

Algorithmes distribués et dimension asymptotique

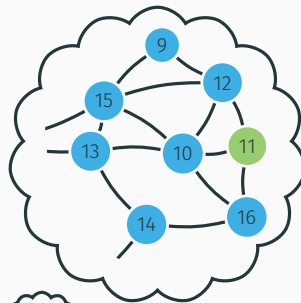
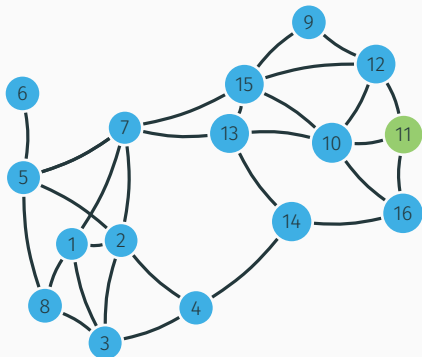
Marthe Bonamy ¹ Cyril Gavoille ¹ Timothé Picavet ¹ Alexandra Wesolek ²

¹LaBRI, Bordeaux

²TU Berlin

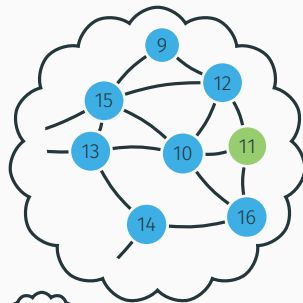
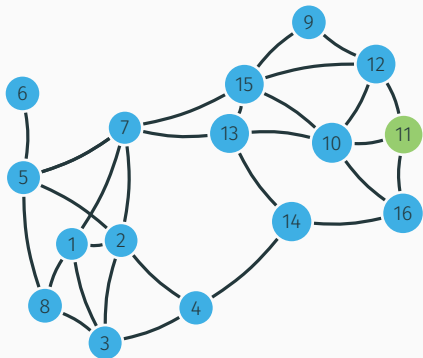
Algorithmes LOCAL

Chaque sommet voit son voisinage à distance T et décide sa valeur de retour.



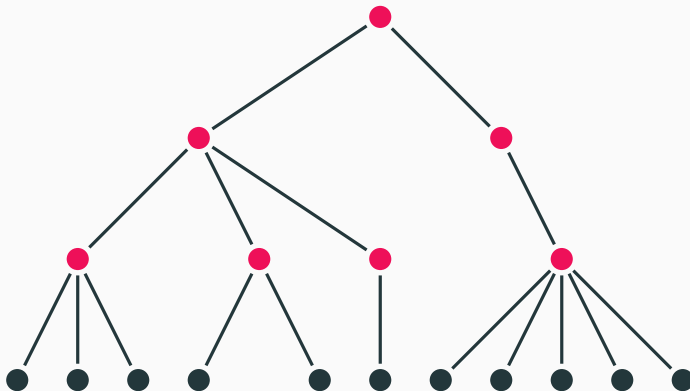
Algorithmes LOCAL

Chaque sommet voit son voisinage à distance T et décide sa valeur de retour.

