0_A$ . Se  $y = 0_A$ , não temos nada a demonstrar, supondo  $y \neq 0_A$ . Logo  $y \in A^* = A^\times$  ( $A$  é um corpo). Logo  $x = x \cdot 1_A = x \cdot (y \cdot y^{-1}) = (x \cdot y) \cdot y^{-1} = 0_A \cdot y^{-1} = 0_A$ . Logo  $A$  é um domínio.  $\square$

**Proposição 4.15.** *Se um anel  $A$  é um domínio, então é um reduzido.*

*Demonstração.* Supondo  $A$  um domínio. Seja  $x \in A$  nilpotente, ou seja,  $x^n = 0_A$  com  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $x \neq 0$ , temos pela proposição 4.11 que  $x^n \neq 0$ . Logo devemos ter  $x = 0$ .  $\square$

## 5 Aritmética

## 6 Análise Real

### 6.1 Números Reais

#### 6.1.1 Corpos ordenados

**Definição 6.1** (Corpo Ordenado). Um corpo  $K$  é ordenado se existe um conjunto  $P \subset K$  tal que :

1. Para todos  $x, y \in P$ , temos  $x + y \in P$  e  $x \cdot y \in P$ .
2. Dado  $x \in K$ , apenas uma das possibilidades ocorre: ou  $x \in P$ , ou  $x = 0_K$  ou  $-x \in P$ .

**Definição 6.2** (Positivos). Dado um corpo ordenado  $K$ , chamamos os elementos  $x \in P$  de positivos.

**Definição 6.3** (Negativos). Dado um corpo ordenado  $K$ , chamamos os elementos  $y = -x$  com  $x \in P$  de negativos.

**Definição 6.4** (Conjunto dos Negativos). Dado um corpo ordenado  $K$ , denotamos por  $-P = \{-x \mid x \in P\}$  como o conjunto dos elementos negativos.

**Proposição 6.1.** Se  $K$  é um corpo ordenado,  $K = (-P) \cup \{0_K\} \cup P$ .

*Demonstração.* Dado  $x \in K$ , pela definição, temos  $x \in P$  ou  $x = 0_K \iff x \in \{0_K\}$  ou  $-x \in P \iff x \in -P$ , logo  $x \in (-P) \cup \{0_K\} \cup P$ . Temos  $P, \{0_K\}, -P \subset K$ , logo  $(-P) \cup \{0_K\} \cup P \subset K$ . Portanto  $(-P) \cup \{0_K\} \cup P = K$ .  $\square$

**Proposição 6.2.** Se  $K$  é um corpo ordenado,  $(-P) \cap \{0_K\} \cap P = \emptyset$ .

*Demonstração.* Dado  $x \in K$ , pela definição, apenas um dos três ocorre:  $x \in P$  ou  $x = 0_K \iff x \in \{0_K\}$  ou  $-x \in P \iff x \in -P$ . Logo  $(-P) \cap \{0_K\} \cap P = \emptyset$ .  $\square$

**Proposição 6.3.** Se  $K$  é um corpo ordenado, temos  $\forall a \in K - \{0_K\} : a^2 \in P$ .

*Demonstração.* Dado  $a \in K - \{0_K\}$ , temos  $-a \in P$  ou  $a \in P$ . Se  $a \in P$ , temos  $a^2 = a \cdot a \in P$ . Se  $-a \in P$ , temos  $(-a) \cdot (-a) = a^2 \in P$ . Em ambos os casos, temos  $a^2 \in P$ .  $\square$

**Proposição 6.4.** Se  $K$  é um corpo ordenado, então  $1_K \in P$ .

*Demonstração.* Temos  $1_K = 1_K \cdot 1_K = 1_K^2 \implies 1_K \in P$ , pela proposição anterior.  $\square$

*Observação 6.1.* Segue da proposição anterior que  $-1_K \in -P$  para todo corpo ordenado  $K$ . Logo num corpo ordenado  $-1_K$  nunca é um quadrado.



**Definição 6.5** ( $<$ ). Num corpo ordenado  $K$  com  $x, y \in K$ , definimos:

$$x < y \iff y - x \in P.$$

**Definição 6.6** ( $>$ ). Num corpo ordenado  $K$  com  $x, y \in K$ , definimos:

$$y > x \iff x < y.$$

**Proposição 6.5.** Dado um corpo ordenado  $K$ , temos para todos  $x, y, z \in K$ :

1.  $x < y \wedge y < z \implies x < z$
2. Apenas uma das três possibilidades ocorre:  $x < y$  ou  $x = y$ , ou  $y < x$ .
3.  $x < y \iff x \pm z < y \pm z$
4. Se  $z > 0$ , temos  $x < y \implies xz < yz$
5. Se  $z < 0$ , temos  $x < y \implies xz > yz$

*Demonstração.* 1. Se  $x < y$  e  $y < z$ , temos  $y - x \in P$  e  $z - y \in P$ , logo  $(y - x) + (z - y) = z - x \in P$ , que equivale a  $x < z$ .

2. Dado  $x, y \in K$ , tomando  $w = x - y \in K$ , temos  $w \in P$ , ou  $w = 0$  ou  $-w \in P$ . Logo  $x - y \in P$ , ou  $x - y = 0$  ou  $-(x - y) = y - x \in P$ . Portanto  $y < x$ , ou  $x = y$  ou  $x < y$ .

3. Se  $x < y$ , temos  $y - x \in P$ . Logo  $y - x = y + 0_K - x = y + (z - z) - x = (y + z) - (x + z) \in P \iff x + z < y + z$ .

4. Se  $z > 0$  e  $x < y \iff y - x \in P$ , temos que  $yz - xz = (y - x) \cdot z \in P \iff xz < yz$ .

5. Se  $z < 0 \iff -z \in P$  e  $x < y \iff y - x \in P$ , temos que  $xz - yz = (y - x) \cdot (-z) \in P \iff yz < xz$ . □

**Proposição 6.6.** Dado um corpo ordenado  $K$ , temos para todos  $x, y, z, w \in K$ :

$$x < y \wedge z < w \implies x + z < y + w$$

*Demonstração.* Temos  $x < y \implies x + z < y + z$  e  $z < w \implies y + z = z + y < w + y = y + w$ , logo  $x + z < y + w$ . □

**Proposição 6.7.** Dado um corpo ordenado  $K$ , temos para todos  $x, y, z, w \in K$ :

$$0 < x < y \wedge 0 < z < w \implies 0 < xz < yw$$

*Demonstração.* Como  $z > 0$  e  $x < y$ , temos  $xz < yz$ . Como  $y > 0$  e  $z < w$ , temos  $yz < yw$ . Logo  $xz < yw$ . □

**Definição 6.7** ( $\leq$  e  $\geq$ ). Num corpo ordenado  $K$  com  $x, y \in K$ , definimos:

$$y \geq x \iff x \leq y \iff x < y \vee x = y$$

### 6.1.2 Números reais

**Definição 6.8** (Cota Superior). Seja  $K$  um corpo ordenado e  $X \subset K$ . Um elemento  $s \in K$  é cota superior de  $X$  quando

$$\forall x \in X : x \leq s.$$

**Definição 6.9** (Limitado superiormente). Seja  $K$  um corpo ordenado e  $X \subset K$ . Dizemos que  $X$  é limitado superiormente se existe uma cota superior de  $X$ .

**Definição 6.10** (Supremo). Seja  $K$  um corpo ordenado e  $X \subset K$ . Um elemento  $s \in K$  é o supremo de  $X$  quando:

1.  $s$  é cota superior de  $X$ .
2. Se  $c \in K$  é cota superior de  $X$ , então  $s \leq c$ .

*Observação 6.2.* Uma forma mais humana de dizer a definição de supremo é: O supremo de um conjunto  $X$  é a menor cota superior deste conjunto.

*Observação 6.3.* Podemos tomar a contrapositiva na segunda condição e obter: Se  $c < s$ , então  $c$  não é cota superior. Mas não ser cota superior é o mesmo que existir um  $x \in X$  com  $c < x$ . Logo obtemos uma definição equivalente: Seja  $K$  um corpo ordenado e  $X \subset K$ . Um elemento  $s \in K$  é o supremo de  $X$  quando:

1.  $s$  é cota superior de  $X$ .
2. Se  $c \in K$  com  $c < s$ , então existe  $x \in X$  com  $c < x$ .

