Prova 2

Tales da Silva Amaral

3 de julho de 2024

1 introdução

Definição 1.1 (Transformação Bilinear)**.** Uma transformação $B : V \times W \to \mathbb{R}^m$ é

2 Questão 1

Proposição 2.1 (Questão 1)**.** *Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $g : V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ funções de classe C^2 nos abertos U e V. Se $x \in U$ e $f(x) \in V$, então*

$$D^2(g \circ f)(x) = D^2g(f(x)) \circ (Df(x), Df(x)) + Dg(f(x)) \circ D^2f(x).$$

Demonstração. Dado $x \in U$ com $f(x) \in V$. Pela Regra da Cadeia, temos que $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)$. Tomando $m(A, B) = A \circ B$, temos $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) = m(Dg(f(x)), Df(x))$. Temos que m é $C^\infty \subset C^2$ e $f, g \subset C^2$, logo $D(g \circ f)$ é diferenciável. Logo:

$$\begin{aligned}
D^2(g \circ f)(x) &= D(D(g \circ f)(x)) \\
&= D(m(Dg(f(x)), Df(x))) \\
&= Dm(Dg(f(x)), Df(x)) \circ D(Dg(f(x)), Df(x)) \\
&= Dm(Dg(f(x)), Df(x)) \circ (D^2g(f(x)) \circ Df(x), D^2f(x)) \\
&= m(Dg(f(x)), D^2f(x)) + m(D^2g(f(x)) \circ Df(x), Df(x)) \\
&= Dg(f(x)) \circ D^2f(x) + D^2g(f(x)) \circ Df(x) \circ Df(x)
\end{aligned}$$

□

3 Questão 2

Definição 3.1 ($L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$)**.**

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{T \in F(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \mid T \text{ é linear}\}$$

Definição 3.2 ($L(\mathbb{R}^n)$)**.**

$$L(\mathbb{R}^n) = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

Definição 3.3 ($GL(\mathbb{R}^n)$)**.**

$$GL(\mathbb{R}^n) = \{T \in L(\mathbb{R}^n) \mid T \text{ é bijetiva}\}$$

Proposição 3.1. *$GL(\mathbb{R}^n)$ é aberto.*

Demonstração. Seja $T \in GL(\mathbb{R}^n)$. Logo T é invertível (bijetiva). Tomando $\delta = \dfrac{1}{|T^{-1}|}$. Supondo $S \in B(T, \delta) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Dado $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, temos

$$\begin{aligned}
\delta|x| &= \delta|T^{-1} \circ T(x)| \\
&\leq \delta|T^{-1}| \cdot |T(x)| \\
&= |T(x)| \\
&= |T(x) - S(x) + S(x)| \\
&\leq |T(x) - S(x)| + |S(x)| \\
&= |(T - S)(x)| + |S(x)| \\
&\leq |(T - S)| \cdot |x| + |S(x)| \\
&< \delta|x| + |S(x)|
\end{aligned}$$

Logo $|S(x)| + \delta|x| > \delta|x| \implies |S(x)| > 0 \implies S(x) \neq 0$. Como $x \neq 0 \implies S(x) \neq 0$, temos que S é injetiva. Como $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, temos que S é um isomorfismo. Logo $B(T, \delta) \subset GL(\mathbb{R}^n)$. □

Demonstração. Sabemos que a função $\det : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua (n linear), logo o conjunto $GL(\mathbb{R}^n = \det^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ é aberto. □

Proposição 3.2. *$f : GL(\mathbb{R}^n) \to GL(\mathbb{R}^n)$, dada for $f(T) = T^{-1}$ é contínua.*

Demonstração. De fato, para $T, S \in GL(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned}
|T^{-1} - S^{-1}| &= |T^{-1}SS^{-1} - T^{-1}TS^{-1}| \\
&= |T^{-1}(SS^{-1} - TS^{-1})| \\
&= |T^{-1}(S - T)S^{-1}| \\
&\leq |T^{-1}| \cdot |S - T| \cdot |S^{-1}| \\
&= |T^{-1}| \cdot |S - T| \cdot |S^{-1} - T^{-1} + T^{-1}| \\
&\leq |T^{-1}| \cdot |S - T| \cdot (|S^{-1} - T^{-1}| + |T^{-1}|)
\end{aligned}$$

Logo

$$|T^{-1} - S^{-1}| \leq \frac{|T^{-1}|^2 \cdot |S - T| \cdot |T|}{1 - |S - T||T^{-1}|}$$

□

Proposição 3.3. *Seja* $f : GL(\mathbb{R}^n) \to GL(\mathbb{R}^n)$*, dada por* $f(T) = T^{-1}$*. Temos* f *diferenciável.*

Demonstração. Fixado $T \in GL(\mathbb{R}^n)$, existe $\delta > 0$ tal que $B(T, \delta) \subset GL(\mathbb{R}^n$. Tomando $H \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
(T + H)(T + H)^{-1} = I &\iff \\
T(T + H)^{-1} + H(T + H)^{-1} = I &\iff \\
T(T + H)^{-1} = I - H(T + H)^{-1} &\iff \\
(T + H)^{-1} = T^{-1}(I - H(T + H)^{-1}) &\iff
\end{aligned}$$

Vou substituir $(T+H)^{-1}$ na equação acima.

$$
\begin{aligned}
(T+H)^{-1} &= T^{-1}(I - H(T+H)^{-1}) \\
&= T^{-1}(I - H\left[T^{-1}(I - H(T+H)^{-1})\right]) \\
&= T^{-1}(I - HT^{-1}(I - H(T+H)^{-1})) \\
&= T^{-1}(I - HT^{-1} + HT^{-1}H(T+H)^{-1}) \\
&= T^{-1} - T^{-1}HT^{-1} + T^{-1}HT^{-1}H(T+H)^{-1}
\end{aligned}
$$

Se chamarmos $S_T(H) = -T^{-1}HT^{-1}$, temos

$$
\begin{aligned}
f(T+H) &= (T+H)^{-1} \\
&= T^{-1} - T^{-1}HT^{-1} + T^{-1}HT^{-1}H(T+H)^{-1} \\
&= f(T) + S_T(H) + T^{-1}HT^{-1}H(T+H)^{-1}
\end{aligned}
$$

Afirmo que $S_T(H) = Df(T)(H)$. De fato, S_T é linear (confia) e temos

$$
\begin{aligned}
\lim_{H\to 0} \frac{|f(T+H) - f(T) - S_T(H)|}{|H|} &= \lim_{H\to 0} \frac{|T^{-1}HT^{-1}H(T+H)^{-1}|}{|H|} \\
&\leq \lim_{H\to 0} \frac{|T^{-1}| \cdot |H| \cdot |T^{-1}| \cdot |H| \cdot |(T+H)^{-1}|}{|H|} \\
&= \|T^{-1}\|^2 \cdot \lim_{H\to 0} |H| \cdot |(T+H)^{-1}| \\
&= 0
\end{aligned}
$$

O fato de $\lim_{H\to 0} |(T+H)^{-1}| = \lim_{h\to 0} |f(T+H)|$ vem do fato de f ser contínua. Logo f é diferenciável e $Df(T)(H) = -T^{-1}HT^{-1}$. $\square$

Proposição 3.4. *Seja $f : GL(\mathbb{R}^n) \to GL(\mathbb{R}^n)$, dada por $f(T) = T^{-1}$. Temos f diferenciável.*

Demonstração. □