

# 1 Teoria de conjuntos

**Proposição 1.**

$$(A - B) \cup B = A \cup B$$

*Proof.*

$$x \in (A - B) \cup B \iff$$

$$(x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B \iff$$

$$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \in B) \iff$$

$$(x \in A \vee x \in B) \wedge t \iff$$

$$x \in A \vee x \in B \iff$$

$$x \in A \cup B \iff$$

□

*Observação 1.1.* Acima,  $t$  representa tautologia. Algo que sempre tem valor lógico verdadeiro.

**Proposição 2.** Se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  são bijeções, então  $(g \circ f) : X \rightarrow Z$  é uma bijeção.

*Proof.* Temos  $g(f(a)) = g(f(b)) \implies f(a) = f(b) \implies a = b$ . Logo  $g \circ f$  é injetiva.

Tomando  $z \in Z$ . Como  $g$  é sobrejetiva, existe  $y \in Y$  tal que  $g(y) = z$ . Como  $f$  é sobrejetiva, existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Logo existe  $x \in X$  tal que  $g(f(x)) = g(y) = z$ . Logo  $g \circ f$  é sobrejetiva. □

**Proposição 3.** Se  $f : A \cup B \rightarrow C$  é uma bijeção, então  $f' : A \rightarrow C - f(B)$ ,  $a \mapsto f(a)$  é uma bijeção.

*Proof.* Se  $a, b \in A$ , temos  $f'(a) = f'(b) \iff f(a) = f(b) \implies a = b$ . Logo  $f'$  é injetiva.

Tomando  $y \in C - f(B)$ . Como  $f$  é sobrejetiva, existe  $x \in A \cup B$  tal que  $f(x) = y$ . Se  $x \in B$ , teríamos  $f(x) \in f(B)$ , logo  $f(x) \notin C - f(B)$  (contradição). Logo devemos ter  $x \in A$ . Logo existe  $x \in A$  tal que  $f'(x) = f(x) = y$ . Logo  $f'$  é sobrejetiva. □

## 2 Conjuntos Finitos e Infinitos

### 2.1 Números naturais

**Temos como conceitos primitivos o conjunto dos naturais, denotado por  $\mathbb{N}$ , cujos elementos são os números naturais, e uma função  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o número  $s(n)$  é o sucessor de  $n$ . Temos os axiomas:**

**Axioma 1.**  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é injetiva.

**Axioma 2.**  $\mathbb{N} - s(\mathbb{N}) = \{1\}$ . Ou seja, só existe um número natural que não é sucessor de nenhum outro, e ele é denotado por 1.

**Proposição 4.** Todo natural diferente de 1 possui um antecessor.

*Proof.* Seja  $n \neq 1$  um número natural. Suponha que não exista  $n_0$  natural com  $s(n_0) = n$ . Logo  $n \notin s(\mathbb{N})$ . Logo  $n \in \mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ . Mas  $\mathbb{N} - s(\mathbb{N}) = \{1\}$ . Logo  $n = 1$ . Contradição. Logo existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $s(n_0) = n$ .  $\square$

*Observação 2.1.* Observe que a função  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$  é injetiva por definição e sobrejetiva pela proposição 2.1, logo é uma bijeção entre um subconjunto dos naturais com os naturais.

**Axioma 3** (Princípio de indução). Se  $X \subset \mathbb{N}$  é um subconjunto tal que:

$$\begin{cases} 1 \in X \\ n \in X \implies s(n) \in X \end{cases}$$

Então  $\mathbb{N} = X$ .

**Definição 2.1** (Soma). Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , sua soma  $m + n$  é definida como:

$$m + n := s^n(m).$$

A soma deve obedecer

$$m + 1 = s(m) \tag{1}$$

$$m + s(n) = s(m + n) \tag{2}$$

para todos os  $m, n$  naturais.

*Observação 2.2.* Dedekind prova o "Teorema da Definição por Indução" para garantir que a notação  $s^n(m)$  faça sentido.