**Proposição 6.8.** *Podemos trocar a segunda condição da definição de supremo do conjunto  $X$  por:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X : x > s - \varepsilon$$

*Demonstração.* Seja  $s$  o supremo de  $X$  pela definição usual. Dado  $\varepsilon > 0$ , sabemos que  $s - \varepsilon < s$ , logo existe  $x \in X$  com  $s - \varepsilon < x$  pela definição equivalente acima.

Supondo que  $s$  seja cota superior de  $X$  e  $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X : x > s - \varepsilon$ . Se  $c$  é uma cota superior de  $X$  com  $c < s$ , temos  $s - c > 0$ . Tomando  $\varepsilon = s - c > 0$ , existe  $x \in X$  tal que  $x > s - \varepsilon = s - (s - c) = c$ , logo  $c$  não é cota superior (contradição). Logo se  $c$  é uma cota superior de  $X$ , temos  $s \leq c$ . Logo  $s$  é a menor cota superior. Logo  $s$  é um supremo de  $X$ .  $\square$

*Observação 6.4.* Vou usar a segunda condição que for mais conveniente na situação.

**Proposição 6.9.** *O supremo de um conjunto  $X \subset K$ , quando existir, é único.*

*Demonstração.* Suponha que  $s_0, s_1 \in K$  sejam supremos do conjunto  $X$ . Temos que ambos são cotas superiores para  $X$  (condição 1). Da condição 2, obtemos  $s_0 \leq s_1$  e  $s_1 \leq s_0$ , logo  $s_0 = s_1$ .  $\square$

**Definição 6.11** ( $\sup X$ ). Quando existir o supremo de um conjunto  $X \subset K$ , escreveremos  $\sup X$ .

**Definição 6.12** (Corpo Completo). Um corpo ordenado  $K$  é completo se todo subconjunto não-vazio  $X \subset K$ , limitado superiormente, possui supremo em  $K$ .

**Axioma 8.** Existe um corpo ordenado completo, denotado por  $\mathbb{R}$ .

## 6.2 Sequências e Séries de Números Reais

### 6.2.1 Sequências

**Definição 6.13** (Sequência). Uma sequência é uma função  $x : \mathbb{N} \rightarrow K$ , onde  $K$  é um conjunto qualquer não-vazio. Nos importaremos aqui com  $K = \mathbb{R}$ .

**Definição 6.14** ( $(x_n)$ ). Dada uma sequência  $x : \mathbb{N} \rightarrow K$ , Utilizaremos a notação  $x_n := x(n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . O termo  $x_n$  é chamado termo de ordem  $n$ , ou  $n$ -ésimo termo da sequência.

**Definição 6.15** ( $((x_n))$ ). Dada uma sequência  $x : \mathbb{N} \rightarrow K$ , será útil representar ela como  $(x_1, x_2, \dots)$  ou  $(x_n)$  ou  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Definição 6.16** (Dois a dois Distintos). Quando a sequência  $(x_n)$  é injetiva, isto é,  $m \neq n \implies x_m \neq x_n$ , dizemos que  $(x_n)$  é uma sequência de termos dois a dois distintos.

**Definição 6.17** (Sequência Limitada Inferiormente). A sequência  $(x_n)$  é limitada inferiormente quando  $x(\mathbb{N})$  é limitado inferiormente. Ou seja: Existe  $c \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq c$ .

**Definição 6.18** (Sequência Limitada Superiormente). A sequência  $(x_n)$  é limitada superiormente quando  $x(\mathbb{N})$  é limitado superiormente. Ou seja: Existe  $c \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq c$ .

**Definição 6.19** (Sequência Limitada). A sequência  $(x_n)$  é limitada quando é limitada superiormente e inferiormente. Ou seja: Existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N} : a \leq x_n \leq b$ .

**Proposição 6.10.** Uma sequência  $(x_n)$  é limitada se, e somente se, existe  $c \in \mathbb{R}$  com  $c \geq 0$  e  $\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq c$ .

*Demonstração.* Se  $(x_n)$  é limitada, existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N} : a \leq x_n \leq b$ . Tomando  $c = \max\{|a|, |b|\}$ . Temos  $-c \leq -|a| \leq a$  e  $b \leq |b| \leq c$ , daí  $\forall n \in \mathbb{N} -c \leq a \leq x_n \leq b \leq c$ , que implica  $\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq c$ . Se  $\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq c$ , temos  $\forall n \in \mathbb{N} : -c \leq x_n \leq c$ . Daí tomamos  $a = -c$  e  $b = c$ .  $\square$

**Proposição 6.11.**  $(x_n)$  é limitada, se e somente se,  $(|x_n|)$  é limitada.

*Demonstração.*

$(x_n)$  é limitada  $\iff \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq c \iff \forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| \leq c \iff (|x_n|)$  é limitada

□

**Definição 6.20** (Subsequência). Dada uma sequência  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , uma subsequência é uma composição  $x \circ \phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é uma função estritamente crescente. Denotaremos por  $(x_{\phi(n)})$ .

**Proposição 6.12.** *Uma sequência  $(x_n)$  é limitada se, e somente se, qualquer subsequência  $(x_{\phi(n)})$  é limitada.*

*Demonstração.* Se  $(x_n)$  é limitada. Seja  $(x_{\phi(n)})$  uma subsequência. Existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq c$ . Daí  $\phi(n) \in \mathbb{N} \implies |x_{\phi(n)}| \leq c$ .

Se qualquer subsequência  $(x_{\phi(n)})$  é limitada, tomando  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  com  $\phi(n) = n$ , temos  $(x_n) = (x_{\phi(n)})$ , logo  $(x_n)$  é limitada, pois  $(x_{\phi(n)})$  é limitada. □

**Definição 6.21** (Sequência estritamente crescente). Uma sequência  $(x_n)$  é estritamente crescente se  $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} > x_n$ .

**Definição 6.22** (Sequência crescente). Uma sequência  $(x_n)$  é crescente se  $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} \geq x_n$ .

**Proposição 6.13.** *Uma sequência é estritamente crescente se, e somente se,  $\forall m, n \in \mathbb{N} : m > n \implies x_m > x_n$ .*

*Demonstração.* Supondo  $(x_n)$  crescente. Logo  $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} > x_n$ . Seja  $X = \{p \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+p} > x_n\}$ . Temos  $1 \in X$ , pois  $(x_n)$  é crescente. Supondo  $m \in X$ . Logo  $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+m} > x_n$ . Tomando  $n \in \mathbb{N}$  qualquer, temos  $x_{n+m+1} = x_{(n+m)+1} > x_{n+m} > x_n \implies x_{n+m+1} > x_n$ . Logo  $m+1 \in X$ . Logo  $X = \mathbb{N}$ . Se  $m > n$ , temos  $m = n + p$ , com  $p \in \mathbb{N}$ , logo  $x_m = x_{n+p} > x_n$ .

Supondo  $\forall m, n \in \mathbb{N} : m > n \implies x_m > x_n$ . Temos  $\forall n \in \mathbb{N} : n+1 > n \implies x_{n+1} > x_n$ . Logo  $(x_n)$  é crescente. □

**Definição 6.23** (Sequência estritamente decrescente). Uma sequência  $(x_n)$  é estritamente decrescente se  $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} < x_n$ .

**Definição 6.24** (Sequência decrescente). Uma sequência  $(x_n)$  é decrescente se  $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} \leq x_n$ .

**Proposição 6.14.** *Uma sequência é estritamente decrescente se, e somente se,  $\forall m, n \in \mathbb{N} : m > n \implies x_m < x_n$ .*

*Demonstração.* Supondo  $(x_n)$  decrescente. Logo  $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} < x_n$ . Seja  $X = \{p \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+p} < x_n\}$ . Temos  $1 \in X$ , pois  $(x_n)$  é decrescente. Supondo  $m \in X$ . Logo  $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+m} < x_n$ . Tomando  $n \in \mathbb{N}$  qualquer, temos  $x_{n+m+1} = x_{(n+m)+1} < x_{n+m} < x_n \implies x_{n+m+1} < x_n$ . Logo  $m+1 \in X$ . Logo  $X = \mathbb{N}$ . Se  $m > n$ , temos  $m = n + p$ , com  $p \in \mathbb{N}$ , logo  $x_m = x_{n+p} < x_n$ .