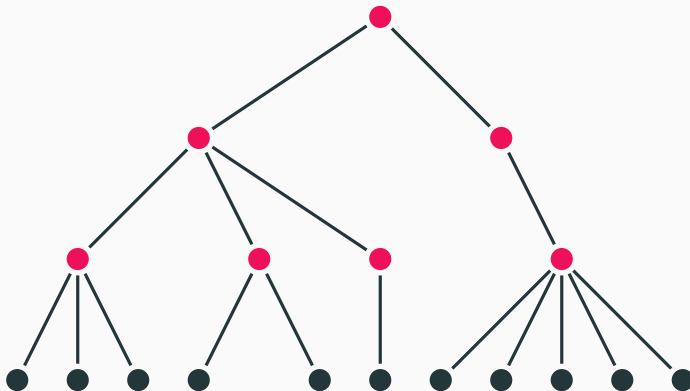


Algo = \mathcal{A} : voisinage à distance $T \mapsto$ valeur de retour locale

Exemple 1: les arbres



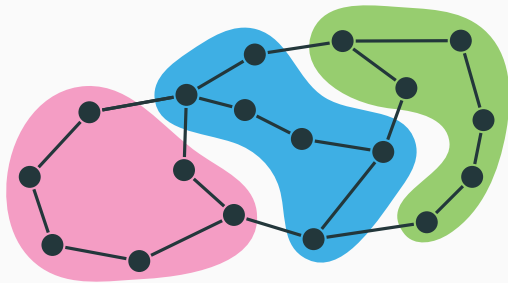
Exemple 1: les arbres



Theorem

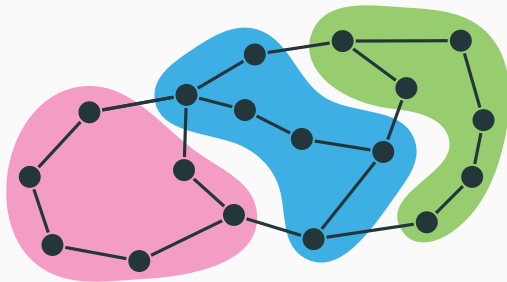
$$|\{v \in V(T) \mid d(v) \geq 2\}| \leq 3 \cdot \text{MDS}(T)$$

Exemple 2: les graphes de grande maille



Réutiliser l'analyse des arbres ?

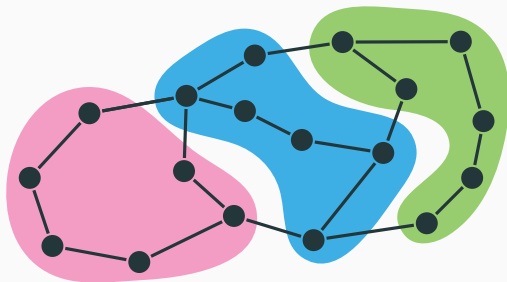
Exemple 2: les graphes de grande maille



Réutiliser l'analyse des arbres ?

- Tout sommet est dans une patate

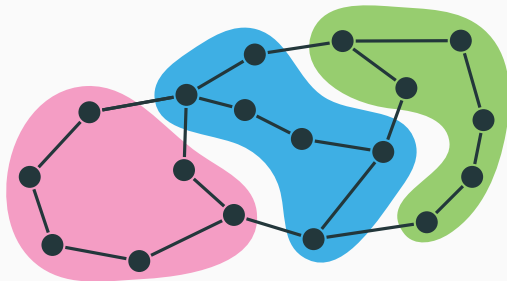
Exemple 2: les graphes de grande maille



Réutiliser l'analyse des arbres ?

- Tout sommet est dans une patate
- Diamètre \leq maille

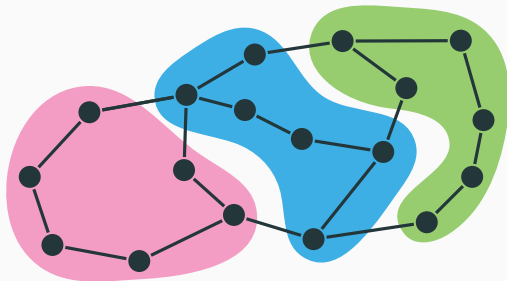
Exemple 2: les graphes de grande maille



Réutiliser l'analyse des arbres ?

- Tout sommet est dans une patate
- Diamètre \leq maille
- Espacement entre mêmes couleurs \Rightarrow en parallèle

Exemple 2: les graphes de grande maille



Réutiliser l'analyse des arbres ?

- Tout sommet est dans une patate
- Diamètre \leq maille
- Espacement entre mêmes couleurs \Rightarrow en parallèle
- Nombre fini de couleurs

Dimension asymptotique

La dimension asymptotique de \mathcal{C} est d si

$\exists f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \forall G \in \mathcal{C}, \forall r, \exists C_1, C_2, \dots, C_{d+1} \subseteq \mathcal{P}(V(G))$, tels que

Dimension asymptotique

La dimension asymptotique de \mathcal{C} est d si

$\exists f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \forall G \in \mathcal{C}, \forall r, \exists C_1, C_2, \dots, C_{d+1} \subseteq \mathcal{P}(V(G))$, tels que

