Raciocínio lógico matemático

Raciocínio lógico matemático

Vagner Luis Zanin

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Zanin, Vagner Luis
Z31r Raciocínio lógico e matemático / Vagner Luis Zanin. –
Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2016.
200 p.

ISBN 978-85-8482-465-6

1. Matemática. 2. Teoria dos conjuntos. 3. Lógica.
I. Título.

CDD 511.3

2016
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 — Londrina — PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: http://www.kroton.com.br/

Sumário

Palavras do autor

Olá, alunos!

Quero convidá-los a iniciar os estudos sobre raciocínio lógico matemático.

Não é difícil nos depararmos com situações em que é necessária a utilização do raciocínio lógico matemático. Tais situações podem ocorrer na realização de um trabalho científico, na elaboração de um discurso, em uma prova de concurso, ou seja, sempre que a organização e o desenvolvimento de ideias de forma sólida forem necessários.

Nas seções de autoestudo, você vai se deparar com situações-problema que, para serem resolvidas, demandam a leitura e o desenvolvimento das atividades propostas neste material. Espera-se, com isso, que você conheça métodos e técnicas de operações matemáticas, para desenvolver o raciocínio lógico, crítico e analítico de apoio à tomada de decisões.

Na primeira unidade você vai se deparar com conceitos de matemática básica, que são necessários para identificar e resolver problemas que envolvam proporção e porcentagem, assuntos muito presentes em nosso dia a dia.

Uma introdução à lógica será vista na unidade 2. Nela, trabalharemos características fundamentais deste conteúdo. Estudaremos sentenças e proposições, tipos de proposições e suas relações.

Sequencialmente, na unidade 3, trabalharemos com dedução, técnica que permite, a partir de suposições básicas e operações lógicas, obter uma conclusão sobre determinada proposição. E, por fim, na quarta e última unidade, realizaremos um estudo sobre conjuntos e suas aplicações.

Empenhe-se em seus estudos, para adquirir competências e conhecimento sobre esse assunto. Bons estudos!

CONCEITOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA

Convite ao estudo

Nesta unidade, serão desenvolvidas técnicas para a realização de operações matemáticas básicas, aquelas que utilizamos em situações corriqueiras, tais como: operações com frações, proporções e razões.

Para compreender a aplicação desses conceitos, imagine que o hobby de Diego, nosso personagem fictício, seja observar os astros, à noite, com seu telescópio. Além de observar, Diego também reserva um tempo estudando textos antigos sobre astrônomos do passado e suas técnicas de medição de distâncias, como a distância entre o planeta Terra e a Lua, seu satélite natural, e entre a Lua e a estrela mais próxima, o Sol.

Diego teve dificuldade para compreender alguns textos no decorrer de suas leituras e começou a se questionar: como seria possível realizar o cálculo da circunferência da Lua? A que porcentagem corresponde a circunferência da Terra em comparação ao diâmetro da Lua?

Diego necessita das respostas para essas e outras questões. Como você pode ajudá-lo a calcular essas medidas?

Vocabulário

Hobby: atividade que se realiza nas horas de lazer.

Raio: segmento de reta com uma extremidade no centro e outra em um ponto da circunferência.

Diâmetro: Segmento de reta com extremidades em dois pontos distintos da circunferência e que, obrigatoriamente, passa pelo centro da circunferência.

Lembre-se!

Utilize, sempre que possível, outros materiais didáticos. Há diversas opções disponíveis na internet, sendo que, ao longo deste livro, são feitas indicações muito interessantes. Ao consultar outras, você conseguirá compreender o conteúdo com mais facilidade.

Seção 1.1

Razão e proporção

Diálogo aberto

Você já imaginou como é estimada a medida do comprimento da circunferência da Lua?

Essa é uma das perguntas que Diego pretende responder. Para isso, ele dispõe de algumas informações que reuniu em suas leituras: o raio da Terra é aproximadamente 6.378 km e a razão entre o comprimento da circunferência Lua e o da Terra é de aproximadamente $\frac{34}{125}$. Além das informações anteriores, Diego também irá supor os dois astros, Terra e Lua, como sendo esferas perfeitas.

Considerando os dados disponíveis, é possível estimar o comprimento da circunferência da Lua? Como você faria as orientações para esse cálculo? Qual a resposta à pergunta de Diego?

Com o conhecimento prévio de algumas medidas do planeta Terra e da Lua, associado ao conceito de igualdade entre razões, é possível encontrar um valor muito próximo para a medida da circunferência da Lua. No entanto, é necessário compreender como é feito o cálculo do comprimento de circunferência.

Pronto para auxiliar Diego a resolver o problema?

Não pode faltar!

Vamos começar com uma pergunta: qual é o conceito de razão em matemática?

Assimile

Vejamos um exemplo da utilização do conceito de razão: em uma loja do shopping, o vendedor atende, em média, 6 pessoas, sendo que somente 2 realizam a compra. Ao ser questionado pelo seu gerente sobre como estão as vendas, o vendedor responde: "as vendas estão numa razão de 2 para 6" (escrevendo em forma de fração: $\frac{2}{6}$).

Outro exemplo: o rótulo de um detergente industrial apresenta a seguinte frase: "diluir o conteúdo em água na fração de $\frac{1}{10}$ ", ou seja, 1 parte de detergente para 10 partes da mistura "detergente + água".

Analisando os dois exemplos, você perceberá que, de modo geral, uma razão é descrita da seguinte forma:

$\frac{x}{y}$ e se lê "x está para y".

Reflita

Qual é a importância do conceito de razão no dia a dia? Realize uma pesquisa em livros ou na internet. Você observará que as razões são extremamente úteis ao se trabalhar com desenhos técnicos, em economia, na aplicação de medicamentos, entre outros.

Observe a seguir alguns exemplos de razão e a forma como se lê:

a) $\frac{3}{5}$, três está para cinco.

b) $\frac{7}{4}$, sete está para quatro.

c) $\frac{1}{3}$, um está para três.

Faça você mesmo

1. Em uma loja do centro da cidade, para cada pagamento realizado com cédulas, são realizados 6 pagamentos com cartão de crédito. Escreva a razão entre a quantidade de pagamentos efetuados com cédulas e o total de pagamentos. Escreva, também, a forma de leitura, de acordo com os números obtidos.

Após verificar que razão é uma fração entre dois números, podemos obter o valor dessa razão. Para isso, basta realizar a divisão entre o seu numerador e o denominador. Veja alguns exemplos:

a) $\frac{1}{8} = 0{,}125$

b) $\frac{3}{5} = 0{,}6$

c) $\frac{34}{25} = 1{,}36$

Vocabulário

Numerador: número de cima em uma fração.

Denominador: número de baixo em uma fração.

Exemplo: $\frac{4 \rightarrow \text{numerador}}{5 \rightarrow \text{denominador}}$

Agora, considerando as razões $\frac{12}{3}$ e $\frac{8}{2}$, o que podemos observar de comum entre elas?

O resultado da divisão é o mesmo em ambos os casos:

$$\frac{12}{3} = 4 \text{ e } \frac{8}{2} = 4$$

Agora, reflita: as duas razões são diferentes, mas produzem o mesmo resultado; logo, podemos considerar as razões iguais, conforme segue:

$$\frac{12}{3} = 4 = \frac{8}{2}, \text{ então } \frac{12}{3} = \frac{8}{2} = 4 \text{ e } \frac{12}{3} = \frac{8}{2}$$

Assimile

Razões que resultam em um mesmo valor são chamadas de razões proporcionais e, por isso, podem ser consideradas iguais.

Vejamos outros exemplos de razões proporcionais:

a) $\frac{3}{10}$ e $\frac{12}{40}$, pois $\frac{3}{10} = \frac{12}{40} = 0{,}3$.

b) $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{10}$, pois $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

c) $\frac{9}{8}$ e $\frac{27}{24}$, pois $\frac{9}{8} = \frac{27}{24} = 1{,}125$.

Faça você mesmo

2. Observe as frações a seguir e determine quais pares são proporcionais:

$$\frac{6}{18}, \frac{8}{9}, \frac{39}{300}, \frac{23}{20}, \frac{14}{10}, \frac{21}{15}, \frac{46}{40}, \frac{13}{100}, \frac{32}{36}, \frac{9}{27}$$

Mas o que há de interessante em existir razões proporcionais ou, de outra forma, duas frações iguais? Para responder à pergunta, vamos analisar mais um exemplo.

Observe as seguintes frações: $\frac{9}{15}$ e $\frac{27}{45}$. Primeiramente, vamos realizar a divisão e encontrar seus resultados, sendo $\frac{9}{15} = 0,6$ e $\frac{27}{45} = 0,6$. De acordo com o exposto anteriormente, como os seus resultados são idênticos, podemos igualá-las, ficando com $\frac{9}{15} = \frac{27}{45}$.

Continuando com o raciocínio, realize a multiplicação do numerador de uma fração com o denominador da outra fração. Os resultados são: $9 \cdot 45 = 405$ e $15 \cdot 27 = 405$, ou seja, as duas multiplicações resultam no mesmo valor. Essa característica nos permite fazer a seguinte afirmação:

Assimile

Sempre que duas razões forem proporcionais, as multiplicações cruzadas, do numerador de uma fração com o denominador da outra fração, terão o mesmo resultado.

Seguem alguns exemplos:

a) $\frac{3}{10} = \frac{12}{40} \Rightarrow \overbrace{3 \cdot 40}^{120} = \overbrace{12 \cdot 10}^{120} \Rightarrow 120 = 120$;

b) $\frac{18}{21} = \frac{6}{7} \Rightarrow \overbrace{18 \cdot 7}^{126} = \overbrace{21 \cdot 6}^{126} \Rightarrow 126 = 126$;

c) $\frac{3}{2} = \frac{9}{6} \Rightarrow \overbrace{3 \cdot 6}^{18} = \overbrace{2 \cdot 9}^{18} \Rightarrow 18 = 18$.

Faça você mesmo

3. Aplicando a propriedade vista anteriormente, verifique quais pares de frações são proporcionais:

$\frac{2}{7}$ e $\frac{6}{20}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{4}{16}$, $\frac{8}{7}$ e $\frac{16}{14}$, $\frac{9}{9}$ e $\frac{2}{2}$, $\frac{15}{16}$ e $\frac{30}{32}$

E qual será a aplicabilidade dessa característica das frações proporcionais? Para responder, leia o exemplo a seguir:

Exemplificando

Determinado produto químico, para ser utilizado, deve ser diluído em água, na razão de $\frac{1}{8}$. Sabendo que serão utilizados 32 litros da mistura "água + produto químico", quais as quantidades de água e de produto químico que deverão ser utilizadas para manter a razão indicada no rótulo?

Resolução:

Considerando a incógnita representando a quantidade de produto químico que queremos encontrar, teremos a igualdade entre as razões proporcionais $\frac{1}{8}$ e $\frac{x}{32}$, ou seja, $\frac{1}{8} = \frac{x}{32}$. Como há a igualdade, podemos aplicar a propriedade apresentada anteriormente, ficando a expressão da seguinte forma: $8 \cdot x = 1 \cdot 32$. Para determinar o valor de x, basta isolá-lo em um dos membros da expressão; nesse caso deixaremos a incógnita x à esquerda da igualdade e os valores à direita. Desse modo, nossa expressão fica no seguinte formato: $x = \frac{1 \cdot 32}{8}$. Efetuando os cálculos, teremos x = 4.

Concluímos, então, que a quantidade ideal de produto químico a ser dissolvido em água deve ser 4 litros. Como o total da mistura corresponde a 32 litros, então a quantidade de água é de 28 litros.

Vocabulário

Incógnita: símbolo (usualmente utiliza-se uma letra) que representa um número ou quantidade desconhecida que se pretende encontrar.

Faça você mesmo

4. A planta-baixa de uma casa foi desenhada na razão de $\frac{1}{40}$, ou seja, cada centímetro na planta-baixa representa 40 cm no tamanho real. O comprimento de uma parede na planta-baixa é de 5,3 cm. Qual é o comprimento dessa parede em tamanho real?

Observando o exemplo e resolvendo o exercício do tópico "Faça você mesmo", qual característica pode ser destacada?

Em ambas as situações, existem duas razões proporcionais e houve um valor a ser determinado. Isso é muito interessante, pois indica que podemos encontrar um valor conhecendo os outros três. A essa característica damos o nome de regra de três:

Assimile

Havendo duas razões proporcionais, se três valores forem conhecidos, o quarto valor poderá ser determinado com a aplicação de operações básicas.

Vejamos alguns exemplos:

a) $\frac{x}{7}=\frac{6}{21}\Rightarrow x=\frac{7\cdot 6}{21}\Rightarrow x=2\cdot$

b) $\frac{10}{4}=\frac{3}{y}\Rightarrow y=\frac{4\cdot 3}{10}\Rightarrow y=1{,}2\cdot$

c) $\frac{8}{3}=\frac{z}{3{,}9}\Rightarrow z=\frac{8\cdot 3{,}9}{3}\Rightarrow z=10{,}4\cdot$

Faça você mesmo

5. Determine o valor desconhecido em cada caso a seguir:

$\frac{x}{3}=\frac{5{,}5}{16{,}5},\ \frac{15{,}4}{8{,}3}=\frac{y}{3{,}32},\ \frac{12}{z}=\frac{6}{2{,}5},\ \frac{100}{20}=\frac{50}{w}$

Veja mais um exemplo a seguir.

Em uma empresa de metalurgia, cinco funcionários gastam três horas para produzirem 3.750 unidades de uma peça usinada. Reduzindo o tempo de serviço para duas horas, quantas unidades os mesmos cinco funcionários conseguiriam fabricar?

De início, devemos considerar os seguintes fatos:

- Como a quantidade de funcionários é a mesma (cinco funcionários), então a capacidade de produção se mantém constante ao longo do tempo.
- Ao aumentar o tempo de trabalho, a quantidade de peças produzidas aumenta na mesma proporção.

A partir das informações anteriores, podemos concluir que:

$$\frac{3750\,(\text{unidades})}{3\,(\text{horas})} = \frac{x\,(\text{unidades})}{2\,(\text{horas})}.$$

Isolando o valor desconhecido à esquerda do sinal de igualdade, teremos:

$$\frac{3750\,(\text{unidades})}{3\,(\text{horas})} = \frac{x\,(\text{unidades})}{2\,(\text{horas})} \Rightarrow x\,(\text{unidades}) = \frac{3750\,(\text{unidades}) \cdot 2\,(\text{horas})}{3\,(\text{horas})} \Rightarrow x\,(\text{unidades}) = 2500\,(\text{unidades}).$$

Concluímos que, reduzindo para duas horas de trabalho, seriam produzidas apenas 2.500 unidades.

Pesquise mais!

SÁ, Robison. Regra de três simples e composta. Disponível em: <http://www.infoescola.com/matematica/regra-de-tres-simples-e-composta/>. Acesso em: 9 dez. 2015.

SODRÉ, Ulysses (Org.). **Matemática essencial:** ensino: fundamental, médio e superior. 2007. Disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/index.html>. Acesso em: 9 dez. 2015.

Faça você mesmo

6. Um atleta amador de corrida de rua demorou 40 minutos para percorrer 10 km e completar o percurso. Considerando que o seu rendimento foi constante, o atleta tinha percorrido quantos quilômetros após 15 minutos da largada?

Sem medo de errar!

Recorde-se que, no início desta seção, Diego estava com dificuldades para calcular a medida do comprimento da circunferência da Lua, tendo como informações a medida do raio da Terra (6.378 km) e a razão entre as medidas de comprimento da circunferência da Lua e o comprimento da circunferência da Terra $\left(\frac{34}{125}\right)$.

Com os conhecimentos adquiridos, que orientações você daria a Diego para resolver esse problema?

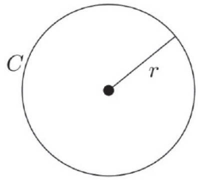
Resolução:

Como temos a informação do raio da Terra, iniciaremos com o cálculo do comprimento da circunferência.

Lembre-se!

Dada uma circunferência de raio r (vide Figura 1.1), o comprimento C de seu arco é dado por $C = 2 \cdot \pi \cdot r$.

Figura 1.1 | Circunferência



Fonte: Elaborada pelo autor

Temos:

C : comprimento da circunferência.

r : medida do raio.

$\pi \simeq 3,14$.

Substituindo os valores conhecidos, teremos:

$C = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3,14 \cdot 6378 = 40053,84$.

Portanto, a circunferência da Terra mede aproximadamente 40.054 km.

Como foi informado que a razão entre a medida da circunferência da Lua e a da Terra é aproximadamente $\frac{34}{125}$, então podemos deduzir que, se dividirmos o comprimento da circunferência da Lua pelo da Terra, o resultado deverá ser igual a $\frac{34}{125}$. Representando a medida da circunferência da Lua pela letra x , teremos a igualdade $\frac{x}{40054} = \frac{34}{125}$. . Isolando a incógnita x à esquerda do sinal de igualdade, teremos:

$\frac{x}{40054} = \frac{34}{125} \Rightarrow x = \frac{40054 \cdot 34}{125} \Rightarrow x = 10894,688$.

Portanto, a medida da circunferência da Lua é aproximadamente 10.895 km (esse valor é muito próximo de 10.917 km, que é a medida real considerada pela comunidade científica).

Faça você mesmo

7. E se Diego quisesse calcular o comprimento da circunferência do Sol, utilizando como informações a medida do raio da Terra e a razão entre os comprimentos das circunferências da Terra e do Sol, cujo valor é aproximadamente $\frac{23}{2500}$? Quais procedimentos ele deveria executar? Qual a resposta para o problema?

Avançando na prática

Pratique mais!
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com as de seus colegas.

Divisão proporcional	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer os métodos e as técnicas de operações matemáticas, para desenvolver raciocínio lógico, crítico e analítico de apoio à tomada de decisão.
2. Objetivos de aprendizagem	Compreender a utilização das razões proporcionais.
3. Conteúdos relacionados	Razão e igualdade entre razões.
4. Descrição da SP	Lilian e José compraram duas dúzias de ovos e decidiram repartir esta quantidade na mesma razão que a fração do valor com que cada um contribuiu para a compra. Lilian contribuiu com R$ 7,50 e José com R$ 2,50, totalizando R$ 10,00. Com quantos ovos cada um deve ficar?
5. Resolução da SP	Primeiramente, devemos descobrir a razão entre os valores pagos por Lilian e José em relação ao total pago pelos ovos: Lilian: $\frac{R\$\,7,50}{R\$\,10,00} = 0,75$; José: $\frac{R\$\,2,50}{R\$\,10,00} = 0,25$. Sabendo que foram compradas duas dúzias, ou 24 ovos, Lilian ficará com x ovos e José com y ovos, de modo que a razão entre a quantidade de ovos de cada um e o total pago deve corresponder à fração do valor pago, ou seja: Lilian: $\frac{x}{24} = 0,75 \Rightarrow x = 0,75 \cdot 24 = 18$. José: $\frac{y}{24} = 0,25 \Rightarrow y = 0,25 \cdot 24 = 6$. Então, podemos concluir que Lilian deve levar 18 ovos e José 6 ovos.

Faça valer a pena!

1. Veja a definição para “razão”, de acordo com o dicionário *Michaelis Online*:

1. Conjunto das faculdades anímicas que distinguem o homem dos outros animais. 2. O entendimento ou inteligência humana. 3. A faculdade de compreender as relações das coisas e de distinguir o verdadeiro do falso, o bem do mal; raciocínio, pensamento; opinião, julgamento, juízo. 4. A faculdade que refere todos os nossos pensamentos e ações a certas regras consideradas imutáveis. 5. *Mat* A relação existente entre grandezas da mesma espécie”.

(Fonte: MICHAELIS ON-LINE. **Razão.** Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=raz%E3o>. Acesso em: 9 dez. 2015).

Assim, em matemática, a razão entre dois números é definida como:

a) Uma multiplicação entre dois números.

b) Uma soma entre dois números.

c) Uma divisão entre dois números.

d) Uma subtração entre dois números.

e) Uma média aritmética entre dois números.

2. De acordo com Castanheira (2011): "A razão entre duas grandezas de mesma espécie é o quociente dos números que medem essas grandezas". Duas razões são proporcionais quando:

a) A subtração entre os numeradores é zero.

b) A multiplicação entre numerador e o denominador da mesma fração tem como resultado o número um.

c) Os resultados de suas divisões são iguais ao número um.

d) Os resultados de suas divisões são iguais.

e) Os numeradores são números pares.

3. Havendo duas razões proporcionais, se três dos valores forem conhecidos, o quarto valor poderá ser determinado com a aplicação de operações básicas. Essa é a definição de:

a) Regra de três.

b) Soma entre duas frações.

c) Mínimo múltiplo comum.

d) Regra dos noves fora.

e) Máximo divisor comum.

Seção 1.2

Porcentagem

Diálogo aberto

Após Diego ter conseguido calcular um valor muito próximo para a medida real da circunferência da Lua, ele levantou outras questões sobre as medidas da Terra e da Lua: qual é a relação entre essas medidas de comprimento? Qual é a porcentagem da medida da circunferência da Lua em relação à medida da circunferência da Terra?

Para resolver o problema, Diego precisará de conhecimentos que envolvem conteúdos anteriormente estudados: razões proporcionais e regra de três.

Você consegue auxiliar Diego a resolver esse problema?

Não pode faltar!

Com certeza, você já fez uso dos termos "porcentagem" ou "por cento", mas quais os seus significados? O que eles realmente representam?

São respostas a essas perguntas que veremos agora.

Muito provavelmente você já tem alguma ideia, mesmo que intuitiva, do conceito de porcentagem. Não abandone sua percepção, pois ela é importante para o nosso estudo.

O símbolo utilizado para indicar a porcentagem é "%". Isso significa que, quando nos deparamos com um número seguido deste símbolo, ele é um número percentual. Um exemplo é 27% (lê-se: vinte e sete por cento).

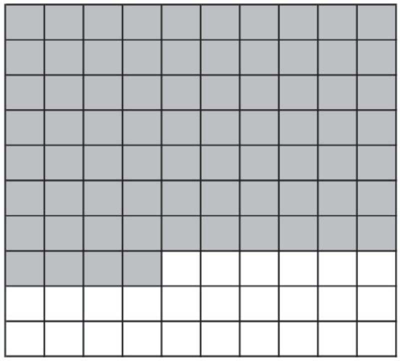
A expressão "porcentagem" indica uma razão ou uma divisão por 100. Um exemplo simples é o seguinte: $15\% = \frac{15}{100}$. A divisão $\frac{15}{100}$ é chamada de **razão percentual** ou **razão centesimal**.

Atenção!

Em muitos livros, é comum a utilização da expressão **percentagem** ao invés de **porcentagem**. As duas expressões são válidas.

Considere, agora, a razão $\frac{74}{100}$. Podemos entendê-la da seguinte forma: dividimos um total qualquer por 100 e consideramos apenas 74 das partes resultantes (veja representação na Figura 1.2). De forma semelhante, a razão $\frac{100}{100}$ indica que, das cem partes resultantes de uma divisão por cem, consideramos todas elas, ou seja, o total (veja representação na Figura 1.3). Desse modo, você pode estabelecer a seguinte relação: sempre que for preciso determinar uma quantidade qualquer como sendo o total, essa quantidade será representada pelo número 100 em uma razão percentual.

Figura 1.2 | Representação de 74% ou 74/100

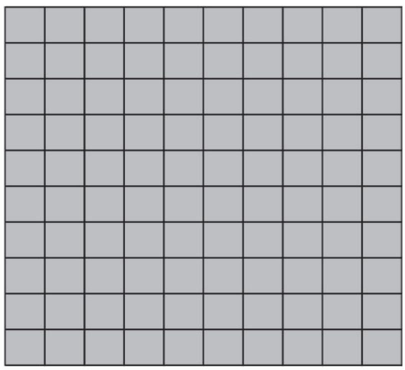


Fonte: Elaborada pelo autor

Vejamos os exemplos:

- Os 32 alunos matriculados em um curso correspondem a 100% dos alunos, ou $\frac{100}{100}$.
- Os 5.640 livros de uma biblioteca correspondem a 100% dos livros.
- Os 12 meses do ano correspondem a 100% dos meses.

Figura 1.3 | Representação de 100% ou 100/100



Fonte: Elaborada pelo autor

Então, quando falamos em porcentagem, estamos falando de uma parte do todo, ou seja:

- 25% dos 32 alunos matriculados são 8 alunos.
- 80% dos 5.640 livros são 4.512 livros.
- 50% dos meses do ano são 6 meses.

Antes de detalharmos mais o cálculo de porcentagens, tente resolver o exercício a seguir.

Faça você mesmo

1. Determine mentalmente os resultados de 1%, 5%, 10% e 50% dos valores a seguir:

- 50
- 200
- 350
- 500

Reflita

Onde, no seu dia a dia, você se depara com porcentagens? Como você determina mentalmente os valores envolvidos?

As porcentagens requisitadas no exercício anterior são simples de serem obtidas, pois são utilizados números fáceis de trabalhar. Porém, quando precisarmos encontrar 14,5% de 155, por exemplo, como devemos proceder? Para resolver esse problema, analisaremos o seguinte exemplo:

Exemplificando

Uma pessoa vai pagar uma parcela do financiamento do carro com atraso, sendo que a multa correspondente a esse atraso é de 3,75% do valor do boleto. Sabendo que o valor do boleto é de R$ 335,70, qual é o valor que a pessoa vai desembolsar ao pagar a parcela atrasada?

Resolução:

Inicialmente, podemos observar que a porcentagem não é de solução imediata. Então, qual seria a forma de encontrar o valor correspondente a essa porcentagem? Qual estratégia seguir? Para responder às perguntas, observe o quadro a seguir:

	Valor	Porcentagem
I	25	5%
II	50	10%
III	250	50%
IV	500	100%

Os números dispostos na coluna "Valor" estão acompanhados pelas respectivas porcentagens. O valor 500 é o total ou 100%. O número: 250 corresponde a 50% do total; 50 corresponde a 10% de 500; 25 é 5% de 500.

Agora, observe as seguintes divisões: o valor da linha I pelo valor da linha II; a porcentagem da linha I pela porcentagem da linha II. Temos:

$$\frac{25}{50} = 0,5 \text{ e } \frac{5\%}{10\%} = 0,5.$$

Note que os resultados obtidos são iguais. Essa mesma característica é observada, também, quando se repete o processo com outras linhas. Veja:

- Linha II e III: $\frac{50}{250} = 0,2$ e $\frac{10\%}{50\%} = 0,2$.
- Linha III e IV: $\frac{250}{500} = 0,5$ e $\frac{50\%}{100\%} = 0,5$.

Essa igualdade poderá ser observada com qualquer par de linhas e está de acordo com a seguinte afirmação:

Assimile

A divisão entre dois valores terá o mesmo resultado que a divisão de suas respectivas porcentagens.

Se esses valores são iguais, de acordo com o conteúdo visto anteriormente, podemos concluir que essas duas frações são proporcionais, sendo possível, então, aplicar o procedimento da regra de três.

Essa conclusão é muito interessante, pois permite, agora, responder à pergunta feita inicialmente, como segue:

De acordo com as informações fornecidas, o valor integral do boleto é de R$ 335,70; logo, esse valor corresponde a 100% (pois é o valor total). O que devemos descobrir é o valor correspondente a 3,75% do total, que denotaremos por x, pois ainda não o conhecemos. Como visto, a divisão entre as porcentagens deve ter o mesmo valor que a divisão entre os respectivos números; logo:

$$\frac{x}{R\$335,70} = \frac{3,75\%}{100\%} \Rightarrow x = \frac{R\$335,70 \cdot 3,75\%}{100\%} \Rightarrow x = R\$12,58875.$$

Arredondando para o centésimo mais próximo, temos que o valor da multa a ser paga é de aproximadamente R$ 12,59. Para finalizar, adicionamos a multa ao valor do boleto para determinar o valor a ser pago, ou seja:

$$\text{Valor da parcela atrasada} = \text{Valor do boleto} + \text{Valor da multa};$$
$$\text{Valor da parcela atrasada} = R\$335,70 + R\$12,59;$$
$$\text{Valor da parcela atrasada} = R\$348,29.$$

Portanto, concluímos que o total desembolsado será de R$ 348,29.

Faça você mesmo

2. Retomando a pergunta feita anteriormente: quanto é 14,5% de 155?

3. Vicente vai pagar uma dívida no banco com 15 dias de antecedência e, por isso, terá um desconto de 3,5% em relação ao valor do boleto. Sabendo que o valor do boleto é de R$ 1.253,00, qual é o valor a ser pago por Vicente?

Pesquise mais!

Para complementar seus estudos, visite o site indicado a seguir, pois ele possui explicações sobre porcentagem e outros conteúdos importantes.

SODRÉ, Ulysses (Org.). **Porcentagem**. 2005. Disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/razoes/razoes-aplic.htm>. Acesso em: 9 dez. 2015.

Até agora, você viu que podemos encontrar as porcentagens por meio de frações proporcionais. Além dessa estratégia, podemos, também, utilizar uma fórmula para facilitar o cálculo das porcentagens; tal fórmula é descrita conforme segue:

$$x = \frac{i \cdot T}{100\%}$$

Onde:

i é a taxa procurada.

T é a quantidade considerada como total.

x é a quantidade procurada.

Voltando ao exemplo apresentado anteriormente, vimos que a taxa correspondente à multa é de 3,75%; o valor que representa o total é R$ 335,70. Assim, aplicando a fórmula descrita anteriormente, teremos:

$$i = 3,75\%;$$
$$T = R\$335,70;$$
$$x = \frac{3,75\% \cdot R\$335,70}{100\%} = R\$12,58875.$$

Da mesma maneira, podemos concluir que o valor da multa é de aproximadamente R$ 12,59 e o valor total a ser desembolsado é de R$ 348,29.

Faça você mesmo

4. Mônica quer doar 20% de seus brinquedos para crianças carentes. Sabendo que ela possui 30 brinquedos em seu quarto, determine, por meio da fórmula de porcentagem, a quantidade que será doada por Mônica.

Sem medo de errar!

Tendo visto os conteúdos anteriores, como você faria para orientar Diego na solução de seu problema?

Lembre-se!

Na aula anterior, constatamos que o comprimento da circunferência da Lua é aproximadamente 10.895 km, valor obtido a partir da medida da circunferência da Terra, que é aproximadamente 40.054 km.

O comprimento da circunferência da Terra representa o total ou, em porcentagem, 100%. No entanto, Diego quer encontrar a porcentagem correspondente à medida da circunferência da Lua. Veja essas informações organizadas no quadro a seguir:

	Medida da circunferência (km)	Porcentagem (%)
Lua	10.895	x
Terra	40.054	100

Para solucionar a dúvida de Diego, você pode aplicar os conteúdos da aula anterior (frações proporcionais):

$$\frac{10895\,\text{km}}{40054\,\text{km}} = \frac{x}{100\%} \Rightarrow x = \frac{10895\,\text{km} \cdot 100\%}{40054\,\text{km}} \Rightarrow x \simeq 27{,}20\%$$

Ou, também, pode utilizar a fórmula descrita anteriormente nesta seção:

$$i = y\ (\text{porcentagem desconhecida});$$
$$T = 40054\,\text{km};$$
$$x = 10895\,\text{km};$$
$$x = \frac{i \cdot T}{100\%} \Rightarrow 10895\,\text{km} = \frac{y \cdot 40054\,\text{km}}{100\%} \Rightarrow 10895\,\text{km} \cdot 100\% = y \cdot 40054\,\text{km};$$
$$y = \frac{10895\,\text{km} \cdot 100\%}{40054\,\text{km}} \simeq 27{,}20\%.$$

Sendo assim, podemos dizer que a circunferência da Lua corresponde a apenas 27,20% do comprimento da circunferência da Terra.

Faça você mesmo

5. Na aula anterior, foi proposto que você calculasse a medida da circunferência do Sol, cujo valor é de aproximadamente 4.370.880 km. De posse da informação de que a circunferência da Terra mede aproximadamente 40.054 km, a que porcentagem corresponde a medida da circunferência da Terra em relação à medida da circunferência do Sol?

Avançando na prática

Pratique mais!
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com as de seus colegas.

Variação percentual	
Competência de fundamentos de área	Conhecer os métodos e as técnicas de operações matemáticas, para desenvolver raciocínio lógico, crítico e analítico de apoio à tomada de decisão.
2. Objetivos de aprendizagem	Aplicar o conceito de variação percentual.
3. Conteúdos relacionados	Porcentagem.
4. Descrição da SP	No 1º semestre de 2014, uma empresa de telemarketing tinha um total de 950 funcionários. Já no início do 2º semestre do mesmo ano, o número de funcionários tinha atingido a quantidade de 1.450. Determine de quantos por cento foi o aumento no número de funcionários.