Supondo  $\forall m, n \in \mathbb{N} : m > n \implies x_m < x_n$ . Temos  $\forall n \in \mathbb{N} : n+1 > n \implies x_{n+1} < x_n$ . Logo  $(x_n)$  é decrescente. □

**Definição 6.25** (Sequência monótona). Uma sequência  $(x_n)$  é monótona se é crescente ou decrescente.

**Proposição 6.15.** *Uma sequência monótona  $(x_n)$  é limitada superiormente ou inferiormente.*

*Demonstração.* Se  $(x_n)$  é monótona, ela é crescente ou decrescente. Se  $(x_n)$  é crescente, temos  $n \geq 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , logo  $x_n \geq x_1$ , logo  $x_n$  é limitada inferiormente. Se  $(x_n)$  é decrescente, temos  $x_n \leq x_1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo  $(x_n)$  é limitada superiormente.  $\square$

**Proposição 6.16.** *Uma sequência monótona  $(x_n)$  é limitada se, e somente se, existe uma subsequência  $(x_{\phi(n)})$  limitada.*

*Demonstração.* Se  $(x_n)$  é limitada, qualquer subsequência  $(x_{\phi(n)})$  será limitada, em particular a subsequência  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  com  $\phi(n) = n$  é limitada. Se existe uma subsequência  $(x_{\phi(n)})$  limitada, temos  $\forall n \in \mathbb{N} : |x_{\phi(n)}| \leq c$  para algum  $c \in \mathbb{R}$ . Se  $(x_n)$  é crescente, temos  $(x_n)$  limitada inferiormente por  $x_1$ . Dado  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $\phi(n) \geq n$ , logo  $x_1 \leq x_n \leq x_{\phi(n)} \leq c$ . Logo  $(x_n)$  é limitada. Se  $(x_n)$  é decrescente, temos  $(x_n)$  limitada superiormente por  $x_1$  e de  $\phi(n) \geq n$ , obtemos  $-c \leq x_{\phi(n)} \leq x_n \leq x_1$ , logo  $(x_n)$  é limitada.  $\square$

### 6.2.2 Limite de uma sequência

**Definição 6.26** (Limite de Sequência). Dizemos que  $a \in \mathbb{R}$  é limite da sequência  $(x_n)$  se para cada  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  com  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  (que depende de  $\varepsilon$ ) tal que  $|x_n - a| < \varepsilon$  sempre que  $n \in \mathbb{N}$  com  $n > n_0$ . Ou:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

*Observação 6.5.* Quando existir um limite da sequência  $(x_n)$ , diremos que  $(x_n)$  converge ou é convergente. Além disso, se  $a \in \mathbb{R}$  for limite de  $(x_n)$ , diremos que  $(x_n)$  tende a  $a$ . Quando o limite não existir para nenhum  $a \in \mathbb{R}$ , diremos que a sequência é divergente.

**Proposição 6.17.** *O limite de uma sequência  $(x_n)$ , quando existir, é único.*

*Demonstração.* Suponha que a sequência  $(x_n)$  tenha como limites os números  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a \neq b$ . Daí  $|a - b| \neq 0 \implies |a - b| > 0$ . Tomando  $\varepsilon = |a - b|$ ,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \ n > n_0 \implies |x_n - a| < \frac{|a - b|}{2}$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_1 \implies |x_n - b| < \frac{|a - b|}{2}$$

Tomando  $n = \max\{n_0, n_1\} + 1$ , temos  $n_3 > n_0$  e  $n_3 > n_1$ , logo  $|a - b| = |a + x_n - x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{|a - b|}{2} + \frac{|a - b|}{2} = |a - b| \implies |a - b| < |a - b|$ . Contradição.  $\square$

**Definição 6.27** ( $\lim x_n$ ). Quando o limite da sequência  $(x_n)$  existir e for  $a \in \mathbb{R}$ , denotaremos por  $a = \lim x_n$ .

**Proposição 6.18.** Temos  $\lim x_n = a$  se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$ , o conjunto  $\mathbb{N} - x^{-1}((a - \varepsilon, a + \varepsilon))$  é finito.

*Demonstração.* Se  $\lim x_n = a$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \implies |x_n - a| < \varepsilon \iff x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \iff n \in x^{-1}((a - \varepsilon, a + \varepsilon))$ . Logo  $n \in \mathbb{N} - x^{-1}((a - \varepsilon, a + \varepsilon)) \implies n \notin x^{-1}((a - \varepsilon, a + \varepsilon)) \implies n \leq n_0$ . Como o conjunto  $\mathbb{N} - x^{-1}((a - \varepsilon, a + \varepsilon))$  é limitado, temos que ele é finito. Se o conjunto  $X = \mathbb{N} - x^{-1}((a - \varepsilon, a + \varepsilon))$  é finito para todo  $\varepsilon > 0$ , então é limitado. Logo existe um maior elemento  $n_0 \in X$ . Se  $n > n_0$ , temos  $n \notin X$ , logo  $n \in x^{-1}((a - \varepsilon, a + \varepsilon)) \iff x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \iff |x_n - a| < \varepsilon$ . Logo  $\lim x_n = a$ .  $\square$

**Proposição 6.19.** Se  $\lim x_n = a$ , então toda subsequência de  $(x_n)$  converge para  $a$ .

*Demonstração.* Seja  $\lim x_n = a$  e  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma função crescente. Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \implies |x_n - a| < \varepsilon$ . Temos  $\phi(n) \geq n > n_0$ , logo  $|x_{\phi(n)} - a| < \varepsilon$ . Logo  $\lim x_{\phi(n)} = a$ .  $\square$

**Proposição 6.20.** Toda sequência convergente é limitada.

*Demonstração.* Se  $(x_n)$  é convergente com  $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$ . Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \implies |x_n - a| < 1$ . Daí tomando  $c = \max\{|x_1 - a|, |x_2 - a|, \dots, |x_{n_0} - a|, 1\}$ . Dado  $n \in \mathbb{N}$ , temos que ou  $n > n_0$  ou  $n \leq n_0$ . Se  $n > n_0$ , temos  $|x_n - a| < 1 \leq c \implies a - c \leq x_n \leq a + c$ . Se  $n \leq n_0$ , temos  $|x_n - a| \leq c \implies a - c \leq x_n \leq a + c$ . Logo  $(x_n)$  é limitada.  $\square$

**Teorema 7.** Toda sequência monótona limitada é convergente.

*Demonstração.* Suponha  $(x_n)$  uma sequência monótona limitada. Logo  $(x_n)$  é crescente ou decrescente. Supondo que  $(x_n)$  seja crescente. Temos de  $(x_n)$  ser limitada que  $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  é limitado e não vazio. Logo existe  $s = \sup X$ . Temos que  $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X : x > s - \varepsilon$ , logo existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_{n_0} > s - \varepsilon \iff x_{n_0} - s > -\varepsilon \iff s - x_{n_0} < \varepsilon$ . Como  $(x_n)$  é crescente, temos  $m > n_0 \implies x_m \geq x_{n_0} \iff s - x_m \leq s - x_{n_0} < \varepsilon$ . Como  $s$  é cota superior, temos para todo  $n \in \mathbb{N}$  que  $s - x_n \geq 0 > -\varepsilon$ . Logo existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m > n_0 \implies -\varepsilon < s - x_m < \varepsilon \iff |s - x_m| < \varepsilon$ , logo  $\lim x_n = s$ .

Se  $(x_n)$  é decrescente, tomando  $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , temos que  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_{n_0} > \inf X + \varepsilon$ . Temos  $m > n_0 \implies x_m \leq x_{n_0} \iff x_m - \inf X \leq x_{n_0} - \inf X < \varepsilon$ , logo  $m > n_0 \implies -\varepsilon \leq 0 \leq x_m - \inf X < \varepsilon \iff |x_m - \inf X| < \varepsilon$ . Logo  $\lim(x_n) = \inf X$ .  $\square$

### 6.2.3 Propriedades aritméticas dos limites

#### 6.2.4 Subsequências

**Proposição 6.21.** *Seja  $(x_n)$  é uma sequência em  $\mathbb{R}$ . Temos que  $a$  é limite de alguma subsequência de  $(x_n)$  se, e somente se,  $x^{-1}((a - \varepsilon, a + \varepsilon))$  é infinito para todo  $\varepsilon > 0$ .*

