

Prova 2

Tales da Silva Amaral

2 de julho de 2024

1 introdução

Definição 1.1 (Transformação Bilinear). Uma transformação $B : V \times W \rightarrow \mathbb{R}^m$ é

2 Questão 1

Proposição 2.1 (Questão 1). *Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $g : V \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ funções de classe C^2 nos abertos U e V . Se $x \in U$ e $f(x) \in V$, então*

$$D^2(g \circ f)(x) = D^2g(f(x)) \circ (Df(x), Df(x)) + Dg(f(x)) \circ D^2f(x).$$

Demonstração. Dado $x \in U$ com $f(x) \in V$. Pela Regra da Cadeia, temos que $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)$. Tomando $m(A, B) = A \circ B$, temos $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) = m(Dg(f(x)), Df(x))$. Temos que m é $C^\infty \subset C^2$ e $f, g \in C^2$, logo $D(g \circ f)$ é diferenciável. Logo:

$$\begin{aligned} D^2(g \circ f)(x) &= D(D(g \circ f)(x)) \\ &= D(m(Dg(f(x)), Df(x))) \\ &= Dm(Dg(f(x)), Df(x)) \circ D(Dg(f(x)), Df(x)) \\ &= Dm(Dg(f(x)), Df(x)) \circ (D^2g(f(x)) \circ Df(x), D^2f(x)) \\ &= m(Dg(f(x)), D^2f(x)) + m(D^2g(f(x)) \circ Df(x), Df(x)) \\ &= Dg(f(x)) \circ D^2f(x) + D^2g(f(x)) \circ Df(x) \circ Df(x) \end{aligned}$$

□

3 A definir

Definição 3.1 ($L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$).

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{T \in F(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \mid T \text{ é linear}\}$$

Definição 3.2 ($L(\mathbb{R}^n)$).

$$L(\mathbb{R}^n) = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

Definição 3.3 ($GL(\mathbb{R}^n)$).

$$GL(\mathbb{R}^n) = \{T \in L(\mathbb{R}^n) \mid T \text{ é bijetiva}\}$$

Proposição 3.1. $GL(\mathbb{R}^n)$ é aberto.

Demonstração. Seja $T \in GL(\mathbb{R}^n)$. Logo T é invertível (bijetiva). Tomando $\delta = \frac{1}{|T^{-1}|}$. Supondo $S \in B(T, \delta) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Dado $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, temos

$$\begin{aligned}
\delta|x| &= \delta|T^{-1} \circ T(x)| \\
&\leq \delta|T^{-1}| \cdot |T(x)| \\
&= |T(x)| \\
&= |T(x) - S(x) + S(x)| \\
&\leq |T(x) - S(x)| + |S(x)| \\
&= |(T - S)(x)| + |S(x)| \\
&\leq |(T - S)| \cdot |x| + |S(x)| \\
&< \delta|x| + |S(x)|
\end{aligned}$$

Logo $|S(x)| + \delta|x| > \delta|x| \implies |S(x)| > 0 \implies S(x) \neq 0$. Como $x \neq 0 \implies S(x) \neq 0$, temos que S é injetiva. Como $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, temos que S é um isomorfismo. Logo $B(T, \delta) \subset GL(\mathbb{R}^n)$. \square

Proposição 3.2. $f : GL(\mathbb{R}^n) \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$, dada por $f(T) = T^{-1}$ é contínua.

Demonstração. \square

Proposição 3.3. Seja $f : GL(\mathbb{R}^n) \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$, dada por $f(T) = T^{-1}$. Temos f diferenciável.

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}
(T + H)(T + H)^{-1} &= I \iff \\
T(T + H)^{-1} + H(T + H)^{-1} &= I \iff \\
T(T + H)^{-1} &= I - H(T + H)^{-1} \iff \\
(T + H)^{-1} &= T^{-1}(I - H(T + H)^{-1}) \iff
\end{aligned}$$

Vou substituir $(T + H)^{-1}$ na equação acima.

$$\begin{aligned}
(T + H)^{-1} &= T^{-1}(I - H(T + H)^{-1}) \\
&= T^{-1}(I - H[T^{-1}(I - H(T + H)^{-1})]) \\
&= T^{-1}(I - HT^{-1}(I - H(T + H)^{-1})) \\
&= T^{-1}(I - HT^{-1} + HT^{-1}H(T + H)^{-1}) \\
&= T^{-1} - T^{-1}HT^{-1} + T^{-1}HT^{-1}H(T + H)^{-1}
\end{aligned}$$

Se chamarmos $S_T(H) = -T^{-1}HT^{-1}$, temos

$$\begin{aligned}
f(T + H) &= (T + H)^{-1} \\
&= T^{-1} - T^{-1}HT^{-1} + T^{-1}HT^{-1}H(T + H)^{-1} \\
&= f(T) + S_T(H) + T^{-1}HT^{-1}H(T + H)^{-1}
\end{aligned}$$

Afirmo que $S_T(H) = Df(T)(H)$. De fato, S_T é linear (confia) e temos

$$\begin{aligned}
\lim_{H \rightarrow 0} \frac{|f(T + H) - f(T) - S_T(H)|}{|H|} &= \lim_{H \rightarrow 0} \frac{|+ T^{-1}HT^{-1}H(T + H)^{-1}|}{|H|} \\
&\leq \lim_{H \rightarrow 0} \frac{|T^{-1}| \cdot |H| \cdot |T^{-1}| \cdot |H| \cdot |(T + H)^{-1}|}{|H|} \\
&= \|T^{-1}\|^2 \cdot \lim_{H \rightarrow 0} |H| \cdot |(T + H)^{-1}| \\
&= 0
\end{aligned}$$

□