**Proposição 5** (Associatividade da Soma). Para todos  $p, m, n \in \mathbb{N}$ , temos  $m + (n + p) = (m + n) + p$ .

*Proof.* Seja  $X = \{p \in \mathbb{N} \mid \forall m, n \in \mathbb{N} : m + (n + p) = (m + n) + p\}$ . Da definição de adição, temos pra qualquer  $m, n$  que  $n + 1 = s(n)$ , logo  $m + (n + 1) = m + s(n) = s(m + n) = (m + n) + 1 \implies m + (n + 1) = (m + n) + 1$ . Logo  $1 \in X$ . Se  $p \in X$ , temos  $m + (n + p) = (m + n) + p$ . Logo

$$\begin{aligned} m + (n + s(p)) &= m + s(n + p) \\ &= s(m + (n + p)) \\ &= s((m + n) + p) \\ &= (m + n) + s(p). \end{aligned}$$

Logo  $p \in X \implies s(p) \in X$ . Temos que  $X = \mathbb{N}$  pelo princípio de indução. Logo a soma é associativa nos naturais.  $\square$

**Lema 1** (Comutatividade da soma com o 1). *Para todo  $m \in \mathbb{N}$ , temos  $m + 1 = 1 + m$ .*

*Proof.* Seja  $X = \{m \in \mathbb{N} \mid m + 1 = 1 + m\}$ . Temos  $1 \in X$ , pois  $1 + 1 = 1 + 1$ . Supondo  $m \in X$ , logo  $m + 1 = 1 + m$ . Temos

$$\begin{aligned} 1 + s(m) &= s(1 + m) \\ &= s(m + 1) \\ &= (m + 1) + 1 \\ &= s(m) + 1 \end{aligned}$$

Como  $m \in X \implies s(m) \in X$  e  $1 \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$ .  $\square$

**Proposição 6** (Comutatividade da soma). *Para todos  $m, n \in \mathbb{N}$ , temos  $m + n = n + m$ .*

*Proof.* Seja  $X = \{m \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$ . Temos  $1 \in X$  pelo Lema

1. Supondo  $m \in X$ , logo  $m + n = n + m$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Temos

$$n + s(m) = s(n + m)$$

$$= s(m + n)$$

$$= (m + n) + 1$$

$$= 1 + (m + n)$$

$$= (1 + m) + n$$

$$= (m + 1) + n$$

$$= s(m) + n$$

Como  $1 \in X$  e  $m \in X \implies s(m) \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$  pelo princípio de indução.  $\square$

**Proposição 7** (Lei do corte). *Para todos  $m, n, p \in \mathbb{N}$ , temos  $m + n = m + p \implies n = p$ .*

*Proof.* Seja  $X = \{m \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} \forall p \in \mathbb{N} : m + n = m + p \implies n = p\}$ . Temos  $1 \in X$  pois  $1 + n = 1 + p \implies n + 1 = p + 1 \implies s(n) = s(p) \implies n = p$  pela injetividade de  $s$ . Supondo  $m \in X$ , temos  $m + n = m + p \implies n = p$  para todos  $n, p$  naturais. Temos

$$s(m) + n = s(m) + p \implies$$

$$n + s(m) = p + s(m) \implies$$

$$s(n + m) = s(p + m) \implies$$

$$n + m = p + m \implies$$

$$m + n = m + p \implies$$

$$n = p.$$

Logo  $s(m) + n = s(m) + p \implies n = p$ . Como  $1 \in X$  e  $m \in X \implies s(m) \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$  pelo princípio de indução.  $\square$

**Lema 2** (Não existem ciclos nos naturais). *Para todos  $m, p \in \mathbb{N}$ , temos  $m \neq m + p$ .*

*Proof.* Suponha que  $m = m + p$  com  $m, p \in \mathbb{N}$ . Logo  $s(m) = s(m + p) \implies m + 1 = (m + p) + 1 \implies m + 1 = m + (p + 1) \implies 1 = p + 1 \implies s(p) = 1$ . Como 1 não é sucessor de nenhum natural, temos uma contradição. Logo  $m \neq m + p$  para todos naturais  $m, p$ .  $\square$