<table>
<tr>
<td>5. Resolução da situação problema</td>
<td>Para resolver essa questão, devemos entender o que pergunta o enunciado. Primeiramente, o texto informa que no 1º semestre de 2015 havia 950 e, no 2º semestre, 1.450 funcionários. Depois, é solicitada a porcentagem do crescimento no número de funcionários. Para isso, devemos utilizar a seguinte expressão da variação percentual:

$i = \frac{v_2 - v_1}{v_1} \cdot 100\%,$

Onde:

i: variação percentual;
v_1: valor inicial;
v_2: valor final.

Substituindo os valores $v_1 = 950$ e $v_2 = 1450$, temos:

$i = \frac{1450 - 950}{950} \cdot 100\% \simeq 52,63\%.$

Logo, o aumento percentual é de aproximadamente 52,63%.

Atenção!

Houve um aumento nesse caso, pois $i > 0$ (positivo). Caso obtivéssemos $i < 0$ (negativo), teríamos uma redução.</td>
</tr>
</table>

Vale observar que o problema anterior poderia ter sido resolvido com a utilização da fórmula $x = \frac{i \cdot T}{100\%}$ com $x = 1450$, $i = y$ (porcentagem desconhecida) e $T = 950$. Veja:

$$1450 = \frac{y \cdot 950}{100\%} \rightarrow y = \frac{1450 \cdot 100\%}{950} \rightarrow y \simeq 152,63\%.$$

Note que $i \simeq 152,63\%$ indica que 1.450 correspondem a aproximadamente 152,63% de 950, ou seja, um acréscimo de 52,63%.

Faça valer a pena!

1. Maria redigiu um relatório para um escritório de uma empresa de engenharia civil onde trabalha e parte desse relatório contém as informações a seguir:

Custo total: R$ 1.342.000,00.

Custo de construção: R$ 335.500,00.

Custo de mão de obra: R$ 469.700,00.

Custo de gestão: R$ 134.200,00.

Custo variável: R$ 402.600,00.

Analise as informações anteriores e assinale a alternativa que contém o trecho que completa a lacuna a seguir corretamente.

O custo ____________________.

a) De mão de obra representa 35% do custo total.

b) De gestão representa 50% do custo total.

c) Variável representa 3% do custo de mão de obra.

d) De construção representa 2,5% do custo total.

e) De gestão representa 4% do custo de construção.

2. Uma instituição que cuida de menores carentes conseguiu, em determinado período, efetivar o processo de adoção de 10% das crianças residentes na instituição. Havia 60 crianças naquele período na instituição e, desse total, 70% eram meninas e 30% meninos. Das crianças adotadas, uma era menino.

A partir do texto anterior, podemos afirmar que:

a) Após o processo de adoção, ficaram na instituição 41 meninas.

b) Cinco é o total de meninas na instituição após o processo de adoção.

c) Após o processo de adoção, ficaram na instituição 17 meninos.

d) A porcentagem de meninas que ficaram na instituição é de 60%.

e) A porcentagem de meninos que ficaram na instituição é de 30%.

3. Da quantidade presente de torcedores para uma partida de futebol de salão, 55% torcem para o time da cidade. Sabe-se também que, do total de torcedores do time visitante, a porcentagem de homens é de 85%, e o total de mulheres é de 108. Além disso, a porcentagem de mulheres torcedoras do time da cidade é de 25%. Considere que todos os presentes, necessariamente, torcem para um dos times em quadra.

De acordo com o texto, assinale a alternativa que contém uma afirmação **falsa**:

a) O total de torcedores do time visitante é de 720.

b) A quantidade de torcedoras mulheres do time da cidade é de 220.

c) O total de torcedores homens do time da cidade é de 660.

d) O público presente contou com 1.600 pessoas.

e) A quantidade de torcedores do time da cidade é de 890.

Seção 1.3

Potenciação

Diálogo aberto

Continuando o seu estudo sobre os elementos do sistema solar, Diego deparou-se com um livro sobre astronomia que continham as distâncias Terra-Lua e Terra-Sol. Diego ficou espantado com a grande quantidade de algarismos utilizados para escrever estas distâncias. O livro trazia as seguintes medidas:

- Distância aproximada entre a Terra e a Lua: 384.000 km.
- Distância aproximada entre a Terra e o Sol: 150.000.000 km.

Vamos ajudar Diego a encontrar uma forma mais conveniente de escrever esses números, que contêm muitos algarismos?

Para realizar a tarefa, precisamos estudar alguns conceitos, como as potências e seus elementos. Esses conceitos são fundamentais no decorrer de seu curso, já que são muito utilizados em várias áreas.

Não pode faltar!

Você já se deparou com expressões matemáticas compostas por multiplicações de números repetidos? De que forma podemos escrever com mais simplicidade a seguinte multiplicação $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$? Para responder a essas e outras perguntas, precisamos estudar as potências.

Para começar, observe a Tabela 1.1. Na coluna **Multiplicação**, em cada linha, há multiplicações envolvendo o número 3 repetidas vezes. Na coluna **Quantidade de números iguais,** é indicada a quantidade de vezes que o número três aparece em cada multiplicação. Na quarta linha da tabela, por exemplo, é indicada a multiplicação $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, ou seja, 3 multiplicado por ele mesmo quatro vezes. Esse número é indicado na segunda coluna.

Tabela 1.1 | Multiplicações envolvendo o número 3

Multiplicação	Quantidade de números iguais
$3 \cdot 3$	2
$3 \cdot 3 \cdot 3$	3
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	4
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	5
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	6

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com essa percepção, é possível criar uma forma de escrita, denominada potência, que sintetiza essa ideia de multiplicação do mesmo número repetidas vezes (vide Tabela 1.2).

Tabela 1.2 | Potências do número 3

Multiplicação	Quantidade de números iguais	Potência
$3 \cdot 3$	2	3^2
$3 \cdot 3 \cdot 3$	3	3^3
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	4	3^4
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	5	3^5
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	6	3^6

Fonte: Elaborada pelo autor.

Conforme Tabela 1.2, podemos igualar as multiplicações da seguinte forma:

Equivalência
$3^2 = 3 \cdot 3$
$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$
$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
$3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

A última forma apresentada simplifica e associa uma potência a uma multiplicação de números iguais. Veja alguns exemplos:

- $5^2 = 5 \cdot 5$.
- $7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$.
- $13^3 = 13 \cdot 13 \cdot 13$.

Cada potência anteriormente descrita possui um resultado que pode ser obtido efetuando as multiplicações correspondentes.

Faça você mesmo

1. Determine o resultado de cada potência descrita anteriormente.

Pesquise mais!

Para mais informações acerca desse assunto, é recomendável que você pesquise em outras fontes. Sugerimos os materiais indicados a seguir, que dão acesso a diversas informações acerca da potenciação e outros assuntos.

• IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar**: Logaritmos. 9. ed. Atual: São Paulo, 2004.

• RICHARTZ, Marize. **Potenciação**: um estudo didático. 2005. 91 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96531/Marize_Richartz.pdf?sequence=1>. Acesso em: 9 dez. 2015.

Veja a seguir os elementos de uma potência:

$$\underbrace{5}_{\text{base}}^{\overbrace{4}^{\text{expoente}}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{fatores}}$$

Existem dois casos especiais de potência:

Assimile

1. Expoente igual a 0 (zero).

Com exceção do zero, qualquer outro número na base com o expoente igual a zero sempre terá como resposta o valor **1**. Exemplos:

$1^0 = 1$; $20^0 = 1$; $0{,}568^0 = 1$; $\pi^0 = 1$; $(-4)^0 = 1$; $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$.

2. Expoente igual a 1 (um).

Qualquer número na base com o expoente igual a 1 terá como resultado o valor da base. Exemplos:

$1^1 = 1$; $20^1 = 20$; $0{,}568^1 = 0{,}568$; $\pi^1 = \pi$; $(-4)^1 = -4$; $\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$.

Vocabulário

Fator: cada valor que compõe uma multiplicação.

Base: número que se repete em uma multiplicação de fatores iguais.

Expoente: indica a quantidade de vezes que a base se repete em uma multiplicação de fatores.

Faça você mesmo

2. Escreva a potência correspondente à cada multiplicação e o respectivo resultado.

a) $5 \cdot 5 \cdot 5$

b) $14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14$

c) 8

d) 0

Vejamos um exemplo de aplicação da potenciação:

Exemplificando

Imagine que um cientista de um laboratório deseja fazer uma experiência para estudar o crescimento de uma colônia de bactérias.

Essa bactéria se reproduz por meio do processo de mitose, ou seja, produz descendentes idênticas. Ao analisar uma amostra dessa bactéria, o cientista observou que ela produz um descendente a cada hora. Veja na Tabela 1.3 a quantidade de bactérias durante as três primeiras horas.

Tabela 1.3 | Quantidade de bactérias em cada hora

Quantidade de bactéria	Hora
$2^0 = 1$	0
$2^1 = 2$	1
$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$	2
$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$	3

Fonte: Elaborada pelo autor.

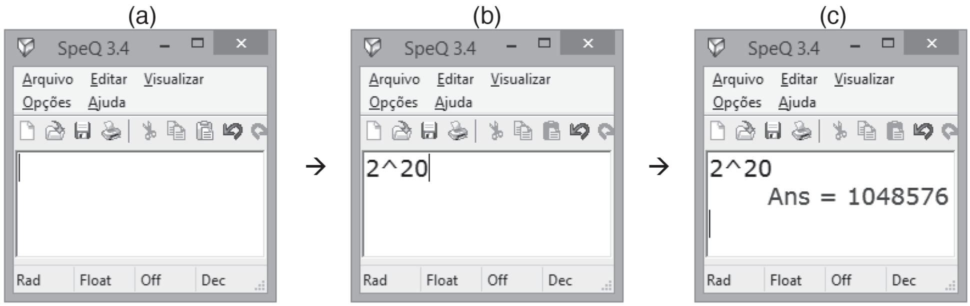
Considerando a tabela, qual é a quantidade de bactérias na vigésima hora?

Resolução:

Observe que a quantidade de vezes que o número 2 é multiplicado por si mesmo é correspondente à quantidade de horas e esse número é igual ao expoente da potência. Portanto, na vigésima hora, a quantidade de bactérias é igual a $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{20\text{ vezes}} = 2^{20}$.

Realizar a multiplicação do número 2 repetidas vezes pode ser muito trabalhoso. Por esse motivo, podemos recorrer ao auxílio de uma calculadora científica ou um programa de computador, como o SpeQ[1] . Veja na Figura 1.4 como obter esse resultado utilizando o SpeQ.

Figura 1.4 | Cálculo de 2^{20} no SpeQ



Janela do SpeQ.

Digitamos o comando **2^20**, que é equivalente a 2^{20}

Ao pressionar **Enter**, o programa calcula o valor.

Fonte: Elaborada pelo autor.

[1] Disponível em: <www.speqmath.com>. Acesso em: 13 nov. 2015.

Reflita

Tente lembrar-se de ocasiões em que houve a necessidade de realizar multiplicações com números repetidos. Teria sido mais conveniente escrever na forma de multiplicação ou na forma de potência?

As potências podem aparecer de maneiras diferentes, podendo, inclusive, ter um número negativo como base, a exemplo de $(-6)^8$. Vamos analisar os resultados de algumas potências de base negativa na Tabela 1.4.

Tabela 1.4 | Algumas potências de base negativa

Potência	Expoente
$(-3)^0 = 1$	0
$(-3)^1 = -3$	1
$(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9$	2
$(-3)^3 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -27$	3
$(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = 81$	4
$(-3)^5 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -243$	5
$(-3)^6 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = 729$	6

Fonte: Elaborada pelo autor.

Atenção!

Não confunda $(-3)^2$ com -3^2, pois:

$(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9$.

e

$-3^2 = -(3^2) = -(3\cdot 3) = -3\cdot 3 = -9$.

Observe na Tabela 1.4 que os resultados aparecem com sinais alternados, isto é, um valor positivo e o outro negativo. Repare, também, que, se o expoente é:

- **Par**, o resultado da potência é **positivo;**
- **Ímpar**, o resultado da potência é **negativo**.

Essa percepção não é coincidência e está de acordo com a afirmação seguinte, válida para qualquer potência:

Assimile

Em uma potência de base negativa, quando o expoente for par, o resultado da potência é positivo; quando o expoente for ímpar, o resultado da potência é negativo.

Faça você mesmo

3. Escreva a potência correspondente à cada multiplicação e determine o seu resultado.

a) $(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)$

b) $(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)$

c) $(-8)\cdot(-8)$

d) $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$

Pesquise mais!

Para mais informações sobre as potências, consulte o site indicado a seguir:

CAVALCANTE, Romirys. **Todas as propriedades da potenciação**. Disponível em: <http://www.vivendoentresimbolos.com/2012/10/potenciacao.html>. Acesso em: 9 dez. 2015.

Outra aplicação da potenciação é na notação científica. Essa notação permite escrever grandes números de uma forma mais simples, facilitando a manipulação dos valores e diminuindo, assim, a possibilidade de erro ao trabalhar com eles. Observe a Tabela 1.5.

Tabela 1.5 | Números em notação científica

Decomposição com multiplicações	Decomposição em notação científica
$2 = 2\cdot 1$	$2 = 2\cdot 10^0$
$20 = 2\cdot 10$	$20 = 2\cdot 10^1$
$200 = 2\cdot 10\cdot 10$	$200 = 2\cdot 10^2$
$2000 = 2\cdot 10\cdot 10\cdot 10$	$2000 = 2\cdot 10^3$
$20000 = 2\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10$	$20000 = 2\cdot 10^4$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Perceba que existe uma relação de igualdade entre a quantidade de zeros dos números e o valor do expoente da potência de base 10. Na primeira linha, o número 2 não possui zeros e a sua notação científica tem uma potência cujo expoente é igual a zero. Já na segunda linha, o número 20 possui um zero e sua notação científica possui uma potência de expoente igual a 1. O número 200 possui dois zeros e sua notação científica possui uma potência de expoente igual a 2. Esse raciocínio se repete nos números das outras linhas.

Para melhor compreensão, vejamos mais alguns exemplos:

- $100000 = 1 \cdot 10^5$.
- $2500000000 = 25 \cdot 10^8$.
- $580000000000 = 58 \cdot 10^{10}$.

Atenção!

Rigorosamente, os valores $25 \cdot 10^8$ e $58 \cdot 10^{10}$ não estão escritos em notação científica. Para que estivessem, o número que multiplica a potência de base 10 deveria ser maior ou igual a 1 e menor que 10. Para isso, poderíamos reescrevê-los da seguinte forma: $2{,}5 \cdot 10^9 = 25 \cdot 10^8$ e $5{,}8 \cdot 10^{11} = 58 \cdot 10^{10}$.

Veja mais detalhes sobre a notação científica em <http://disciplinas.stoa.usp.br/pluginfile.php/145541/mod_resource/content/3/PrefixosSI%2BNotacaoCientifica.pdf>. Acesso em: 9 dez. 2015.

Faça você mesmo

4. Escreva os números a seguir como potência de base 10.

a) 25000000.

b) 170000000.

c) 3000000000000.

d) 890000.

Uma situação que pode ocorrer é quando o expoente tem sinal negativo, como em 5^{-3}. Nesse caso, essa notação pode ser compreendida com a seguinte equivalência:

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}, \text{ com } a \neq 0.$$

Veja alguns exemplos:

- $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \simeq 0{,}0123$.
- $0{,}5^{-3} = \frac{1}{0{,}5^3} = \frac{1}{0{,}125} = 8$.
- $1{,}3^{-1} = \frac{1}{1{,}3^1} = \frac{1}{1{,}3} \simeq 0{,}7692$.

Potências com expoente negativo são muito utilizadas para expressar medidas extremamente pequenas, como a espessura de um fio de cabelo, que é cerca de $7 \cdot 10^{-5}$ m. Convertendo, temos que essa medida é equivalente a 0,00007 m.

Faça você mesmo

5. Determine o resultado das potências a seguir:

a) 6^{-4}

b) $0,8^{-4}$

c) $2,7^{-2}$

Sem medo de errar!

Vamos, enfim, solucionar o problema de Diego. Ele tem o objetivo de encontrar uma maneira de escrever números com grande quantidade de algarismos de uma forma mais simples.

Após termos contato com a potenciação, compreendemos que é possível escrever um número com vários algarismos de um modo mais conveniente. Com esse conhecimento, vamos reescrever as medidas 384.000 km e 150.000.000 km.

Na medida 384.000 km, distância aproximada entre a Terra e a Lua, podemos observar a existência de três algarismos iguais a zero. Logo, seguindo o padrão visto anteriormente, podemos reescrever o número da seguinte forma: $384 \cdot 10^3$ km. O mesmo raciocínio deve ser aplicado na distância entre a Terra e o Sol, 150.000.000 km. Essa possui sete algarismos zero e, portanto, pode ser reescrita da seguinte forma: $15 \cdot 10^7$ km.

Atenção!

Em notação científica, teríamos $3,84 \cdot 10^5$ km e $1,5 \cdot 10^8$km, respectivamente.

Avançando na prática

Pratique mais!
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com as de seus colegas.

Urano	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer os métodos e as técnicas de operações matemáticas, para desenvolver raciocínio lógico, crítico e analítico de apoio à tomada de decisão.

2. Objetivos de aprendizagem	Utilizar potência e notação científica para a escrita de números.
3. Conteúdos relacionados	Potência; potência de base dez; notação científica.
4. Descrição da SP	O planeta Urano, assim como o planeta Terra, realiza vários movimentos, sendo que um deles é o de translação. Este movimento é caracterizado pela realização de uma volta completa do planeta em torno do Sol. Para realizar uma translação, Urano percorre, aproximadamente, 2.870.000.000 km. Como podemos escrever este número como uma potência de base 10?
5. Resolução da SP	Observando atentamente a medida da orbita do planeta Urano em torno do Sol, podemos observar que esse número é composto por vários algarismos iguais a zero. Logo, basta aplicar a regra da notação científica. O número 2.870.000.000 contém 7 zeros, então basta escrever o número 287 multiplicado por uma potência de base 10 e expoente 7, ficando da seguinte forma: $287 \cdot 10^7$ km. Em notação científica, teríamos $2,87 \cdot 10^9$ km.

Faça valer a pena!

1. Um mesmo número, quando repetido várias vezes em uma multiplicação, pode ser escrito na forma de potência. Os elementos de uma potência são denominados:

a) Base, proponente e fatores.

b) Classe, proponente e expoente.

c) Base, expoente e fatores.

d) Proponente, expoente e partes.

e) Classe, expoente e fatores.

2. Leia um trecho a seguir, extraído de uma reportagem.

"É muito difícil precisar o número de células que nascem e morrem em nosso organismo a cada dia, mas calcula-se que o corpo de um adulto produza, em média, 300 milhões de células por minuto ou 432 trilhões por dia – uma renovação que ocorre, principalmente, em tecidos epiteliais e conjuntivos, responsáveis pelos revestimentos e pela sustentação do corpo. Essa taxa pode variar em algumas situações, por exemplo, quando o corpo precisa reparar uma lesão".

(Fonte: PASSOS, Juliana. **Clique Ciência:** Quantas células do corpo nascem por dia?. 2013. Disponível em: <http://noticias.uol.com.br/ciencia/ultimas-noticias/redacao/2013/05/14/clique-ciencia-quantas-celulas-do-corpo-nascem-por-dia.htm>. Acesso em: 9 dez. 2015).

De acordo como texto, as quantidades de células produzidas por minuto e por dia, escritas em potências de base 10, são, respectivamente:

a) $3 \cdot 10^6$ e $432 \cdot 10^{12}$.

b) $3 \cdot 10^8$ e $432 \cdot 10^{12}$.

c) $3 \cdot 10^6$ e $432 \cdot 10^9$.

d) $3 \cdot 10^6$ e $432 \cdot 10^8$.

e) $3 \cdot 10^7$ e $432 \cdot 10^9$.

3. Leia o trecho da reportagem intitulada "Brasil avança na produção mundial de alimentos?":

"O Brasil se consolidará como uma potência agrícola nos próximos dez anos e vai disputar a liderança na produção de alimentos com os Estados Unidos. A projeção é do Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento (Mapa), que, nesta terça-feira, divulgou o estudo Projeções do Agronegócio 2010/11-2020/2021.

[...]

O ministério avalia que o país manterá a dianteira na produção da carne de frango e carne bovina, e incrementará a produção de carne suína. No total, o país passará da produção atual de 24,6 milhões de toneladas de carne para 31,2 milhões de toneladas na temporada 2020/21 (crescimento de 36,5%)".

(Fonte: PORTAL BRASIL. **Brasil avança na produção mundial de alimentos**. 2011. Disponível em: <http://www.brasil.gov.br/economia-e-emprego/2011/06/brasil-avanca-na-producao-mundial-de-alimentos>. Acesso em: 9 dez. 2015).

Após ler o texto, podemos dizer que a diferença, em toneladas, entre a atual produção de carne e a temporada 2020/21 será de:

a) $6{,}6 \cdot 10^6$

b) $66 \cdot 10^4$

c) $66 \cdot 10^6$

d) $6{,}6 \cdot 10^5$

e) $6{,}6 \cdot 10^4$

Seção 1.4

Logaritmos

Diálogo aberto

Durante os estudos sobre astronomia, Diego calculou o valor aproximado de algumas medidas, como a medida da circunferência da Lua e do Sol. Em todos os casos, ele trabalhou com números de vários algarismos. Alguns dados obtidos foram:

- Distância aproximada entre a Terra e a Lua: 384.000 km.
- Distância aproximada entre a Terra e o Sol: 150.000.000 km.

Ele descobriu, após estudar potências, que poderia escrever esses números em potências de base dez, da seguinte maneira:

- Distância aproximada entre a Terra e a Lua: $384 \cdot 10^3$ km.
- Distância aproximada entre a Terra e o Sol: $15 \cdot 10^7$ km.

Após alcançar esses últimos resultados, Diego questionou-se: será possível escrever esses números em forma de potência em uma base que não seja dez? Como devo proceder?

Em outras palavras, o que Diego quer saber é se é possível escrever o número 150.000.000, por exemplo, em forma de potência de base 5 ou outra base qualquer. Quais procedimentos ele deve realizar para obter o resultado?

Não pode faltar!

Na seção anterior, aprendemos potências, e agora vamos estudar o conceito de logaritmo. Esses dois conceitos estão extremamente relacionados e, por isso, devemos sempre nos lembrar da aula anterior.

Iniciamos com a seguinte questão:

Qual é o expoente que, aplicado à base 6, resulta em 7.776? Essa pergunta pode ser traduzida algebricamente da seguinte forma: $6^x = 7776$, sendo que a incógnita x representa o valor a ser determinado. Para resolver a questão, vejamos a Tabela 1.6:

Dica

A expressão $6^x = 7776$ é denominada equação exponencial.

Tabela 1.6 | Algumas potências de base 6

Expoente	Potência
0	$6^0 = 1$
1	$6^1 = 6$
2	$6^2 = 6 \cdot 6 = 36$
3	$6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
4	$6^4 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$
5	$6^5 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 7776$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Após construir a tabela, podemos verificar que o expoente que devemos aplicar à base 6, para obter como resultado 7.776, é o número 5.

Faça você mesmo

1. Observe as potências a seguir e determine em cada uma o expoente correto:

a) $2^x = 16$

b) $4^x = 4096$

c) $6^x = 216$

d) $7^x = 16807$

e) $3^x = 729$

Para resolver problemas como o anterior, existe o logaritmo, que torna a busca pelo resultado menos trabalhosa. A utilização do logaritmo será, principalmente, para determinar expoentes desconhecidos.

Dados os números a, b e c, temos a seguinte equivalência:

Assimile

O logaritmo de b na base a é igual a c se, e somente se, a elevado a c for igual a b, ou, ainda

$\log_a b = c$ ser equivalente a $a^c = b$.

De acordo com Lezzi et al. (1977, p. 51-B), em $\log_a b = c$, a é a base do logaritmo, b é o logaritmando e c é o logaritmo. Além disso, a e b devem ser maiores que zero e $a \neq 1$ (a diferente de 1).

A definição anterior ocasiona algumas consequências. Vejamos algumas:

- $\log_a a = 1$: quando a base é igual ao logaritmando, o valor do logaritmo é 1.
- $\log_a 1 = 0$: quando o logaritmando é igual a 1, obrigatoriamente, o logaritmo tem valor zero.

Exemplificando

Determine o valor de $\log_3 81$.

Para iniciar, vamos representar o valor que queremos determinar pela incógnita x, ou seja, $\log_3 81 = x$. De acordo com a definição, $\log_3 81 = x$ é equivalente a $3^x = 81$. Logo, devemos encontrar qual o valor do expoente x que, aplicado à base 3, resulta em 81. Basta aplicarmos diferentes valores para a incógnita x até atingirmos o valor 81. Vejamos a Tabela 1.7:

Tabela 1.7 | Potências de base 3

Expoente	Potência de base 3
0	$3^0 = 1$
1	$3^1 = 3$
2	$3^2 = 9$
3	$3^3 = 27$
4	$3^4 = 81$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como o expoente é 4, então podemos dizer que $\log_3 81 = 4$.

Faça você mesmo

2. Determine o valor dos logaritmos a seguir:

a) $\log_3 243$

b) $\log_5 125$

c) $\log_2 64$

d) $\log_6 216$

Para deixar as coisas mais interessantes, considere o seguinte questionamento: existe algum expoente que, aplicado à base 10, resulta em 19?

Observe que podemos traduzir esse problema algebricamente da seguinte forma: $10^x = 19$. Você pode notar que, nesse caso, o valor do expoente x não é fácil de encontrar. Veja:

$10^0 = 1$ (menor que 19).

$10^1 = 10$ (menor que 19).

$10^x = 19$.

$10^2 = 100$ (maior que 19).

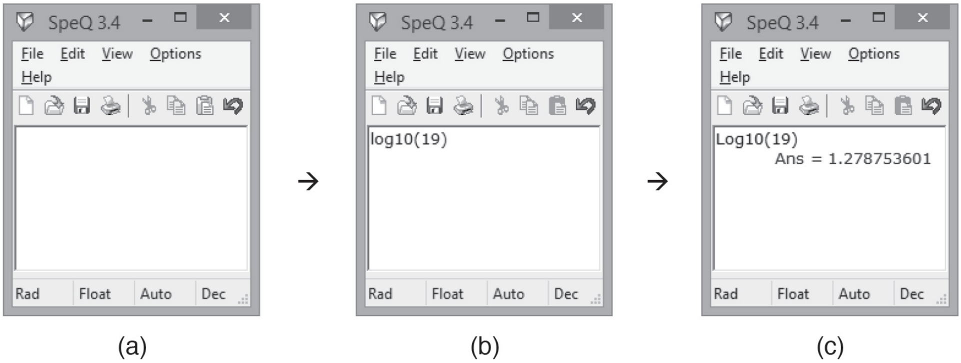
$10^3 = 1000$ (maior que 19).

...

Ao observar a sequência, é possível notar que o expoente procurado é um valor entre 1 e 2, ou seja, não é um número inteiro. Podemos resolver problemas como este aplicando as propriedades do logaritmo e, para isso, transformamos a igualdade $10^x = 19$ em sua forma equivalente $\log_{10} 19 = x$. Com o auxílio de uma calculadora científica (ou de um programa de computador), obtemos o valor $x \simeq 1{,}27875$.

Veja na Figura 1.4 um exemplo utilizando o programa gratuito SpeQ.

Figura 1.4 | Sequência de cálculo de $\log_{10} 19$ no programa SpeQ



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 1.4 (a), é possível ver a tela inicial do programa. A partir dessa tela, digitamos o comando log10(19) (Figura 1.4 (b)) e pressionamos Enter para obter o resultado (Figura 1.4 (c)).

Dica

Para calcular o logaritmo de b na base a, com a e b quaisquer (observadas as restrições da definição), utilizamos o comando log(b,a). Experimente calcular $\log_4 17$ e veja se obtém o valor aproximado 2,04373.

O valor 1,27875 obtido como aproximação para $\log_{10} 19$ indica que $10^{1{,}27875} \simeq 19$. Verifique essa afirmação digitando no SpeQ o comando **10^1.27875.**

Atenção!

• Os cálculos anteriores podem ser feitos em uma calculadora científica de modo semelhante.

• Quando trabalhamos com logaritmo de base 10, também conhecido como **logaritmo decimal**, é comum não escrever a base. Exemplo: $\log_{10} 24 = \log 24$ (não foi escrito o valor 10 da base).

Pesquise mais!

Existem calculadoras on-line com várias funcionalidades. Além de realizarem operações com logaritmos, apresentam diversas outras operações matemáticas.

Veja um exemplo disponível em: <http://www.calculadoraonline.com.br/cientifica>. Acesso em: 9 dez. 2015.

Faça você mesmo

3. Com o auxílio de uma calculadora científica, determine os valores dos logaritmos de base 10 a seguir:

a) $\log 15$

b) $\log 25$

c) $\log 3$

d) $\log 5$

O logaritmo possui algumas propriedades interessantes. Vejamos a seguir algumas delas:

- Logaritmo do produto: $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

Exemplo: $\log_2(8 \cdot 9) = \log_2 8 + \log_2 9$.

- Logaritmo da divisão: $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.

Exemplo: $\log_7\left(\frac{5}{4}\right) = \log_7 5 - \log_7 4$.

- Mudança de base: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Exemplo: $\log_5 6 = \frac{\log 6}{\log 5} = \frac{\log_2 6}{\log_2 5}$.

Exemplificando

Considere os valores dos logaritmos a seguir:

- $\log 2 \simeq 0,301$.
- $\log 3 \simeq 0,477$.

Aplicando as propriedades dos logaritmos, determine os valores dos logaritmos dos itens a seguir:

a) $\log 5$

b) $\log 6$

c) $\log_2 3$

Resolução:

a) Aplicando a propriedade da divisão:

$$\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,301 = 0,699.$$

b) Aplicando a propriedade do logaritmo do produto:

$$\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0,301 + 0,477 = 0,778.$$

c) Aplicando a mudança de base:

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0,477}{0,301} \simeq 1,585.$$

Atenção!

Ao utilizar uma calculadora científica para encontrar o valor de um logaritmo com base diferente de dez, geralmente é necessária a utilização da mudança de base.

Pesquise mais!

O logaritmo possui várias propriedades operatórias e a aplicação dessas se faz útil em diversas situações. Veja mais sobre estas propriedades no site a seguir:

SODRÉ, Ulysses. Logaritmos. Disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/expolog/logaritm.htm>. Acesso em: 9 dez. 2015.

Faça você mesmo

4. Sabendo que $\log 3 \simeq 0{,}48$ e $\log 2 \simeq 0{,}30$, encontre os valores dos seguintes logaritmos:

a) $\log 6$

b) $\log 5$

c) $\log_2 3$

Em matemática financeira, quando trabalhamos com juros compostos, podemos nos deparar com a aplicação do logaritmo. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplificando

Imagine que um empresário fez um investimento em uma instituição financeira de R$ 1.500,00 a uma taxa de 12% de juros anuais e, ao final do período, retirou R$ 2.961,00. Sabendo que a expressão que representa este investimento é $M = C(1+i)^t$, sendo que M é o valor retirado ao final do período, C é o valor investido, i é a fração decimal correspondente à taxa de juros e t é o tempo, em anos, por quanto tempo o dinheiro ficou investido?

Resolução:

Para começar, vamos identificar cada um dos valores citados no enunciado:

- M = R$ 2.961,00.
- C = R$ 1.500,00.
- i = 12% ou 12/100 = 0,12.
- t = tempo transcorrido.

Aplicando esses valores na fórmula, temos: .

$$2961 = 1500(1+0,12)^t \Rightarrow 2961 = 1500 \cdot 1,12^t \Rightarrow 1,12^t = 2961/1500 = 1,974.$$

Aplicando a definição de logaritmo, ficamos com $\log_{1,12} 1,974 = t$; realizando a mudança de base e utilizando uma calculadora, temos:

$$\log_{1,12} 1,974 = t \Rightarrow t = \frac{\log 1,974}{\log 1,12} \Rightarrow t = \frac{0,295}{0,049} \simeq 6,02.$$

Ou seja, o dinheiro ficou investido por, aproximadamente, seis anos.

Sem medo de errar!

Vamos retomar o problema proposto por Diego: ele pretende escrever $384 \cdot 10^3$ km e $15 \cdot 10^7$ km como potências de outras bases, diferentes de 10. Para exemplificar, vamos utilizar a base 5 e seguir o passo a passo necessário.

Sabemos que $10^7 = 10000000$, então, devemos determinar o valor do expoente que, aplicado à base 5, resulta em 10.000.000. Assim, o problema está em resolver a seguinte expressão: $5^x = 10000000$, que, de forma logarítmica, fica $\log_5 10000000 = x$.