**Proposição 6.22.** *Toda sequência  $(x_n)$  possui uma subsequência monótona.*

*Demonstração.* Dizemos que a sequência  $(x_n)$  é eventualmente crescente se existe uma subsequência  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $(x_{\phi(n)})$  é crescente. Se a sequência  $(x_n)$  for eventualmente crescente, temos que a sequência  $(x_{\phi(n)})$  é uma subsequência monótona. Supondo que a sequência  $(x_n)$  não é eventualmente crescente. Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , a subsequência  $(x_{n+k})$  não é crescente. Definindo  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , com  $\phi(1) = 1$  e, supondo  $\phi(n)$  definida, temos que a sequência  $(x_{n+\phi(n)})$  não é crescente, logo existe  $p, q \in \mathbb{N}$  tal que  $n + p > n + q$  e  $x_{n+p} < x_{n+q}$   $\square$





- 6.2.5 Sequências de Cauchy
- 6.2.6 Limites infinitos
- 6.2.7 Séries numéricas
- 6.3 Topologia da Reta
  - 6.3.1 Conjuntos abertos
  - 6.3.2 Conjuntos fechados
  - 6.3.3 Pontos de acumulação
  - 6.3.4 Conjuntos compactos
- 6.4 Limites de Funções
  - 6.4.1 Definição e propriedades do limite
  - 6.4.2 Exemplos de limites
  - 6.4.3 Limites laterais
  - 6.4.4 Limites no infinito
  - 6.4.5 Valores de aderência de uma função;  $\limsup$  e  $\liminf$
- 6.5 Funções Contínuas
  - 6.5.1 A noção de função contínua
  - 6.5.2 Descontinuidades
  - 6.5.3 Funções contínuas em intervalos
  - 6.5.4 Funções contínuas em conjuntos compactos
  - 6.5.5 Continuidade uniforme
- 6.6 Derivadas
  - 6.6.1 Definição e propriedades da derivada num ponto
  - 6.6.2 Funções deriváveis num intervalo
  - 6.6.3 Fórmula de Taylor
  - 6.6.4 Série de Taylor, funções analíticas
- 6.7 Integral de Riemann
  - 6.7.1 Integral superior e integral inferior
  - 6.7.2 Funções integráveis
  - 6.7.3 O Teorema Fundamental do Cálculo
  - 6.7.4 Fórmulas clássicas do Cálculo Integral
  - 6.7.5 A integral como limite de somas
  - 6.7.6 Caracterização das funções integráveis
  - 6.7.7 Logaritmos e exponenciais
- 6.8 Sequências e Séries de Funções
  - 6.8.1 Convergência simples e convergência uniforme
  - 6.8.2 Propriedades da convergência uniforme

*Demonstração.* Como  $A, B$  são limitados, então existe  $\sup A$  e  $\sup B$ . Dado  $(a, b) \in A \times B$ , temos  $0 \leq a \leq \sup A$  e  $0 \leq b \leq \sup B$ , logo  $0 \leq ab \leq \sup A \cdot \sup B$ , logo  $\sup A \sup B$  é uma cota superior para  $C = \{ab \mid (a, b) \in A \times B\}$ . Portanto  $C$  é limitado. Além disso  $\sup C \leq \sup A \cdot \sup B$ .

Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $A$  com  $\lim x_n = \sup A$  e  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $B$  com  $\lim y_n = \sup B$ , temos  $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $C$  com  $\lim x_n \cdot y_n = \sup A \sup B$ . Logo  $\sup A \cdot \sup B \leq \sup C$ .

Como  $\sup A \sup B \leq \sup C$  e  $\sup C \leq \sup A \sup B$ , temos  $\sup C = \sup A \sup B$ .  $\square$

**Proposição 6.24.** *Sejam  $A, B \subset \mathbb{R}^+ - \{0\}$  limitados, então  $C = \{ab \mid (a, b) \in A \times B\}$  é limitado e  $\sup C = \sup A \sup B$ .*

*Demonstração.* Exercício.  $\square$

## 7 Geometria Analítica

## 8 Álgebra Linear

### 8.1 Posto

**Proposição 8.1.** *Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$ .*

$$\text{rank } A = \text{rank } AA^T = \text{rank } A^T A$$

*Demonstração.* Se  $x \in \text{Null}(A)$ , temos  $Ax = 0 \implies A^T(Ax) = A^T \cdot 0 \implies (A^T A)x = 0 \implies x \in \text{Null}(A^T A)$ . Se  $x \in \text{Null}(A^T A)$ , temos  $(A^T A)x = 0 \implies x^T(A^T A)x = 0 \implies (x^T A^T)(Ax) = 0 \implies (Ax)^T(Ax) = 0 \implies Ax = 0 \implies x \in \text{Null}(A)$ . Logo  $\text{Null}(A) = \text{Null}(A^T A)$ . Pelo Teorema do posto e da unidade, temos que  $\text{rank } A + \text{Null } A = m$  e que  $\text{rank } A^T A + \text{Null } A =$   $\square$

## 9 Análise no $\mathbb{R}^n$

### 9.1 Topologia do Espaço Euclidiano

#### 9.1.1 O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

#### 9.1.2 Métrica, Produto interno e norma

**Definição 9.1** (Métrica). Dado um espaço vetorial  $E$  sobre um corpo  $K$ , uma métrica é uma função  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , que satisfaz para todos  $a, b \in E$  e  $\lambda \in K$ :

1.  $d(a, b) \geq 0$
2.  $d(a, b) = 0 \iff a = b$
3.  $d(a, b) = d(b, a)$

$$4. d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$$

**Definição 9.2** (Norma). Dado um espaço vetorial  $E$  sobre um corpo  $K$ , uma norma é uma função  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ , que satisfaz para todos  $x, y \in E$  e  $\lambda \in K$ :

1.  $\|x\| = 0 \implies x = 0$
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Proposição 9.1.** Dada uma norma  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ , temos:

$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$

*Demonstração.* Temos  $\|x\| = 0 \implies x = 0$  por definição. Basta mostrar que  $\|\vec{0}\| = 0$ . Temos  $\|\vec{0}\| = \|0 \cdot \vec{0}\| = |0| \cdot \|\vec{0}\| = 0 \cdot \|\vec{0}\| = 0$ .  $\square$

**Proposição 9.2.** Dada uma norma  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ , temos para todo  $x \in E$ :

$$\|x\| \geq 0$$

*Demonstração.* Temos para todo  $x, y \in E$  que  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ . Tomando  $y = -x$ , temos  $\|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| \iff \|0\| \leq \|x\| + |-1| \cdot \|x\| \iff 0 \leq \|x\| + \|x\| \iff 2\|x\| \geq 0 \iff \|x\| \geq 0$ .  $\square$

**Proposição 9.3.** Dada uma norma  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ , a função  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d(a, b) = \|a - b\|$  é uma métrica.

*Demonstração.* Para todo  $a, b, c \in E$ , temos:

- $d(a, b) = |a - b| \geq 0$ .
- $d(a, b) = 0 \iff |a - b| = 0 \iff a - b = 0 \iff a = b$ .
- $d(a, b) = |a - b| = |b - a| = d(b, a)$
- $d(a, b) = |a - b| = |a - c + c - b| \leq |a - c| + |c - b| = d(a, c) + d(c, b)$ .

$\square$

**Definição 9.3** (Métrica proveniente da norma). Dada uma norma  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ , a função  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d(a, b) = \|a - b\|$  é chamada de métrica proveniente da norma.

**Proposição 9.4.** Num espaço vetorial  $E$ , uma métrica  $d$  é proveniente de uma norma, se e somente se, para quaisquer  $x, y, a \in E$  e  $\lambda \in K$ , tem-se  $d(x + a, y + a) = d(x, y)$  e  $d(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = |\lambda| \cdot d(x, y)$ .

*Demonstração.* Se  $d$  provém de uma métrica, para  $x, y, a \in E$  e  $\lambda \in K$ , temos  $d(x + a, y + a) = \|(x + a) - (y + a)\| = \|x - y\| = d(x, y)$  e  $d(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \|\lambda \cdot x - \lambda \cdot y\| = \|\lambda \cdot (x - y)\| = |\lambda| \cdot \|x - y\| = |\lambda| \cdot d(x, y)$ .