**Lema 3** (Unicidade da Tricotomia). *Dados dois naturais  $m$  e  $n$ , apenas uma das 3 possibilidades ocorre:*

$$\begin{cases} m = n \\ \exists p \in \mathbb{N} : m = n + p \\ \exists q \in \mathbb{N} : n = m + q \end{cases}$$

*Proof.* Pelo lema 2, se  $m = n$ , não podemos ter  $m = n + p = m + p$  ou  $n = m + q = n + q$  para algum  $p, q \in \mathbb{N}$ . Se  $\exists p \in \mathbb{N} : m = n + p$ , não podemos ter  $m = n$  pelo lema 2 e não podemos ter  $\exists q \in \mathbb{N} : n = m + q$ , pois teríamos  $m = n + p = (m + q) + p = m + (q + p) \implies m = m + (q + p)$ , que contradiz o lema 2.  $\square$

**Proposição 8** (Tricotomia). *Dados dois naturais  $m$  e  $n$ , exatamente uma das 3 possibilidades ocorre:*

$$\begin{cases} m = n \\ \exists p \in \mathbb{N} : m = n + p \\ \exists q \in \mathbb{N} : n = m + q \end{cases}$$

*Proof.* Seja  $X = \{m \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} : (m = n) \vee (\exists p \in \mathbb{N} : m = n + p) \vee (\exists q \in \mathbb{N} : n = m + q)\}$ , ou seja: o conjunto dos números naturais que satisfazem pelo menos uma das condições da tricotomia para todo  $n$ .

$1 \in X$ , pois dado  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $n = 1$  ou  $n \neq 1$ . Se  $n = 1$ , temos  $m = 1 = n$ . Se  $n \neq 1$ , como  $\mathbb{N} - s(\mathbb{N}) = \{1\}$ , temos que existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $s(n_0) = n$ . Logo  $n = n_0 + 1 \implies \exists q : n = q + 1 = q + m$ .

Supondo  $m \in X$ . Dado  $n \in \mathbb{N}$ , se  $m = n$ , temos  $s(m) = s(n) = n + 1$ , logo  $\exists p \in \mathbb{N} : s(n) = n + p$ . Se  $\exists p \in \mathbb{N} : m = n + p$ , temos  $s(m) = s(n + p) = (n + p + 1) = n + s(p)$ , logo  $\exists p' \in \mathbb{N} : s(n) = n + p'$ . Se  $\exists q \in \mathbb{N} : n = m + q$  com  $q = 1$ , temos  $n = m + 1 = s(m)$ . Se  $\exists q \in \mathbb{N} : n = m + q$  com  $q \neq 1$ , existe  $q_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $s(q_0) = q$ , logo temos  $n = m + q = m + s(q_0) = m + (q_0 + 1) = m + 1 + q_0 = s(m) + q_0 \implies \exists q' \in \mathbb{N} : n = s(m) + q'$ .

Como  $1 \in X$  e  $m \in X \implies s(m) \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$ . Logo para todo par  $m, n \in \mathbb{N}$ , pelo menos uma das condições da tricotomia ocorre. Pelo lema 3, apenas uma das possibilidades ocorre.  $\square$

**Definição 2.2** ( $<$ ).

$$m < n \iff \exists p \in \mathbb{N} : n = m + p$$

Dados  $m, n$  naturais, dizemos que  $m$  é menor que  $n$  ( $m < n$ ) quando existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $n = m + p$ .