Como vamos utilizar uma calculadora científica, devemos realizar a mudança de base, já que a calculadora não trabalha com logaritmos de base 5. Então, teremos: $\log_5 10000000 = \frac{\log 10000000}{\log 5}$. Com o auxílio da calculadora, obtemos os seguintes valores: $\log 10000000 = 7$ e $\log 5 \simeq 0,699$ e . Assim: $\log_5 10000000 = \frac{\log 10000000}{\log 5} = \frac{7}{0,699} \simeq 10,0143$.

Dessa forma, retornando a forma de potência, podemos dizer que, na expressão $5^x = 10000000$, temos $x \simeq 10,0143$, ou seja, podemos usar $5^{10,0143}$ para representar com bastante precisão 10.000.000. Vale lembrar que $5^{10,0143}$ não é exatamente 10.000.000, mas um valor aproximado: $5^{10,0143} = 9993085,753$. Consequentemente, $15 \cdot 10^7$ é, aproximadamente, $15 \cdot 5^{10,0143}$.

Procedendo de modo semelhante para $384 \cdot 10^3$, temos: $10^3 = 1000 = 5^y \Rightarrow \log_5 1000 = y$. Com a utilização da calculadora, temos: $y = \log_5 1000 = \frac{\log 1000}{\log 5} \simeq \frac{3}{0,699} \simeq 4,292$. Concluímos que $10^3 \simeq 5^{4,292}$ e, portanto, $384 \cdot 10^3$ km $\simeq 384 \cdot 5^{4,292}$ km.

Avançando na prática

Pratique mais!
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com as de seus colegas.

Juros compostos	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer os métodos e as técnicas de operações matemáticas, para desenvolver raciocínio lógico, crítico e analítico de apoio à tomada de decisão.
2. Objetivos de aprendizagem	Conhecer o logaritmo e algumas de suas propriedades.
3. Conteúdos relacionados	Potência; base decimal; logaritmo.
4. Descrição da SP	Determinado investimento gerou um montante M = R$ 19.965,00 a partir da aplicação de um capital C = R$ 15.000,00, com taxa de juros i = 10% = 0,10 ao ano, no regime de juros compostos. Sabendo que a equação do montante a juros compostos é $M = C(1+i)^t$, sendo que t é o tempo em anos, quanto tempo esse capital ficou aplicado?
5. Resolução da SP	Substituindo os valores M = R$ 19.965,00, C = R$ 15.000,00 e i = 0,10 na expressão $M = C(1+i)^t$, temos: $19965 = 15000(1+0,1)^t$. Simplificando, obtemos: $1,331 = (1,1)^t \Rightarrow \log_{1,1} 1,331 = t$. Para finalizar, aplicamos a mudança de base: $t = \log_{1,1} 1,331 = \frac{\log 1,331}{\log 1,1} = \frac{0,124}{0,041} \simeq 3,024$. Concluímos que o dinheiro ficou aplicado por, aproximadamente, três anos.

Faça valer a pena!

1. Observe as seguintes expressões:

- $\log_4 a = 4$
- $\log_b 125 = 3$
- $\log_7 c = 1$

Os valores de a, b e c são, respectivamente:

a) 64; 243; 0

b) 256; 5; 0

c) 7; 243; 0

d) 64; 5; 7

e) 256; 5; 7

2. Sabe-se que o logaritmo de **N** na base **a** é igual a 4. Sabe-se também que o logaritmo desse mesmo número na base $8a$ é igual a 1. O valor de **N** é:

a) 15

b) 16

c) 17

d) 18

e) 19

3. Considere as aproximações $\log 3 \simeq 0{,}477$, $\log 5 \simeq 0{,}699$ e $\log 7 \simeq 0{,}845$. O resultado da expressão $\frac{\log(3/7)}{\log 5}$ é aproximadamente:

a) $-0{,}732$

b) $0{,}162$

c) $0{,}732$

d) $-0{,}526$

e) $-0{,}162$

Referências

CASTANHEIRA, N. P. **Noções básicas de matemática comercial e financeira**. 3. ed. Curitiba: Ibpex, 2011.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. **Matemática fundamental**. São Paulo: FTD, 1994.

IEZZI, Gelson et al. **Fundamentos de matemática elementar**: Logaritmos. 3. ed. São Paulo: Atual, 1977.

MACHADO, A. S. **Matemática, temas e metas**. 2. ed. São Paulo: Atual, 1988.

ZÖLD, Harold H. N.; CORREA, Sérgio. **Matemática**. São Paulo: Nova Cultura, 1996.

INTRODUÇÃO À LÓGICA

Convite ao estudo

Emanuel é um pesquisador e, como tal, precisa realizar sua pesquisa de maneira que não chegue a conclusões falsas. Para isso, ele precisa de um instrumento que lhe dê segurança, confiabilidade e que possa ser reproduzido por outras pessoas. Como sua pesquisa envolve muitas informações, Emanuel tem dificuldade em ordená-las e trabalhar com essa grande quantidade, por isso está focado em não obter uma conclusão falsa ou usar fatos verdadeiros de maneira equivocada.

A lógica é a ciência que possui os instrumentos necessários para ajudar Emanuel no desenvolvimento do seu trabalho.

Vamos ajudá-lo iniciando o estudo da lógica.

Seção 2.1

O que é a Lógica?

Diálogo aberto

Emanuel está realizando uma pesquisa sobre o consumo de alguns produtos de uma empresa. Ele não conhece a empresa pessoalmente e as informações que tem vieram de funcionários que as relataram pessoalmente. Em sua pesquisa, obteve muitas informações relevantes, mas ele tem dificuldades em organizar e trabalhar essas informações de modo a construir uma conclusão.

Foram entrevistados todos os clientes presentes na loja em determinado dia, sempre que passavam pelo caixa para pagar pelos produtos, sendo que o operador do caixa anotava o que era levado pelo cliente. Foi observado que todos os clientes levavam ao menos um produto de limpeza; alguns clientes compraram um produto da marca LIFE e a única marca que foi escolhida por todos os clientes foi a STAR.

Como podemos ajudar Emanuel a organizar e sintetizar as informações de uma maneira que ele possa raciocinar com mais clareza sobre elas?

Vamos, juntos, ajudá-lo a resolver esse problema!

Não pode faltar!

Você pode estar se perguntando: o que é lógica? Existem muitas formas de explicar o que é lógica, mas podemos dizer, de forma bem sucinta, que:

Reflita

"Lógica é o estudo do raciocínio correto, especialmente no que envolve a elaboração de inferências."

Jakko Hintikka, professor de Filosofia da Universidade de Boston.

Podemos dizer também que a lógica proporciona um pensamento mais organizado e uma melhor ordenação e utilização de argumentos para a construção de uma conclusão válida.

Outras questões em que devemos pensar: como são realizadas as demonstrações científicas? Como são criadas ideias novas a partir de argumentos prévios já conhecidos e verdadeiros? É sobre esses e outros assuntos que iremos tratar aqui.

A utilização do raciocínio para a construção de um resultado é muito importante, pois, se realizada de maneira equivocada, produzirá conclusões falsas. De acordo com Morais (2012), o erro pode ser produzido basicamente por dois motivos:

I. Erro formal: se ao criar um raciocínio com fatos corretos, mas arranjá-los de maneira errada, você produzirá uma conclusão errada. Ou seja, você estará utilizando proposições verdadeiras, mas um raciocínio não válido.

II. Erro material: utilizando um raciocínio correto, ou seja, desencadeando os fatos de maneira formal, mas sendo esses fatos falsos, então também sua conclusão estará equivocada. Ou seja, você estará utilizando proposições falsas em um raciocínio válido (MORAIS, 2012).

Assimile

Erro formal: está relacionado à validade do raciocínio.

Erro material: está relacionado à verdade sobre a proposição.

Um exemplo de erro formal ocorre na frase a seguir:

- "Meu avô passou em medicina, meu pai passou em medicina; isso significa que eu passarei em medicina."

Sendo verdadeiras as afirmações de que o avô e o pai passaram em medicina, não significa que irei passar em medicina.

Já um exemplo de erro material está presente na frase a seguir:

- "Pedro usa boné e é inteligente. Marcos também usa boné e também é inteligente. Portanto, vou usar boné e serei inteligente."

O desenvolvimento do raciocínio está correto; o problema é acreditar que usando um boné a pessoa se torna inteligente.

Sempre devemos estar atentos para não cometer erros formais ou materiais, só assim nosso desenvolvimento lógico será válido.

Para continuar com nosso estudo sobre a lógica, é importante que tenhamos em mente três princípios, descritos por Gerônimo e Franco (2008, p. 16):

Assimile

1. **Princípio da identidade**: garante que uma proposição é igual a si mesma. Isso parece estranho em um primeiro momento, mas, do ponto de vista formal, é necessário garantir isso.

2. **Princípio da não contradição**: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa.

3. **Princípio do terceiro excluído**: uma proposição ou é verdadeira ou é falsa; não existe uma terceira alternativa.

Reflita

Pense sobre esses princípios, como eles se relacionam e se completam. Procure imaginar alguma situação em que eles sejam aplicáveis.

Para introduzir a ideia de proposição, leia as seguintes frases:

- Vicente é jardineiro.
- Marlene está em casa.
- Henrique foi à escola.

Cada uma das frases passa por si só uma ideia de sentido completo, então são chamadas de **sentenças declarativas fechadas**.

Assimile

Proposição: sentenças declarativas fechadas podem ser associadas a somente um valor lógico.

Valor lógico: são valores que podemos associar a uma proposição; esses valores podem ser **verdadeiro (V)** ou **falso (F)**.

Existem sentenças nas quais não é possível identificar uma afirmação clara e, por isso, não é possível associar um valor lógico. Veja alguns exemplos:

- Hoje é sexta-feira?
- Que casa bonita!
- Corra mais longe amanhã.

Em cada uma das frases anteriores, não é possível ter uma ideia clara de seu valor lógico, por isso são chamadas de **sentenças declarativas abertas** e não podem ser consideradas proposições.

Pesquise mais!

Existem outras informações úteis acerca de proposições lógicas. O material indicado a seguir possui exemplos e explicações interessantes. ASSUNÇÃO, Renato Martins; LOUREIRO, Antonio Alfredo Ferreira. **Fundamentos da lógica proposicional**. Disponível em:

<http://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_1FundamentosDaLogica.pdf>. Acesso em: 16 dez. 2015.

Faça você mesmo

1. Quais das frases a seguir podem ser consideradas proposições lógicas?

I – Mateus foi à praia.

II – Mário é esportista.

III – Vá embora agora!

IV – A água do mar é salgada.

Para facilitar a aplicação da lógica nas proposições, é necessária a utilização de uma escrita simplificada dessas, de uma representação simbólica e suas interações. Utilizamos para isso letras minúsculas, veja exemplos:

- Vicente é jardineiro. (**p**)
- Marlene está em casa. (**q**)
- Henrique foi à escola. (**r**)

Podemos formar frases com as proposições anteriores:

$$\underbrace{\text{Marlene está em casa}}_{q} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\text{Henrique foi à escola.}}_{r}$$

Essa frase pode ser escrita da seguinte forma: (**q** e **r**).

Outro exemplo:

$$\underbrace{\text{Vicente é jardineiro}}_{p} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\text{Marlene está em casa.}}_{q}$$

Que pode ser escrita da seguinte forma: (**p** ou **q**).

Exemplificando

Leia as afirmações e as represente da forma reduzida.

"Milton é empresário e Marli é dona de casa."

Resolução:

Podemos dizer que a frase "Milton é empresário" é uma sentença declarativa fechada; logo, é uma proposição. O mesmo pode se dizer da frase "Marli é dona de casa". Como as duas frases são proposições, podem receber um valor lógico.

Podemos representar a frase "Milton é empresário" com p, e "Marli é dona de casa" com q. Então, a frase final fica:

$$\underbrace{\text{Milton é empresário}}_{p} \quad \text{e} \quad \underbrace{\text{Marli é dona de casa.}}_{q}$$

De forma simplificada:

p e **q.**

Faça você mesmo

2. Considere as três sentenças a seguir:

- Lilian tem filhos. (**p**)
- Zélia é avó. (**q**)
- Felipe joga tênis. (**r**)

A partir das sentenças acima, escreva as seguintes proposições: (**p** e **q**), (**p** ou **r**) e (**q** ou **r**).

Sem medo de errar!

Como foi visto, para que façamos uma análise correta, as informações devem ser escritas na forma de sentenças declarativas fechadas e, posteriormente, devemos representá-las na forma simbólica. Então, vamos rever as informações que foram passadas a Emanuel:

"Foi observado que todos os clientes levavam ao menos um produto de limpeza, alguns clientes compraram um produto da marca LIFE e a única marca que foi escolhida por todos os clientes foi a STAR."

De acordo com o exposto, para que as informações sejam sentenças declarativas fechadas, elas devem ser reescritas em frases que passem uma ideia de sentido completo, ou seja, sem deixar dúvidas:

I – Todos compraram ao menos um produto de limpeza. (**p**)

II – Poucos compraram um produto da marca LIFE. (**q**)

III – A marca STAR é a única marca comprada por todos. (**r**)

Como resultado, temos três sentenças declarativas fechadas e uma letra minúscula representando cada uma. Essa representação é importante para que possamos realizar o manuseio dessas proposições.

Avançando na prática

Pratique mais!
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

Pesquisa	
1. Competências de fundamentos de área	Conhecer métodos e técnicas de operações matemáticas para desenvolver o raciocínio lógico, crítico e analítico de apoio à tomada de decisão.
2. Objetivos de aprendizagem	Organizar o pensamento de forma lógica.
3. Conteúdos relacionados	Proposições lógicas.
4. Descrição da SP	A dona de uma loja de doces quer realizar uma pesquisa sobre os doces vendidos em sua loja. Para isso, perguntou ao atendente qual era o doce, a opção de recheio e a cobertura que mais eram vendidos. Como o balconista não tinha realizado um controle rigoroso, deu algumas informações baseadas na sua experiência no balcão. As informações dadas foram as seguintes: "Todos os clientes compraram ao menos uma rosquinha de chocolate, alguns pediram roscas com cobertura de açúcar que não necessariamente têm recheio de chocolate". Como a dona da loja pode reescrever essas informações de tal forma que consiga entender o que se passa na sua loja com mais facilidade?
5. Resolução da SP	Para deixar as informações em um formato mais organizado, é necessário transformá-las em sentenças declarativas fechadas, ou seja, cada frase deve ter seu significado por si só, sem haver dúvidas. Assim, a informação dada pelo balconista pode ser reescrita da seguinte forma: • Todo cliente comprou ao menos uma rosquinha de chocolate. • Alguns clientes compraram roscas com cobertura de açúcar. • As roscas possuem recheios diversos.

Faça valer a pena!

1. Leia a seguinte sentença: Adriano é grande e pequeno.

A sentença anterior está contradizendo qual princípio da lógica?

a) Princípio do terceiro excluído.

b) Princípio da identidade.

c) Princípio da boa vizinhança.

d) Princípio da não contradição.

e) Princípio das leis da física.

2. Leia a seguinte sentença: esse relatório está meio certo.

A sentença anterior está contradizendo qual princípio da lógica?

a) Princípio das leis da física.

b) Princípio do terceiro excluído.

c) Princípio da identidade.

d) Princípio da não contradição.

e) Princípio da comparação.

3. Leia as seguintes sentenças: aquele carro que vem pela rua do centro da cidade é novo. Aquele outro carro que vem pela rua do centro da cidade também é novo. Logo, o próximo carro que vier por aquela rua do centro da cidade será novo também.

A conclusão acima cometeu qual erro?

a) Erro material.

b) Erro de análise.

c) Erro na proposição.

d) Erro não identificado.

e) Erro formal.

Seção 2.2

Proposições lógicas

Diálogo aberto

Ao iniciar os seus estudos sobre lógica e proposições, Emanuel se questionou se seria possível e como seriam as interações entre as proposições. Também se questionou sobre a existência de vários tipos de proposições e quais seriam as suas diferenças.

Durante a sua pesquisa, Emanuel se deparou com informações do tipo:

I – "As mulheres compraram produtos de beleza e os homens produtos esportivos."

II – "Se o cliente gastou mais de R$ 150,00, então teve desconto de 2%."

É possível aplicar nessas informações os conceitos de proposições e, consequentemente, as suas relações? Vamos ajudar Emanuel a esclarecer essa dúvida!

Não pode faltar!

Ao trabalhar com proposições, é comum encontrarmos dois tipos: as **proposições simples** e as **proposições compostas**.

As proposições simples são caracterizadas por apresentarem uma única proposição, ou seja, não há combinação com outra proposição. Vejamos alguns exemplos:

- **p**: Carlos é magro.
- **q**: 49 é um **quadrado perfeito**.
- **r**: Zélia é avó.

Vocabulário

Quadrado perfeito: todo número cuja raiz quadrada é um número inteiro.

As proposições compostas são formadas por combinações de duas ou mais proposições simples. Vejamos alguns exemplos:

- **P**: Carlos é magro e 49 é um quadrado perfeito.
- **Q**: Carlos é magro e Zélia é avó.
- **R**: 49 é um quadrado perfeito e Zélia é avó.

Assimile

As **proposições simples** são representadas por letras minúsculas; já as **proposições compostas** são representadas por letras maiúsculas.

Faça você mesmo

1. Leia cada uma das frases a seguir e as classifique em não proposição, proposição simples ou proposição composta.

I – Você foi ao mercado ontem?

II – Mário é esportista.

III – Vá embora agora!

IV – A água do mar é salgada e a água do rio é doce.

Em lógica, quando trabalhamos com proposições compostas, fazemos a utilização dos **conectivos**.

Existem vários tipos de conectivos. Vejamos os mais usuais[RT1]:

- A conjunção **e**, cujo símbolo é $\wedge$

- A disjunção inclusiva **ou**, cujo símbolo é $\vee$
- A disjunção exclusiva **ou**, cujo símbolo é $\underline{\vee}$
- O condicional **se** ..., **então**, cujo símbolo é $\rightarrow$
- O bicondicional **se**, **e somente se**, cujo símbolo é $\leftrightarrow$
- A negação **não**, cujo símbolo é ~

Pesquise mais!

A disjunção exclusiva não é muito comum na lógica clássica; seu uso ocorre em ambientes específicos. Faça uma pesquisa para verificar onde esse conectivo é mais usado.

Vejamos um exemplo aplicado de cada um dos conectivos:

- Exemplo de conjunção:

"Elaine faz almoço **e** Marcos vai para a escola".

Nesse texto, fica claro que os dois eventos ocorrem obrigatoriamente.

- Exemplo de disjunção:

"Marcelo é dentista **ou** professor".

Nessa situação, observamos que Marcelo é somente dentista, somente professor ou exerce as duas profissões.

- Exemplo de disjunção exclusiva:

"Tadeu é natural de Minas Gerais **ou** São Paulo".

Já nessa situação, Tadeu é natural de um estado ou de outro, mas não dos dois estados ao mesmo tempo.

- Exemplo de condicional:

"**Se** Maria mergulhou no rio, **então** ela vai se molhar".

A frase acima diz que, caso Maria mergulhe no rio, ela vai se molhar, mas não garante que o fato de estar molhada indica que mergulhou no rio, pois pode ter tomado chuva.

- Exemplo de bicondicional:

"Um triângulo tem três lados **se**, **e somente se**, possui três ângulos".

Existe a afirmação de que, se um triângulo possui três lados, então ele possui três ângulos, e também que se o triângulo possui três ângulos, então ele possui três lados.

- Exemplo de negação:

Da proposição "Betânia é médica", temos a seguinte negação "Betânia **não** é médica".

Faça você mesmo

2. Em cada uma das proposições compostas a seguir, identifique qual o conectivo usado.

a) O pano está seco e molhado.

b) Se estiver chovendo, então uso um guarda-chuvas.

c) $2+2 = 4$ ou $3.4 = 12$

d) Ingrid joga vôlei se, e somente se, vai à quadra.

e) Aline estuda e trabalha.

f) Não está chovendo.

Depois de termos conhecido as proposições simples e compostas, e também os conectivos, vamos agora estudar as suas interações.

Vamos começar as verificar as interações entre as proposições e os conectivos por meio do exemplo a seguir:

Fernanda foi ao *shopping* e Marcos foi à oficina.

Podemos verificar que a frase anterior é uma proposição composta por outras duas. São elas:

- **p**: Fernanda foi ao shopping.
- **q**: Marcos foi à oficina.

Ou de outra forma:

$$\underbrace{\text{Fernanda foi ao } \textit{shopping}}_{p} \quad \text{e} \quad \underbrace{\text{Marcos à oficina.}}_{q}$$

De uma forma simbólica:

$$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}.$$

Então, sempre podemos escrever proposições compostas utilizando somente as letras minúsculas. Vejamos outro exemplo:

Se Felipe é motorista, então Henrique é cobrador.

- **r**: Felipe é motorista.
- **s**: Henrique é cobrador.

Escrevendo de outra forma:

$$\text{se} \quad \underbrace{\text{Felipe é motorista,}}_{r} \quad \text{então} \quad \underbrace{\text{Henrique é cobrador.}}_{s}$$

De forma simbólica:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}.$$

Também é possível trabalhar com a combinação entre várias proposições compostas.

Vejamos um exemplo de uso das sentenças apresentadas anteriormente.

Fernanda foi ao shopping e Marcos à oficina se, e somente se, Felipe é motorista, então Henrique é cobrador.

Aplicando a simbologia já utilizada, temos:

$$\underbrace{\text{Fernanda foi ao } \textit{shopping}}_{\mathbf{p}} \text{ e } \underbrace{\text{Marcos à oficina}}_{\mathbf{q}} \text{ se, e somente se, } \underbrace{\text{Felipe é motorista,}}_{\mathbf{r}} \text{ então } \underbrace{\text{Henrique é cobrador.}}_{\mathbf{s}}$$

De acordo com a simplificação já verificada, temos:

$$\underbrace{(p \wedge q)}_{W} \leftrightarrow \underbrace{(r \rightarrow s)}_{T}.$$

Em lógica é sempre vantajoso trabalhar com as proposições e suas combinações. Devemos utilizar a linguagem simbólica para que fique mais fácil o estudo das validades dessas proposições.

Faça você mesmo

3. Leia todas as proposições compostas a seguir e represente-as na forma simbólica.

a) Adriana está feliz ou Ricardo é cozinheiro.

b) Faz calor em Diadema e o trânsito está intenso.

c) O cachorro late se, e somente se, o carteiro entrega a correspondência.

d) Maria não é farmacêutica.

Pesquise mais!

Leia um pouco mais sobre lógica em:

<http://www.uff.br/grupodelogica/textos/cblm.pdf>. Acesso em: 06 jan. 2016.

Sem medo de errar!

Ao iniciar os seus estudos sobre lógica e proposições, Emanuel se questionou se seria possível e como seriam as interações entre as proposições. Também se questionou sobre a existência de vários tipos de proposições e quais seriam as suas diferenças.

Durante a sua pesquisa, Emanuel se deparou com informações do tipo:

I – "As mulheres compraram produtos de beleza e os homens produtos esportivos ."

II – "Se o cliente gastou mais de R$ 150,00, então teve desconto de 2%."

É possível aplicar nessas informações os conceitos de proposições e, consequentemente, as suas relações?

Vamos agora analisar cada uma das informações obtidas por Emanuel em sua pesquisa.

Primeiramente, observe a seguinte frase:

> "As mulheres compraram produtos de beleza e os homens compraram produtos esportivos."

Analisando essa frase, é possível verificar que ela é uma proposição composta por duas proposições:

p: As mulheres compraram produtos de beleza.

q: Os homens compraram produtos esportivos.

A representação simbólica fica: $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$.

Já a segunda informação obtida por Emanuel foi:

> "Se o cliente gastou mais de R$ 150,00, então teve desconto de 2%."

Essa frase também é uma proposição composta por duas outras, relacionadas com o conectivo **se ..., então**. As proposições são:

r: O cliente gastou mais de R$ 150,00.

s: Teve desconto de 2%.

Na forma simbólica, a proposição composta anteriormente fica: $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}$.

Assim, as duas informações que Emanuel tinha obtido estão escritas em proposições e também na forma simbólica.

Avançando na prática

Pratique mais!
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

Concurso	
1. Competências de fundamentos de área	Conhecer métodos e técnicas de operações matemáticas, para desenvolver raciocínio lógico, crítico e analítico de apoio à tomada de decisão.
2. Objetivos de aprendizagem	Utilizar proposições simples e compostas e seus conectivos.
3. Conteúdos relacionados	Proposições simples e compostas; conectivos.
4. Descrição da SP	Durante a realização de uma prova para concurso, Lilian se deparou com a seguinte questão: Leia a frase a seguir: “Se Antônio é mecânico então Cecília é dona de casa, ou Felipe joga bola.” A forma simbólica, com “**p**: Antônio é mecânico”, “**q**: Cecília é dona de casa” e “**r:** Felipe joga bola”, da frase acima é: a) $(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \wedge \mathbf{r}$ b) $(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r}$ c) $(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \vee \mathbf{r}$ d) $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge \mathbf{r}$ e) $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r}$

5. Resolução da SP	Considerando a representação proposta: **p**: Antônio é mecânico. **q**: Cecília é dona de casa. **r**: Felipe joga bola. A proposição "Se Antônio é mecânico, então Cecília é dona de casa" é escrita como $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$. Agora, a combinação de $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ com a frase "Felipe joga bola" fica $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ ou "Felipe joga bola", que na forma simbólica é $(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \vee r$. Então, a alternativa correta é a letra **c**.

Faça valer a pena!

1. Leia as seguintes frases:

I – Em março faz sol.

II – A bola pula e o peão gira.

III – Se a chuva cai, então está ventando.

IV – Mônica é viúva.

A(s) proposição(ões) composta(s) é(são):

a) I.

b) I e II.

c) II e III.

d) III e IV.

e) I, II, III e IV.

2. Considere as seguintes proposições:

p: Luan é bagunceiro.

q: Cristina joga bola.

r: Está calor.

Considere a frase "Luan é bagunceiro e Cristina joga bola se, e somente se, está calor". A representação simbólica respectiva é:

a) $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \leftrightarrow r$

b) $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \leftrightarrow r$

c) $(\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}) \wedge r$

d) $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \vee r$

e) $(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \leftrightarrow r$

3. Observe as proposições a seguir.

I – Daniel é professor e Isis é psicóloga.

II – O tigre corre se, e somente se, está caçando.

III – Diego gosta de matemática ou Michael anda de carro.

IV – Se Celina é avó, então Aline é sua neta.

A(s) frase(s) que utiliza(m) o conectivo condicional é(são):

a) I e II.

b) III.

c) III e IV.

d) I.

e) IV.

Seção 2.3

Equivalências, contradições e tautologias

Diálogo aberto

Em seu estudo, Emanuel se deparou com informações sobre as quais não tinha certeza de sua veracidade, então imaginou se poderia ter alguma conclusão sobre as suas afirmações considerando a possibilidade de elas serem verdadeiras ou falsas.

Ele resolveu estudar os valores lógicos nas seguintes informações que obteve:

I – "As mulheres compraram produtos de beleza e os homens produtos esportivos."

II – "Se as mulheres compraram produtos de beleza então tiveram um desconto de 2%."

A questão que Emanuel levantou foi o seguinte:

"Quando posso ter certeza de que seja verdade se ocorrerem a primeira e a segunda afirmação? Ou seja, existe a necessidade de ocorrerem as duas afirmações?"

Para ajudá-lo a esclarecer a sua dúvida, vamos iniciar os estudos desta seção.

Não pode faltar!

Como vimos anteriormente, as proposições podem assumir somente dois valores, verdadeiro (V) ou falso (F), e nunca os dois valores ao mesmo tempo. Mesmo nas proposições compostas, cada uma de suas partes pode admitir somente esses dois valores lógicos. Vejamos um exemplo de proposição para melhor compreender.

Roberto dá aulas e Viviane é psicóloga.

Utilizando a linguagem simbólica, temos:

$$\underbrace{\text{Roberto dá aulas}}_{\mathbf{p}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\text{Viviane é psicóloga.}}_{\mathbf{q}}$$

A proposição composta é constituída por duas proposições simples que são representadas pelas letras **p** e **q**. Cada proposição pode assumir somente um dos dois valores lógicos. Ou seja, as afirmações "Roberto dá aulas" e também "Viviane é psicóloga" podem ser consideradas verdadeiras ou falsas. Na Tabela 2.1, estão dispostos cada um dos valores possíveis que cada proposição pode assumir:

Tabela – 2.1

p
V
F

q
V
F

Considerando os valores lógicos anteriores, temos somente as seguintes possibilidades:

- **p** e **q** podem ser ambas verdadeiras (V);
- **p** pode ser verdadeira (V) e **q** falsa (F);
- **p** pode ser falsa (F) e **q** verdadeira (V);
- **p** e **q** podem ser ambas falsas (F).

Todas as combinações possíveis de associação de valores lógicos das proposições **p** e **q** estão dispostas na Tabela 2.2:

Tabela – 2.2

p	**q**
V	V
V	F
F	V
F	F

Trabalhando agora com três proposições, **p**, **q** e **r**, temos os seguintes valores lógicos possíveis para cada proposição:

Tabela – 2.3

p	**q**	**r**
V	V	V
F	F	F

E todas as combinações possíveis entre as três proposições estão dispostas na Tabela 2.4:

Tabela – 2.4

p	**q**	**r**
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

A tabela em que são expostas todas as combinações possíveis de valores lógicos de proposições é denominada **tabela-verdade**.

Assimile

Proposição: expressões que exprimem ideias; são representadas por letras minúsculas.

Valor lógico da proposição: é o valor que uma proposição pode assumir,

podendo ser **verdadeiro** (V) ou **falso** (F).

De modo geral, a quantidade de linhas necessárias para combinar os valores lógicos das proposições pode ser calculada através da fórmula 2^n , onde n representa a quantidade de proposições, vejamos alguns exemplos.

Para:

- **uma** proposição, temos $n = 1$, então $2^1 = 2$, ou seja, **duas** linhas;
- **duas** proposições, temos $n = 2$, então $2^2 = 4$ ou seja, **quatro** linhas;
- **três** proposições, temos $n = 3$, então $2^3 = 8$, ou seja, **oito** linhas;

- **quatro** proposições, temos n = 4, então $2^4 = 16$, ou seja, **dezesseis** linhas.

Reflita

Como seria construir uma tabela-verdade e descrever todas as combinações quando se trabalha com um número de proposições simples maior que quatro? Seria viável construir essa tabela?

Faça você mesmo

1. Em cada caso a seguir, determine o número de linhas necessárias para se construir a tabela-verdade.

- Cinco proposições simples.
- Sete proposições simples.
- Nove proposições simples.

Agora, vamos estudar os resultados de alguns conectivos na **tabela-verdade**. É através dessa tabela que podemos mapear todos os resultados possíveis entre os valores lógicos das proposições aplicando os diferentes conectivos. Existem algumas tabelas-verdade básicas; essas tabelas mostram os resultados entre proposições e conectivos; vejamos a do conectivo **disjunção**:

Tabela – 2.5

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Observando a tabela, pode-se concluir que a disjunção de duas proposições é verdadeira quando uma das duas proposições em que se aplicou o conectivo disjunção é verdadeira, ou seja, basta que uma das proposições seja verdadeira para que tenhamos uma sentença verdadeira.

Vejamos a seguinte proposição:

Marcos é médico ou Renata é enfermeira.

Para que a frase acima seja verdadeira, basta que uma de suas proposições seja verdadeira. Caso Marcos seja médico, a frase é verdadeira. Se Renata for enfermeira, a frase também é verdadeira. A frase só será falsa se nem Marcos for médico, nem Renata for enfermeira.

Vejamos agora a tabela-verdade do conectivo **conjunção**:

Tabela – 2.6

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Aplicando o conectivo conjunção, devemos ter obrigatoriamente as duas proposições verdadeiras para que tenhamos uma sentença verdadeira. Veja o seguinte exemplo:

Marcos é médico ou Renata é enfermeira.

O cachorro late e Milton joga cartas.

Na frase anterior, é evidente que, para que toda a sentença seja verdadeira, as duas proposições que a compõem devem ser verdadeiras. Se ao menos uma for falsa, então toda a sentença é falsa.

Agora, aplicaremos a tabela-verdade para o conectivo **condicional**.

Tabela – 2.7

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

De acordo com a tabela-verdade da condicional, só teremos uma sentença falsa quando a segunda proposição da sentença for falsa. Vamos analisar o seguinte exemplo:

Se o meu celular está quebrado, então a loja devolve o meu dinheiro.

No conectivo condicional, só temos uma sentença falsa se a primeira proposição for verdadeira e a segunda for falsa. Logo, a sentença anterior será falsa somente se "meu celular está quebrado" for verdadeira e "a loja devolve o meu dinheiro" for falsa.

Reflita

Uma verdade implica em outra verdade; uma falsidade implica em uma verdade; e também uma falsidade implica em outra falsidade, mas jamais uma verdade implica em uma falsidade.