Supondo  $d$  uma métrica qualquer com  $d(x + a, y + a) = d(x, y)$  e  $d(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = |\lambda| \cdot d(x, y)$ . Definindo  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\|x\| = d(x, 0)$ . De fato,  $\|\cdot\|$  é uma norma, pois:

1.  $\|x\| = 0 \iff d(x, 0) = 0 \iff x = 0$ .
2.  $\|\lambda \cdot x\| = d(\lambda \cdot x, 0) = d(\lambda \cdot x, \lambda \cdot 0) = |\lambda| \cdot d(x, 0) = |\lambda| \cdot \|x\|$ .
3.  $\|x + y\| = d(x + y, 0) \leq d(x + y, y) + d(y, 0) = d(x, 0) + d(y, 0) = \|x\| + \|y\| \implies \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Logo  $\|\cdot\|$  é uma norma que induz  $d$ . □

**Proposição 9.5.**

$$|||x| - |y|| \leq \|x - y\|$$

*Demonstração.* Temos  $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \implies \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ . Além disso  $\|y\| \leq \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\| \implies \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\| \implies -\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|$ .

Como  $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ , temos  $|||x| - |y|| \leq \|x - y\|$ . □

**Definição 9.4** (Normas equivalentes). Duas normas  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$  são equivalentes se existirem  $C_1, C_2 > 0$  tal que

$$C_1 \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \cdot \|x\|_1$$

**Proposição 9.6.** Se um espaço normado  $E$  tiver dimensão finita, então todas as suas normas são equivalentes.

### 9.1.3 Números complexos

#### 9.1.4 Bolas e conjuntos limitados

#### 9.1.5 Sequências no espaço euclidiano

**Teorema 8.** Uma sequência  $(x_k) \in \mathbb{R}^n$  converge para o ponto  $a = (a_1, \dots, a_n)$  se, e somente se, para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , tem-se  $\lim x_{ki} = a_i$ .

*Demonstração.* Tomando a norma do máximo e supondo  $\lim x_k = a$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $k > k_0 \implies |x_k - a| < \varepsilon$ . Para todo  $i \in I_n$ , temos  $k > k_0 \implies |x_{ki} - a_i| \leq |x_k - a| < \varepsilon$ , logo  $\lim x_{ki} = a_i$ .

Supondo  $\lim x_{ki} = a_i$  para todo  $i \in I_n$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe para todo  $i \in I_n$  um  $k_i \in \mathbb{N}$  tal que  $k > k_i \implies |x_{ki} - a_i| < \varepsilon$ . Tomando  $k_0 = \max\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ . Temos  $k > k_0 \implies \max_{i \in I_n} |x_{ki} - a_i| = |x_k - a| < \varepsilon$ . Logo  $\lim x_k = a$  □

### 9.1.6 Pontos de acumulação

### 9.1.7 Aplicações contínuas

### 9.1.8 Homeomorfismos

### 9.1.9 Limites

**Proposição 9.7.** *Seja  $a$  um ponto de acumulação do conjunto  $X \subset \mathbb{R}^m$ . Dada a aplicação  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ , cujas funções coordenadas são  $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ , tem-se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = (b_1, \dots, b_n)$  se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = b_i$  para cada  $i \in I_n$ .*

*Demonstração.* Tomando a norma do máximo e supondo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\forall x \in X : |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon$  para todo  $i \in I_n$ . logo  $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = b_i$  para todo  $i \in I_n$ .

Supondo  $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = b_i$  para todo  $i \in I_n$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe para todo  $i \in I_n$  um  $\delta_i > 0$  tal que  $\forall x \in X : |x - a| < \delta_i \implies |f_i(x) - b_i| < \varepsilon$ . Tomando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ . Temos  $\forall x \in X : |x - a| < \delta \implies \max_{i \in I_n} |f_i(x) - b_i| = |f(x) - b| < \varepsilon$ . Logo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .  $\square$

### 9.1.10 Conjuntos abertos

### 9.1.11 Conjuntos fechados

### 9.1.12 Conjuntos compactos

**Definição 9.5** (Conjunto Compacto). Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é compacto  $\iff$  é fechado e limitado.

**Proposição 9.8.** *Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é compacto  $\iff$  toda sequência  $(x_n)$  em  $X$  possui uma subsequência convergente com limite em  $X$ .*

*Demonstração.* Supondo  $X \subset \mathbb{R}^n$  compacto. Seja  $(x_n)$  uma sequência em  $X$ . Como  $X$  é limitado,  $(x_n)$  admite uma subsequência  $(x_{\phi(n)})$  convergente. Como  $X$  é fechado, temos que  $\lim x_{\phi(n)} = x \in X$ .

Tomando a contrapositiva, suponha que  $X$  não seja compacto. Logo  $X$  não é fechado ou não é limitado. Se  $X$  não é fechado, existe um  $x \in \overline{X} \setminus X$ . Logo existe uma sequência  $(x_n) \in X$  com  $\lim x_n = x$ . Qualquer subsequência  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  de  $(x_n)$  terá  $\lim x_{\phi(n)} = x$ . Logo existe uma sequência  $(x_n)$  tal que nenhuma subsequência  $(x_{\phi(n)})$  tenha limite  $x \in X$ . Suponha que  $X$  não seja limitado, logo para todo  $\varepsilon$ , existe  $x \in X$  tal que  $|x| > \varepsilon$ . Daí tomando  $x_n \in X$  tal que  $|x_n| > n$ , temos que a sequência não admite valores de aderência. Logo não existe subsequência convergente.  $\square$

### 9.1.13 Distância entre dois conjuntos; diâmetro

### 9.1.14 Conexidade

### 9.1.15 A norma de uma transformação linear

## 9.2 Caminhos no Espaço Euclidiano

### 9.2.1 Caminhos diferenciáveis

**Definição 9.6** (Caminho). Um caminho é uma aplicação  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo.

**Definição 9.7** (Funções coordenadas). Se  $f = (f_1, \dots, f_n)$  é um caminho, as  $n$  funções  $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  são chamadas de funções coordenadas de  $f$ .

**Definição 9.8.** O vetor velocidade do caminho  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  no ponto  $a \in I$  é, por definição, o limite

$$\frac{df}{dt} = Df(a) = f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t},$$

quando ele existir.

**Definição 9.9.** Quando a velocidade de um caminho  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  no ponto  $a \in I$  existir, a norma  $|f'(a)|$  é a velocidade escalar de  $f$  no ponto  $a$ .

**Definição 9.10.** Quando a velocidade de um caminho  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  no ponto  $a \in I$  existir, dizemos que  $f$  é diferenciável em  $a$ . Se  $f$  for diferenciável em todo  $a \in I$ , dizemos que  $f$  é diferenciável.

**Proposição 9.9.** A função  $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável em  $a \in I$  se, e somente se,  $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $a$  para todo  $i \in I_n$ . E  $f'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_n(a))$ .

*Demonstração.* Se  $f = (f_1, \dots, f_n)$  é diferenciável em  $a \in I$ , então o limite  $f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$  existe. Temos:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{f_i(a+t) - f_i(a)}{t} \right)_{1 \leq i \leq n} \\ &= \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(a+t) - f_i(a)}{t} \right)_{1 \leq i \leq n} \\ &= (f'_1(a), \dots, f'_n(a)) \end{aligned}$$

Logo pela proposição 9.7, o limite  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$  existe se, e somente se,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(a+t) - f_i(a)}{t}$  existe para todo  $i \in I_n$ .  $\square$

**Proposição 9.10.** Um caminho  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável em  $a \in I$  se, e somente se, existe um vetor  $v \in \mathbb{R}^n$  e uma função  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  (resto) tal que para  $a + t \in I$  se tenha

$$f(a + t) - f(a) = t \cdot v + r(t), \text{ onde } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t} = 0.$$

Além disso, temos  $f'(a) = v$ .

*Demonstração.* Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável em  $a \in I$ , tomando  $v = f'(a)$  e definindo  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$r(t) = \begin{cases} f(a + t) - f(a) - t \cdot f'(a), & t \neq 0 \wedge a + t \in I \\ 0, & t = 0 \vee a + t \notin I \end{cases}.$$

Se  $t = 0$ , temos  $f(a + t) - f(a) = t \cdot v + r(t)$ , pois  $0 = f(a) - f(a) = 0 \cdot v + r(0) = 0$ . Dado  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que  $a + t \in I$ , temos  $r(t) = f(a + t) - f(a) - t \cdot f'(a) \implies f(a + t) - f(a) = t \cdot f'(a) + r(t)$ . Como  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t) - f(a)}{t} = f'(a)$ , dado

$\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < |t| < \delta$  com  $a + t \in I$  implica em  $\left| \frac{r(t)}{t} \right| = \left| \frac{f(a + t) - f(a)}{t} - f'(a) \right| < \varepsilon$ . Logo se  $0 < |t| < \delta$ , temos  $a + t \in I$  ou  $a + t \notin I$ .