**Proposição 9.** Temos  $1 < n$  para todo  $1 \neq n \in \mathbb{N}$ .

*Proof.* Como  $n \neq 1$ , temos pela proposição que  $n$  possui um antecessor. Logo existe  $n_0$  tal que  $s(n_0) = n \implies n = 1 + n_0$ . Logo  $1 < n$ .  $\square$

**Definição 2.3** ( $\leq$ ).

$$m \leq n \iff (m = n) \vee (m < n)$$

**Proposição 10** (Transitividade da relação  $<$ ).  $m < n \wedge n < p \implies m < p$

*Proof.* Se  $m < n$  e  $n < p$ , temos  $n = m + q$  e  $p = n + r$  para algum par  $q, r \in \mathbb{N}$ . Logo  $p = n + r = (m + q) + r = m + (q + r)$ . Logo  $m < p$ .  $\square$

**Proposição 11** (Tricotomia da relação  $<$ ). Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , exatamente uma das afirmações ocorre:  $m = n$ , ou  $m < n$ , ou  $n < m$ .

*Proof.* Segue diretamente da proposição 8.  $\square$

**Proposição 12.**

$$p \leq q \wedge q \leq p \iff p = q$$

*Proof.* Supondo  $p = q$ , temos  $p \leq q$  e  $q \leq p$ .

Supondo  $p \leq q \wedge q \leq p$ . Se  $p = q$ , acabou a demonstração. Supondo  $p \neq q$ . Logo devemos ter  $p < q$  e  $q < p$  (contradição). Logo devemos ter  $p = q$ .  $\square$

**Proposição 13.** Dados  $m, n, p$  naturais, temos

$$m + p < n + p \implies m < n.$$

*Proof.* Temos  $m + p < n + p \implies \exists q \in \mathbb{N} : n + p = (m + p) + q \implies \exists q \in \mathbb{N} : n = m + q \implies m < n$ .  $\square$

**Lema 4.**

$$m < n + 1 \iff m \leq n$$

*Proof.* Supondo  $m < n + 1$ . Logo existe  $q \in \mathbb{N}$  tal que  $n + 1 = m + q$ . Se  $q = 1$ , temos  $n + 1 = m + 1 \implies n = m \implies m \leq n$ . Se  $q \neq 1$ , existe  $q_0$  tal que  $s(q_0) = q$ . Logo  $n + 1 = m + s(q_0) = m + q_0 + 1 \implies n = m + q_0 \implies m < n \implies m \leq n$ .

Se  $m \leq n$ , temos  $m \leq n < n + 1 \implies m < n + 1$ .  $\square$

**Definição 2.4** (Multiplicação). Para todo  $m \in \mathbb{N}$ , seja  $f_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que associa cada  $p \in \mathbb{N}$  a  $f_m(p) = m + p$ . Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , o produto entre naturais satisfaz  $m \cdot 1 = m$  e  $m \cdot (n + 1) = (f_m)^n(m)$ .

**Lema 5** (Distributiva do sucessor).

$$m \cdot (n + 1) = mn + m$$

*Proof.* Se  $n = 1$ , temos  $m \cdot (1 + 1) = (f_m)^1(m) = f_m(m) = m + m = m \cdot 1 + m$ . Se  $n \neq 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $s(n_0) = n$ . Logo temos  $m \cdot (n + 1) = (f_m)^n(m) = (f_m)^{s(n_0)}(m) = f_m((f_m)^{n_0}(m)) = f_m(m(n_0 + 1)) = f_m(m \cdot n) = mn + m$ .  $\square$

**Proposição 14** (Distributiva à esquerda).

$$m \cdot (n + p) = mn + mp$$

*Proof.* Seja  $X = \{p \in \mathbb{N} | \forall m, n \in \mathbb{N} : n \cdot (m + p) = nm + np\}$ . Temos  $1 \in X$  pelo lema 2.1. Supondo  $p \in X$ . Temos

$$n \cdot (m + s(p)) = n \cdot ((m + p) + 1)$$

$$= n \cdot (m + p) + n$$

$$= nm + np + n$$

$$= nm + n(p + 1)$$

$$= nm + n \cdot s(p)$$

Como  $p \in X \implies s(p) \in X$  e  $1 \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$ .  $\square$