Por fim, temos a tabela-verdade do conectivo **bicondicional**.

Tabela – 2.8

p	**q**	**$p \leftrightarrow q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

De acordo com a tabela, só teremos uma sentença verdadeira se as proposições tiverem o mesmo valor lógico, ou seja, forem ambas verdadeiras ou ambas falsas. Vejamos o exemplo:

O time ganha o jogo se, e somente se, faz a quantidade necessária de pontos.

Aqui, podemos observar que "o time ganha se faz a quantidade necessária de pontos", o que é verdade. Reciprocamente, temos que "o time faz a quantidade necessária de pontos se ganha o jogo", o que também é verdade.

Quando trabalhamos com proposições compostas, é comum realizarmos a validação entre as suas proposições, mesmo que cada proposição seja composta por outras proposições combinadas por conectivos.

Os resultados das validações recebem nomes especiais; um deles é a **tautologia**. Nesse caso, a validação da proposição composta é sempre verdadeira. Outro resultado de uma validação é a **contradição**. Nesse caso, o resultado da validação é sempre falso. A última é a **contingência**, quando não fica definido se o resultado é uma tautologia ou contradição, e o seu resultado depende somente do valor lógico da proposição simples.

Exemplificando

Verifique a validação da seguinte proposição (**p**∨ **~p**) e determine se é uma tautologia, uma contradição ou uma contingência.

Resolução:

Para realizar a validação, vamos construir a tabela-verdade colocando os valores lógicos possíveis para cada proposição simples **p**:

Tabela – 2.9

p		**~p**	**p ∨ ~p**
V			
F			

Após ter colocado os valores lógico possíveis para a proposição **p**, aplicaremos a negação da proposição **p**. Dica: ao negar uma verdade, temos uma falsidade; ao negar uma falsidade, temos uma verdade.

Tabela – 2.10

p		**~p**	**p ∨ ~p**
V		F	
F		V	

Basta agora aplicar a regra da disjunção entre as proposições **p** e **~p**.

Tabela – 2.11

p		**~p**	**p ∨ ~p**
V		F	V
F		V	V

Como os valores lógicos da proposição (**p**∨ **~p**) foram somente verdadeiros (V), então essa proposição é uma tautologia.

Você pode interpretar a proposição **p**$\vee$ **~p** da seguinte forma: uma afirmação (**p**) é verdadeira ou sua negativa (**~p**) é verdadeira. Esse fato é sempre verdadeiro e intuitivo.

Faça você mesmo

2. Verifique a validação da proposição (**p**$\wedge$ **~p**) e determine se é uma tautologia, uma contradição ou uma contingência.

A tabela-verdade também é usada para verificar a validação de proposições compostas maiores ou compostas por outras proposições. Em proposições compostas que envolvam várias proposições simples e que também haja a utilização de vários conectivos, a tabela-verdade é um instrumento útil para se conhecer o valor lógico da proposição que se está estudando. Vejamos um exemplo da construção da tabela-verdade aplicada em uma proposição composta por duas proposições simples. Vamos analisar o comportamento dos valores lógicos da seguinte proposição **(p** $\vee$ **p)** $\rightarrow$**p** . Acompanhe a construção da tabela-verdade. Inicialmente, construímos a tabela-verdade com os valores lógicos das proposições **p** e **q**.

Tabela – 2.12

p	q		p $\vee$ q	(p $\vee$ q) $\rightarrow$ p
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Agora, aplicamos os valores lógicos na proposição **p** $\vee$ **q**.

Tabela – 2.13

p	q		p $\vee$ q	(p $\vee$ q) $\rightarrow$ p
V	V		V	
V	F		V	
F	V		V	
F	F		F	

Em seguida, aplicamos o condicional ($\rightarrow$) entre os valores lógicos das proposições (**p** $\vee$ **q**) e **p**. Dica: se achar mais fácil, você pode repetir a coluna da proposição p entre as colunas das proposições **p** $\vee$ **q** e (**p** $\vee$ **q**) $\rightarrow$**p** .

Tabela – 2.14

p	q		$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow p$
V	V		V	V
V	F		V	V
F	V		V	F
F	F		F	V

Como resultado, temos uma contingência, pois aparecem os valores verdadeiro e falso na coluna do proposição $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{p}$

Faça você mesmo

3. Verifique se a proposição $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \wedge \sim (\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$ é uma tautologia, uma contradição ou uma contingência.

Pesquise mais!

Para mais informações sobre a tabela-verdade e de como construí-la, veja o material indicado a seguir:

LIMA, Cleone Silva de. **Apostila de lógica**. Disponível em:

<https://docente.ifrn.edu.br/cleonelima/disciplinas/fundamentos-de-programacao- 2.8401.1m/fundamentos-de-logica-e-algoritmos-1.8401.1v/apostila-proposicoestabelas- verdade-conectivos -logicos>. Acesso em: 04 jan. 2016.

Proposições equivalentes

Agora que aprendemos a construir uma tabela-verdade e a verificar os resultados dos valores lógicos das proposições, podemos conhecer um pouco sobre as proposições equivalentes.

Assimile

Proposições equivalentes são aquelas que possuem os mesmos resultados lógicos quando construímos a tabela-verdade.

Vejamos um exemplo:

Vamos construir a tabela-verdade e comparar a coluna com os valores lógicos das seguintes proposições **p** e **~~p.**

Tabela – 2.15

p		**~p**	**~~p**
V		F	V
F		V	F

Observe agora os valores lógicos das colunas **p** e **~~p**; são os mesmos, e isso indica que as duas proposições são equivalentes. De forma simbólica, representamos a equivalência de p e ~~p da seguinte forma **p⇔~~p**. Assim, podemos concluir que a **dupla negação** é equivalente à **afirmação**. Vejamos o exemplo a seguir:

Considere a declaração "João vai à praia". A proposição fica:

p: João vai à praia.

A negação da proposição **p** é:

~p: João não vai à praia.

Se aplicarmos novamente a negação em **~p**, teremos **~~p**, o que equivale a **p**, ou ainda:

"Não é verdade que João não vai à praia".

Logo, "João vai à praia".

Com isso, **~~p** é equivalente a **p** e:

~~p: João vai à praia.

Atenção!

Não confunda o símbolo ⇔ com o símbolo ↔.

⇔ : é utilizado para indicar que duas proposições são equivalentes.

↔: é utilizado para indicar o conectivo bicondicional.

Faça você mesmo

4. Utilize a tabela-verdade e verifique que as proposições $\mathbf{p \rightarrow q}$ e $\mathbf{p \rightarrow q}$ $\mathbf{p \wedge q}$ são equivalentes. (**Regra da absorção**.)

Vejamos outro exemplo de equivalência. Essa regra afirma que $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$. Vamos construir a tabela-verdade.

Tabela – 2.16

p	q		$p \rightarrow q$	~p	$\sim p \vee q$
V	V		V	F	V
V	F		F	F	F
F	V		V	V	V
F	F		V	V	V

Como podemos verificar, as colunas das proposições comparadas são idênticas, logo, podemos afirmar realmente que $\mathbf{p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q}$. Vejamos um exemplo prático:

Considere a declaração:

"Se Maria anda de bicicleta, então ela faz atividade física".

Podemos fazer a seguinte representação:

p: Maria anda de bicicleta.

q: Faz atividade física.

Que na forma simbólica é:

$$\mathbf{p \rightarrow q}$$

Aplicando a equivalência $\mathbf{p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q}$, podemos reescrever da seguinte maneira:

$$\sim \mathbf{p \vee q}$$

Que na forma textual fica:

"Maria não anda de bicicleta ou faz atividade física".

No estudo das equivalências lógicas, deparamo-nos com uma quantidade grande destas e não cabe aqui realizar a demonstração de cada uma. Contudo, caso seja necessário em algum momento deste livro, a sua demonstração será realizada. A seguir, há uma lista com as equivalências mais importantes (uma possibilidade de exercício de revisão é tentar fazer a tabela verdade de cada uma das equivalências a seguir e obter a confirmação da equivalência em cada caso).

Tabela – 2.17

Equivalência notáveis	
Nome	Propriedade
Dupla negação (DN)	$p \Leftrightarrow \sim\sim p$
Comutativa (COM)	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
Absorção	$p \rightarrow q \Leftrightarrow p \rightarrow p \wedge q$
Associativa (ASS)	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
De Morgan (DM)	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
Reescrita da condicional (COND)	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$
Reescrita da bicondicional (BI)	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Sem medo de errar!

Emanuel quer resolver o seguinte problema:

Quando é possível ter certeza de ocorrer a verdade se ocorrerem obrigatoriamente as duas afirmações?

I – "As mulheres compraram produtos de beleza e os homens produtos esportivos ."

II – "Se as mulheres compraram produtos de beleza, então tiveram um desconto de 2%." Primeiramente, vamos representar com símbolos cada uma das proposições simples:

p: As mulheres compraram produtos de beleza.

q: Os homens compraram produtos esportivos.

r: Tiveram um desconto de 2%.

Em linguagem simbólica, as duas frases são representadas da seguinte maneira:

(**p** ∧ **q**) ∧ (**p** → **r**). Observe que entre as duas frases foi aplicado o conectivo conjunção, isso porque na dúvida de Emanuel é indicada a ocorrência dos dois fatos. Construindo a tabela-verdade, temos:

Tabela – 2.18

p	**q**	**r**		**p ∧ q**	**p → r**	**(p ∧ q) ∧ (p → r)**
V	V	V		V	V	V
V	V	F		V	F	F
V	F	V		F	V	F
V	F	F		F	F	F
F	V	V		F	V	F
F	V	F		F	V	F
F	F	V		F	V	F
F	F	F		F	V	F

Então, de acordo com o resultado da tabela-verdade, só podemos considerar como verdadeira se as três proposições (**p**, **q** e **r**) forem verdadeiras. Isso tem como consequência que a frase "as mulheres compraram produtos de beleza e os homens produtos esportivos, e, se as mulheres compraram produtos de beleza, então tiveram um desconto de 2%" só é verdadeira se cada uma das três proposições simples que a compõe for verdadeira.

Avançando na prática

Pratique mais!
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

Verdadeiro ou falso	
1. Competência de fundamentos de área.	Conhecer métodos e técnicas de operações matemáticas, para desenvolver o raciocínio lógico, crítico e analítico de apoio à tomada de decisão.
2. Objetivos de aprendizagem	Conhecer os resultados dos valores lógicos na combinação das proposições com os conectivos.
3. Conteúdos relacionados	Proposição, linguagem simbólica, valor lógico, tabela-verdade.
4. Descrição da situação-problema	Emanuel quer verificar agora quando podemos ter certeza que a proposição seja verdade aplicando, entre as duas afirmações, a disjunção ($\vee$). As afirmações são as seguintes: I. "As mulheres compraram produtos de beleza e os homens produtos esportivos." II. "Se as mulheres compraram produtos de beleza, então tiveram um desconto de 2%."
5. Resolução da situação-problema	Simbolicamente, as proposições simples ficam: **p**: As mulheres compraram produtos de beleza. **q**: Os homens compraram produtos esportivos. **r**: Tiveram um desconto de 2%. Logo, as duas frases em formato simbólico ficam: $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \vee (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{r})$ Construindo a tabela-verdade, teremos: Tabela – 2.19

p	q	r		$p \wedge q$	$p \rightarrow r$	$(p \wedge q) \vee (p \rightarrow r)$
V	V	V		V	V	V
V	V	F		V	F	V
V	F	V		F	V	V
V	F	F		F	F	F
F	V	V		F	V	V
F	V	F		F	V	V
F	F	V		F	V	V
F	F	F		F	V	F

	Então, de acordo com a tabela, a afirmação "as mulheres compraram produtos de beleza e os homens produtos esportivos, ou, se as mulheres compraram produtos de beleza, então tiveram um desconto de 2%" será uma verdade, exceto no caso em que o valor lógico da proposição **p** for verdadeiro, o da proposição **q** for falso e o da proposição **r** também for falso. Somente nesse caso a proposição $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \vee (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{r})$ será falsa.

Faça valer a pena!

1. Considere a seguinte proposição: "Osmar concerta carros e não concerta motos". O conectivo lógico usado é:

a) Bicondicional.

b) Conjunção.

c) Disjunção exclusiva.

d) Disjunção inclusiva.

e) Condicional.

2. Na construção da tabela-verdade, podemos determinar o número de linhas a partir da utilização da seguinte expressão 2^n , em que *n* é o número de proposições simples. Com base no texto, determine o número de linhas da tabela-verdade construída para validar a seguinte proposição

$(\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}) \vee \mathbf{r}$.

a) 4

b) 8

c) 16

d) 32

e) 64

3. A tabela-verdade permite verificar a validação das proposições compostas. Verificando os resultados dos valores lógicos da proposição **p** $\wedge$ **q**, através da construção de sua tabela-verdade, podemos afirmar que o resultado é:

a) F, F, F e F.

b) F, V, V e V.

c) V, V, F e F.

d) V, V, V e V.

e) V, F, F e F.

Seção 2.4

Argumentação

Diálogo aberto

Ao continuar com a sua pesquisa, Emanuel pensou se é possível chegar a algum tipo de conclusão a partir das informações que tinha e qual o procedimento para que a sua conclusão tenha certeza de verdade. Então, ele indagou se é possível obter alguma conclusão a partir das afirmações a seguir:

- Todos os clientes que compraram amaciante preferem o aroma de lavanda.
- Durval entrou na loja e comprou açúcar, algumas verduras e amaciante.

O que podemos concluir com a análise e combinação dessas duas premissas verdadeiras? Mais uma vez, vamos ajudar Emanuel a resolver o seu problema.

Não pode faltar!

No estudo da lógica, trabalhamos também com a ideia de argumentação. Basicamente, realizar uma argumentação consiste em utilizar-se de premissas para se chegar a uma conclusão através da utilização do raciocínio. Para que se construa uma conclusão que seja forte, rígida e que qualquer pessoa possa também atingir, faz-se necessária a aplicação de procedimento claro e seguro, passível de ser reproduzido.

Vamos agora estudar dois tipos de argumentação. É importante observar a diferença básica entre os dois modos de raciocínio.

Tipo I – raciocínio indutivo

Assimile

Em um **raciocínio indutivo**, parte-se de casos particulares para se chegar a uma conclusão de caráter geral.

Vejamos um exemplo:

- O papagaio é um pássaro e não tem dentes. (premissa)
- O bem-te-vi é um pássaro e não tem dentes. (premissa)
- O beija-flor é um pássaro e não tem dentes. (premissa)
- O pica-pau é um pássaro e não tem dentes. (premissa)
- Logo, os pássaros não têm dentes. (conclusão)

É fácil verificar que a conclusão genérica foi obtida através de premissas verdadeiras de casos particulares. Nesse caso, devemos enumerar uma quantidade suficiente de proposições particulares para construir uma conclusão de caráter geral.

Vejamos um caso em que o raciocínio indutivo tem uma conclusão fraca.

- Cintia é jovem e bateu o carro. (premissa)
- Marcos é jovem e bateu o carro. (premissa)
- Zélia é jovem e bateu o carro. (premissa)
- Tiago é jovem e bateu o carro. (premissa)
- Logo, todos os jovens batem o carro. (conclusão)

Do ponto de vista lógico, a conclusão está correta, mas sua afirmação é fraca, já que o problema está em considerar que todos os jovens batem o carro, o que é uma mentira.

Faça você mesmo

1. Considere as seguintes premissas:

- A madeira é um combustível e se incendeia.
- A gasolina é um combustível e se incendeia.
- O papel é um combustível e se incendeia.
- O gás de cozinha é um combustível e se incendeia.

Utilizando o **raciocínio indutivo**, podemos dizer que a conclusão é:

a) Todo papel se incendeia.

b) Todo combustível se incendeia.

c) Tudo que se incendeia é gás.

d) Tudo que se incendeia é gasolina.

e) Todo combustível é papel.

Tipo II – raciocínio dedutivo

Assimile

Em um **raciocínio dedutivo**, trabalha-se de forma diferente do raciocínio indutivo. Aqui, partirmos de afirmações gerais para chegar a uma particularidade.

Vejamos um exemplo:

- Todos os gatos miam. (premissa)
- Jack é um gato. (premissa)
- Logo, Jack mia. (conclusão)

Vemos que, a partir de uma característica geral e verdadeira, retiramos uma característica particular. Ou seja, de casos genéricos e verdadeiros concluímos fatos particulares e também verdadeiros. Vale ressaltar que, mesmo se utilizando desses tipos de argumentação, devemos estar atentos à qualidade das premissas que usamos, pois, se as proposições forem fracas, sua conclusão será falha.

Vejamos um caso em que o raciocínio dedutivo produz uma conclusão fraca.

- Todo leão é mamífero. (premissa)
- Thor é mamífero. (premissa)
- Logo, Thor é um leão. (conclusão)

O erro aqui se encontra na segunda premissa, já que se poderia concluir que Thor é um chimpanzé e ainda assim as duas premissas seriam verdadeiras. Nesse caso, o raciocínio correto seria:

- Todo leão é mamífero. (premissa)
- Thor é leão. (premissa)
- Logo, Thor é um mamífero. (conclusão)

Faça você mesmo

2. Leia as premissas a seguir:

- Todos os que visitam o zoológico gostam de animais.
- Celso visita o zoológico.

Utilizando o **raciocínio dedutivo**, podemos dizer que a conclusão é:

a) Os animais gostam do Celso.

b) Celso gosta do zoológico e dos animais.

c) Os animais gostam do zoológico.

d) Celso gosta de zoológicos.

e) Celso gosta de animais.

Ao contrário do raciocínio indutivo, o raciocínio dedutivo tem a vantagem de não necessitar do caráter probabilístico para que esteja correto (ou para chegar à conclusão). Isso acontece porque no raciocínio dedutivo partimos de fatos concretos verdadeiros gerais para concluir fatos verdadeiros particulares. Isso garante a validade das proposições.

Assimile

Raciocínio indutivo: utilizar fatos particulares para concluir um fato abrangente.

Raciocínio dedutivo: utilizar fatos abrangentes para concluir um fato particular.

Então, para que possamos construir deduções corretas, faz-se necessário o cumprimento das características a seguir:

I – As proposições utilizadas devem ser verdadeiras, devem dizer a verdade, ou seja, a proposição utilizada deve fazer sentido. Estar de acordo com a realidade. (Verdade)

II – O raciocínio aplicado às proposições deve ser correto, o arranjo que se faz com as proposições deve estar de acordo com a lógica formal. (Validade)

Sabendo das características citadas acima, podemos, então, dizer que ocorrem dois resultados de argumentação: consistente (válido) ou inconsistente (não válido). Uma argumentação consistente ou válida é aquela que utiliza proposições verdadeiras e aplica corretamente a lógica formal; já a argumentação inconsistente ou não válida é aquela que utiliza proposições falsas ou em que é aplicado o uso incorreto da lógica, ocorrendo **falácia** ou **sofisma**.

Em nosso estudo sobre as argumentações, vamos considerar somente proposições verdadeiras junto com uma aplicação válida da lógica formal.

Na lógica formal, trabalhamos basicamente com a forma dedutiva de raciocínio.

Vocabulário

Falácia: argumentação com falha involuntária da lógica.

Sofisma: argumentação com falha propositada da lógica.

Reflita

Pode existir algum caso em que uma pessoa deseje realizar um argumento com falha lógica (sofisma) com o intuito de obter alguma espécie de vantagem?

Faça você mesmo

3. Considere cada um dos raciocínios a seguir e determine quais são falácias.

I – Nenhum cavalo tem penas; Cris não tem penas; Logo, Cris é um cavalo.

II – Todo ser humano morrerá; João é um ser humano; Logo, João morrerá.

III – Nenhum aluno que estudou repetiu o ano; Marcos estudou; Logo, Marcos não repetiu o ano.

Podemos afirmar que é(são) dedução(ões) falaciosa(s) a(s) que consta(m) no(s) item(ns):

a) I

b) II

c) III

d) I e II

e) II e III

Sem medo de errar!

Como Emanuel procura ter 100% de certeza sobre a informação que pretende concluir, então devemos utilizar o raciocínio dedutivo. Seguindo esse procedimento, devemos analisar as duas premissas, que de acordo com o enunciado são:

- Todos os clientes que compraram amaciante preferem o aroma de lavanda.
- Durval entrou na loja e comprou açúcar, algumas verduras e amaciante.

Ao analisar as informações, é possível verificar que Durval é um cliente da loja, e entre os produtos que comprou está o amaciante. Como todos os clientes que compraram amaciante levaram o com aroma de lavanda, é certo afirmar que o aroma para o amaciante escolhido por Durval é de lavanda. Esse raciocínio pode ser escrito da seguinte forma:

- Todos os clientes que compraram amaciante preferem o aroma de lavanda. (premissa)
- Durval entrou na loja e comprou açúcar, algumas verduras e amaciante. (premissa)

√ Logo, Durval comprou amaciante com aroma de lavanda. (conclusão)

Avançando na prática

Pratique mais!
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

Aprovados ou não?	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer métodos e técnicas de operações matemáticas, para desenvolver o raciocínio lógico, crítico e analítico de apoio à tomada de decisão.
2. Objetivos de aprendizagem	Desenvolver o conhecimento e a capacidade de realizar conclusões partindo de algumas premissas.
3. Conteúdos relacionados	Proposições, premissas, raciocínio indutivo e raciocínio dedutivo.
4. Descrição da SP	Um professor precisa obter uma informação correta de seus alunos a partir de afirmações que obteve de sua turma. São elas: • Todos os alunos que atingiram uma média de 60 ou mais pontos passaram de ano. • Os alunos que tiveram média menor que 60 pontos não passaram de ano. • Apenas 30% dos alunos atingiram a média 60. O que pode ser concluído com essas afirmações?

5. Resolução da SP	Podemos aplicar nessas premissas o raciocínio dedutivo: como somente 30% dos alunos atingiram a média 60, pontuação mínima para passar de ano, podemos concluir que somente 30% dos alunos passaram de ano.

Faça valer a pena!

1. Realizar uma argumentação exige a utilização de afirmações verdadeiras em conjunto com a lógica formal; só assim a conclusão obtida pode ser considerada verdadeira.

As formas de raciocínio são:

a) Dedutiva e analógica.

b) Indutiva e dedutiva.

c) Indutiva e referencial.

d) Analógica e digital.

e) Dedutiva e referencial.

2. Observe as premissas a seguir:

- Todos os alunos praticam futebol.
- Marcos é um aluno.

Aplicando o raciocínio dedutivo, podemos concluir que:

a) Marcos pratica futebol.

b) Marcos estuda com os alunos.

c) Todos os alunos jogam bola com Marcos.

d) Todos os alunos conhecem Marcos.

e) Quem joga futebol é aluno.

3. Analise cada um dos raciocínios a seguir:

I – Todas as frutas são doces; manga é uma fruta; logo, manga é doce.

II – Todos os que nascem na Argentina são latino-americanos; Messi nasceu na Argentina. Logo, Messi é latino-americano.

III – Todos os homens têm dois olhos; Igor tem dois olhos; logo, Igor é homem.

Podemos dizer que são deduções falaciosas os itens:

a) I

b) II

c) II e III

d) I e II

e) I e III

Referências

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Iniciação à lógica matemática**. São Paulo: Nobel, 2002.

COPI, Irving Marmer. **Introdução à lógica**. 2. ed. São Paulo: Mestre Jou, 1978.

DAGHLIAN, Jacob. **Lógica e álgebra de Boole**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 1995.

GERÔNIMO, João Roberto; FRANCO, Valdeni Soliani. **Fundamentos de matemática**: uma introdução à lógica matemática, teoria dos conjuntos, relações e funções. 2. ed. Maringá: Eduem, 2008.

KELLER, Vicente; BASTOS, Cleverson Leite. **Aprendendo lógica**. 16. ed. Petrópolis: Vozes, 2007.

MORAIS, José Luiz de. **Matemática e lógica para concursos**. São Paulo: Saraiva, 2012.

DEDUÇÃO

Convite ao estudo

Regina é uma gerente geral de uma grande empresa e, por causa de sua função, ela sempre está envolvida em diversos assuntos da empresa. Entre os vários assuntos de que ela participa, podemos citar a resolução de conflitos, a tomada de decisões e as decisões relacionadas ao financeiro da empresa.

No exercício de sua profissão, Regina tem de trabalhar com diversas informações e, por isso, necessita realizar uma correta síntese e análise das informações que possui para que não cometa erros ou injustiças.

Por isso, Regina deve ser sempre racional ao tratar dos assuntos do seu dia a dia: suas decisões devem ser baseadas em fatos concretos e livres de deduções incorretas ou infundadas. Ela não pode realizar uma decisão incoerente, pois isso acarretará uma consequência muito ruim em todos os níveis na empresa em que trabalha.

Vamos ajudar Regina a introduzir e a aplicar algumas ideias da dedução lógica.

Seção 3.1

Regras de inferência

Diálogo aberto

Na linha de produção da empresa onde Regina trabalha, existe um programa de manutenção preventiva nos equipamentos e máquinas da empresa. Como ela é responsável pela autorização de troca e compras das máquinas, chegou até ela uma situação na qual ela deveria tomar uma decisão importante. As informações de que ela possui são:

• Se a máquina passou por uma manutenção preventiva, então ela funciona corretamente.

• Uma máquina não passou pela manutenção preventiva.

Um funcionário que trabalha com as máquinas afirmou, com base nessas duas informações, que "a máquina não funciona corretamente" e, por isso, deveria ser trocada.

Regina deve confiar no julgamento do funcionário? Ou deve fazer uma análise mais detalhada para descobrir o real motivo da máquina não estar funcionando corretamente?

Não pode faltar!

Quando realizamos o raciocínio dedutivo, utilizamos, basicamente, uma sequência finita de proposições para obter uma conclusão. A esse uso damos o nome de argumento. Sendo que as proposições utilizadas nas argumentações podem ser simples ou compostas.

Vocabulário

Proposição: Afirmação que possui um valor lógico (verdadeiro ou falso).

Premissa: Proposição utilizada em um argumento.

Conclusão: Fato obtido através de uma sequência de premissas.

Nos livros didáticos, indicamos as premissas ($P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots P_n$) e a conclusão ($Q$) de um argumento através da seguinte forma:

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots P_n \mapsto Q$$

As maneiras mais usuais de lermos essa expressão são:

I – $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots P_n$ acarretam Q.

II – Q se deduz de $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots P_n$.

Aqui, é importante tratarmos de um fator importante: a validade de um argumento. Para que um argumento seja válido, é necessário que as premissas tenham somente valores lógicos verdadeiros (ou que as consideremos assim).

De outra maneira, se utilizarmos somente premissas verdadeiras, terá a certeza de que a conclusão também será verdadeira.

Assimile

Vale lembrar que a lógica não se preocupa com a verdade ou falsidade das premissas, ela se preocupa somente a aplicação correta do raciocínio, ou seja, da validade dos argumentos. Assim, não importa o significado da proposição; o que importa é a relação lógica entre as proposições.

Para que um argumento seja válido, a condicional $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$ deve ser sempre uma tautologia. De outra maneira, para que um argumento seja válido, devemos utilizar uma sequência de premissas verdadeiras e entre essas premissas deve existir o conectivo condicional. Vejamos um exemplo.

Considere as seguintes premissas verdadeiras:

P1: Chove o dia inteiro.

P2: Marcos é barbeiro.

P3: O cachorro late.

P4: A criança brinca.

Q: Hoje é sábado.

Assim, o argumento $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \rightarrow Q$ fica: "Chove o dia inteiro e Marcos é barbeiro e o cachorro late e a criança brinca acarretam hoje é sábado."

Assimile

A argumentação $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots P_n \mapsto Q$ corresponde a condicional $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$.

Antes de começar a realizar raciocínio dedutivo mais complexo, devemos estudar as regras de inferências mais simples, pois essas regras associadas às regras de equivalências, estudadas em momentos anteriores são o que permite realizarmos as deduções lógicas.

Basicamente, podemos entender as regras de inferência como sendo deduções simples ou rápidas que podemos realizar com as proposições.

Reflita

Vale lembrar que, quando trabalhamos com deduções, estamos considerando somente o valor lógico verdadeiro das premissas, ou seja, estamos considerando somente as premissas verdadeiras.

Para que possamos dar continuidade ao nosso estudo, devemos aprender como verificar, com o auxílio da tabela-verdade se uma regra de inferência é válida. Como exemplo, vamos aprender a verificar a validade da seguinte regra: $p \mapsto p \vee q$.

Vamos iniciar construindo a tabela-verdade; assim segue:

Tabela 3.1

	p	q		$p \vee q$
→	V	V		V
→	V	F		V
	F	V		V
	F	F		F

Ao analisar a argumentação $p \mapsto p \vee q$, podemos facilmente verificar que "p" representa a premissas e "$p \vee q$" representa a conclusão. Assim, vamos levar em consideração somente as linhas da tabela-verdade, nas quais as premissas admitem valor lógico "verdade", que no nosso exemplo são as 1ª e 2ª linhas da tabela-verdade. É fácil de verificar que, quando a premissa é verdadeira, a conclusão também é sempre verdadeira. Dessa maneira podemos afirmar, nesse caso, com certeza, de que, sempre que a premissa for verdadeira, a conclusão será sempre verdadeira, ou seja, a argumentação é válida. Vejamos outro exemplo.

Assimile

Um argumento é válido se os valores lógicos das premissas e da conclusão são somente verdadeiros.

Vamos verificar a validade do seguinte argumento $p \to q, q \mapsto p$.

Realizando a tabela-verdade, temos:

Tabela 3.2

	p	q		$p \to q$
$\to$	V	V		V
	V	F		F
$\to$	F	V		V
	F	F		V

De acordo com o argumento, temos que as premissas são "$p \to q$" e "q" sendo a conclusão "p". Agora, devemos olhar somente as linhas que possuem para as premissas os valores lógicos "verdadeiros", ou seja, nas 1ª e 3ª linhas da tabela-verdade. Podemos ver que na 1ª linha o valor lógico de "p" é verdadeiro; já na 3ª linha, o valor lógico de "p" é "falso", ou seja, podemos concluir que não há garantias de que quando as premissas forem verdadeiras as conclusões serão verdadeiras também, já que, nesse caso, tivemos para a conclusão o valor lógico "verdadeiro" e "falso", logo, esse argumento é inválido.

Faça você mesmo

1. Considere o seguinte argumento: $p \to q, \sim p \mapsto \sim q$. Através da análise da tabela-verdade, verifique e diga se o argumento é válido ou inválido.

Exemplificando

Considere o seguinte argumento:

"Se o médico analisa o exame, então ele realiza o diagnóstico. Ele analisou o exame e conseguiu produzir um diagnóstico."

Analise esse argumento e verifique se ele é valido ou inválido.

Para iniciar: vamos transformar o argumento para a forma simbólica. Teremos:

p: Se o médico analisa o exame;

q: Ele realiza o diagnóstico.

Então, o argumento na forma simbólica fica:

$$p \rightarrow q, p \mapsto q$$

Fazendo a tabela-verdade das premissas, teremos:

Tabela 3.3

	p	q		$p \rightarrow q$
$\rightarrow$	V	V		V
	V	F		F
	F	V		V
	F	F		V

Como podemos ver, sempre que as premissas " $p \rightarrow q$ " e "p" possuem valores "verdadeiros", a conclusão "q" também tem valores "verdadeiros"; logo, o argumento é válido.

Faça você mesmo

2. Considere o seguinte argumento:

"Se Vandrea trabalha na clínica, então ela não fica em casa. Ela não foi trabalhar na clínica e, por isso, ficou em casa."

Analise este argumento e verifique se ele é valido ou inválido.

Ao estudar as regras de inferências, deparamo-nos com uma série de argumentos válidos fundamentais; na tabela a seguir, estão alguns mais usados. Todas essas regras podem ser demonstradas através do método da tabela-verdade.

Tabela 3.4

Regras de inferências	
Nome	Propriedade
Adição (AD)	$p \mapsto p \vee q$ ou $p \mapsto q \vee p$
Simplificação (SIMP)	$p \wedge q \mapsto p$ ou $p \wedge q \mapsto q$
Conjunção (CONJ)	$p, q \mapsto p \wedge q$ ou $p, q \mapsto q \wedge p$
Absorção (ABS)	$p \to q \mapsto p \to (p \wedge q)$

Sem medo de errar!

Regina precisa tomar uma decisão: confiar ou não no julgamento do funcionário sobre a compra de uma máquina nova. As informações que ela possui são:

• Se a máquina passou por uma manutenção preventiva, então ela funciona corretamente.

• A máquina não passou pela manutenção preventiva.

A partir das informações acima, um funcionário da empresa concluiu que "a máquina não funciona corretamente" e, por isso, deveria ser trocada.

Para resolver essa questão, Regina resolveu aplicar a dedução lógica. Primeiramente, transformamos as informações para a linguagem simbólica, assim temos:

• p: a máquina passou por uma manutenção preventiva.