Se  $a + t \in I$ , temos  $\left| \frac{r(t)}{t} \right| < \varepsilon$ . Se  $a + t \notin I$ , temos  $r(t) = 0 < \varepsilon$ . Em ambos os casos, temos  $\left| \frac{r(t)}{t} \right| < \varepsilon$ . Logo  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t} = 0$ .

Se existe um vetor  $v \in \mathbb{R}^n$  e uma função  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que para  $a + t \in I$  se tenha  $f(a + t) - f(a) = t \cdot v + r(t)$  onde  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t} = 0$ . Temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t) - f(a)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{f(a + t) - f(a)}{t} + v - v \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{f(a + t) - f(a)}{t} - v \right) + \lim_{t \rightarrow 0} v \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} v \\ &= v \end{aligned}$$

Logo  $f$  é diferenciável em  $a \in I$  e  $f'(a) = v$ . □

**Proposição 9.11.** Um caminho  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável em  $a \in I$  se, e somente se, existe um vetor  $v \in \mathbb{R}^n$  e uma função  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  (resto) tal que para  $a + t \in I$  se tenha

$$f(a + t) - f(a) = t \cdot [v + \rho(t)], \text{ onde } \lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) = 0.$$

Além disso, temos  $f'(a) = v$ .

*Demonstração.* Basta tomar  $\rho(t) = \begin{cases} \frac{r(t)}{t} & , t \neq 0 \\ 0 & , t = 0 \end{cases}$ , onde  $r$  é a função definida na proposição anterior.  $\square$

### 9.2.2 Exercícios

*Exercício 9.2.1.* Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  um caminho diferenciável. Se  $a \in I$  é ponto de acumulação do conjunto  $f^{-1}(v)$ , para algum  $v \in \mathbb{R}^n$ , então  $f'(a) = 0$ .

*Demonstração.*  $\square$

### 9.2.3 Integral de um caminho

#### 9.2.4 Os teoremas clássicos do Cálculo

**Lema 18.** Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável no ponto  $c \in I$ . Dadas sequências de números  $a_k \neq b_k$  em  $I$ , com  $a_k \leq c \leq b_k$  e  $\lim a_k = \lim b_k = c$ , tem-se

$$f'(c) = \lim \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k}$$

*Demonstração.* Seja  $Y = \{k \in \mathbb{N} \mid a_k = c \vee b_k = c\}$ . Se  $X_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid a_k = c\}$  e  $X_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid b_k = c\}$ , temos  $Y = X_1 \cup X_2$ . Daí temos  $Y$  infinito se, e somente se,  $X_1$  ou  $X_2$  são infinitos. Se  $X_1$  é infinito, tomando uma subsequência  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow X_1$ , temos

$$\lim \frac{f(b_{\phi(k)}) - f(a_{\phi(k)})}{b_{\phi(k)} - a_{\phi(k)}} = \lim \frac{f(b_{\phi(k)}) - f(c)}{b_{\phi(k)} - c} = f'(c).$$

O caso  $X_2$  infinito é análogo. Se  $Y$  é finito, podemos supor  $k$  maior que  $\max Y$ .



Supondo  $a_k < c < b_k$ . Temos para  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} &= \frac{f(b_k) - f(c)}{b_k - a_k} + \frac{f(c) - f(a_k)}{b_k - a_k} \\
&= \frac{f(b_k) - f(c)}{b_k - a_k} + \frac{f(c) - f(a_k)}{b_k - a_k} \\
&= \frac{f(b_k) - f(c)}{b_k - c} \cdot \left( \frac{b_k - c}{b_k - a_k} \right) + \frac{f(c) - f(a_k)}{c - a_k} \cdot \left( \frac{c - a_k}{b_k - a_k} \right) \\
&= \frac{f(b_k) - f(c)}{b_k - c} \cdot \left( \frac{b_k - a_k + a_k - c}{b_k - a_k} \right) + \frac{f(c) - f(a_k)}{c - a_k} \cdot \left( \frac{c - a_k}{b_k - a_k} \right) \\
&= \frac{f(b_k) - f(c)}{b_k - c} \cdot \left( 1 - \frac{c - a_k}{b_k - a_k} \right) + \frac{f(c) - f(a_k)}{c - a_k} \cdot \left( \frac{c - a_k}{b_k - a_k} \right)
\end{aligned}$$

Tomando  $t_k = \frac{c - a_k}{b_k - a_k}$ , temos  $c < b_k \implies 0 < c - a_k < b_k - a_k \implies 0 < \frac{c - a_k}{b_k - a_k} < 1 \implies 0 < t_k < 1$ . Como  $(t_k)$  é limitada, existe uma subsequência convergente. Passando a subsequências, se  $t = \lim t_k$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
\lim \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} &= \lim \left[ \frac{f(b_k) - f(c)}{b_k - c} \cdot \left( 1 - \frac{c - a_k}{b_k - a_k} \right) + \frac{f(c) - f(a_k)}{c - a_k} \cdot \left( \frac{c - a_k}{b_k - a_k} \right) \right] \\
&= \lim \left[ \frac{f(b_k) - f(c)}{b_k - c} \cdot (1 - t_k) + \frac{f(c) - f(a_k)}{c - a_k} \cdot t_k \right] \\
&= f'(c) \cdot (1 - t) + f'(c) \cdot t \\
&= f'(c)
\end{aligned}$$

□

**Lema 19.** Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas e diferenciáveis em  $[a, b]$ . Se  $|f'(t)| \leq \phi'(t)$  e  $\phi'(t) > 0$  para todo  $t \in [a, b]$ , então  $|f(b) - f(a)| \leq \phi(b) - \phi(a)$ .

*Demonstração.* Supondo  $f, \phi$  diferenciáveis em  $[a, b]$ , suponha por contradição que  $|f(b) - f(a)| > \phi(b) - \phi(a)$ . Logo existe  $A > 0$  tal que  $|f(b) - f(a)| > A \cdot [\phi(b) - \phi(a)]$ . Dividindo o intervalo  $[a, b]$  em 2 intervalos iguais  $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$ . Se  $|f(c) - f(a)| \leq A [\phi(c) - \phi(a)]$  e  $|f(b) - f(c)| \leq A [\phi(b) - \phi(c)]$ , temos  $|f(b) - f(a)| \leq |f(b) - f(c)| + |f(c) - f(a)| \leq A \cdot [\phi(b) - \phi(a)]$ , logo podemos tomar  $[a_2, b_2] \subset [a, b]$  tal que  $|f(b_2) - f(a_2)| > \phi(b_2) - \phi(a_2)$ . Aplicando esse processo, obtemos uma sequência  $[a, b] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_k, b_k] \supset \dots$  tal que

$\lim a_k = \lim b_k = c \in [a, b]$  e  $|f(b_k) - f(a_k)| > \phi(b_k) - \phi(a_k)$ . Pelo lema passado:

$$\begin{aligned}
|f'(c)| &= \lim \frac{|f(b_k) - f(a_k)|}{b_k - a_k} \\
&\geq \lim \frac{A \cdot [\phi(b_k) - \phi(a_k)]}{b_k - a_k} \\
&= A \cdot \lim \frac{[\phi(b_k) - \phi(a_k)]}{b_k - a_k} \\
&= A \cdot \phi'(c) \\
&> \phi'(c)
\end{aligned}$$

Contradição, pois  $|f'(c)| \leq \phi'(c)$ . Logo devemos ter  $|f(b) - f(a)| \leq \phi(b) - \phi(a)$ .  $\square$

**Lema 20.** *Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas em  $[a, b]$  e diferenciáveis em  $(a, b)$ . Se  $|f'(t)| \leq \phi'(t)$  e  $\phi'(t) > 0$  para todo  $t \in (a, b)$ , então  $|f(b) - f(a)| \leq \phi(b) - \phi(a)$ .*

*Demonstração.* Usando o lema anterior, temos que  $|f(c) - f(d)| \leq \phi(c) - \phi(d)$  para todo  $[c, d] \subset (a, b)$ . Fazendo  $c_k \rightarrow a$  e  $d_k \rightarrow b$ , temos da continuidade de  $f$  e  $\phi$  que  $|f(b) - f(a)| = \lim |f(d_k) - f(c_k)| \leq \lim [\phi(d_k) - \phi(c_k)] = \phi(b) - \phi(a)$ .  $\square$

**Teorema 9.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  um caminho contínuo, diferenciável no aberto  $(a, b)$ . Se  $|f'(t)| \leq M$  para todo  $t \in (a, b)$ , então  $|f(b) - f(a)| \leq M \cdot (b - a)$ .*