- Couverture: $V(G) = \bigcup_i \bigcup_{B \in C_i} B$



Dimension asymptotique

La dimension asymptotique de \mathcal{C} est d si

$\exists f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \forall G \in \mathcal{C}, \forall r, \exists C_1, C_2, \dots, C_{d+1} \subseteq \mathcal{P}(V(G))$, tels que

- **Couverture:** $V(G) = \bigcup_i \bigcup_{B \in C_i} B$



- **Disjointude:** $\forall B, B' \in C_i$ distincts, $\text{dist}(B, B') > r$



Dimension asymptotique

La dimension asymptotique de \mathcal{C} est d si

$\exists f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \forall G \in \mathcal{C}, \forall r, \exists C_1, C_2, \dots, C_{d+1} \subseteq \mathcal{P}(V(G))$, tels que

- **Couverture:** $V(G) = \bigcup_i \bigcup_{B \in C_i} B$



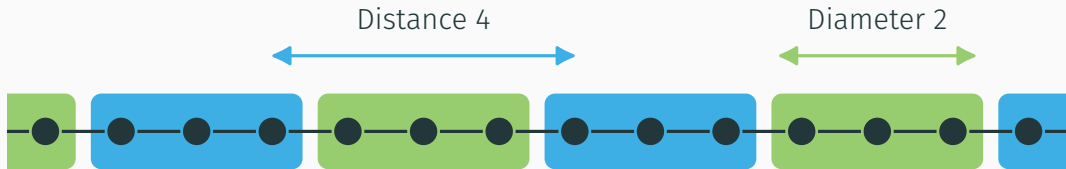
- **Disjointude:** $\forall B, B' \in C_i$ distincts, $\text{dist}(B, B') > r$