• q: a máquina funciona corretamente.

Então, a argumentação fica: $p \to q, \sim p \mapsto \sim q$

Sendo " $p \to q$ " e " $\sim p$ " as premissas e " $\sim q$ " a conclusão.

Para verificar se essa argumentação é válida através da tabela-verdade, temos:

Tabela 3.5

	p	q		$p \rightarrow q$	~p	~q
	V	V		V	F	F
	V	F		F	F	V
→	F	V		V	V	V
→	F	F		V	V	F

As linhas nas quais as premissas possuem somente valores lógicos verdadeiros são a 3ª e a 4ª linhas. Quando analisamos os valores lógicos da conclusão "~q", temos na 3ª linha como resposta "verdadeiro"; já na 4ª linha, temos como resposta "falso"; logo esse argumento não garante que a conclusão seja sempre verdadeira quando consideramos as premissas verdadeiras, ou seja, este argumento é inválido.

Então, Regina não pode confiar na opinião do funcionário da empresa, já que a máquina pode não estar funcionando corretamente por vários motivos, como imperícia do usuário, por exemplo.

Avançando na prática

Pratique mais!
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e, depois, compare-as com as de seus colegas.

Tabela de verdade	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer métodos e técnicas de operações matemáticas para desenvolver raciocínio lógico, crítico e analítico de apoio à tomada de decisão.
2. Objetivos de aprendizagem	Utilizar os preceitos da lógica para realizar deduções.
3. Conteúdos relacionados	Forma simbólica, proposições, premissas conclusões, equivalências e inferências.
4. Descrição da SP	Em uma prova para concurso, Ricardo se deparou com a seguinte questão na prova: Considere a argumentação a seguir: • Se Ricardo está doente, então ele vai a um médico. • Se Ricardo vai a um médico, então ele toma remédio. Logo, Ricardo toma remédio. Verifique se a argumentação realizada é válida ou inválida, utilizando o procedimento da tabela-verdade.
5. Resolução da SP	Para iniciar a resolução, vamos transformar para a linguagem simbólica, assim teremos: p: Ricardo está doente.

q: Ele vai ao médico.
r: Ele toma remédio.
A argumentação é $p \rightarrow q, q \rightarrow r \mapsto p \rightarrow r$, sendo as premissas $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow r$ e a conclusão $p \rightarrow r$.
Verificando a validade através da tabela-verdade, temos:

Tabela 3.6

p	q	r		$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
V	V	V		V	V	V
V	V	F		V	F	F
V	F	V		F	V	V
V	F	F		F	V	F
F	V	V		V	V	V
F	V	F		V	F	V
F	F	V		V	V	V
F	F	F		V	V	V

Verificando somente nas linhas onde as proposições $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow r$ possuem valor lógico "verdade", podemos verificar que temos como resultado para a conclusão $p \rightarrow r$ também somente o valor lógico "verdade". Logo, a argumentação é válida.

Faça valer a pena!

1. Para realizar uma dedução lógica, devemos utilizar:

a) As regras de derivadas e as implicações.

b) As equivalências e as regras de inferências.

c) As regras de sinal e as equivalências.

d) As derivadas e as regras de inferências.

e) As regras de derivadas e as regras de inferências.

2. Considere a seguinte argumentação lógica:

"João é pescador e pinta quadros; portanto, João pinta quadros".

A representação simbólica dessa argumentação é:

a) $p \rightarrow q \mapsto q$

b) $p \vee q \mapsto q$

c) $p \mapsto q \wedge p$

d) $p \mapsto q$

e) $p \wedge q \mapsto q$

3. Analise as três regras de inferência a seguir:

I – $p \mapsto p \vee q$

II – $p \wedge q \mapsto p$

III – $p \rightarrow q \mapsto p \rightarrow (p \wedge q)$

Os nomes das regras de inferência são, respectivamente:

a) Adição, conjunção e simplificação.

b) Conjunção, simplificação e absorção.

c) Adição, simplificação e absorção.

d) Simplificação, absorção e adição.

e) Absorção, adição e simplificação.

Seção 3.2

Modus ponens e silogismo

Diálogo aberto

Regina recebeu uma informação do departamento de qualidade que afirma que um dos seus clientes não estava satisfeito com o produto recebido. O cliente questiona que as peças que recebeu não estão com o tratamento químico necessário contra ferrugem.

Ao verificar junto à produção, Regina recebeu a informação de que três máquinas – A, B e C – produziram essas peças, sendo que cada máquina produz a peça para um cliente específico. Ao entrar em contato com o coordenador da produção, Regina obteve as seguintes informações:

• A máquina A não produz a peça com proteção contra ferrugem.

• A máquina A produziu algumas peças do modelo que apresentou problema junto ao cliente.

Vamos ajudar Regina a identificar o problema ocorrido na linha de produção da empresa onde trabalha.

Não pode faltar!

Uma das regras de inferência de grande importância e aplicabilidade é o *modus ponens* (forma de provar através da afirmação). Basicamente, esse método de dedução funciona a partir de uma condicional entre duas proposições verdadeira; vejamos um exemplo a seguir.

Considere as premissas verdadeiras:

• Se Lorena trabalha, então ela tem dinheiro.

• Lorena trabalha.

Logo, Lorena tem dinheiro.

Em linguagem simbólica, fica:

$p \rightarrow q, p \mapsto q$

Vamos verificar a validade do *modus ponens* através da tabela-verdade.

Tabela 3.7

	p	q		$p \rightarrow q$
→	V	V		V
	V	F		F
	F	V		V
	F	F		V

Analisando as linhas nas quais somente temos as premissas verdadeiras “ $p \rightarrow q$ ” e “p”, obtemos para a conclusão “q” o valor lógico também verdadeiro. Assim, podemos confirmar a validade dessa inferência.

Exemplificando

Leia as seguintes premissas.

“Se Denise ficar noiva de Wesley, então ela vai se casar. Denise ficou noiva no dia de seu aniversário.”

Aplicando a regra de inferência *modus ponens*, o que podemos concluir dessas premissas?

Resposta:

Primeiramente, vamos transformar em linguagem simbólica as proposições.

p: Denise ficar noiva de Wesley;

q: Ela vai se casar;

Assim, aplicando o Modus Ponens, teremos:

$$p \rightarrow q, p \mapsto q$$

Denise ficar noiva de Wesley → Ela vai se casar, Denise ficar noiva de Wesley → Ela vai se casar.

Faça você mesmo

1. Leia as seguintes premissas.

"Se Cesar andar de bicicleta, então Marta ficará em casa. Cesar foi andar de bicicleta."

Aplicando a regra de inferência *modus ponens*, o que podemos concluir dessas premissas?

Quando estudamos a argumentação dedutiva, podemos classificar como a mais importante o "silogismo". O estudo do silogismo possui muitas variantes e combinações, por isso aqui será dado somente um enfoque introdutório sobre o assunto. A ocorrência do silogismo é muito frequente em concursos públicos e em provas em geral. Ele é composto por apenas três termos:

- 1º) Premissa maior.
- 2º) Premissa menor.
- 3º) Conclusão.

Para melhor entendermos, vamos ver o exemplo de argumentação a seguir:

- Toda criança brinca. (premissa maior)
- Otávio é criança. (premissa menor)

Logo, Otávio brinca. (conclusão)

Na composição das premissas e da conclusão do silogismo, podemos classificar alguns termos de acordo com sua extensão ou abrangência. No nosso exemplo anterior, podemos classificar como termo maior a palavra "brinca", já o termo médio é a palavra "criança" e o termo menor é "Otávio".

Exemplificando

Considere o seguinte silogismo.

• Todo homem é mortal.

• Luciano é homem.

Logo, Luciano é mortal.

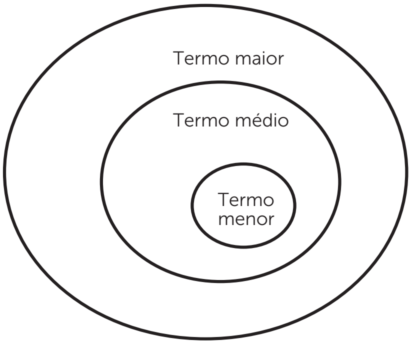
Analisando as premissas e a conclusão, determine o termo maior, médio e menor.

Resposta: o termo maior é "mortal", pois ser mortal cabe ao homem, aos animais e a todos os seres vivos. Já o termo médio é "homem", pois todo homem é um ser vivo, mas existem outros seres vivos que não são homens. E, por fim, o termo menor é "Luciano", pois ele pertence ao termo "homem".

Assimile

Podemos entender a hierarquia entre os termos maior, médio e menor, de acordo com a ilustração ao lado.

Figura 3.1



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os princípios na argumentação através do silogismo estão resumidos através de oito regras básicas de estrutura formal. A seguir, estão as oito regras, de acordo com Keller e Bastos (2007):

• Todo silogismo contém somente três termos: maior, médio e menor.

Vejamos um exemplo da violação dessa regra:

Meu gato mia.

Meu namorado é um gato.

Portanto, meu namorado mia.

Nesse exemplo, o termo "gato" da frase "Meu gato mia" refere-se a um animal; já o termo "gato" da frase "Meu namorado é um gato" quer dizer uma qualidade do termo "namorado". Ou seja, temos quatro termos: "gato", "mia", "namorado" e "gato".

• Nunca, na conclusão, os termos podem ter extensão maior do que nas premissas.

Vejamos um exemplo da violação dessa regra:

Toda mulher gosta de novela.

Nenhum homem é mulher.

Portanto, nenhum homem gosta de novela.

Na afirmação "Toda mulher gosta de novela", o termo "gosta de novela" é uma particularidade de "Toda mulher"; já na frase "Portanto, nenhum homem gosta de novela", o termo "gosta de novela" é utilizado de forma universal a "nenhum homem".

• O termo médio não pode entrar na conclusão.

Vejamos um exemplo da violação dessa regra:

Todo primata é animal.

Todo Homem é primata.

Logo, todo animal é primata.

É fácil verificar que esse silogismo está totalmente errado. O problema foi aparecer o termo médio "primata" na conclusão "Logo, todo animal é primata".

• O termo médio deve ser universal ao menos uma vez.

Vejamos um exemplo da violação desta regra:

Alguns mamíferos são violentos.

Alguns homens são mamíferos.

Logo, alguns homens são violentos.

Nesse caso, o termo médio "mamíferos" é tomado sempre como caso particular de "alguns mamíferos" ou de "alguns homens". Podemos verificar que nenhuma das premissas ou a conclusão estão erradas. O que acontece é que a conclusão é verdade e independe das premissas, ou, de outra forma, a conclusão não é uma consequência das premissas.

• De duas premissas negativas, nada se conclui.

Vejamos um exemplo da violação dessa regra:

Nenhum cachorro é macaco.

Nenhum pássaro é cachorro.

Portanto, nenhum pássaro é macaco.

Nesse exemplo, as premissas e a conclusão estão corretas, porém a conclusão não depende das premissas, portanto esse silogismo está errado.

• De duas premissas afirmativas não pode haver conclusão negativa.

Vejamos um exemplo da violação dessa regra:

Todos os homens são mortais.

Sócrates é homem.

Portanto, Sócrates não é mortal.

É fácil verificar que a conclusão está totalmente inválida, pois em nenhuma das premissas há uma negação.

• A conclusão segue sempre a premissa mais fraca.

Vejamos um exemplo da violação dessa regra:

Todos os cachorros latem.

Alguns cachorros são violentos.

Portanto, todos que latem são violentos.

Aqui, a conclusão não pode ser "todos que latem são violentos", pois a premissa "Todos os cachorros latem" é mais forte do que a premissa "Alguns cachorros são violentos"; logo, a conclusão deveria ser: "Portanto, alguns que latem são violentos".

• De duas premissas particulares, nada se conclui.

Vejamos um exemplo da violação dessa regra:

Algumas cobras são venenosas.

Alguns répteis são cobras.

Portanto, alguns répteis são venenosos.

Todos os termos desse silogismo são utilizados de forma particular, as premissas e a conclusão estão corretas, porém a conclusão não depende das premissas, portanto esse silogismo está errado.

Vale ressaltar que as quatros primeiras regras referem-se às relações entre os termos, e as quatro últimas referem-se à relação entre as premissas. Podemos considerar as mais importantes a 1ª, a 5ª e a 8ª.

Faça você mesmo

2. Analise a seguinte argumentação.

• Todo cavalo é quadrupede.

• O Pé de Pano é um cavalo.

Logo, cavalo é quadrupede.

Com base nas oito regras da estrutura formal do silogismo, podemos afirmar que essa argumentação está correta?

A aplicação dessas oito regras permite obter e verificar se uma argumentação é válida ou inválida. Até aqui, estudamos as características e as regras de regem o silogismo. A partir de agora, vamos conhecer, de forma introdutória, os tipos de silogismos.

O silogismo pode ser dividido em dois tipos:

• O silogismo categórico: são silogismos que têm como premissa proposições que são fáceis de definir se são verdadeiras ou falsas. Vejamos um exemplo:

Todos os homens são mamíferos;

Carlos é homem;

Logo, Carlos é mamífero.

• O silogismo hipotético: são silogismos que assumimos como hipótese verdadeira a premissa maior. Vejamos um exemplo:

Se João foi trabalhar, então Fernanda ficou em casa.

João foi trabalhar.

Logo, Fernanda ficou em casa.

Assimile

Em geral, no silogismo hipotético, costuma aparecer na premissa maior a condicional $(\rightarrow)$, a conjunção $(\wedge)$ ou a disjunção $(\vee)$.

Exemplificando

Leia a seguinte argumentação a seguir e determine qual é o tipo de silogismo aplicado na argumentação.

• Nenhum gato tem asa.

• Algum ser é gato.

Logo, Algum ser não tem asa.

Resposta: na premissa maior, é utilizada uma premissa que é possível verificar se o seu valor lógico é verdadeiro ou falso, então podemos afirmar que se trata de silogismo categórico.

Faça você mesmo

3. Leia a seguinte argumentação:

• Se o gato mia então o rato se esconde.

• O gato não mia.

Logo, o rato não se esconde.

Determine qual tipo de silogismo está sendo aplicado na argumentação.

Vejamos alguns exemplos de silogismos categóricos. É importante que você leia cada uma das argumentações, procurando identificar o termo maior, o termo médio e o termo menor, para que consiga compreender a sua função em cada um dos exemplos a seguir. Cada um dos exemplos tem uma pequena diferença na aplicação dos termos.

- Todo cão é quadrúpede.
- Tudo que late é cão.

Portanto, tudo que late é quadrúpede.

- Todo morango é vermelho.
- Alguma fruta não é vermelha.

Logo, alguma fruta não é morango.

- Nenhum cavalo voa.
- Algum ser é cavalo.

Logo, algum ser não voa.

- Todo cavalo tem crina.
- Algum cavalo é marrom.

Portanto, algum marrom tem crina.

- Nenhuma pedra e de plástico.
- Toda sacola é de plástico.

Portanto, nenhuma sacola é de pedra.

- Nenhum estudante é analfabeto.
- Algum estudante é esportista.

Logo, algum esportista não é analfabeto.

- Nenhum estudante é estrangeiro.
- Algum estrangeiro é pintor.

Portanto, algum pintor é não é estudante.

- Todo pássaro é bonito.
- Tudo que é bonito é agradável.

Portanto, algo que é agradável é um pássaro.

Vejamos alguns exemplos de silogismos hipotéticos. Tenha em mente, ao analisar cada exemplo a seguir, os resultados dos valores lógicos dos conectivos aplicados em cada premissa maior de cada argumentação.

- Se Antônio é estudante, então Isabela é dona de casa.
- Antônio é estudante.

Logo, Maria é dona de casa.

- Se o carro anda, então consome combustível.
- O carro não consome combustível.

Portanto, o carro não anda.

• Se chover, então levo o guarda-chuva.

• Não vai chover.

Logo, posso levar ou não levar o guarda-chuva.

• Vagner não consegue ler e dirigir ao mesmo tempo.

• Vagner está lendo.

Portanto, Vagner não está dirigindo.

Pesquise mais!

Para mais informações, pesquise no livro e no vídeo indicados a seguir, pois eles são bastantes instrutivos e vão colaborar para a sua compreensão.

MORAIS, José Luiz de. **Matemática e lógica para concursos**. São Paulo: Saraiva, 2012.

BARROSO, Cristiano de Paiva. **Regras do Silogismo**. 2014. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=6SPw3j2b6mg>. Acesso em: 09 jan. 2016.

Sem medo de errar!

Primeiramente, vamos analisar as informações obtidas pela Regina:

• A máquina A não produz a peça com proteção contra ferrugem.

• A máquina A produziu algumas peças do modelo que apresentou problema junto ao cliente.

Para aplicar o silogismo, vamos, primeiramente, modificar a forma com que estas informações foram passadas, mas sem alterar o seu significado. Assim, essas informações podem ser reescritas da seguinte forma:

• Nenhuma peça produzida pela máquina A recebeu proteção contra ferrugem.

• Algumas peças do modelo que apresentou o problema foram produzidas na máquina A.

Aplicando o silogismo, podemos concluir que: "Algumas peças não receberam proteção contra ferrugem".

Analisando a argumentação, podemos verificar que ela não fere nenhuma das oito regras básicas de estrutura formal. Assim, fica claro que o problema na linha de produção foi que peças produzidas pela máquina A foram entregues ao cliente errado.

Avançando na prática

Pratique mais!
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e, depois, compare-as com as de seus colegas.

Modus ponens	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer métodos e técnicas de operações matemáticas para desenvolver raciocínio lógico, crítico e analítico de apoio à tomada de decisão.
2. Objetivos de aprendizagem	Compreender o funcionamento da regra de inferência *modus ponens.*
3. Conteúdos relacionados	Proposição, premissas, forma simbólica, dedução.
4. Descrição da SP	Em um teste de seleção para uma vaga de emprego, Wanderlei se deparou com a seguinte questão de lógica: Considere a argumentação a seguir: • Se Maria for para casa, então o seu filho vai para a escola. • Maria foi para a sua casa. Qual é a conclusão que podemos determinar aplicando a regra de inferência *modus ponens*?
5. Resolução da SP	Transformando as premissas para a forma simbólica, temos: p: Maria for para casa; q: seu filho vai para a escola; Na forma simbólica, o *modus ponens* é: $p \rightarrow q,\ p \mapsto q$ Logo, a conclusão é: "O seu filho vai para a escola".

Faça valer a pena!

1. Os princípios na argumentação através do silogismo estão resumidos através de oito regras básicas de estrutura formal. Não é uma das regras do silogismo:

a) Todo silogismo contém somente três termos: maior, médio e menor.

b) Nunca, na conclusão, os termos podem ter extensão maior do que nas premissas.

c) De duas premissas negativas, nada se conclui.

d) Proposições são formadas pelas sentenças declarativas fechadas.

e) De duas premissas particulares, nada se conclui.

2. Considere as seguintes premissas:

• Se o carteiro entregar a carta, então o cachorro irá latir.

• O carteiro entregou a carta.

Aplicando regra de inferência *modus ponens*, podemos concluir:

a) O cachorro irá latir

b) O cachorro não irá latir.

c) O carteiro não entregará a carta.

d) O cachorro não incomodará o carteiro.

e) O carteiro entregará a carta ao cachorro.

3. O silogismo é uma forma de dedução muito importante e amplamente cobrada em provas e concursos. Os nomes das partes que compõem o silogismo são:

a) Premissa maior, premissa menor e tese.

b) Premissa maior, premissa menor e conclusão.

c) Premissa maior, hipótese e conclusão.

d) Premissa maior, hipótese e tese.

e) Hipótese, tese e conclusão.

Seção 3.3

Contrapositiva

Diálogo aberto

O departamento de compras enviou um documento para Regina com o intuito de que ela possa autorizar ou não a compra de uma determinada matéria-prima. O documento se tratava de um relatório no qual o departamento de compras recomendava que a compra desta determinada matéria-prima fosse muito bem avaliada, pois se tratava de um material de alto valor agregado e, por isso, o seu uso deveria ser certo, já que, por causa do valor da mercadoria, não poderia haver o risco de esse produto ficar parado no estoque.

Ao consultar o gerente de produção, Regina obteve as seguintes informações: "Se há a necessidade dessa determinada matéria-prima, então há algum pedido de peças para motores de caminhão". Ao verificar junto à produção, Regina constatou que não houve pedido para a produção de peças para os motores de caminhões.

Vamos ajudar Regina a decidir da maneira mais inteligente possível, para que não prejudique e empresa em que trabalha.

Não pode faltar!

Continuando os estudos sobre as demonstrações, vamos compreender agora uma das formas de demonstrações indiretas. Esse estilo de demonstração recebe esse nome, pois há uma alteração da forma original das premissas.

Já é de nosso conhecimento a seguinte regra de inferência, chamada *modus ponens*:

$$p \rightarrow q,\, p \mapsto q$$

Vejamos um exemplo para relembrar:

Considere as seguintes afirmações:

"Se Lorena faz bagunça, então sua mãe a coloca de castigo. Realmente Lorena fez bagunça."

Considere as premissas verdadeiras:

p: Se Lorena faz bagunça;

q: Sua mãe a coloca de castigo.

Aplicando o *modus ponens* teremos:

$$p \to q,\ p \mapsto q$$

$$\underbrace{\text{Se Lorena faz bagunça}}_{p} \to \underbrace{\text{Sua mãe a coloca de castigo}}_{q},\ \underbrace{\text{realmente Lorena faz bagunça}}_{p}$$

$$\mapsto \underbrace{\text{Sua mãe a coloca de castigo}}_{q}.$$

Nesse caso, as premissas são verdadeiras, então é possível realizar essa dedução. Agora, imagine que a premissa "$p \to q$" seja verdadeira, mas temos como garantir que a premissa "p" seja verdadeira também. Sem a garantia de que a premissa "p" seja verdadeira, não podemos realizar nenhuma inferência. Como podemos resolver essa situação?

Para resolver essa situação, vamos aprender métodos de dedução indireto, neste caso o seu nome é Modus tollens. Na forma simbólica, essa inferência é escrita assim:

$$\sim q \to \sim p,\ \sim q \mapsto \sim p$$

Ou seja, mostrar que:

Tabela 3.8

Modus ponens	Equivalente	*Modus tollens*
$p \to q,\ p \mapsto q$		$\sim q \to \sim p,\ \sim q \mapsto \sim p$

Para entendermos melhor, vamos observar a seguinte comparação.

Tabela 3.9

Modus ponens		*Modus tollens*
"Se a bolsa de valores tem uma alta, então Luan ganhará dinheiro. Realmente a bolsa de valores teve uma alta."	**Equivalente**	"Se Luan não ganhar dinheiro, então a bolsa não teve uma alta. Realmente, Luan não teve uma alta."
p: bolsa de valores tem uma alta; q: então Luan ganhará dinheiro. Concluímos que: Luan ganhou dinheiro		~q: Luan não ganhar dinheiro; ~p: bolsa não teve uma alta. Concluímos que: bolsa não teve uma alta.

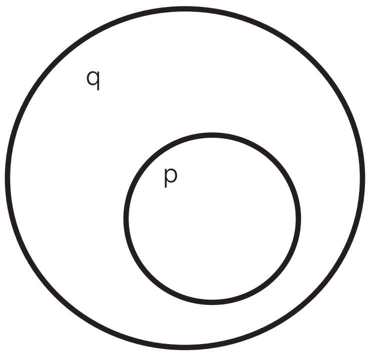
Nessa tabela, fica descrita com um exemplo a equivalência entre as duas formas textuais. De uma forma mais simples, podemos dizer que, se não é possível deduzir utilizando o *modus ponens*, por causa da não certeza da premissa "p", então podemos utilizar o método *modus tollens* por causa da certeza de "~q".

Assimile

Para melhor entender, vamos imaginar que a minha premissa verdadeira é um ponto, de acordo com a figura ao lado. Se esse ponto estiver em "p", automaticamente estará em "q", ou seja, " $p \to q$.

Agora, se esse mesmo ponto não estiver em q, imediatamente também não estará em "p", ou seja, " $\sim q \to \sim p$ ".

Figura 3.2



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplificando

Leia as seguintes proposições:

- Se Antônio treinar bastante, então ele se tornará um mestre.

• Ele não se tornou um mestre.

Com base nessas premissas, o que podemos concluir?

Resposta:

As proposições são:

p: Antônio treinar bastante;

q: ele se tornará um mestre.

Então, as premissas são:

$$p \to q, \sim q$$

Como temos a negação da segunda premissa, devemos aplicar aqui o *modus tollens*,

$\sim q \to \sim p, \sim q$, logo, as premissas ficam da seguinte maneira:

• Se ele não se tornar um mestre, então Antônio não treinou bastante.

• Ele não se tornou um mestre.

Assim, a conclusão é:

• "Antônio não treinou bastante."

Faça você mesmo

Observe as seguintes informações:

"Se Marlene investir na bolsa, então no final do ano ela comprará um carro. Mas no final do ano ela não comprou um carro."

O que podemos concluir dessas informações?

A equivalência entre o *modus ponens* e o *modus tollens* pode ser provada através da seguinte tabela-verdade.

Tabela 3.10

	p	q	$p \to q$	~q	~p	$\sim q \to \sim p$
	V	V	V	F	F	V
	V	F	F	V	F	F
	F	V	V	F	V	V
→	F	F	V	V	V	V

A equivalência pode ser verificada através da análise dos valores lógicos entre as colunas " $p \to q$ " e a coluna " $\sim q \to \sim p$ ". Essas duas colunas possuem os valores lógicos idênticos. Já a prova de que o *modus tollens* é válido verificando os valores lógicos das linhas (4ª linha) em que as premissas " $\sim q \to \sim p$ " e "~q" e a conclusão "~p" possuem valores lógicos verdadeiros.

Sem medo de errar!

Para iniciar a resolução do problema que Regina possui, vamos, primeiramente, voltar a ler as informações que ela possui: "Se há a necessidade dessa determinada matéria-prima, então há algum pedido de peças para motores de caminhão". Ao verificar junto à produção, Regina constatou que não houve pedido para a produção de peças para os motores de caminhões.

Podemos transformar essas informações em duas proposições.

• p: houver a necessidade da determinada matéria-prima;

• q: então há algum pedido de peças para motores de caminhões.

Agora que temos as proposições, podemos representar as premissas da seguinte maneira:

• Se "p" então "q"

• Não "q".

Na forma simbólica, fica:

• $p \to q$

• ~q

Como há a proposição "~q" na segunda premissa, então, para usar o *modus tollens*, devemos mudar a condicional " $p \to q$ " para outra equivalente " $\sim q \to \sim p$ ". Assim, as premissas ficam:

• $\sim q \to \sim p$

• ~q

Agora, basta utilizar a *modus tollens* e vamos concluir "~p". Ou seja, "não houve a necessidade da determinada matéria-prima".

Como não há a necessidade da matéria-prima, então Regina não precisa autorizar a compra, já que ela ficará parada no estoque da empresa em que trabalha.

Avançando na prática

Pratique mais!
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e, depois, compare-as com as de seus colegas.

Dosagem certa	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer métodos e técnicas de operações matemáticas, para desenvolver raciocínio lógico, crítico e analítico de apoio à tomada de decisão.
2. Objetivos de aprendizagem	Conhecer e aplicar a regra *modus tollens*, bem como também identificar suas partes, características e aplicações.
3. Conteúdos relacionados	Proposição, premissas, forma simbólica, dedução.
4. Descrição da SP	Em um hospital, Francisco precisa administrar uma dosagem de um remédio para inflamação em determinado paciente com um sintoma específico. As orientações que ele teve foram: • Se o paciente se queixar de dor, administrar cinco miligramas de remédio anti-inflamatório. • Não houve a necessidade de administrar os cinco miligramas de remédio anti-inflamatório. O que Francisco pode concluir sobre o paciente que estava sob o seu cuidado?
5. Resolução da SP	As premissas são: p: o paciente se queixar de dor; q: administrar cinco miligramas de remédio anti-inflamatório. Assim, as premissas ficam na forma simbólica: • $p \rightarrow q$ • $\sim q$ Como há a negação a proposição "q", na segunda premissa, então devemos modificar a primeira premissa, para uma outra equivalente, esta premissa é "$\sim q \rightarrow \sim p$". Então, as premissas ficam: • $\sim q \rightarrow \sim p$ • $\sim q$ Pelo *modus tollens* concluímos "$\sim p$", então, teremos como resposta: "O paciente não se queixou de dor".

Faça valer a pena!

1. Uma forma de dedução indireta é o *modus tollens*, a qual é usada, basicamente, quando há como verdade a negação da segunda proposição de uma condicional. A representação simbólica do *modus tollens* é:

a) $q \rightarrow p, \sim q \mapsto \sim p$

b) $\sim q \rightarrow \sim p, \sim q \mapsto \sim p$

c) $\sim q \rightarrow \sim p, \sim q \mapsto p$

d) $q \rightarrow p, q \mapsto p$

e) $p \rightarrow q, p \mapsto q$

2. Considere as seguintes proposições:

• Se não houver chuva, então não haverá como plantar.

• Realmente não houve chuva.

A partir dessas premissas e utilizando a regra de inferência *modus tollens*, podemos deduzir que:

a) Então não haverá como plantar.

b) Então haverá como plantar.

c) Então haverá chuva.

d) Então não haverá chuva.

e) Então não haverá chuva nem como plantar.

3. Os métodos dedutivos *modus ponens* e *modus tollens* possuem características distintas e, por isso, são usados em situações divergentes. Podemos classificá-los, respectivamente, em métodos dedutivos:

a) Objetivo e trocado.

b) Ponderado e indireto.

c) Direto e indireto.

d) Direto e contrário.

e) Ponderado e trocado.

Seção 3.4

Redução ao absurdo

Diálogo aberto

Em um dia de muito movimento na linha de produção da empresa onde Regina trabalha, uma urgência surgiu e, por isso, o gerente de produção recorreu à ajuda de Regina para solucionar um problema. Produtos estão saindo com problema das máquinas e o gerente não sabe dizer o motivo, pois são vários os motivos envolvidos nesta ocorrência. As informações que o gerente possui são:

- Se a matéria-prima é de qualidade, então o produto final tem qualidade.
- O funcionário cometeu um erro, ou o produto final não tem qualidade.
- O funcionário não cometeu um erro.

O gerente da produção afirma que, baseado nesses fatos, a causa dos problemas é que a matéria-prima utilizada na produção não é boa.

Regina pode confiar no julgamento do gerente baseando-se nos fatos apresentados?

Não pode faltar!

Vamos estudar, agora, uma forma de demonstração muito utilizada na matemática, que é a demonstração por redução ao absurdo. Mas, antes de iniciarmos nossos estudos, é interessante realizarmos rapidamente uma revisão sobre regras de inferências. Como já foi dito anteriormente, essas regras são argumentos válidos fundamentais, ou seja, sua aplicação é imediata e sua validade pode ser verificada através da construção da tabela-verdade. A tabela a seguir mostra as principais regras de inferência identificando seu nome, sua sigla e sua representação em linguagem simbólica.

Tabela 3.11

Regras de inferências	
Nome	Propriedade
Adição (AD)	$p \mapsto p \vee q$ ou $p \mapsto q \vee p$
Simplificação (SIMP)	$p \wedge q \mapsto p$ ou $p \wedge q \mapsto q$
Conjunção (CONJ)	$p, q \mapsto p \wedge q$ ou $p, q \mapsto q \wedge p$
Absorção (ABS)	$p \to q \mapsto p \to (p \wedge q)$
Silogismo disjuntivo (SD)	$p \vee q, \sim p \mapsto q$
Modus Ponens (MP)	$p \to q, p \mapsto q$
Modus Tollens (MT)	$\sim q \to \sim p, \sim q \mapsto \sim p$

É muito importante o conhecimento e compreensão dessas regras, pois a utilização combinada delas é fundamental para desenvolvermos a demonstração por redução ao absurdo.

Você pode estar se perguntando: demonstrar através de um absurdo? Como isso pode chegar a um argumento válido?

Para responder a essas perguntas, vamos caracterizar como funciona a demonstração por redução ao absurdo. Bem, como foi visto anteriormente, para se realizar uma demonstração, basta analisar uma sequência de fatos verdadeiros e, assim, obter uma conclusão verdadeira, que na forma simbólica fica:

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots P_n \mapsto Q$$

Onde, $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots P_n$ são as premissas e Q é a conclusão.

Existem casos que nem sempre é possível chegar a uma conclusão verdadeira partindo de premissas também verdadeiras, ou seja, pode acontecer de, através de premissas verdadeiras, não se conseguir deduzir uma conclusão também verdadeira. Como é possível resolver essa situação? Uma alternativa é a redução ao absurdo e funciona da seguinte maneira: basta considerar também como uma premissa verdadeira a negação do que se quer demostrar e, a partir da combinação dessas premissas, chegar a um absurdo, ou em linguagem simbólica.