**Proposição 15** (Distributiva à direita).

$$(m + n) \cdot p = mp + np$$

*Proof.* Seja  $X = \{p \in \mathbb{N} | \forall m, n \in \mathbb{N} : (m + n) \cdot p = mp + np\}$ . Temos  $1 \in X$ ,

pos  $(m + n) \cdot 1 = m + n = m \cdot 1 + n \cdot 1$ . Supondo  $p \in X$ . Temos

$$\begin{aligned}
 (m + n) \cdot s(p) &= (m + n) \cdot (p + 1) \\
 &= (m + n) \cdot p + (m + n) \\
 &= mp + np + m + n \\
 &= mp + m + np + n \\
 &= m(p + 1) + n(p + 1) \\
 &= m \cdot s(p) + n \cdot s(p)
 \end{aligned}$$

Como  $p \in X \implies s(p) \in X$  e  $1 \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$ . □

**Proposição 16** (Associatividade).

$$m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$$

*Proof.* Seja  $X = \{p \in \mathbb{N} \mid \forall m, n \in \mathbb{N} : m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p\}$ . Temos  $m \cdot (n \cdot 1) = m \cdot n = (m \cdot n) \cdot 1$ , logo  $1 \in X$ .

Supondo  $p \in X$ . Temos

$$\begin{aligned}
 m \cdot (n \cdot s(p)) &= m \cdot (n \cdot (p + 1)) \\
 &= m \cdot (n \cdot p + n) \\
 &= m \cdot (n \cdot p) + m \cdot n \\
 &= (m \cdot n) \cdot p + (m \cdot n) \\
 &= (m \cdot n) \cdot (p + 1) \\
 &= (m \cdot n) \cdot s(p)
 \end{aligned}$$

Como  $p \in X \implies s(p) \in X$  e  $1 \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$ . □

**Lema 6** (Comutatividade com 1).

$$m \cdot 1 = 1 \cdot m$$



*Proof.* Seja  $X = \{m \in \mathbb{N} | m \cdot 1 = 1 \cdot m\}$ . Temos  $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$ , logo  $1 \in X$ . Supondo  $m \in X$ . Temos

$$\begin{aligned}
 s(m) \cdot 1 &= (m + 1) \cdot 1 \\
 &= m + 1 \\
 &= m \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\
 &= 1 \cdot m + 1 \cdot 1 \\
 &= 1 \cdot (m + 1) \\
 &= 1 \cdot s(m)
 \end{aligned}$$

Como  $m \in X \implies s(m) \in X$  e  $1 \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$ . □

**Proposição 17** (Comutatividade).

$$m \cdot n = n \cdot m$$

*Proof.* Seja  $X = \{n \in \mathbb{N} | \forall m \in \mathbb{N} : m \cdot n = n \cdot m\}$ . Temos  $1 \in X$  pelo lema 6. Supondo  $n \in X$ . Temos

$$\begin{aligned}
 m \cdot s(n) &= m \cdot (n + 1) \\
 &= mn + m \cdot 1 \\
 &= nm + 1 \cdot m \\
 &= (n + 1) \cdot m \\
 &= s(n) \cdot m
 \end{aligned}$$

Como  $p \in X \implies s(p) \in X$  e  $1 \in X$ , temos  $X = \mathbb{N}$ . □

**Proposição 18** (Monotonicidade).

$$m < n \implies mp < np$$

*Proof.* Supondo  $m < n$ . Logo  $n = m + q$  com  $q \in \mathbb{N}$ . Logo  $np = (m + q)p = mp + qp$ . Como  $qp \in \mathbb{N}$ , temos  $mp < np$ .  $\square$

**Proposição 19** (Lei do cancelamento).

$$mp < np \implies m < n$$

*Proof.* Supondo  $mp < np$ . Pela tricotomia, temos  $n < m$ ,  $m = n$ , ou  $m < n$ . Se  $n < m$ , temos  $np < mp$  (contradição). Se  $m = n$ , temos  $mp = np$  (contradição). Logo devemos ter  $m < n$ .  $\square$

**Definição 2.5** (Elemento Mínimo). Dado  $X \subset \mathbb{N}$ , dizemos que  $p \in X$  é o menor elemento (ou elemento mínimo) de  $X$  se  $\forall n \in X : p \leq n$ .