- **Bornitude:** $\forall B \in C_i, \text{diam}_G(B) \leq f(r)$

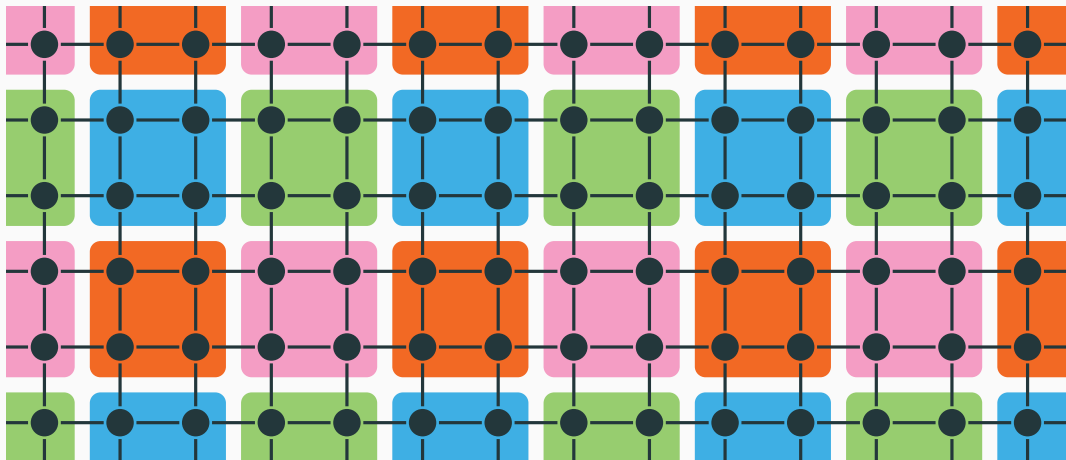


Exemple 1: le chemin



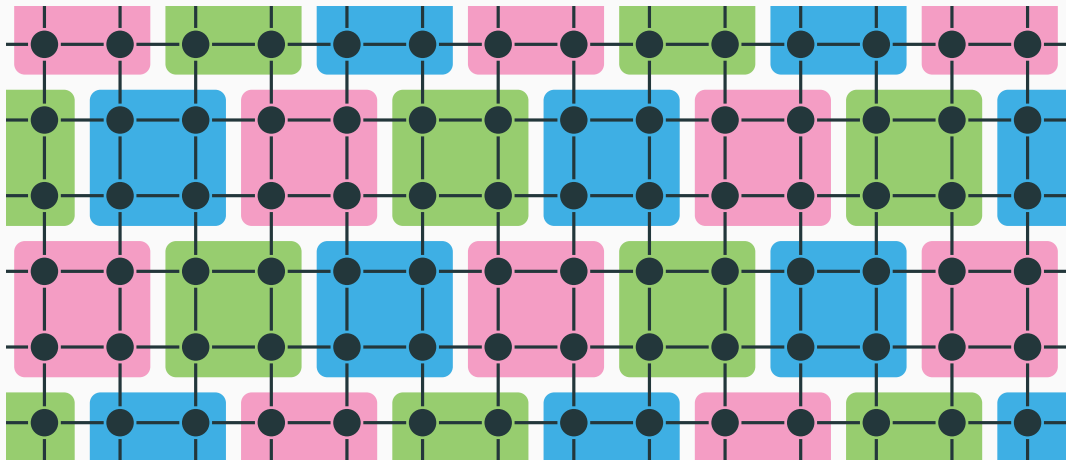
Dimension = 1

Exemple 2: la grille – essai 1

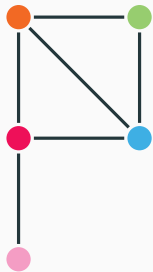


Dimension ≤ 3

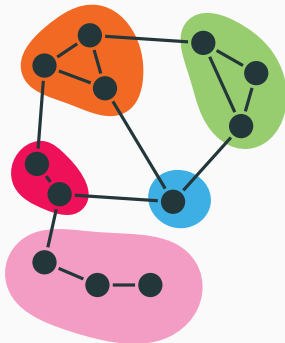
Exemple 2: la grille – essai 2



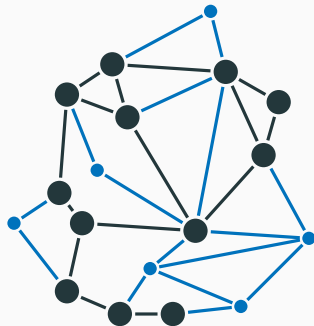
Dimension = 2 !



H



H'



G

H est un mineur de G

Theorem (Bonamy, Bousquet, Esperet, Groenland, Liu, Pirot, Scott, 2020)

Toute classe interdisant un mineur a dimension asymptotique ≤ 2 .

Application: algorithmique distribuée

Comment utiliser la théorie des graphes en algorithmique distribuée ?

Application: algorithmique distribuée

Comment utiliser la théorie des graphes en algorithmique distribuée ?

Concept global



Concept local

Application: algorithmique distribuée

Comment utiliser la théorie des graphes en algorithmique distribuée ?

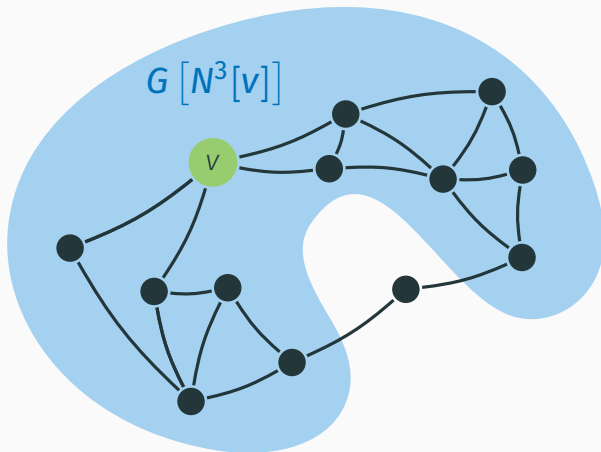
Concept global



Concept local

Définition

v est un *cutvertex*
 r -local si v est un
cutvertex de $G[N^r[v]]$.



Theorem

Pour tout graphe G , $\# \text{cutvertices} \leq 3 \text{MDS}(G)$.



Theorem

Soit \mathcal{C} de dimension asymptotique d .

