

1 Conjuntos Finitos e Infinitos

1.1 Números naturais

Temos como conceitos primitivos o conjunto dos naturais, denotado por \mathbb{N} , cujos elementos são os números naturais, e uma função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o número $s(n)$ é o sucessor de n . Temos os axiomas:

Axioma 1. $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é injetiva.

Axioma 2. $\mathbb{N} - s(n) = \{1\}$. Ou seja, só existe um número natural que não é sucessor de nenhum outro, e ele é denotado por 1.

Axioma 3 (Princípio de indução). Se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto tal que:

$$\begin{cases} 1 \in X \\ n \in X \implies s(n) \in X \end{cases}$$

Então $\mathbb{N} = X$.

Definição 1.1 (Soma). Dados $m, n \in \mathbb{N}$, sua soma $m + n$ é definida como:

$$m + n := s^n(m).$$

A soma deve obedecer

$$m + 1 = s(m) \tag{1}$$

$$m + s(n) = s(m + n) \tag{2}$$

para todos os m, n naturais.

Observação 1.1. Dedekind prova o "Teorema da Definição por Indução" para garantir que a notação $s^n(m)$ faça sentido.

Proposição 1 (Associatividade da Soma). Para todos $p, m, n \in \mathbb{N}$, temos $m + (n + p) = (m + n) + p$.

Proof. Seja $X = \{p \in \mathbb{N} \mid \forall m, n \in \mathbb{N} : m + (n + p) = (m + n) + p\}$. Da definição de adição, temos pra qualquer m, n que $n + 1 = s(n)$, logo $m + (n + 1) = m + s(n) = s(m + n) = (m + n) + 1 \implies m + (n + 1) = (m + n) + 1$. Logo $1 \in X$. Se $p \in X$, temos $m + (n + p) = (m + n) + p$. Logo

$$\begin{aligned} m + (n + s(p)) &= m + s(n + p) \\ &= s(m + (n + p)) \\ &= s((m + n) + p) \\ &= (m + n) + s(p). \end{aligned}$$

Logo $p \in X \implies s(p) \in X$. Temos que $X = \mathbb{N}$ pelo princípio de indução. Logo a soma é associativa nos naturais. \square