- 9.2.5 Caminhos retificáveis
- 9.2.6 O comprimento de arco como parâmetro
- 9.2.7 Curvatura e torção
- 9.2.8 A função-ângulo
- 9.3 Funções Reais de  $n$  Variáveis
  - 9.3.1 Derivadas parciais
  - 9.3.2 Derivadas direcionais
  - 9.3.3 Funções diferenciáveis
  - 9.3.4 A diferencial de uma função
  - 9.3.5 O gradiente de uma função diferenciável
  - 9.3.6 A Regra de Leibniz
  - 9.3.7 O Teorema de Schwarz
  - 9.3.8 Fórmula de Taylor: pontos críticos
  - 9.3.9 O teorema da função implícita
  - 9.3.10 Multiplicador de Lagrange
- 9.4 Integrais Curvilíneas
  - 9.4.1 Formas diferenciais de grau 1
  - 9.4.2 Integral de Stieltjes
  - 9.4.3 Integral de uma forma ao longo de um caminho
  - 9.4.4 Justaposição de caminhos: caminho inverso
  - 9.4.5 Integral curvilínea de um campo de vetores e de uma função
  - 9.4.6 Formas exatas e formas fechadas
  - 9.4.7 Homotopia
  - 9.4.8 Integrais curvilíneas e homotopia
  - 9.4.9 Cohomologia
  - 9.4.10 A fórmula de Kronecker
- 9.5 Aplicações Diferenciáveis
  - 9.5.1 Diferenciabilidade de uma aplicação
  - 9.5.2 Exemplos de aplicações diferenciáveis
  - 9.5.3 A regra da cadeia
  - 9.5.4 A fórmula de Taylor
  - 9.5.5 A desigualdade do valor médio<sup>60</sup>
  - 9.5.6 Sequências de aplicações diferenciáveis
  - 9.5.7 Aplicações fortemente diferenciáveis
  - 9.5.8 O teorema da aplicação inversa
  - 9.5.9 Aplicação: o Lema de Morse

**Definição 9.12** ( $L(\mathbb{R}^n)$ ).

$$L(\mathbb{R}^n) = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

**Definição 9.13** ( $GL(\mathbb{R}^n)$ ).

$$GL(\mathbb{R}^n) = \{T \in L(\mathbb{R}^n) \mid T \text{ é bijetiva}\}$$

**Proposição 9.12.**  $GL(\mathbb{R}^n)$  é aberto.

*Demonstração.* Seja  $T \in GL(\mathbb{R}^n)$ . Logo  $T$  é invertível (bijetiva).  $\square$

**Proposição 9.13.**  $f : GL(\mathbb{R}^n) \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$ , dada por  $f(T) = T^{-1}$  é contínua.

*Demonstração.*  $\square$

## 9.9 Diferenciação

**Proposição 9.14.** Seja  $f : GL(\mathbb{R}^n) \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$ , dada por  $f(T) = T^{-1}$ . Temos  $f$  diferenciável.

*Demonstração.* Temos

$$(T + H)(T + H)^{-1} = I \iff$$

$$T(T + H)^{-1} + H(T + H)^{-1} = I \iff$$

$$T(T + H)^{-1} = I - H(T + H)^{-1} \iff$$

$$(T + H)^{-1} = T^{-1}(I - H(T + H)^{-1}) \iff$$

Vou substituir  $(T + H)^{-1}$  na equação acima.

$$(T + H)^{-1} = T^{-1}(I - H(T + H)^{-1})$$

$$= T^{-1}(I - H[T^{-1}(I - H(T + H)^{-1})])$$

$$= T^{-1}(I - HT^{-1}(I - H(T + H)^{-1}))$$

$$= T^{-1}(I - HT^{-1} + HT^{-1}H(T + H)^{-1})$$

$$= T^{-1} - T^{-1}HT^{-1} + T^{-1}HT^{-1}H(T + H)^{-1}$$

Se chamarmos  $S_T(H) = -T^{-1}HT^{-1}$ , temos

$$\begin{aligned} f(T+H) &= (T+H)^{-1} \\ &= T^{-1} - T^{-1}HT^{-1} + T^{-1}HT^{-1}H(T+H)^{-1} \\ &= f(T) + S_T(H) + T^{-1}HT^{-1}H(T+H)^{-1} \end{aligned}$$

Afirmo que  $S_T(H) = Df(T)(H)$ . De fato,  $S_T$  é linear (confia) e temos

$$\begin{aligned} \lim_{H \rightarrow 0} \frac{|f(T+H) - f(T) - S_T(H)|}{|H|} &= \lim_{H \rightarrow 0} \frac{|+T^{-1}HT^{-1}H(T+H)^{-1}|}{|H|} \\ &\leq \lim_{H \rightarrow 0} \frac{|T^{-1}| \cdot |H| \cdot |T^{-1}| \cdot |H| \cdot |(T+H)^{-1}|}{|H|} \\ &= \|T^{-1}\|^2 \cdot \lim_{H \rightarrow 0} |H| \cdot |(T+H)^{-1}| \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

## 9.10 Integração

**Definição 9.14** (Retângulo). Um retângulo ou bloco é um produto cartesiano

$$A = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^m, \text{ com } a_i < b_i \text{ para } i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

**Definição 9.15** (Partição do intervalo). Uma partição de um intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  é uma sequência  $t_1, t_2, \dots, t_k$  com  $a = t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k = b$ .

**Definição 9.16** (Partição de um retângulo). Uma partição de um retângulo  $A \subset \mathbb{R}^m$  é uma coleção  $P = (P_1, P_2, \dots, P_m)$ , onde  $P_i$  é uma partição do intervalo  $[a_i, b_i]$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

**Definição 9.17** (Subretângulo de uma Partição). Dada uma partição  $P = (P_1, P_2, \dots, P_m)$  do retângulo  $A \subset \mathbb{R}^n$ , um subretângulo  $S$  de  $P$  é um retângulo da forma  $S = \prod_{j=1}^m I_j$ , onde  $I_j$  é um intervalo da partição  $P_j$ .

**Definição 9.18** (Refinamento de uma partição). Dada uma partição  $P$  de um retângulo  $A$ , dizemos que  $Q$  é um refinamento de  $P$  se todo subretângulo de  $Q$  está contido em um subretângulo de  $P$ .

**Definição 9.19** (Medida Nula). Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  tem medida nula se para todo  $\varepsilon > 0$ , existe uma cobertura enumerável  $\{U_i\}_{i \in L}$  de  $A$  por retângulos fechados tal que  $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$ .

**Definição 9.20** (Conteúdo Nulo). Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  tem conteúdo nulo se para todo  $\varepsilon > 0$ , existe uma cobertura finita  $\{U_i\}_{i \in L}$  de  $A$  por retângulos fechados tal que  $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$ .

**Proposição 9.15.** *Se  $A$  tem conteúdo nulo, então  $A$  tem medida nula.*

*Demonstração.* Se  $A$  tem conteúdo nulo, então dado  $\varepsilon$ , existe uma cobertura finita  $\{U_i\}_{i \in L}$  de  $A$  tal que  $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$ . Como todo conjunto finito é enumerável, temos  $\{U_i\}_{i \in L}$  enumerável, logo  $A$  tem medida nula.  $\square$

**Proposição 9.16.** *Uma união enumerável de conjuntos com medida nula tem medida nula.*

*Demonstração.*  $\square$

**Proposição 9.17.** *Se  $A$  é compacto e tem medida nula, então  $A$  tem conteúdo nulo.*

*Demonstração.*  $\square$

### 9.10.1 Exercícios

*Exercício 9.10.1.* Sejam  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  funções limitadas não-negativas nos blocos  $A, B$ . Defina  $\phi : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  pondo  $\phi(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ . Prove que

$$\overline{\int_{A \times B} \phi(z) dz} = \overline{\int_A f(x) dx} \cdot \overline{\int_B g(y) dy}$$

e que vale um resultado análogo para integrais inferiores.