*Observação 2.3.* Como  $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq n$ , temos que  $1 \in X$  implica 1 menor elemento de  $X$ .

**Proposição 20.** O elemento mínimo de um conjunto  $X \subset \mathbb{N}$ , quando existir, é único.

*Proof.* Suponha que dado um conjunto  $X \subset \mathbb{N}$ , existam  $p, q \in X$  elementos mínimos. Logo  $p \leq q$  e  $q \leq p$ . Logo  $p = q$ .  $\square$

**Definição 2.6** (Maior elemento). Dado  $X \subset \mathbb{N}$ , dizemos que  $p \in X$  é o maior elemento (ou elemento máximo) de  $X$  se  $\forall n \in X : p \geq n$ .

**Proposição 21.** Os naturais não possuem maior elemento.

*Proof.* Suponha que  $x \in \mathbb{N}$  seja o maior elemento de  $\mathbb{N}$ . Teríamos  $s(x) \in \mathbb{N}$  e  $x < s(x)$  (contradição). Logo os naturais não possuem maior elemento.  $\square$

**Proposição 22.** O elemento máximo de um conjunto  $X \subset \mathbb{N}$ , quando existir, é único.

*Proof.* Exercício.  $\square$

**Definição 2.7** ( $I_n$ ).

$$I_n := \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$$

**Lema 7.**

$$I_{n+1} = I_n \cup \{n+1\}$$

*Proof.*

$$\begin{aligned} x \in I_{n+1} &\iff \\ x \leq n+1 &\iff \\ x < n+1 \vee x = n+1 &\iff \\ x \leq n \vee x = n+1 &\iff \\ x \in I_n \vee x \in \{n+1\} &\iff \\ x \in I_n \cup \{n+1\} & \end{aligned}$$

□

**Teorema 1** (Princípio da boa Ordenação). *Todo subconjunto  $A \neq \emptyset$  dos naturais admite menor elemento.*

*Proof.* Dado  $A \subset \mathbb{N}$  não vazio. Se  $1 \in A$ , temos 1 menor elemento.

Supondo  $1 \notin A$ . Logo  $1 \in \mathbb{N} - A$ . Seja  $X = \{x \in \mathbb{N} \mid I_n \subset \mathbb{N} - A\}$ . Como  $1 \in \mathbb{N} - A$ , temos  $I_1 = \{1\} \subset \mathbb{N} - A$ , logo  $1 \in X$ . Como  $A$  é não vazio, existe  $a \in A$ . Logo  $a \notin \mathbb{N} - A$ . Temos  $a \leq a \implies a \in I_a$ . Logo  $I_a \not\subset \mathbb{N} - A$ . Logo  $a \notin X$ . Temos  $1 \in X$  e  $X \neq \mathbb{N}$ , logo o axioma da indução deve falhar. Logo deve existir  $n \in X$  com  $n+1 = s(n) \notin X$ .

Afirmo que  $n+1$  é o menor elemento de  $A$ . Como  $n \in X$ , temos  $I_n \subset \mathbb{N} - A$ , logo  $x \leq n \implies x \in \mathbb{N} - A$ . Como  $n+1 \notin X$ , temos  $I_{n+1} \not\subset \mathbb{N} - A$ . Logo existe um  $m \in I_{n+1}$  com  $m \notin \mathbb{N} - A \implies m \in A$ . Observe que  $m \in I_{n+1} \implies m \leq n+1 \implies m = n+1 \vee m < n+1$ . Se  $m < n+1$ , temos pelo Lema 4 que  $m \leq n$ , que implica  $m \in I_n$ , logo  $m \in \mathbb{N} - A$  (contradição). Logo devemos ter  $m = n+1$ . Temos portanto que  $n+1 \in A$ .