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots P_n, \sim Q \mapsto C$$

Onde, agora, $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots P_n, \sim Q$ são as premissas válidas e C é uma conclusão absurda. Onde, normalmente, essa conclusão C é uma conclusão do tipo $Q \wedge \sim Q$. Mas o que há de absurdo nisso? A expressão $Q \wedge \sim Q$ indica que as premissas Q e ~Q são verdadeiras ao mesmo tempo, mas essa afirmação viola uma das leis já estudadas por nós. Para você recordar, essas leis são:

1. Princípio do terceiro excluído: toda afirmação ou preposição deve ser exclusivamente verdadeira ou exclusivamente falsa, nunca as duas possibilidades ao mesmo tempo.

2. Princípio da não contradição: nenhuma proposição não pode ser verdade e mentira ao mesmo tempo.

3. Princípio da identidade: toda proposição é idêntica a ela mesma.

A afirmação $Q \wedge \sim Q$ viola o princípio da não contradição, já que se está afirmando que a preposição Q é verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Vejamos um exemplo:

Considere a seguinte preposição:

Q: Junior está com calor;

~Q: Junior não está com calor.

É fácil verificar que uma é a negação da outra, se admitirmos que as duas sejam verdadeiras, ou seja, $Q \wedge \sim Q$, isso seria um absurdo, já que não é possível que Junior esteja com calor e não esteja com calor ao mesmo tempo.

Veja um exemplo de dedução por redução ao absurdo:

Considere as duas proposições:

- $\underbrace{\text{João é pescador}}_{p}\ \underbrace{\text{ou}}_{\vee}\ \underbrace{\text{Maria é merendeira}}_{q}$;

- $\underbrace{\text{João não é pescador}}_{\sim p}$.

Queremos provar: "Maria é merendeira".

Em linguagem simbólica, seria $p \vee q, \sim p \mapsto q$.

Como foi visto, vamos admitir, também como premissa verdadeira, a negação do que queremos provar, ou seja, "Maria não é merendeira", que em linguagem simbólica é $p \vee q, \sim p, \sim q \mapsto c$. Assim, teremos:

Tabela 3.12

1. João é pescador ou Maria é merendeira. 2. João não é pescador. 3. Maria não é merendeira.	1. $p \vee q$ 2. $\sim p$ 3. $\sim q$
4. Maria é merendeira. (Silogismo disjuntivo de 1 e 2)	4. q (1 e 2-SD)
5. Maria é merendeira e Maria não é merendeira. (Conjunção de 3 e 4) Absurdo.	5. $q \wedge \sim q$ (3 e 4-CONJ) Absurdo

Como chegamos a um absurdo do tipo $(q \wedge \sim q)$, já que não é possível que "Maria é merendeira e Maria não é merendeira", então podemos concluir que a proposição que queríamos demonstrar "q" é verdadeira, ou seja, realmente "Maria é merendeira".

Assimile

Vale a pena observar a utilização das regras de inferências entre as proposições estabelecidas. Assim, a combinação entre as proposições e as regras de inferência é que permitem o surgimento da conclusão absurda.

Exemplificando

Demonstre por redução ao absurdo a seguinte argumentação:

"Se Telma trabalha, então ela recebe salário. Telma trabalha. Logo ela recebe salário".

Resposta: a argumentação é:

$$\text{Se } \underbrace{\text{Telma trabalha}}_{\text{p}},\ \underbrace{\text{então}}_{\to}\ \underbrace{\text{ela recebe salário}}_{\text{q}}.\ \underbrace{\text{Telma trabalha}}_{\text{p}}.$$

$$\underbrace{\text{Logo}}_{\mapsto}\ \underbrace{\text{ela recebe salário}}_{q}.$$

Em linguagem simbólica, fica:

$p \to q,\ p \mapsto q$.

Para demonstrar através da redução ao absurdo, devemos considerar como premissa verdadeira a negação do que queremos demostrar, ou seja, $p \to q,\ p, \sim q \mapsto c$; assim temos:

1. $p \to q$ premissa

2. p premissa

3. ~q premissa adicional

4. q 1,2 modus ponens

5. $q \wedge \sim q$ 3,4 conjunção (absurdo.)

Aqui, há a violação do princípio da violação, pois não é possível que "ela receba salário e não receba salário ao mesmo tempo".

Como já foi dito em momentos anteriores, no estudo da lógica não nos importa qual o significado ou o que representa cada premissa; a nós importa somente analisar as relações entre as premissas. Assim, basta trabalharmos somente com a representação simbólica da argumentação. Vejamos outro exemplo:

Exemplificando

Considere a seguinte argumentação: $p \to \sim q, r \to q \mapsto \sim (p \wedge r)$

Realize a demonstração através da redução ao absurdo.

A expressão $\sim (p \wedge r)$ significa que "negar p e q".

1. $p \to \sim q$ premissa

2. $r \to q$ premissa

3. $p \wedge r$ premissa adicional

4. p 3 – simpl

5. r 3 – simpl

6. ~q 1,4 – MP

7. q 2,5 – MP

8. $q \wedge \sim q$ 6,7- conj (absurdo)

Aqui, há a violação do princípio da violação, pois não é possível "q" e não "q" ao mesmo tempo.

Faça você mesmo

Considere a seguinte argumentação:

$$p \to (q \vee r), \sim r, p \mapsto q$$

Utilize a redução ao absurdo para demostrar essa argumentação.

Sem medo de errar!

Para solucionar o problema, inicialmente, vamos reler as informações que chegaram para Regina:

- Se a matéria-prima é de qualidade, então o produto final tem qualidade.
- O funcionário cometeu um erro, ou o produto final não tem qualidade.
- O funcionário não cometeu um erro.

Baseado nessas informações, o gerente da produção afirma que a causa dos problemas é que a matéria-prima utilizada na produção não é boa.

Inicialmente, Regina transformou os fatos que ela recebeu de informação em proposições, assim ela construiu:

- p: A matéria-prima é de qualidade;
- q: O produto final tem qualidade;
- r: O funcionário cometeu um erro.

Agora, em linguagem simbólica, a argumentação que ela quer demonstrar é:

$$p \to q, r \vee \sim q, \sim r \mapsto \sim p$$

Como há dificuldades na realização da demonstração direta, Regina opta por utilizar o procedimento de demonstração por redução ao absurdo. Então, admitimos como premissa verdadeira a negação daquilo que queremos demonstrar. Assim, sua nova argumentação fica:

$$p \to q, r \vee \sim q, \sim r, p \mapsto c$$

Segue a demonstração:

1. $p \to q$ premissa

2. $r \vee \sim q$ premissa

3. $\sim r$ premissa

4. p premissa adicional

5. q 1,4 – MD

6. $\sim q$ 2,3 – SD

7. $q \wedge \sim q$ 5,6 – CONJ (absurdo)

Como obtemos um absurdo, podemos afirmar, então, que a conclusão "$\sim p$", ou seja, "A matéria-prima não é de qualidade". Logo, Regina pode confiar na conclusão do gerente.

Avançando na prática

Pratique mais!
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e, depois, compare-as com as de seus colegas.

Trabalho ou shopping	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer métodos e técnicas de operações matemáticas, para desenvolver raciocínio lógico, crítico e analítico de apoio à tomada de decisão.
2. Objetivos de aprendizagem	Conhecer o método de dedução redução ao absurdo, bem como suas características e funcionamento.
3. Conteúdos relacionados	Proposição, premissas, forma simbólica, dedução indireta.
4. Descrição da SP	Marta acha que sua filha de 21 anos está mentindo para ela e, para tirar esta dúvida, resolveu fazer algumas perguntas à sua filha e obteve as seguintes respostas: "Se fui à escola, então não estive no shopping. Se fui à academia, então estive no shopping. Logo, estive no trabalho e na academia". Marta desconfia de sua filha e acredita que a última afirmação de sua filha é enganosa, ou seja, a filha não esteve no trabalho e na academia. Marta está correta em duvidar de sua filha?
5. Resolução da SP	Marta resolveu dispor das afirmações de sua filha na forma de proposições; assim, temos: p: fui à escola; q: fui ao shopping; r: fui à academia. As premissas ficam:

	$p \to \sim q, r \to q$ e o que Marta quer concluir a partir das premissas é $\sim(p \wedge r)$; logo, a argumentação completa é: $p \to \sim q, r \to q \mapsto \sim(p \wedge r)$ Que para demonstrar através da redução ao absurdo fica: $p \to \sim q, r \to q, p \wedge r \mapsto c$ Então, a demonstração fica: 1. $p \to \sim q$ premissa 2. $r \to q$ premissa 3. $p \wedge r$ premissa adicional 4. p 3 – SIMP 5. r 3 – SIMP 6. ~q 1,4 – SD 7. q 2,4 _ SD 8. $q \wedge \sim q$ 6,7 – CONJ (absurdo) Como Marta obteve um absurdo, então ela pode concluir que $\sim(p \wedge r)$ é verdade, ou seja, sua filha não esteve no trabalho e na academia; logo, sua filha mentiu.

Faça valer a pena!

1. Uma alternativa à demonstração direta é a demonstração chamada de redução ao absurdo. O seu funcionamento consiste em:

a) Trocar algumas premissas verdadeiras por premissas falsas e, assim, chegar a um absurdo.

b) Considerar como falsas premissas verdadeiras e, assim, obter um absurdo com conclusão.

c) Admitir como absurdas todas as premissas existentes e, assim, chegar a uma contradição.

d) Considerar como premissa verdadeira a negação do que se quer provar e, assim, chegar a um absurdo.

e) Realizar uma demonstração direta e obter um absurdo como solução.

2. Uma demonstração por redução ao absurdo consiste em criar uma situação que produza um resultado que viola a seguinte lei da lógica:

a) Princípio da identidade.

b) Princípio da não contradição.

c) Princípio universal do direito.

d) Princípio da verdade.

e) Princípio do terceiro excluído.

3. Considere a seguinte argumentação: "Se ando de bicicleta, então faço exercícios físicos. Ando de bicicleta e faço caminhada. Logo, faço exercícios físicos".

Utilizando a redução por absurdo, a nova argumentação seria:

a) Se ando de bicicleta, então faço exercícios físicos. Ando de bicicleta e faço caminhada. Não faço exercícios físicos.

b) Se não ando de bicicleta, então faço exercícios físicos. Ando de bicicleta e faço caminhada. Não faço exercícios físicos.

c) Se não ando de bicicleta, então não faço exercícios físicos. Ando de bicicleta e faço caminhada. Não faço exercícios físicos.

d) Se ando de bicicleta, então faço exercícios físicos. Ando de bicicleta e faço caminhada. Faço exercícios físicos.

e) Se não ando de bicicleta, então não faço exercícios físicos. Não ando de bicicleta e não faço caminhada. Não faço exercícios físicos.

Referências

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Iniciação à lógica matemática**. São Paulo: Nobel, 2002.

COPI, Irving Marmer. **Introdução à lógica**. 2. ed. São Paulo: Mestre Jou, 1978.

DAGHLIAN, Jacob. **Lógica e álgebra de Boole**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 1995.

KELLER, Vicente; BASTOS, Cleverson Leite. **Aprendendo lógica**. 16. ed. Petrópolis: Vozes, 2007.

MORAIS, José Luiz de. **Matemática e lógica para concursos**. São Paulo: Saraiva, 2012.

CONJUNTOS

Convite ao estudo

Bem-vindo a mais uma unidade de ensino de raciocínio lógico matemático, unidade essa em que estudaremos um pouco sobre conjuntos e suas aplicações. Para que você compreenda o tema, considere a seguinte situação: encarregado do setor administrativo da empresa de seu pai, Adriano é responsável por decidir sobre assuntos diversos e, por causa de suas responsabilidades, tem acesso a uma quantidade grande de informações, que são originadas de vários departamentos, como o próprio administrativo, além do financeiro, do recursos humanos e da produção. Devido à abrangência de suas atribuições, Adriano frequentemente sente dificuldade em organizar, tratar e interpretar todos esses dados aos quais tem acesso, e isso o preocupa.

Imagine que a empresa de Adriano esteja estabelecida próximo ao local em que você mora e que tenha sido divulgado um edital de contratação de consultoria, ansiando pela solução de problemas relacionados à manipulação de dados através de programas específicos e utilização de planilhas eletrônicas, visando à solução de problemas ou à identificação de características em comum dos dados.

Considere que você pleiteou a vaga e que tenha sido selecionado para resolver os problemas que preocupam Adriano diariamente.

Nas próximas quatro seções, serão apresentados alguns problemas por Adriano e você terá de encontrar uma solução. Vamos lá?

Seção 4.1

O que são conjuntos?

Diálogo aberto

Ao final de cada bimestre, Adriano é responsável pela coleta, organização, interpretação e síntese de informações referentes à empresa de seu pai. Para isso, chega em sua sala dezenas de informações de todos os setores, as quais devem ser sintetizadas e apresentadas em uma reunião, na qual estarão presentes os sócios e os gerentes de cada seção. As informações que Adriano recebeu estão apresentadas na Tabela 4.1.

A partir desta tabela, Adriano precisa apresentar para os presentes na reunião a porcentagem de gasto com mão de obra por cargo e por departamento. Dessa necessidade, ele pediu a você que construa essa estatística. Vamos lá?

Tabela 4.1 | Distribuição de alguns funcionários

Cargo	Faixa salarial	Departamento
Chefe	3400	Produção
Auxiliar	2300	Pintura
Aprendiz	1500	Pintura
Auxiliar	2300	Produção
Chefe	3400	Pintura
Aprendiz	1500	Produção
Auxiliar	2300	Pintura

Fonte: Elaborada pelo autor.

Não pode faltar!

Vamos falar agora sobre conjuntos.

É complicado definir formalmente um conjunto, pois qualquer tentativa de defini--lo fatalmente acarretaria a utilização de sinônimos, como grupo ou reunião, sendo que esses termos acarretariam a utilização do termo conjunto em seus significados.

Por causa dessa complexidade, vamos admitir um conceito intuitivo de conjunto, esse conceito natural que todos possuem quando utilizamos a palavra conjunto. Logo, qualquer reunião de elementos que possui alguma característica em comum pode ser considerada um conjunto. Vejamos alguns exemplos:

- Conjunto de todos os alunos de uma sala.
- Conjunto de todas as casas de um quarteirão.
- Conjunto dos números pares.
- Conjunto de grupos de animais.
- Conjunto dos estados brasileiros.

Podemos observar nos exemplos que existem conjuntos finitos e conjuntos infinitos, que existem conjuntos de elementos e conjuntos de conjuntos.

Com base nesse conceito intuitivo, vamos estudar algumas definições relacionadas aos conjuntos. Essas definições são descritas por meio de axiomas.

Assimile

Axioma da extensão: dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuem os mesmos elementos.

Vocabulário

Conjunto: podemos entender intuitivamente como sendo uma coleção, um agrupamento, uma reunião ou um grupo de elementos que possui alguma característica em comum.

Axioma: afirmação admitida como verdadeira sem a necessidade de demonstração.

O axioma da extensão determina que, se dois conjuntos possuem os mesmos elementos, então esses dois conjuntos são iguais, não importando a ordem em que aparecem e o número de vezes. Vejamos um exemplo.

Observem os conjuntos A e B.

$$A = \{a, b, c, d, e\} \quad \text{e} \quad B = \{c, b, d, d, a, e\}$$

É fácil verificar que os dois conjuntos, A e B, possuem os mesmos elementos, porém o conjunto B possui duas vezes o elemento d e a ordem com que aparecem os seus elementos não é a alfabética. Mesmo assim, como eles possuem os elementos a, b, c, d, e, podemos considerá-los como sendo conjuntos iguais por causa do axioma da extensão.

Exemplificando

Determine quais pares de conjuntos a seguir podem ser considerados como conjuntos iguais.

a) A = {1, 2, 5, 7, 10} e B = {a, b, c, d, e}

b) A = {Conjunto de todos os seres humanos} e B = {Conjunto de todos os Homo sapiens}

c) A = {bola, gato, bicicleta, videogame} e B = {videogame, gato, bicicleta, bola, gato}

Resolução:

a) Os conjuntos são diferentes, pois não possuem os mesmos elementos. O conjunto A é formado por números e o B por letras.

b) *Homo sapiens* é o nome científico dado aos seres humanos. Logo, são os mesmos elementos, ou seja, os conjuntos A e B são iguais.

c) Os conjuntos A e B são iguais por tratarem dos mesmos elementos, não importando a ordem e nem a quantidade que apareçam.

Para representar conjuntos, utilizamos sempre letras maiúsculas e, para representar seus elementos, utilizamos sempre letras minúsculas.

Assimile

Axioma do vazio: existe um conjunto que é vazio.

Basicamente, esse axioma diz que há um conjunto que é vazio, ou seja, existe um conjunto que não possui elementos. Esse conjunto vazio é representado por ∅ ou por { }. Podemos afirmar que esse conjunto vazio existe e é único. Vejamos alguns exemplos:

A = {Conjunto dos números ímpares divisíveis por dois}

B = {Conjunto de todos os primatas que voam}

Podemos verificar que os dois conjuntos, A e B, são vazios, pois não existem elementos que satisfazem as características que definem o conjunto. Assim, podemos escrever que: $A = B = \varnothing$.

Assimile

Basicamente, há duas formas de descrever os elementos de um conjunto:

- A primeira consiste em elencar todos os elementos daquele conjunto, exemplo: A = {c, f, g, e, a}.

- A segunda utiliza uma regra que é comum somente aos elementos do conjunto que se quer formar, por exemplo: A = {Conjunto dos números naturais múltiplos de dois}, ou seja, A = {0, 2, 4, 6, 8, 10, ...}.

Frequentemente, quando se trabalha com conjuntos, é muito útil a ideia de **conjunto universo**. Esse conjunto é o "maior" de todos, aquele que contém todos os elementos de mesma característica daqueles que se está estudando. Esse conjunto é indicado pelo símbolo U e um exemplo é U = {Todas as letras do alfabeto}. É válido citar o **conjunto unitário** que é formado por apenas um elemento. Um exemplo desse tipo de conjunto é $A = \{x \mid x$ é um número primo e par}, ou seja, $A = \{2\}$.

Assimile

Conjunto universo: é o conjunto que contém todos os elementos.

Conjunto unitário: é todo conjunto que contém somente um elemento.

Conjunto vazio: é todo conjunto que não contém elementos.

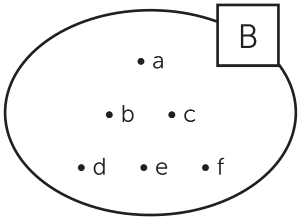
Em geral, quando tratamos de conjuntos, é comum descrevê-los por meio de regras de formação. Um exemplo disso é A = {múltiplos de 4 entre 1 e 25}, cujos elementos são 4, 8, 12, 16, 20, 24. Desse modo, A = {4, 8, 12, 16, 20, 24}.

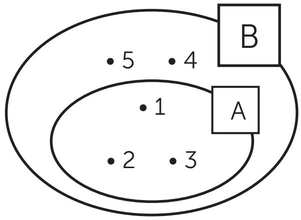
Agora, vamos estudar dois conceitos fundamentais sobre conjuntos, **pertinência** e **inclusão**. Dizemos que a pertence a B, simbolicamente $a \in B$, se a é um dos elementos de B. Além disso, $A \subset B$ (A está contido em B) se todos os elementos de A são também elementos de B.

A Figura 4.1 dá uma ideia sobre pertinência e inclusão.

Figura 4.1 | Pertinência e inclusão

Pertinência	Inclusão
Quando $a \in B$: nesse caso, a é considerado como elemento.	Quando $A \subset B$: nesse caso, A é considerado um conjunto.





Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 4.1, estão ilustrados dois **diagramas de Venn**. Visualmente, temos a diferença entre as ideias de pertinência e inclusão relacionadas a conjuntos.

Para representar a não pertinência de um elemento a um conjunto, utilizamos o símbolo $\notin$; já a não inclusão de um conjunto em outro é representada pelo símbolo $\not\subset$. Como exemplo, considere o conjunto:

- *A* = {conjunto das vogais}. Podemos escrever $7 \notin A$, pois 7 não é uma vogal.
- *B* = {conjunto das consoantes}. É fato que $A \not\subset B$, pois o conjunto das vogais não está contido no conjunto das consoantes.

Pode ser que você tenha a ideia de que os elementos de um conjunto só podem ser elementos mínimos, ou partes pequenas de um grupo estabelecido, como números ou letras, mas, na verdade, é possível criar **conjuntos de conjuntos**. Vejamos um exemplo a seguir:

Os conjuntos {1}, {1, 2} e {1, 2, 3} podem ser elementos do conjunto A = {{1}, {1, 2}, {1, 2, 3}}, ou, ainda, o conjunto A possui três elementos, que são {1}, {1, 2} e {1, 2, 3}. Vale observar que o elemento {1} pertence a A ($\{1\} \in A$); já o elemento 1 não pertence a A ($1 \notin A$), pois 1 e {1} são objetos matemáticos distintos.

Exemplificando

Leia as afirmações a seguir e determine se são verdadeiras ou falsas.

a) A = {conjunto dos mamíferos que voam} é um conjunto vazio.

b) Sejam os conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, tem-se $A \subset B$.

c) Podemos representar o conjunto vazio da seguinte forma {∅}.

d) Sendo A = {a, b} e B = {a, b, c}, tem-se $A \in B$.

Resolução

a) O conjunto A não é vazio, já que o morcego é um mamífero que voa.

b) Realmente, temos $A \subset B$, pois todos os elementos do conjunto A também são elementos de B.

c) O conjunto vazio só pode ser representado de duas formas, $\varnothing$ ou { }. O conjunto $\{\varnothing\}$ não é vazio, já que é composto por um único elemento, o $\varnothing$. Ou, de outra forma, é um conjunto formado apenas pelo conjunto vazio.

d) O conjunto {a, b} não pertence ao conjunto {a, b, c}, pois, para que o conjunto {a, b} pertencesse a outro, ele deveria ser um de seus elementos. Temos, por exemplo, $\{a,\ b\} \in \{a,\ b,\ c,\ \{a,\ b\}\}$. No caso de {a, b} e {a, b, c}, temos a inclusão $\{a,\ b\} \subset \{a,\ b,\ c\}$, pois os elementos de {a, b} também estão em {a, b, c}.

Faça você mesmo

Leia as afirmações a seguir e determine qual delas não é verdadeira.

a) O conjunto vazio pode ser representado por { } ou $\varnothing$.

b) Seja A = {x | x é múltiplo de 5}, então $\sqrt{5} \in$ A.

c) Se A = {x, v} e B = {d, x, m, {x, v}, a}, então A $\in$ B.

d) $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$.

e) Se A = {Animais com penas}, então podemos afirmar que $\text{peru} \in A$.

Pesquise mais!

No link a seguir, encontram-se mais detalhes e informações sobre teoria de conjuntos.

AGUIAR, Laura. **Introdução à teoria de conjuntos**. Disponível em: <http://www.ufjf.br/cursinho/files/2012/05/pag-01.121.pdf>. Acesso em: 02 mar. 2016.

Sem medo de errar!

Para ajudar na resolução do problema de Adriano, uma das possibilidades é registrar estas informações em uma planilha eletrônica, conforme Figura 4.2.

Figura 4.2 | Planilha geral

	A	B	C
1	Cargo	Faixa salarial	Departamento
2	Chefe	3400	Produção
3	Auxiliar	2300	Pintura
4	Aprendiz	1500	Pintura
5	Auxiliar	2300	Produção
6	Chefe	3400	Pintura
7	Aprendiz	1500	Produção
8	Auxiliar	2300	Pintura

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao somar todos os salários, obtém-se um total de R$ 16.700,000. Note que, ao considerarmos todos os dados, formamos o **conjunto universo**. Para calcular percentuais por cargo e departamento, precisamos determinar subconjuntos, no caso "chefe", "auxiliar", "aprendiz", "produção" e "pintura". Em uma planilha eletrônica, é possível fazer isso por meio de filtros. Fazendo essa filtragem, primeiramente, por cargo, teremos o exposto na Figura 4.3.

Figura 4.3 | Planilha geral, com filtros por cargo

(a)

	A	B	C
1	Cargo	Faixa salarial	Departamento
4	Aprendiz	1500	Pintura
7	Aprendiz	1500	Produção

(b)

	A	B	C
1	Cargo	Faixa salarial	Departamento
3	Auxiliar	2300	Pintura
5	Auxiliar	2300	Produção

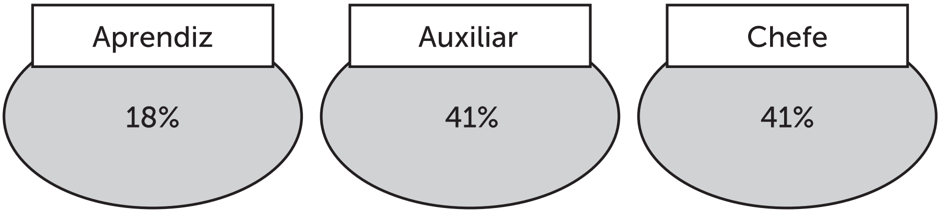
(c)

	A	B	C
1	Cargo	Faixa salarial	Departamento
2	Chefe	3400	Produção
6	Chefe	3400	Pintura

Fonte: Elaborada pelo autor.

Concluiu-se, desse modo, facilmente, que o total gasto em cada cargo é: Aprendiz: R$ 3.000,00 (= R$ 1.500 + R$ 1.500); Auxiliar: R$ 6.900,00 (= R$ 2.300 + R$ 2.300 + R$ 2.300); Chefe: R$ 6.800,00 (= R$ 3.400 + R$ 3.400). Fazendo uma comparação com o total de R$ 16.700,00, podemos dizer que a porcentagem gasta com mão de obra em cada um dos cargos é, aproximadamente: Aprendiz: 18%; Auxiliar: 41%; Chefe: 41%. Em forma de diagrama de Venn, essa informação poderia ser disposta como na Figura 4.4.

Figura 4.4 | Distribuição dos gastos por cargo



Fonte: Elaborada pelo autor.

De modo semelhante, pode-se aplicar o filtro por departamento e calcular os percentuais correspondentes.

Figura 4.5 | Planilha geral, com filtros por departamento

(a)

	A	B	C
1	Cargo	Faixa salarial	Departamento
3	Auxiliar	2300	Pintura
4	Aprendiz	1500	Pintura

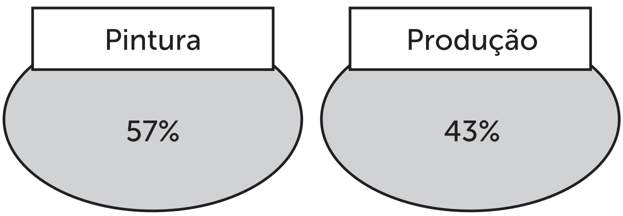
(b)

	A	B	C
1	Cargo	Faixa salarial	Departamento
2	Chefe	3400	Produção
5	Auxiliar	2300	Produção

Fonte: Elaborada pelo autor.

Adicionando os valores, temos que o total gasto com mão de obra por departamento é: Pintura, R$ 9.500,00 (= R$ 2.300 + R$ 1.500 + R$ 3.400 + R$ 2.300); Produção, R$ 7.200,00 (= R$ 3.400 + R$ 2.300 + R$ 1.500). Além disso, o correspondente percentual é, aproximadamente: Pintura, 57%; Produção, 43%. Alternativamente, essa informação pode ser representada em um diagrama de Venn, como na Figura 4.6.

Figura 4.6 | Distribuição dos gastos por departamento



Fonte: Elaborada pelo autor.

Avançando na prática

Pratique mais!
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e, depois, compare-as com as de seus colegas.

<table>
<tr><th colspan="2">Na biblioteca</th></tr>
<tr><td>1. Competência de fundamentos de área</td><td>Conhecer métodos e técnicas de operações matemáticas, para desenvolver raciocínio lógico, crítico e analítico de apoio à tomada de decisão.</td></tr>
<tr><td>2. Objetivos de aprendizagem</td><td>Aplicar conceitos da teoria de conjuntos à resolução de problemas práticos.</td></tr>
<tr><td>3. Conteúdos relacionados</td><td>Elemento, conjunto, pertinência, inclusão, conjunto vazio e conjunto universo.</td></tr>
<tr><td>4. Descrição da SP</td><td>Uma bibliotecária de uma escola recebeu uma grande remessa de livros e precisa organizá-los. Os temas dos livros que ela recebeu foram: Matemática, Arte, Geografia e História, mas, quando começou a organizar, identificou que havia, além de livros em português, livros em inglês e espanhol. Ela constatou, ainda, que os livros podiam ser classificados em didáticos e em paradidáticos. De que maneira a bibliotecária deve organizar os livros utilizando o número mínimo de grupos e nesses grupos uma quantidade máxima de livros? Esta resposta é a melhor maneira de se organizar livros?</td></tr>
<tr><td>5. Resolução da SP</td><td>Uma possível solução pode ser obtida através do auxílio de uma planilha eletrônica. Para iniciar, realizamos o cadastro das informações conforme o quadro a seguir:
<table>
<tr><th>Livro</th><th>Tema</th><th>Idioma</th><th>Classificação</th></tr>
<tr><td>Título 1</td><td>Matemática</td><td>Português</td><td>Didático</td></tr>
<tr><td>Título 2</td><td>Artes</td><td>Inglês</td><td>Paradidático</td></tr>
<tr><td>Título 3</td><td>Geografia</td><td>Português</td><td>Didático</td></tr>
<tr><td>Título 4</td><td>História</td><td>Espanhol</td><td>Paradidático</td></tr>
<tr><td>Título 5</td><td>Matemática</td><td>Inglês</td><td>Didático</td></tr>
<tr><td>Título 6</td><td>Artes</td><td>Português</td><td>Didático</td></tr>
</table>
Trabalhando com a planilha eletrônica, podemos fazer uso da ferramenta chamada filtro. Basicamente, essa ferramenta seleciona linhas específicas baseado nas escolhas que fazemos.
Iniciando com a coluna tema, utilizamos a função filtro e selecionamos os itens um de cada vez: Matemática, Arte, Geografia e História. O resultado da aplicação desses filtros é a seguinte:
Matemática: 2 livros; Arte: 2 livros; Geografia: 1 livro; História: 1 livro
Agora, aplicando a função filtro somente na coluna idioma, teremos as seguintes quantidades:</td></tr>
</table>

	Português: 3 livros; Espanhol: 1 livro; Inglês: 2 livros Agora, aplicando a função filtro somente na coluna classificação, teremos as seguintes respostas: Didático: 4 livros; Paradidático: 2 livros Agora, analisando todos os resultados, para a bibliotecária arrumar os livros de tal forma que forma o mínimo de grupos com o máximo de elementos, devemos separá-los no grupo dos livros didáticos e no grupo dos paradidáticos. Mas, talvez, esta maneira não seja a melhor maneira de se organizar livros, pois dentro de um único grupo haverá elementos com características muito distintas, o que pode proporcionar uma dificuldade no momento de sua busca.

Faça valer a pena!

1. Considere os conjuntos A = {a, b, c, d, e}, B = {a, b, f, c, d}, C = {d, a, b, c, e} e D = {e, a, b, f, c, a}. Podemos considerar iguais os conjuntos:

a) B e D

b) C e D

c) A e B

d) A e C

e) B e C

2. Considere as seguintes afirmações:

I – Conjuntos são formados somente por elementos indivisíveis, não podendo ser formados por outros conjuntos.

II – Dois conjuntos são considerados iguais se possuem o mesmo número de elementos.

III – Existem conjuntos com finitos elementos e outros com infinitos elementos.

Podemos considerar verdadeira(s) a(s) seguinte(s) afirmação(ões):

a) I.

b) I e II.

c) II e III.

d) II.

e) III.

3. Observe os conjuntos a seguir:

I – A = {1, 3, 5, 7, 9, 11, ...}

II – B = {a, e, i, o, u}

III – C = {número primo e par}

Podemos dizer que os conjuntos A, B e C são, respectivamente:

a) Unitário, finito e infinito.

b) Infinito, finito e unitário.

c) Finito, unitário e infinito.

d) Unitário, infinito e finito.

e) Finito, infinito e unitário.

Vocabulário

Número primo: aquele que é divisível somente por 1 e por si mesmo.

Seção 4.2

Operações com conjuntos

Diálogo aberto

Adriano recebeu a tarefa de implementar um plano de controle e prevenção de acidentes na empresa que trabalha. Os setores que tiveram os maiores índices de acidentes e afastamentos foram os de pintura e de tratamento químico. Mas, como toda empresa, ele deve aplicar esse plano da maneira mais econômica possível. Para ter mais detalhes sobre esses setores, ele solicitou informações sobre cada um aos seus respectivos regentes. As informações obtidas foram:

- Nove pessoas trabalham exclusivamente na pintura.
- Sete pessoas trabalham exclusivamente no tratamento químico.
- Ao todo, trabalham, nas duas seções, 22 funcionários.