*Demonstração.* Temos  $\overline{\int_{A \times B} \phi(z) dz} = \inf_Q \{U(\phi; Q)\}$ . Seja  $Q = (P, P')$  uma partição de  $A \times B$ . Temos  $P$  partição de  $A$  e  $P'$  partição de  $B$ . Seja  $S_b = S \times S'$  um subretângulo de  $Q$ , temos  $S$  subretângulo de  $P$  e  $S'$  subretângulo de  $P'$ . Temos  $\forall x \in S : 0 \leq f(x) \leq M_S(f)$  e  $\forall y \in S' : 0 \leq g(y) \leq M_{S'}(g)$ , logo  $\forall (x, y) \in S \times S' = S_b : 0 \leq f(x) \cdot g(y) \leq M_S(f) \cdot M_{S'}(g)$ . Logo  $M_S(f) \cdot M_{S'}(g)$  é cota superior para  $f(x) \cdot g(y)$  em  $S \times S'$ , logo  $\sup \{f(x) \cdot g(y) \mid (x, y) \in S \times S'\} = M_{S \times S'}(\phi) \leq M_S(f) \cdot M_{S'}(g)$ .

Se  $M_S(f) = 0$ , temos  $0 \leq f(x) \leq M_S(f) = 0 \implies f(x) = 0$  para todo  $x \in S$ , logo  $\forall (x, y) \in (S \times S') : f(x) \cdot g(y) = 0 \cdot g(y) = 0$ , logo  $M_{S \times S'}(\phi) = 0$ . É análogo se  $M_{S'}(g) = 0$ .

Supondo  $M_S(f) \neq 0$  e  $M_{S'}(g) \neq 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $x_1 \in S$  tal que  $f(x_1) > M_S(f) - \frac{\varepsilon}{2 \cdot M_{S'}(g)}$  e existe  $y_1 \in S'$  tal que  $g(y_1) > M_{S'}(g) - \frac{\varepsilon}{2 \cdot M_S(f)}$ . Logo existe  $(x_1, x_2) \in S \times S'$  tal qu  $f(x_1) \cdot f(x_2) > \left( M_S(f) - \frac{\varepsilon}{2 \cdot M_{S'}(g)} \right) \cdot \left( M_{S'}(g) - \frac{\varepsilon}{2 \cdot M_S(f)} \right) = M_S(f) \cdot M_{S'}(g) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2M_S(f) \cdot M_{S'}(g)} > M_S(f) \cdot M_{S'}(g) - \varepsilon$ . Como dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $(x_1, y_1) \in S \times S'$  tal que  $f(x_1) \cdot g(y_1) < M_S(f) \cdot M_{S'}(g) - \varepsilon$  e  $M_S(f) \cdot M_{S'}(g)$  é cota superior para  $\{f(x) \cdot g(y) | (x, y) \in S \times S'\}$ , temos  $M_{S \times S'}(\phi) = M_S(f) \times M_{S'}(g)$ .

Logo

$$\begin{aligned}
U(\phi, Q) &= \sum_{S \times S' \in (P, P')} M_{S \times S'}(\phi) \cdot V(S \times S') \\
&= \sum_{S \times S' \in (P, P')} M_S(f) \cdot M_{S'}(g) \cdot V(S) \cdot V(S') \\
&= \sum_{\substack{S \in P, \\ S' \in P'}} [M_S(f) \cdot V(S)] \cdot [M_{S'}(g) \cdot V(S')] \\
&= \sum_{S \in P} \sum_{S' \in P'} [M_S(f) \cdot V(S)] \cdot [M_{S'}(g) \cdot V(S')] \\
&= \sum_{S \in P} [M_S(f) \cdot V(S)] \cdot \sum_{S' \in P'} [M_{S'}(g) \cdot V(S')] \\
&= \left[ \sum_{S' \in P'} M_{S'}(g) \cdot V(S') \right] \cdot \left[ \sum_{S \in P} M_S(f) \cdot V(S) \right] \\
&= U(f, P) \cdot U(g, P')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Logo } \overline{\int_{A \times B} \phi(z) dz} &= \inf_Q \{U(\phi; Q)\} = \inf_{(P, P')} \{U(f, P) \cdot U(g, P')\} = \inf_P \{U(f, P)\} \cdot \\
\inf_{P'} \{U(g, P')\} &= \overline{\int_A f(x) dx} \cdot \overline{\int_B g(y) dy}
\end{aligned}$$

□

*Exercício 9.10.2.* Se  $X \subset \mathbb{R}^m$  tem medida nula, então para todo  $Y \subset \mathbb{R}^m$ , o produto cartesiano  $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$  tem medida nula.



*Demonstração.* Basta provar que se  $X \subset \mathbb{R}^n$  tem medida nula, então  $X \times \mathbb{R}^m$  tem medida nula. Pois uma cobertura do conjunto  $X \times \mathbb{R}^m$  cobre o conjunto  $X \times Y \subset X \times \mathbb{R}^m$ .

Chamando  $C_p = \prod_{i=1}^m [-p, p] = \underbrace{[-p, p] \times [-p, p] \times \cdots \times [-p, p]}_{m \text{ vezes}} \subset \mathbb{R}^m$ . Temos  $\mathbb{R}^m = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} C_p$ , logo  $X \times \mathbb{R}^m = X \times \bigcup_{p \in \mathbb{N}} C_p = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} X \times C_p$ . Como é uma união enumerável de conjuntos, basta mostrar que  $X \times C_p$  tem medida nula para todo  $p \in \mathbb{N}$ .

Fixando  $p \in \mathbb{N}$ , temos  $v(C_p) = (2p)^m$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma cobertura enumerável  $\{U_i\}_{i \in L}$  de retângulos fechados tal que  $\sum_{i \in L} v(U_i) < \frac{\varepsilon}{(2p)^m}$ . Temos

$X \times C_p \subset \left( \bigcup_{i \in L} U_i \right) \times C_p = \bigcup_{i \in L} U_i \times C_p$ . Como  $C_p$  e  $U_i$  são retângulos, temos  $v(U_i \times C_p) = v(U_i) \cdot v(C_p)$ . Logo temos  $\sum_{i \in L} v(U_i \times C_p) = \sum_{i \in L} v(U_i) \cdot v(C_p) = \sum_{i \in L} v(U_i) \cdot (2p)^m = (2p)^m \cdot \sum_{i \in L} v(U_i) < (2p)^m \cdot \frac{\varepsilon}{(2p)^m} = \varepsilon$ . Logo  $X \times C_p$  tem medida zero para todo  $p \in \mathbb{N}$ .

Como  $X \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} X \times C_p$  é uma união enumerável de conjuntos de medida nula, temos que  $X \times \mathbb{R}^n$  tem medida nula. □

## 10 Geometria diferencial

### 10.1 Superfícies Regulares

**Definição 10.1** (Superfície). Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  é uma superfície de dimensão  $m$  quando, para todo  $x \in S$ , existe  $A \subset S$  aberto em  $S$  contendo  $x$ ,  $A_0$  aberto em  $\mathbb{R}^m$  e um homeomorfismo  $\phi : A_0 \rightarrow A$ .

*Observação 10.1.* Observe que  $A$  é aberto em  $S$  se, e somente se, existe um aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $A = V \cap S$ .

*Observação 10.2.* Aqui estamos preocupados quando  $n = 3$  e  $m = 2$ .

**Definição 10.2** (Superfície regular). Um conjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular se, para todo  $p \in S$ , existe um aberto  $V \subset \mathbb{R}^3$  com  $p \in V$  e uma aplicação  $x : U \rightarrow V \cap S$  tal que:

1.  $x$  é diferenciável;
2.  $x$  é um homeomorfismo.
3.  $x$  é uma imersão.

**Proposição 10.1.** *Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , então o gráfico de  $f$  é uma superfície regular.*

*Demonstração.* Seja  $S = \text{Graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in U \wedge z = f(x, y)\}$ . Tomando  $\phi : U \rightarrow S \cap \mathbb{R}^3 = S$  com  $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ . Temos  $\phi$  diferenciável com  $(\phi)^{-1} = \pi|_S$ , logo é um homeomorfismo. Além disso,  $D\phi(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_1(x, y) & f_2(x, y) \end{bmatrix}$  com  $\text{rank}(D\phi(x, y)) = 2$  para todo  $(x, y) \in U$ , logo é uma imersão.  $\square$

**Definição 10.3.** Dada uma aplicação diferenciável  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida em um aberto  $U$ , dizemos que  $p \in U$  é um ponto crítico de  $F$  se  $\text{rank}(DF(p)) < m$ . A imagem  $F(p) \in \mathbb{R}^m$  de um ponto crítico é chamado um valor crítico de  $F$ . Um ponto de  $\mathbb{R}^m$  que não é valor crítico é chamado um valor regular de  $F$ .