Suponha que exista  $p \in A$  tal que  $p < n+1$ . Teríamos  $p \leq n \implies p \in I_n \implies p \in \mathbb{N} - A \implies p \notin A$ . Contradição. Logo temos  $n+1 \leq p$  para todo  $p \in A$ . Logo  $n+1$  é o menor elemento de  $A$ . □

**Teorema 2** (Indução completa). *Seja  $X \subset \mathbb{N}$  tal que  $(\forall m \in \mathbb{N} : m < n \implies m \in X) \implies n \in X$ . Então  $X = \mathbb{N}$*

*Proof.* Temos  $1 \in X$ , pois  $1 \notin X$  implicaria na existência de um  $m < 1$  com  $m \notin X$ . Supondo  $X \neq \mathbb{N}$  e  $A = \mathbb{N} - X$ . Como  $X \neq \mathbb{N}$ , temos  $A \neq \emptyset$ . Logo  $A$  possui um menor elemento  $a \in A$ . Se  $p \in \mathbb{N}$  com  $p < a$ , então  $p \notin A$ , logo  $p \in X$ . Como  $\forall p \in \mathbb{N} : p < a \implies p \in X$ , temos  $a \in X$ . Contradição. Logo  $A$  é vazio. Logo  $X = \mathbb{N}$ . □

### 3 Conjuntos Finitos e Infinitos

**Definição 3.1** (Conjuntos finitos). Um conjunto  $X$  é finito quando for vazio ou quando existir para algum  $n \in \mathbb{N}$  uma bijeção  $\phi : I_n \rightarrow X$

**Definição 3.2** (Tamanho de um conjunto). Dado um conjunto finito. Dizemos que ele tem zero elementos se for vazio e que ele tem  $n$  elementos se tiver bijeção com  $I_n$ .

*Observação 3.1.* O conjunto  $I_n$  é finito e possui  $n$  elementos.

**Proposição 23.** *Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma bijeção, então  $X$  é finito se, e somente se,  $Y$  for finito.*

*Proof.* Se  $X$  for finito, então existe um bijeção  $\phi : I_n \rightarrow X$ . A composição  $(\phi \circ f) : I_n \rightarrow Y$  é uma bijeção, logo  $Y$  é finito. O caso  $Y$  finito é análogo. □

**Teorema 3.** *Seja  $A \subset I_n$  não vazio. Se existe uma bijeção  $f : I_n \rightarrow A$ , então  $A = I_n$ .*

*Proof.* Seja  $X = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall A \subset I_n : (\text{Existe uma bijeção } f : I_n \rightarrow A) \implies A = I_n\}$ . Temos  $1 \in X$ , pois  $I_1 = \{1\}$  e  $A \subset I_1 \implies A = \{1\} = I_1$ . Supondo  $n \in X$ . Seja  $A \subset I_{n+1}$  com uma bijeção  $f : I_{n+1} \rightarrow A$ . Restringindo  $f$  a  $I_n$ , obtemos  $f' : I_n \rightarrow A - \{f(n+1)\}$ , que é uma bijeção pela proposição 3.

Se  $A - \{f(n+1)\} \subset I_n$ , temos por  $n \in X$  que  $A - \{f(n+1)\} = I_n$ . Como o contra-domínio de  $f$  é  $A$  e  $A \subset I_{n+1}$ , temos que  $f(n+1) \in A \implies f(n+1) \in I_{n+1} \implies f(n+1) \in I_n \vee f(n+1) \in \{n+1\}$ . Se  $f(n+1) \in I_n$ , temos  $f(n+1) \notin A - \{f(n+1)\}$ , logo  $A - \{f(n+1)\} \neq I_n$  (contradição). Logo temos  $f(n+1) = n+1$ . Logo  $f(n+1) = n+1 \in A$ . Como  $A - \{n+1\} = A - \{f(n+1)\} = I_n$ , temos  $(A - \{n+1\}) \cup \{n+1\} = I_n \cup \{n+1\}$   $\square$