Para divulgar o plano de prevenção de acidentes com mais eficiência, Adriano decidiu que os funcionários que são capacitados para trabalhar nos dois setores serão os divulgadores das informações para a prevenção de acidentes. Como você determinaria a quantidade de funcionários que serão os divulgadores do plano de controle e prevenção de acidentes? Sabendo que o tempo de treinamento dos funcionários é de, aproximadamente, 7 horas, que o valor da hora de trabalho de cada um é R$ 22,00 e que o custo do serviço do técnico que realizará o treinamento é de 1,2 mil reais, qual deve ser a estimativa do valor gasto com o treinamento dessas pessoas?

Não pode faltar!

Uma parte importante da teoria de conjuntos são suas operações. Vamos ver neste momento como essas são realizadas e suas aplicações.

União

Intuitivamente, a união entre conjuntos não é de difícil assimilação, já que esse conceito é muito próximo do conceito de adição, que é bastante comum. Como exemplo, vamos imaginar a seguinte situação: considere dois conjuntos, {pessoas que praticam tênis} e {pessoas que praticam futebol}. Como você acha que seria a união (ou reunião) desses dois conjuntos? Quais seriam os elementos desses dois conjuntos? Bem, não é difícil imaginar que o resultado dessa união é um único conjunto formado por pessoas que praticam tênis, por pessoas que praticam futebol e por pessoas que praticam os dois esportes.

Vejamos outro exemplo:

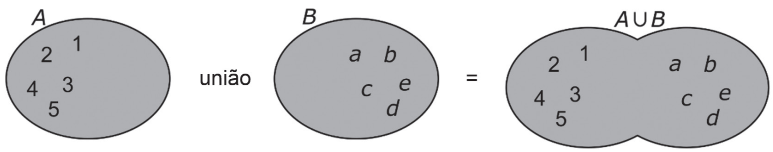
Considere o conjunto A = {a, b, c, d, e} e o conjunto B = {1, 2, 3, 4, 5}. A união entre os dois conjuntos tem como resultado o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d, e}, ou simbolicamente $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d, e\}$. É bom lembrar que as posições dos elementos não importam e a união entre os conjuntos A e B poderia ser descrita também como $A \cup B$ = {1, d, 2, c, 3, a, b, 4, e, 5}.

Assimile

$A \cup B$: lê-se "A união B".

A união dos conjuntos efetuada acima pode ser representada por meio de um diagrama de Venn, conforme Figura 4.7.

Figura 4.7 | Reunião dos conjuntos A e B



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplificando

Observe os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, B = {todos os números divisíveis por 2} e C = {tatu, leão, tartaruga, búfalo}. Efetue as operações indicadas a seguir:

a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $B \cup C$

Resolução:

a) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$

b) $A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \text{ tatu, leão, tartaruga, búfalo}\}$

c) $B \cup C = \{\text{tatu, leão, tartaruga, búfalo, } 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$

Faça você mesmo

1. Considerando os conjuntos A = {g, h, i, j}, B = {os números pares menores ou iguais a 10} e C = {camelo, leão, jacaré, búfalo}, efetue as operações indicadas a seguir:

a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $B \cup C$

Interseção

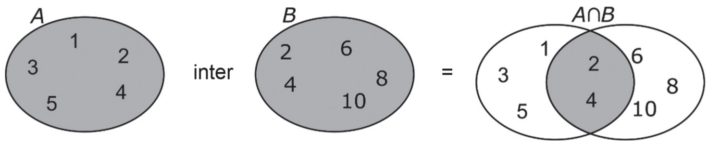
Agora que sabemos como é a união entre dois conjuntos, vamos estudar a interseção entre dois conjuntos. Mas você deve estar se perguntando: o que é interseção? Basicamente, a interseção entre conjuntos, A e B, é um novo conjunto, $A \cap B$, formado pelos elementos que pertencem tanto ao conjunto A quanto ao conjunto B. Vejamos um exemplo.

Considere os conjuntos a seguir:

A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {2, 4, 6, 8, 10}.

Quais elementos estão ao mesmo tempo nos dois conjuntos? Podemos afirmar que os elementos 2 e 4 estão na interseção dos conjuntos A e B, ou, ainda, o conjunto formado por esses elementos, {2, 4}, é a interseção de A e B e simbolizamos $A \cap B = \{2, 4\}$. Essa operação pode ser visualizada por meio de um diagrama de Venn, conforme Figura 4.8.

Figura 4.8 | Interseção dos conjuntos A e B



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assimile

$A \cap B$: lê-se "A inter B".

Exemplificando

Observe os conjuntos D = {a, e, i, o, u}, E = {b, c, d, f, g, h} e F = {a, b, c, d, e, f, h, i} e efetue as interseções:

a) $D \cap E$ b) $D \cap F$ c) $F \cap E$

Resolução:

a) $D \cap E = \varnothing$;

b) $D \cap F = \{a,\ e,\ i\}$;

c) $F \cap E = \{b,\ c,\ d,\ f,\ h\}$.

Faça você mesmo

2. Considere os conjuntos D = {números ímpares menores que 10}, E = {múltiplos de 3 menores que 10} e F = {números primos menores que 10} e efetue as interseções:

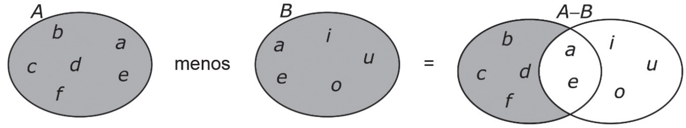
$D \cap E$ b) $D \cap F$ c) $F \cap E$

Diferença

Outro conceito importante é a ideia de diferença entre dois conjuntos. Para melhor compreendê-la, vamos a um exemplo.

Considere o conjunto A = {a, b, c, d, e, f} e, também, o conjunto B = {a, e, i, o, u}. Realizar a diferença entre os conjuntos A e B implica retirar do conjunto A todos os elementos que também estão em B, formando, assim, um novo conjunto. Nesse caso, a diferença entre A e B fica A – B = {b, c, d, f}. A diferença entre A e B pode ser representada por meio de um diagrama de Venn, conforme Figura 4.9.

Figura 4.9 | Diferença entre os conjuntos A e B



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assimile

A – B: lê-se “A menos B”.

Exemplificando

Observe os conjuntos a seguir e determine A – B e C – D.

a) A = {a, b, c, d, e} e B = {a, e, i, o, u}

b) C = {xadrez, gamão, ludo, damas} e D = {videogame, xadrez, gamão, fliperama, trilha}

Resposta:

a) A partir do conjunto A, vamos retirar os elementos que também aparecem em B, assim, temos: A – B = {b, c, d}.

b) A partir do conjunto C, vamos retirar os elementos que também aparecem em D; assim, temos: C – D = {ludo, damas}.

Faça você mesmo

3. Analise os conjuntos a seguir e efetue A – B e C – D.

a) A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {2, 4, 6, 8, 10}

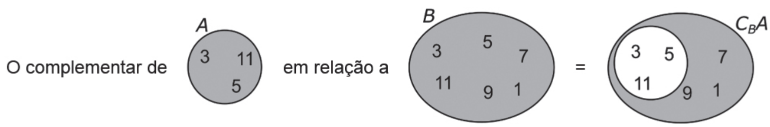
b) C = {gato, cachorro, rato, coelho} e D = {gato, elefante, cachorro, leão, tigre}

Complementar

Um conceito derivado da ideia de diferença entre conjuntos é o de complementar. Basicamente, podemos dizer que o complementar de um conjunto $A \subset B$ é formado por todos os elementos que não pertencem ao conjunto A, mas que pertencem ao conjunto B. Para melhor entender, vejamos um exemplo.

Observe os conjuntos A = {3, 5, 11} e B = {1, 3, 5, 7, 9, 11} e constate que $A \subset B$. Sendo assim, o complementar do conjunto A em relação ao conjunto B é {1, 7, 9}, ou seja, $C_B A = \{1,\ 7,\ 9\} = B - A$. Por meio de um diagrama de Venn, Figura 4.10, teremos:

Figura 4.10 | Complementar de A em relação a B



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assimile

Podemos determinar o complementar do conjunto A em relação ao conjunto B da seguinte forma: $C_B A = B - A$.

Exemplificando

Observe os conjuntos A = {bicicleta, moto, triciclo} e B = {bicicleta, carro, moto, avião, barco, triciclo} e determine $C_B A$.

Resolução:

Como $C_B A = B - A$, então $C_B A = \{\text{carro, avião, barco}\}$.

Faça você mesmo

4. Analise os conjuntos A = {pato, pombo, pernilongo} e B = {pato, águia, pombo, dromedário, pernilongo, minhoca} e determine:

a) $C_B A$ b) $C_B B$

Atenção!

Vale lembrar que, para fins didáticos, nos exemplos citados e nos enunciados dos exercícios, é costume trabalharmos com conjuntos simples, ou seja, com elementos que sejam letras ou números. Mas, como foi dito inicialmente, um conjunto pode ser formado por quaisquer elementos, até mesmo outros conjuntos.

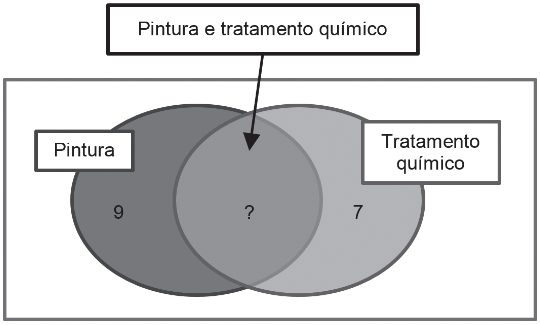
Sem medo de errar!

Para resolver o problema de Adriano que você tem em mãos, vamos, inicialmente, trabalhar com as informações que possuímos, informadas pelos gerentes da seção de pintura e de tratamento químico.

- Nove pessoas trabalham exclusivamente na pintura.
- Sete pessoas trabalham exclusivamente no tratamento químico.
- Ao todo, trabalham, nas duas seções, 22 funcionários.

Para facilitar o raciocínio, pode-se fazer o seguinte esboço em um pedaço de papel.

Figura 4.11 | Diagrama de Venn



Fonte: Elaborado pelo autor.

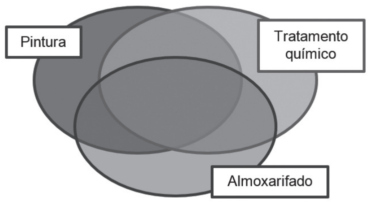
Ao observar o rascunho, esperamos que você conclua que deve utilizar a última informação que tem. Como o total de funcionários existentes nestas duas seções são 22, para descobrir a quantidade de funcionários que são capacitados a trabalhar nos dois setores, é 22 – 9 – 7 = 6. Assim, serão seis os funcionários responsáveis a divulgar as informações do plano de controle de acidentes. Calculando o custo necessário para esse treinamento, devemos multiplicar a quantidade de pessoas que irá realizar o curso (6 pessoas) pelo valor da hora de cada um (R$ 22,00). Tendo esse resultado, multiplicamos por 7 horas e somamos com o valor pago ao técnico que irá realizar o treinamento (R$ 1.200,00), ou seja, $(6 \cdot 22) \cdot 7 + 1200 = 2124$. Logo, o custo total será de R$ 2.124,00.

Avançando na prática

Pratique mais!
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e, depois, compare-as com as de seus colegas.

Quantas pessoas são?	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer métodos e técnicas de operações matemáticas, para desenvolver raciocínio lógico, crítico e analítico de apoio à tomada de decisão.
2. Objetivos de aprendizagem	Compreender as ideias associadas às operações entre conjuntos.
3. Conteúdos relacionados	União, diferença, interseção e complementar de conjuntos.
4. Descrição da SP	Vamos imaginar a seguinte situação na empresa que Adriano trabalha: Adriano precisa de um mapeamento de seus funcionários para realizar o plano de carreira em sua empresa.

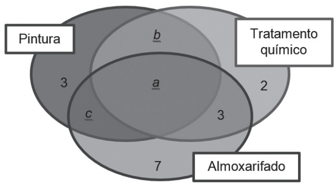
<table>
<tr>
<td></td>
<td>Os funcionários que receberão um salário maior serão aqueles que atuam em mais áreas dentro da empresa. Após solicitar informações ao RH, ele obteve as seguintes informações:
• Três funcionários trabalham exclusivamente na pintura.
• Dois funcionários trabalham exclusivamente no tratamento químico.
• Sete funcionários trabalham exclusivamente no almoxarifado.
• Três funcionários trabalham exclusivamente no tratamento químico e no almoxarifado.
• O total de funcionários que trabalham na pintura, no tratamento químico e no almoxarifado é de, respectivamente, 13, 14 e 15.
Quantos funcionários terão os maiores salários?</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Resolução da SP</td>
<td>Para resolver essa questão, vamos utilizar um diagrama de Venn.
Figura 4.12 | Diagrama 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com as informações dispostas no texto, podemos preencher esse diagrama da seguinte forma:

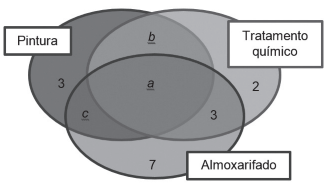
Figura 4.13 | Diagrama 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Preenchendo os espaços vazios com letras, temos:

Figura 4.14 | Diagrama 3



Fonte: Elaborado pelo autor.

Organizando um sistema com as informações, temos:</td>
</tr>
</table>

	$\begin{cases} 3+a+b+c=13 \\ 7+3+c+a=15 \\ 2+3+b+a=14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b+c=10 & \text{(I)} \\ a+c=5 & \text{(II)} \\ a+b=9 & \text{(III)} \end{cases}$ Subtraindo II de I, temos: $(\mathrm{I})-(\mathrm{II}) \rightarrow \dfrac{\begin{array}{r} a+b+c=10 \\ -\quad a+c=5 \end{array}}{(a-a)+(c-c)+b=10-5}$ Logo, b = 5. De (III), como b = 5, segue que a = 4. De (II), como a = 4, conclui-se que c = 1. Como a letra pertence à todos os conjuntos existentes, então esse valor representa a quantidade de funcionários que são capacitados a trabalhar em todas as seções, e o seu número é 4.

Faça valer a pena!

1. Considere os conjuntos A = {os múltiplos de 2 menores que 13} e B = {os múltiplos de 3 menores que 13}. A interseção entre os conjuntos A e B é:

a) {0, 2, 6, 12}

b) {4, 6, 12}

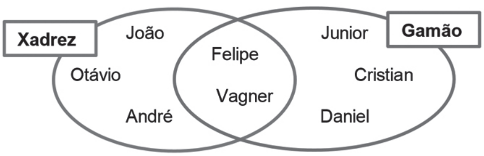
c) {0, 4, 12}

d) {0, 6, 12}

e) {12}

2. Observe a Figura 4.15.

Figura 4.15 | Preferência em relação ao jogo de tabuleiro



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse diagrama, está representada a preferência de alguns indivíduos em relação aos jogos de tabuleiro Xadrez e Gamão. A partir desse diagrama, assinale a alternativa que contém a interseção dos grupos de Xadrez e Gamão:

a) {Felipe, Vagner}

b) {João, Otávio, André}

c) {Felipe, Vagner, Junior, Cristian, Daniel}

d) {Junior, Cristian, Daniel}

e) {Felipe, Vagner, João, Otávio, André}

3. Na teoria de conjuntos, estudamos várias características e relações entre os conjuntos. São nomes de operações entre conjuntos:

a) Adição, união e agregação.

b) Filiação, complementar e agregação.

c) União, complementar e interseção.

d) Adição, complementar e agregação.

e) Subtração, interseção e conjunção.

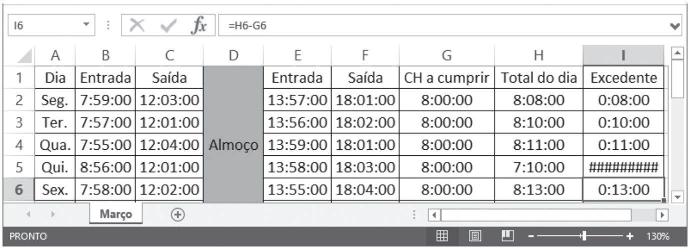
Seção 4.3

Conjuntos numéricos

Diálogo aberto

Adriano estava acompanhando Rogério, um de seus funcionários, no cálculo de horas excedentes em uma semana normal (5 dias úteis) de trabalho. O expediente padrão prevê 8 horas diárias de trabalho, com entrada às 8h e saída para o almoço às 12h; volta do almoço às 14h e fim do expediente às 18h. Rogério registrou os seus horários de entrada e saída em uma planilha do Excel, bem como o total de horas trabalhadas (Total do dia), a quantidade de horas a cumprir (CH a cumprir) e a quantidade excedente, dia a dia. Os valores podem ser observados na Figura 4.16.

Figura 4.16 | Planilha de horas de Rogério



I6 =H6-G6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Dia	Entrada	Saída		Entrada	Saída	CH a cumprir	Total do dia	Excedente
2	Seg.	7:59:00	12:03:00		13:57:00	18:01:00	8:00:00	8:08:00	0:08:00
3	Ter.	7:57:00	12:01:00		13:56:00	18:02:00	8:00:00	8:10:00	0:10:00
4	Qua.	7:55:00	12:04:00	Almoço	13:59:00	18:01:00	8:00:00	8:11:00	0:11:00
5	Qui.	8:56:00	12:01:00		13:58:00	18:03:00	8:00:00	7:10:00	##########
6	Sex.	7:58:00	12:02:00		13:55:00	18:04:00	8:00:00	8:13:00	0:13:00

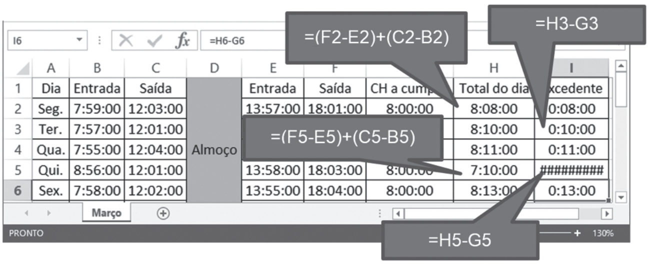
Março

PRONTO 130%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na planilha da Figura 4.16, as colunas de A até G foram preenchidas manualmente; já as colunas H e I foram calculadas a partir de fórmulas, como mostra a Figura 4.17.

Figura 4.17 | Fórmulas da planilha



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao terminar o preenchimento da planilha, Rogério questionou Adriano o porquê de o símbolo ######### estar sendo exibido na célula I5 e qual seria a quantidade que deveria aparecer nesse lugar. Sem saber ajudá-lo, Adriano recorreu a você. Por que a célula I5 exibe o símbolo ######### e qual é a quantidade que deve aparecer nesse espaço? Além disso, qual é a quantidade de horas excedentes que Rogério trabalhou nessa semana? Supondo que o valor da hora excedente seja R$ 20,00, Rogério tem a receber por horas adicionais ou fez menos horas que o ideal, sendo necessário descontar de seu banco de horas? Resolva esse problema e oriente os dois quanto ao cálculo de horas. Dica: você precisará compreender um pouco os conjuntos numéricos para isso.

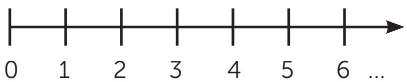
Não pode faltar!

No estudo de conjuntos, inevitavelmente nos deparamos com os **conjuntos numéricos**. Como dito em momentos anteriores, esses conjuntos são compostos por números que possuem determinada característica em comum.

Para iniciar nossos estudos, vamos estudar o conjunto numérico mais primitivo, o **conjunto dos números naturais**.

O conjunto dos números naturais é representado pelo símbolo " $\mathbb{N}$ " e os números que o compõem são 0, 1, 2, 3, 4, 5, e por aí vai, estendendo-se infinitamente, ou seja, $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5...\}$. .

Figura 4.18 | Números naturais



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 4.18 busca representar o conjunto dos números naturais, sendo de fácil observação a presença de espaços entre um número e outro. Por exemplo, não existe neste conjunto nenhum número entre 3 e 4, ou entre o número 4 e o número 5. O que queremos dizer é que não há números "quebrados", como 2,5 ou 3,333... Outro fato também importante é que não existem números negativos no conjunto dos naturais.

Reflita

Originalmente, o número 0 (zero) não pertencia ao conjunto dos números naturais, já que não fazia sentido um processo de contagem natural começar com o nada. Os humanos primitivos contavam pedras, por exemplo, a partir do 1 (um).

Atualmente, alguns autores consideram o zero como natural e outros não. O que você pensa sobre isso? Pesquise sobre o assunto. Neste livro didático, ele será considerado como natural.

Bastante comum é a utilização da simbologia $\mathbb{N}^*$ para representar o conjunto dos naturais sem o número zero, ou seja, {1, 2, 3, 4, 5, ...}.

O conjunto dos naturais possui algumas características interessantes:

• As operações de adição e multiplicação são sempre possíveis entre dois números naturais (no sentido de que o resultado é também natural).

• As operações de subtração e divisão nem sempre são realizáveis dentro do conjunto dos naturais (no sentido de que o resultado de uma dessas operações pode ser um número pertencente a outro conjunto).

• O menor número entre os naturais é o 0 (zero).

• O conjunto é infinito positivamente, ou seja, não existe um número maior que todos os outros números naturais.

Em relação à operação de adição, podemos salientar as seguintes propriedades:

I. **Elemento neutro**: o elemento neutro da adição entre os naturais é o zero (0), já que qualquer número somado com o zero resultará no próprio número. Exemplos: $5+0=5$; $0+7=7$; $0+0=0$.

II. **Associativa**: não importa a ordem com que associamos dois a dois os números em uma adição; o resultado será sempre o mesmo. Exemplo: $2 + 3 + 4 = (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9$.

III. **Comutativa**: a ordem de como realizamos a operação de adição não interfere no resultado. Exemplos: $4+2=2+4=6$; $8 + 0 = 0 + 8 = 8$.

Agora, em relação à operação de multiplicação, podemos salientar as seguintes propriedades:

I. **Elemento neutro**: o elemento neutro da multiplicação é o número 1 (um), já que qualquer número multiplicado por 1 resulta no próprio número. Exemplos: $4 \cdot 1=4$; $1 \cdot 1=1$; $1 \cdot 8=8$.

II. **Associativa**: na multiplicação, não importa a ordem com que associamos os números dois a dois; o resultado será sempre o mesmo. Exemplo: $1 . 2 . 3 = (1 . 2) . 3 = 1 . (2 . 3) = 6$.

III. **Comutativa**: a ordem com que multiplicamos dois números não interfere no resultado. Exemplo: 6 . 3 = 3 . 6 = 18.

Faça você mesmo

1. Observe as afirmações a seguir e classifique-as como verdadeiras (V) ou falsas (F).

I. (   ) É possível efetuar 2 + 3 no conjunto dos naturais.

II. (   ) $-1 \in \mathbb{N}$.

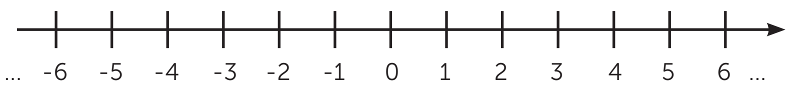
III. (   ) É possível efetuar $8 \div 4$ no conjunto dos números naturais.

IV. (   ) O zero (0) é o menor número do conjunto dos naturais.

V. (   ) O resultado da multiplicação de dois números naturais pode não ser um número natural.

Continuando o nosso estudo sobre os conjuntos numéricos, vamos estudar agora o **conjunto dos números inteiros**. O símbolo utilizado para representar esse conjunto é "$\mathbb{Z}$" e os seus elementos são $\mathbb{Z}$ = {... - 3, - 2, - 1,0, 1, 2, 3 ...}.

Figura 4.19 | Números inteiros



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 4.19, é possível verificar que agora existem números negativos, localizados à esquerda da origem (zero). É possível visualizar ainda que não existem outros números entre os apresentados, ou seja, não há, por exemplo, o número 1,6 entre os números 1 e 2, como também não existe o número –1,5 entre os números –1 e –2.

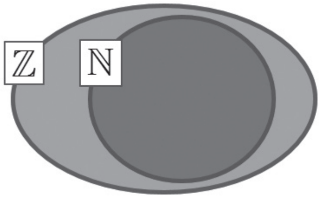
Podemos dizer que o conjunto dos inteiros é formado pelos números naturais e os seus simétricos (números negativos).

Atenção!

O simétrico de um número positivo é um número negativo, e vice-versa. Além disso, ambos estão à mesma distância do zero, cujo simétrico é o próprio.

Representando através do diagrama de Venn, podemos dizer que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, conforme Figura 4.20.

Figura 4.20 | Diagrama de Venn do conjunto dos números inteiros



Fonte: Elaborada pelo autor.

Isso nos permite dizer que todo número natural é também um número inteiro, mas nem todos os números inteiros são naturais.

Assimile

O conjunto dos números inteiros é representado pela letra "$\mathbb{Z}$", pois é derivado da palavra em alemão "zahl", que em português significa "número" (UFRJ, 2016).

As propriedades da adição (elemento neutro, associativa e comutativa), válidas para o conjunto dos naturais, também são válidas para o conjunto dos inteiros. Isso também acontece com as propriedades da multiplicação (elemento neutro, associativa e distributiva).

A operação da divisão só faz sentido no conjunto dos inteiros se o resultado dessa também pertencer aos inteiros, ou seja, o valor do quociente em uma divisão deve ser também um número inteiro.

Faça você mesmo

2. Leia cada uma das afirmações a seguir e determine se elas são verdadeiras ou falsas.

I. (   ) Todo número inteiro é obrigatoriamente um número natural.

II. (   ) $-7 \in \mathbb{Z}$.

III. (   ) Todo número natural é um número inteiro.

IV. (   ) A operação $8 \div (-2)$ é possível no conjunto dos inteiros.

V. (   ) A operação $5 \div (-4)$ é possível no conjunto dos inteiros.

É bastante comum quando estudamos os conjuntos numéricos representar um determinado conjunto com certas limitações, ou restrições. Exemplos disso são:

$\mathbb{Z} = \{\ldots -1, -2, -1, 0, 1, 2, 3\ldots\}$ Inteiros, sem restrições.	$\mathbb{Z}^* = \{\ldots -1, -2, -1, 1, 2, 3\ldots\}$ Inteiros, exceto zero.	$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3\ldots\}$ Inteiros não negativos.
$\mathbb{Z}_- = \{\ldots -1, -2, -1, 0\}$ Inteiros não positivos.	$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3\ldots\}$ Inteiros positivos.	$\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots -1, -2, -1\}$ Inteiros negativos.

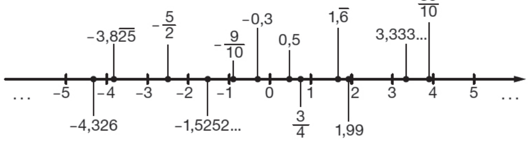
Assimile

Quando queremos descrever um conjunto numérico, sem o número zero (0), utilizamos o asterisco (*) no canto superior do símbolo do conjunto. Já quando queremos representar somente os números não negativos, utilizamos o sinal de mais (+) no canto inferior do símbolo do conjunto. Quando queremos indicar somente os números não positivos, utilizamos o sinal de menos (–) no canto inferior do símbolo do conjunto.

Esse tipo de simbolismo também é utilizado nos conjuntos numéricos que estudaremos mais adiante.

O próximo conjunto a ser estudado é o conjunto dos números racionais, cujo símbolo utilizado para representa-lo é “$\mathbb{Q}$” e os seus elementos são determinados da seguinte forma: $\mathbb{Q} = \left\{ x \,\middle|\, x = \dfrac{a}{b},\ \text{onde } a \text{ e } b \in \mathbb{Z},\ \text{com } b \neq 0 \right\}$; em outras palavras, é o conjunto formado pelo resultado da divisão entre dois números inteiros. Na Figura 4.21, há a representação de alguns elementos deste conjunto.

Figura 4.21 | Números racionais



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assimile

O conjunto dos números racionais tem como símbolo a letra $\mathbb{Q}$, pois esse conjunto é formado pelos números que são resultados das divisões entre dois números inteiros, e esse resultado recebe o nome de “quociente”.

Na Figura 4.21, é possível verificar a existência de valores positivos, valores negativos e ainda a existência de valores entre os números 1 e 2, ou entre –3 e –2, por exemplo. Esses novos números são o resultado da divisão entre os números inteiros. Na Figura 4.21, não estão presentes todos os números racionais no intervalo representado por uma questão de impossibilidade, pois há infinitos números racionais entre quaisquer dois que consideremos.

Pertencem a esse conjunto os seguintes tipos de números:

• Os naturais.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6...

• Os inteiros.

..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3...

• Os números decimais com número finito de algarismos.

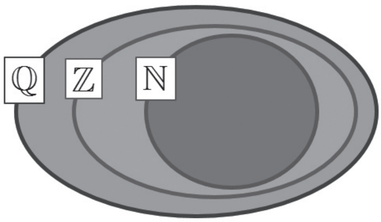
Exemplos: 2,3; 5,4, 0,125; –8,56, –1,5; etc.

• Os números decimais com número infinito de algarismos, desde que sejam dízimas periódicas constantes.

Exemplos: 0,11111111...; 0,12121212...; 1,555555555...; –3,356356356...

Assim, podemos representar esses conjuntos, de acordo a Figura 4.22.

Figura 4.22 | Diagrama de Venn do conjunto dos números racionais



Fonte: Elaborada pelo autor.

As propriedades da adição (elemento neutro, associativa e comutativa), válidas para o conjunto dos naturais e dos inteiros, também são válidas para o conjunto dos racionais. O mesmo ocorre com as propriedades da multiplicação (elemento neutro, associativa e distributiva).

Faça você mesmo

3. Leia cada uma das afirmações a seguir e determine se elas são

verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) ( ) Todo número inteiro é também um número racional.

b) ( ) $1,2 \in \mathbb{Z}$

c) ( ) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

d) ( ) $-0,75 \notin \mathbb{Q}$

e) ( ) Nem todo número natural é também um número racional.

Exemplificando

A partir da definição de números racionais $\mathbb{Q} = \left\{ x \middle| x = \frac{a}{b}, \text{ onde } a \text{ e } b \in \mathbb{Z}, \text{ com } b \neq 0 \right\}$, determine os possíveis valores de a e b para cada um dos número racionais a seguir.

a) 0,12

b) 2

c) 0

d) –3,5

Resolução:

a) $0,12 = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$, logo uma das possibilidades é a = 12 e b = 100; outra possibilidade é a = 3 e b = 25.

b) $2 = \frac{2}{1}$, logo uma das possibilidades é a = 2 e b = 1.

c) $0 = \frac{0}{27}$, logo uma das possibilidades é a = 0 e b = 27. Para esse caso, b pode assumir qualquer valor com exceção do número zero.

d) $-3,5 = -\frac{35}{10} = -\frac{7}{2}$, logo uma das possibilidades é a = –35 e b = 10; outra possibilidade é a = –7 e b = 2.

O próximo a ser estudado é o **conjunto dos números irracionais**. Basicamente, números irracionais são os números decimais com infinitos algarismos não constantes. São exemplos de números irracionais:

- $\sqrt{3} = 1,732050807...$

- $\pi = 3{,}141592653589....$
- $-\pi = -3{,}141592653589...$
- $e = 2{,}718281828...$
- $-e = -2{,}718281828...$
- $-\sqrt{7} = -2{,}645751311\ldots$

Assimile

Não existe símbolo padrão para representar o conjunto dos números irracionais. A maioria dos livros não faz uso de qualquer tipo de símbolo para representá-los e este livro didático seguirá essa mesma orientação.

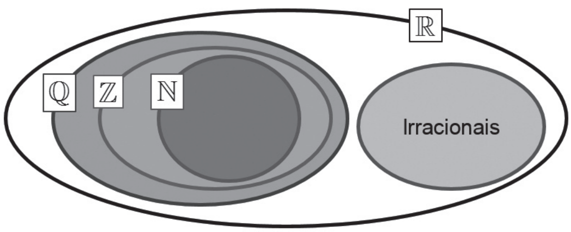
A característica principal desses números é que eles não podem ser obtidos por meio de razões entre inteiros, como ocorre com os racionais. Os irracionais são também chamados de números incomensuráveis.

Vale a pena ressaltar que, no caso dos números irracionais, pode ocorrer de o resultado de uma operação matemática entre dois números resultar em outro número que não seja irracional. Observe os exemplos a seguir:

- $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2$, em que os números $\sqrt{8}$ e $\sqrt{2}$ são irracionais, mas o resultado da divisão entre eles é o número 2, que é um número natural.
- $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 1{,}22474487...$ Nesse caso, o resultado também é um número irracional, já que se caracteriza por ter uma dízima não constante.

Por fim, chegamos ao conjunto dos números reais. Esse conjunto é formado pela união dos seguintes conjuntos: naturais ($\mathbb{N}$), inteiros ($\mathbb{Z}$), racionais ($\mathbb{Q}$) e irracionais, como mostra o diagrama de Venn da Figura 4.23.

Figura 4.23 | Diagrama de Venn do conjunto dos números reais

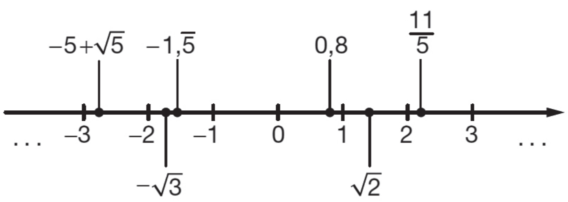


Fonte: Elaborada pelo autor.

Mais precisamente, temos $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \text{Irracionais}$, visto que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

A Figura 4.24 tenta sugerir que não há espaços vazios entre os números, a reta está toda preenchida, ou em outras palavras, para cada ponto da reta há um número real, e vice-versa, diferente do que ocorre com os racionais e com os irracionais. Dados dois racionais quaisquer, há infinitos irracionais entre eles e o mesmo pode ser observado tomando dois irracionais quaisquer, há infinitos racionais entre eles. Assim, é possível dizer que esses dois conjuntos se complementam formando os reais, sem que sobrem espaços vazios na reta.

Figura 4.24 | Números reais



Fonte: Elaborada pelo autor.

Faça você mesmo

4. Leia cada uma das afirmações a seguir e determine se elas são verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) ( ) $\sqrt{4} \in \mathbb{N}$

b) ( ) $\sqrt[3]{8} \in \mathbb{Z}$

c) ( ) Alguns números irracionais são inteiros.

d) ( ) O conjunto dos números reais não contém números irracionais.

e) ( ) Pode ocorrer do resultado de uma divisão de números irracionais pertencer ao conjunto dos racionais.

Utilizar os conjuntos numéricos adequadamente é algo extremamente importante, principalmente no que diz respeito à manipulação de programas de computador. Se um programa está configurado para operar com determinado conjunto, e recebe como entrada números que pertencem a outro, o resultado é um erro (como o exibido na situação-problema do início dessa seção).

Segundo Walkenbach (2011, p. 134), o Excel, por exemplo:

> **Usa o sistema de data que começa em 01 de janeiro de 1900. Um valor de tempo negativo (geralmente um número racional negativo) gera uma combinação de data e hora que cai antes dessa data, o que é inválido. Uma solução é usar o sistema de data de 1904 opcional, que atribui o número serial de data 1 para 02 de janeiro de 1904.**

Datas anteriores a essa recebem valores negativos nesse sistema.

Pesquise mais!

Leia mais sobre os sistemas de data no Excel em: <https://support.microsoft.com/pt-br/kb/214330>. Acesso em: 7 mar. 2016.

Sem medo de errar!

Suponha que Adriano tenha lhe contatado e pedido para fazer os cálculos manualmente em busca de erros. Para cumprir essa tarefa, você verificou as fórmulas e viu que, na célula I5, onde se encontra o erro, a fórmula utilizada é =H5-G5, sendo que o dado da célula G5 foi inserido manualmente e o valor da célula H5 foi calculado com outra fórmula, =(F5-E5)+(C5-B5). Os demais dados dessa linha foram manualmente inseridos. Conferindo o valor da célula H5, temos:

H5 = (F5 - E5) + (C5 - B5) = (18:03:00 - 13:58:00) + (12:01:00 - 8:56:00)

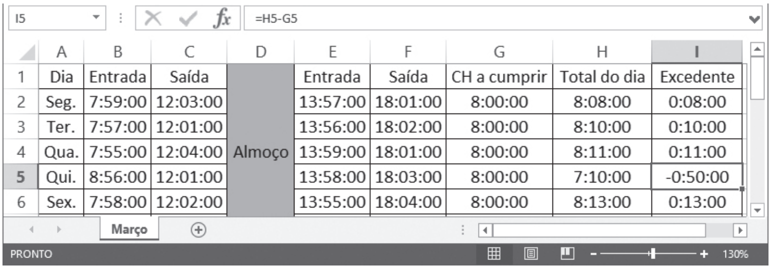
H5 = 4:05:00 + 3:05:00 = 7:10:00 (valor correto)

Até aqui tudo bem. O total do dia está correto. Seguimos para o cálculo das horas de trabalho excedentes:

I5 = H5 - G5 = 7:10:00 - 8:00:00 = - (8:00:00 - 7:10:00) = -0:50:00 (hora negativa)

Como o resultado da célula I5 é negativo, o programa deve estar configurado com o sistema de 1900, bastando orientar Rogério quanto à utilização dele. Após configurar a planilha, o resultado será exibido como na Figura 4.25.

Figura 4.25 | Contagem de horas com a planilha configurada corretamente


I5 =H5-G5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Dia	Entrada	Saída		Entrada	Saída	CH a cumprir	Total do dia	Excedente
2	Seg.	7:59:00	12:03:00		13:57:00	18:01:00	8:00:00	8:08:00	0:08:00
3	Ter.	7:57:00	12:01:00		13:56:00	18:02:00	8:00:00	8:10:00	0:10:00
4	Qua.	7:55:00	12:04:00	Almoço	13:59:00	18:01:00	8:00:00	8:11:00	0:11:00
5	Qui.	8:56:00	12:01:00		13:58:00	18:03:00	8:00:00	7:10:00	-0:50:00
6	Sex.	7:58:00	12:02:00		13:55:00	18:04:00	8:00:00	8:13:00	0:13:00

Março

PRONTO 130%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Sabendo, agora, a quantidade de horas correspondente ao "excedente" de quinta-feira, basta calcular o total de horas "excedentes" de Rogério na semana:

Total "excedente" da semana = 0:08:00 + 0:10:00 + 0:11:00 + (-0:50:00) + 0:13:00

Total "excedente" da semana = 0:42:00 - 0:50:00

Total "excedente" da semana = -0:08:00

Por fim, conclui-se que Rogério terá em seu banco de horas um débito de 8 minutos (desconto de 8 minutos).

Faça você mesmo

5. Suponha que Rogério tenha feito na semana seguinte um excedente de 1 hora e 24 minutos. Levando em consideração o débito de 8 minutos dessa semana e esse excedente, quanto ele teria a receber, em reais?

Avançando na prática

Pratique mais!
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e, depois, compare-as com as de seus colegas.

Como podemos escrever?	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer métodos e técnicas de operações matemáticas, para desenvolver raciocínio lógico, crítico e analítico de apoio à tomada de decisão.
2. Objetivos de aprendizagem	Fazer com que o aluno tenha a capacidade de escrever e manipular os símbolos referentes aos conjuntos numéricos.

3. Conteúdos relacionados	Conjunto numérico, simbolismo, restrições nos conjuntos.
4. Descrição da SP	Luan deve fazer um relatório contendo medições de distâncias entre equipamentos na empresa em que trabalha. Em seguida, os dados que ele coletará abastecerão um banco de informações que será criado para este e para outros fins. Entretanto, para que o banco de informações seja criado, os técnicos do setor de TI questionaram que tipos de números seriam registrados para que pudessem programar o banco na rede de computadores da empresa. Luan citou que os números possuirão as seguintes características: • São números com casas decimais. • Não haverá números negativos. Com base nessas características, qual é o conjunto numérico mais restrito que suportará tais informações que serão registradas por Luan?
5. Resolução da SP	O fato de os números possuírem casas decimais implica em não poderem ser registrados no conjunto dos números naturais e nem no conjunto dos números inteiros. Logo, um dos candidatos será o conjunto dos racionais. Não precisamos considerar os irracionais, pois os computadores não conseguem registrar números com infinitas casas decimais. Com base na outra informação fornecida, também podemos desconsiderar os racionais negativos. Logo, todas as informações registradas por Luan serão números pertencentes ao conjunto $\mathbb{Q}_+$.

Faça valer a pena!

1. Os elementos do conjunto $\mathbb{Z}_+ - \{2\}$ são:

a) {..., −3, −2, −1, 0}

b) {..., −3, −2, −1}

c) {..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...}

d) {0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, ...}

e) {1, 2, 3, 4, ...}

2. Assinale a alternativa que contém uma afirmação falsa:

a) O conjunto dos números reais não possui números irracionais.

b) O conjunto dos naturais não tem números negativos.

c) Todo número inteiro é um número racional.

d) Os números racionais são diferentes dos irracionais.

e) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

3. Leia as afirmações a seguir e assinale a alternativa correta:

a) A operação de adição não é possível no conjunto dos números naturais.

b) Não existe o elemento neutro da adição no conjunto dos inteiros.

c) O quociente entre dois números racionais não nulos é também um número racional.

d) Toda operação matemática entre números irracionais resultará também em um número irracional.

e) O número zero (0) não pertence ao conjunto dos racionais.

Seção 4.4

Produto cartesiano

Diálogo aberto

A empresa em que Adriano trabalha produz determinada peça usinada, que, para ficar pronta, passa por diversos processos em toda a cadeira de produção. Um de seus clientes fez um pedido de 3000 unidades dessa peça usinada em 25 dias. Para poder responder ao seu cliente se conseguiria entregar a quantidade solicitada no prazo exigido, Adriano resolveu verificar junto às anotações existentes no setor da produção a quantidade de peças produzidas. Por descuido do funcionário, as anotações estavam incompletas e, por isso, ele teve acesso somente ao total produzido acumulado em algumas datas, como na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 | Total produzido (acumulado)

Dia	Total produzido (acumulado)
2º	240
4º	480
6º	720
11º	1320

Fonte: Elaborada pelo autor.

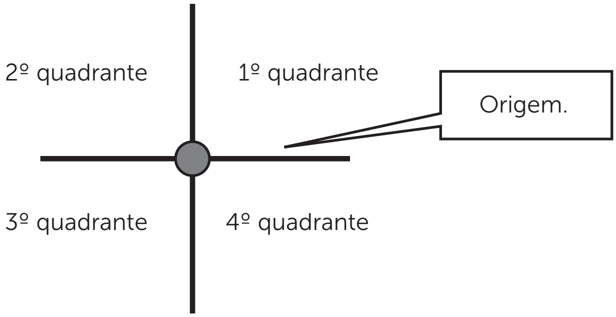
No 4º dia, está inclusa a quantidade produzida até o 3º dia. No 6º dia, está inclusa a quantidade produzida até o 5º dia. No 11º dia, está inclusa a quantidade produzida até o 10º dia. Perceba que em cada linha está anotada a produção acumulada dos dias anteriores.

Para dar essa resposta ao cliente, Adriano solicitou a sua ajuda: no 25º dia, a sua empresa dará conta de entregar o pedido de 3.000 unidades da peça solicitada?

Não pode faltar!

Agora, vamos realizar nosso estudo sobre Produto Cartesiano. Para exemplificar, vamos imaginar a seguinte situação: como poderíamos determinar a localização de um ponto qualquer em um mapa? Uma alternativa para resolver esse problema é a criação de uma escala de referência, uma escala fixa e com um ponto de origem também fixo. Uma escala de referência com essas características pode ser da seguinte maneira: dois eixos perpendiculares entre si, de tal forma que o ponto de encontro entre as duas retas seja a origem desta escala.

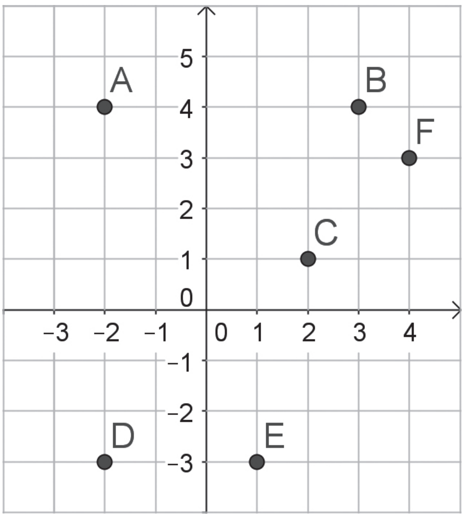
Figura 4.26 | Sistema de eixos determinando os quadrantes



Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, temos um sistema de referência, com uma origem fixa e quatro quadrantes. Mas daí vem outro problema: como determinar a localização de um ponto em um dos quadrantes ou até mesmo em cima das retas ou na origem? Para resolver, utilizaremos uma escala numérica com origem no encontro das retas. Essa escala é construída conforme sugere a Figura 4.27.

Figura 4.27 | Sistema de eixos com escala



Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebe-se que a escala numérica tem origem na interseção dos eixos, sendo que a origem é representada pelo número zero. No eixo horizontal, os números à direita da origem são positivos e os números à esquerda são negativos. Já no eixo vertical, os números acima da origem são positivos e os números abaixo são negativos.

Com o auxílio da escala numérica, é possível determinar a posição de qualquer ponto utilizando coordenadas, a exemplo do ponto B, cuja localização é dada pelas coordenadas (3, 4). O primeiro valor do par ordenado (3, 4), o número 3, marcado no eixo horizontal, indica a distância (ou afastamento) de B até o eixo vertical. Esse valor é positivo, pois B está à direita desse eixo e, se estivesse à esquerda, deveria ser negativo. O segundo valor do par ordenado (3, 4), o número 4, marcado no eixo vertical, indica a distância (ou altura) de B até o eixo horizontal (positiva quando o ponto está acima do eixo e negativa quando está abaixo). Se invertermos as coordenadas (3, 4) para (4, 3), teremos a localização de outro ponto, no caso o ponto F, representado na Figura 4.27. Ao escrevermos todos os pontos representados na Figura 4.27, teríamos A(–2, 4), B(3, 4), C(2, 1), D(–2, –3), E(1, –3), F(4, 3).

Assimile

De modo geral, um ponto qualquer do plano pode ser localizado por meio de coordenadas (x, y), em que x é a distância (ou afastamento) desse ponto ao eixo vertical e y é a distância (ou altura) dele ao eixo horizontal.

O valor x será positivo se o ponto estiver à direita do eixo vertical, negativo se estiver à esquerda e zero se estiver sobre o eixo. Semelhantemente, o valor y será positivo se o ponto estiver acima do eixo horizontal, negativo se estiver abaixo e zero se estiver sobre o eixo.

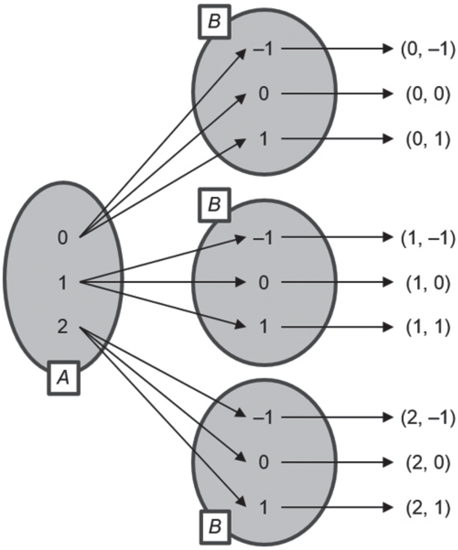
E lembre-se: (x, y) não é o mesmo que (y, x), ou seja, invertendo os valores podemos ter localizações diferentes.

Compreendida a ideia de localização de pontos por meio de pares ordenados, é possível assimilar outro conceito importante, o de produto cartesiano. Denominamos produto cartesiano o conjunto de pontos, ou pares ordenados, (a, b) em que a e b são números pertences a conjuntos dados. Por exemplo, o produto cartesiano de A por B, simbolizado por A×B, é o conjunto $A \times B = \{(a,\ b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$, sendo A e B conjuntos definidos previamente. Também, podemos ter o produto cartesiano entre dois conjuntos iguais, ou seja, A×A ou B×B.

Agora com essa definição podemos pensar da seguinte maneira: considerando dois conjuntos A = {0, 1, 2} e B = {–1, 0, 1}, qual é o resultado de A×B?

Todas as possibilidades de pares ordenados a partir desses conjuntos são A×B = {(0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -1), (2, 0), (2, 1)}. Isso pode ser constatado facilmente por meio da Figura 4.28.

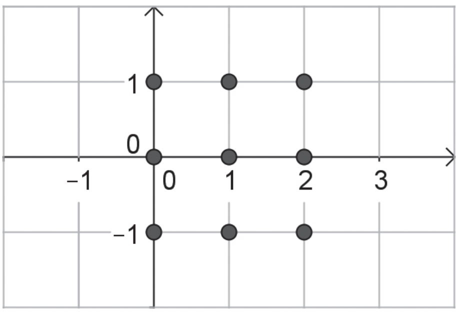
Figura 4.28 | Produto cartesiano de A por B



Fonte: Elaborada pelo autor.

Representando cada um desses pares ordenados em um sistema de eixos, teremos o apresentado na Figura 4.29.

Figura 4.29 | Produto cartesiano de A por B, representado num sistema de eixos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Faça você mesmo

1. Considere os dois conjuntos numéricos A = {1, 3, 6} e B = {2, 4}.

Determine:

a) A×B

b) B×A

c) A×A

d) B×B

Assimile

O termo cartesiano tem origem do nome *Cartesius*, que é o nome em latim do filósofo e matemático francês René Descartes, que foi o criador do produto cartesiano.

Exemplificando

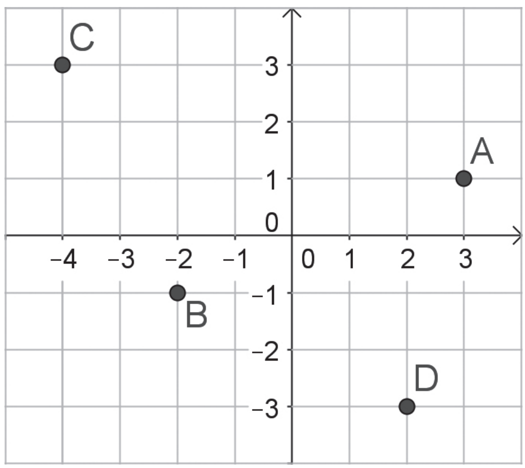
Observe o plano cartesiano da Figura 4.30 e determine as coordenadas dos pontos A, B, C e D.

Resolução:

Como a primeira coordenada do par ordenado é um número do eixo horizontal e a segunda coordenada é um número do eixo vertical, as coordenadas dos pontos são:

A(3, 1); B(–2, –1); C(–4, 3); D(2, –3).

Figura 4.30 | Plano cartesiano

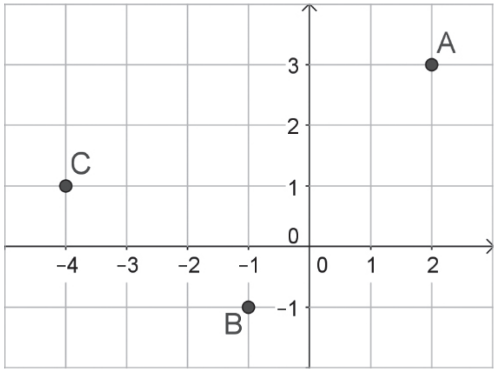


Fonte: Elaborada pelo autor.

Faça você mesmo

2. De acordo com a Figura 4.31, determine as coordenadas dos pontos A, B e C.

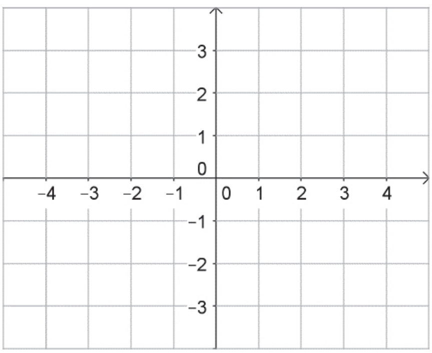
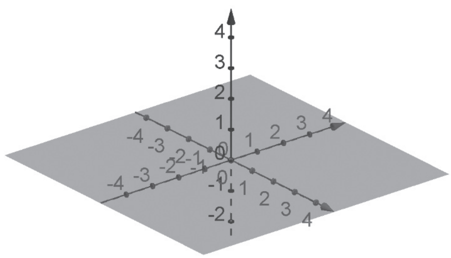
Figura 4.31 | Plano cartesiano com pontos A, B e C



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em matemática, é comum trabalharmos com o produto cartesiano considerando os eixos associados aos números reais. Neste caso, indicamos o produto cartesiano por $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ou também $\mathbb{R}^2$. Em $\mathbb{R}^2$, é comum dizermos que estamos trabalhando no espaço bidimensional (ou no plano); já em $\mathbb{R}^3$ dizemos que estamos trabalhando no espaço tridimensional.

Figura 4.32 | Plano e espaço

$\mathbb{R}^2$ (plano)	$\mathbb{R}^3$ (espaço)
	

Fonte: Elaborada pelo autor.

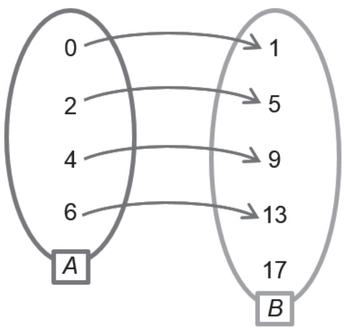
O conceito de produto cartesiano leva à ideia de relação. Podemos definir uma relação como sendo um subconjunto do produto cartesiano A×B e escrever: dados os conjuntos A e B, uma relação R de A em B, denotada $R: A \to B$ (lê-se: R de A em B), é um subconjunto de A×B, ou seja, $R \subset A \times B$. Para melhor entendermos, vejamos um exemplo.

Dados os conjuntos A = {0, 2, 4, 6} e B = {1, 5, 9, 13, 17}, considere a relação $R : A \to B$, tal que $R = \{(a,\ b) \mid b = 2a + 1,\ \text{com } a \in A \text{ e } b \in B\}$. Vejamos os cálculos no quadro a seguir:

Valores de a.	$b = 2a + 1$	Valores de b.
0	$b = 2 \cdot 0 + 1 = 1$	1
2	$b = 2 \cdot 2 + 1 = 5$	5
4	$b = 2 \cdot 4 + 1 = 9$	9
6	$b = 2 \cdot 6 + 1 = 13$	13

Logo, a relação é R = {(0, 1), (2, 5), (4, 9), (6, 13)}. A relação R pode ser visualizada no diagrama de Venn da Figura 4.33.

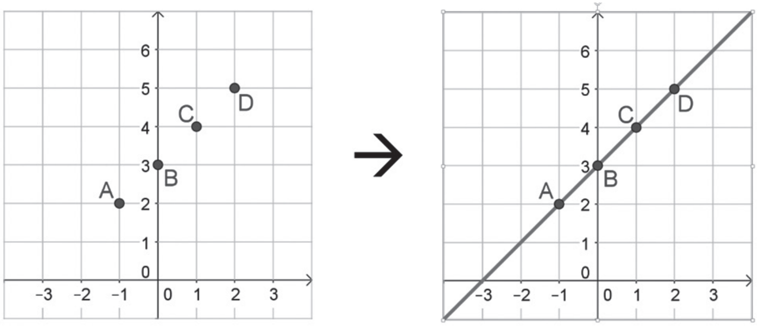
Figura 4.33 | Diagrama de relação



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em uma relação, os conjuntos também podem ser números reais. Para ilustrar, poderíamos ter uma relação $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $R = \{(a,\ b) \mid b = a + 3,\ \text{com } a, b \in \mathbb{R}\}$. Essa relação será composta por infinitos pares ordenados e podemos representá-la da seguinte maneira: R = {..., (–1, 2), ..., (0, 3), ..., (1, 4), ..., (2, 5), ...}, (o conjunto dos números reais é infinito, por isso as reticências). O gráfico dessa relação pode ser obtido esboçando os pontos calculados em um plano cartesiano e ligando-os com uma reta, para representar os pontos intermediários que não foram calculados, como na Figura 4.34.

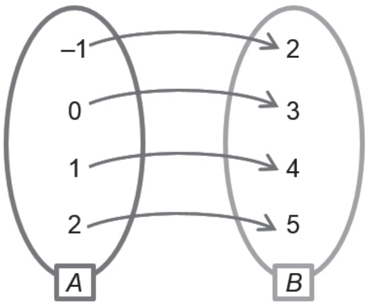
Figura 4.34 | Gráfico de relação



Fonte: Elaborada pelo autor.

Também, podemos representar a relação através do diagrama de Venn.

Figura 4.35 | Diagrama de relação



Fonte: O autor

Faça você mesmo

3. Considere uma relação $R:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $R=\{(a,b)\,|\,b=a-1,\ \text{com } a,b\in\mathbb{R}\}$. Faça um gráfico dessa relação, dando destaque aos pontos que relacionam os valores b associados aos valores 1, 2, 3 e 4 de a.

Sem medo de errar!

Para resolver o problema de Adriano, você pode proceder da seguinte maneira: imagine que seja possível descobrir alguma espécie de relação entre os valores da tabela. Para isso, analise-os novamente:

Dia	Total produzido (acumulado)
2º	240
4º	480
6º	720
11º	1320

Não é uma tarefa simples descobrir padrões numéricos para casos gerais, mas, para o caso apresentado por Adriano, você observará um padrão ao dividir o total produzido pela quantidade de dias decorridos. Veja:

Dia	Total produzido (acumulado)	Divisão
2º	240	240/2 = 120
4º	480	480/4 = 120
6º	720	720/6 = 120
11º	1320	1320/11 = 120

Observou o padrão?

Entretanto, se, ao dividirmos o total produzido pela quantidade de dias, obtemos 120, em todos os casos, ao multiplicarmos a quantidade de dias por 120, obteremos o total produzido! Correto? Isso nos leva a concluir que, para calcular a produção, pode-se utilizar a relação $R : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que $R = \{(a, b) \mid b = 120a\}$, ou seja, o segundo valor, b, é igual ao produto do primeiro, a, por 120. Desse modo, R relaciona os valores da primeira coluna (2º, 4º, 6º, 11º) com os da segunda coluna (240, 480, 720, 1320). Com essa relação, fica simples resolver o problema inicial: no 25º dia, a empresa dará conta de entregar o pedido de 3.000 unidades da peça solicitada? Basta determinar o valor b relacionado ao valor a = 25. Temos:

$$b = 120a \quad \Rightarrow \quad b = 120 \cdot 25 = 3000$$

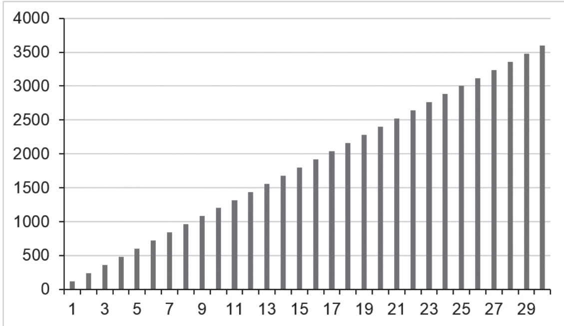
Portanto, é possível afirmar que a entrega do pedido de 3000 peças poderá ser realizada daqui a 25 dias. Deve ficar claro que nesse caso estamos desconsiderando quaisquer outros fatores que possam atrasar a produção.

Avançando na prática

Pratique mais!
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e, depois, compare-as com as de seus colegas.

<table>
<tr><th colspan="2">Gráfico</th></tr>
<tr><td>1. Competência de fundamentos de área</td><td>Conhecer métodos e técnicas de operações matemáticas, para desenvolver raciocínio lógico, crítico e analítico de apoio à tomada de decisão.</td></tr>
<tr><td>2. Objetivos de aprendizagem</td><td>Compreender o conceito de produto cartesiano, bem como o de relação.</td></tr>
<tr><td>3. Conteúdos relacionados</td><td>Plano cartesiano, quadrante, coordenadas, relação.</td></tr>
<tr><td>4. Descrição da SP</td><td>Depois de resolver o seu problema com a produção, Adriano imaginou se seria possível construir uma espécie de gráfico para que pudesse visualizar o comportamento de sua produção ao longo dos dias do mês. Como Adriano poderia criar esse gráfico?</td></tr>
<tr><td>5. Resolução da SP</td><td>Como agora Adriano possui uma fórmula que lhe dá imediatamente a quantidade produzida até uma determinada data; é possível inserir todos esses valores em uma planilha eletrônica. Para isso, basta considerar a primeira coluna da planilha como sendo os dias do mês e a segunda coluna como a sendo a quantidade produzida até a respectiva data. Após inserir a fórmula obtida na segunda coluna, obtém-se os valores do quadro a seguir:
<table>
<tr><th>Dia (a)</th><th>Quantidade produzida até o dia a</th><th>Dia (a)</th><th>Quantidade produzida até o dia a</th></tr>
<tr><td>1</td><td>120</td><td>16</td><td>1920</td></tr>
<tr><td>2</td><td>240</td><td>17</td><td>2040</td></tr>
<tr><td>3</td><td>360</td><td>18</td><td>2160</td></tr>
<tr><td>4</td><td>480</td><td>19</td><td>2280</td></tr>
<tr><td>5</td><td>600</td><td>20</td><td>2400</td></tr>
<tr><td>6</td><td>720</td><td>21</td><td>2520</td></tr>
<tr><td>7</td><td>840</td><td>22</td><td>2640</td></tr>
<tr><td>8</td><td>960</td><td>23</td><td>2760</td></tr>
<tr><td>9</td><td>1080</td><td>24</td><td>2880</td></tr>
<tr><td>10</td><td>1200</td><td>25</td><td>3000</td></tr>
<tr><td>11</td><td>1320</td><td>26</td><td>3120</td></tr>
<tr><td>12</td><td>1440</td><td>27</td><td>3240</td></tr>
<tr><td>13</td><td>1560</td><td>28</td><td>3360</td></tr>
<tr><td>14</td><td>1680</td><td>29</td><td>3480</td></tr>
<tr><td>15</td><td>1800</td><td>30</td><td>3600</td></tr>
</table>
O gráfico correspondente é apresentado na Figura 4.36.</td></tr>
</table>

Figura 4.36 | Quantidade produzida (acumulado)



Fonte: Elaborada pelo autor.

No eixo horizontal, está a marcação do dia do mês e no eixo vertical as quantidades produzidas. A altura de cada barra indica a quantidade acumulada até o dia correspondente.

Faça valer a pena!

1. Observe a Figura 4.37. Os pontos A e B estão, respectivamente, nos quadrantes:

a) 2º e 4º

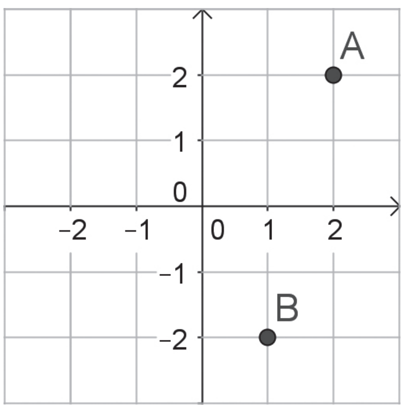
b) 2º e 3º

c) 3º e 4º

d) 1º e 4º

e) 1º e 3º

Figura 4.37 | Plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

2. Considere os pontos A(−2, 3) e B(4, −5). De acordo com as suas coordenadas, podemos dizer que eles estão localizados, respectivamente, nos quadrantes:

a) 2º e 4º

b) 2º e 1º

c) 2º e 3º

d) 3º e 4º

e) 1º e 3º

3. Considere os conjuntos A = {2, 4, 5} e B = {0, 9}. O resultado do produto cartesiano B×A é:

a) B×A = {(2, 0), (9, 2), (4, 0), (9, 4), (5, 0), (5, 9)}

b) B×A = {(0, 0), (2, 9), (4, 0), (4, 9), (0, 0), (5, 9)}

c) B×A = {(0, 2), (0, 4), (0, 5), (9, 2), (9, 4), (9, 5)}

d) B×A = {(2, 2), (2, 9), (4, 4), (4, 9), (5, 0), (5, 9)}

e) B×A = {(2, 0), (9, 2), (4, 0), (9, 4), (0, 5), (5, 9)}

Referências

ADAMI, Adriana Miorelli et al. **Pré-cálculo**: recurso eletrônico. Porto Alegre: Bookman, 2015.

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Relações e funções**. São Paulo: Livraria Nobel S. A., 1972.

BEZERRA, Manoel Jairo. **Curso de matemática**: para os cursos de segundo grau. 32. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975.

COPI, Irving Marmer. **Introdução à lógica**. 2. ed. São Paulo: Mestre Jou, 1978.

MORAIS, José Luiz de. **Matemática e lógica para concursos**. São Paulo: Saraiva, 2012.

SAFIER, Fred. **Pré-cálculo**: recurso eletrônico. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.

UFRJ. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. **Projeto Novas Tecnologias no Ensino**. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/Cap112.htm>. Acesso em: 08 mar. 2016.

WALKENBACH, John. **Microsoft Excel 2010 (recurso eletrônico)**: dicas e truques. Tradução de Edson Furmanklewicz. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

ISBN 978-85-8482-465-6