Alors $\forall r \geq r(\mathcal{C})$, $\# \text{cutvertices } r\text{-local} \leq 3(d + 1) \text{MDS}(G)$.

Theorem

Pour tout graphe G et $S \subseteq V(G)$, $\# \text{cutvertices} \in S \leq 3 \text{MDS}(G, N[S])$.



Theorem

Soit \mathcal{C} de dimension asymptotique d .

Alors $\forall r \geq r(\mathcal{C})$, $\# \text{cutvertices } r\text{-local} \leq 3(d + 1) \text{MDS}(G)$.

Dimension d , fonction f : ensembles C_1, C_2, \dots, C_{d+1}
pour $r = 5$.

Preuve

Dimension d , fonction f : ensembles C_1, C_2, \dots, C_{d+1}

pour $r = 5$.

Soit S de weak-diameter $f(5)$.

Preuve

Dimension d , fonction f : ensembles C_1, C_2, \dots, C_{d+1}
pour $r = 5$.

Soit S de weak-diameter $f(5)$.

$v \in S$ un cutvertex $(f(5) + 2)$ -local.

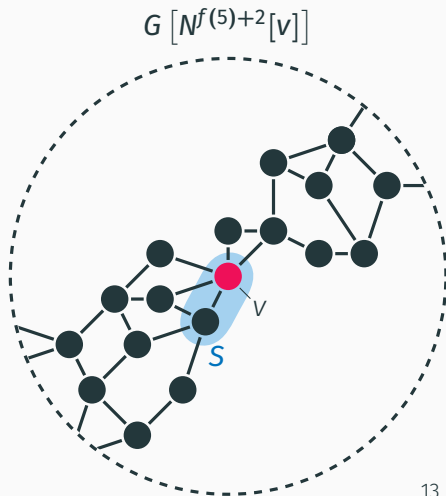
Preuve

Dimension d , fonction f : ensembles C_1, C_2, \dots, C_{d+1}

pour $r = 5$.

Soit S de weak-diameter $f(5)$.

$v \in S$ un cutvertex $(f(5) + 2)$ -local.



Preuve

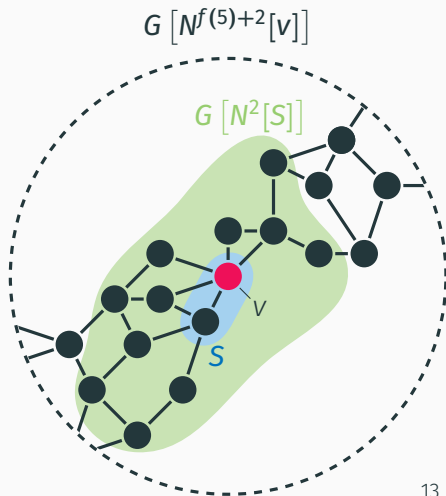
Dimension d , fonction f : ensembles C_1, C_2, \dots, C_{d+1}

pour $r = 5$.

Soit S de weak-diameter $f(5)$.

$v \in S$ un cutvertex $(f(5) + 2)$ -local.

Claim: $N^2[S] \subseteq N^{f(5)+2}[v]$.



Preuve

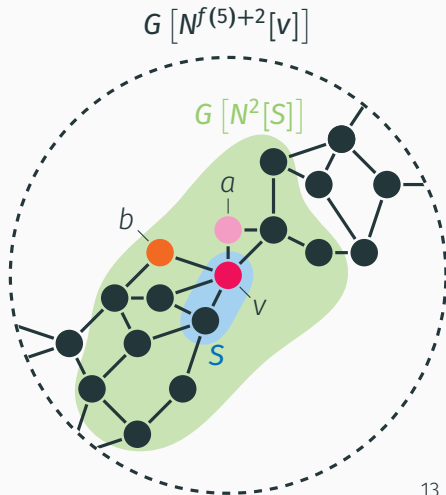
Dimension d , fonction f : ensembles C_1, C_2, \dots, C_{d+1}
pour $r = 5$.

Soit S de weak-diameter $f(5)$.

$v \in S$ un cutvertex $(f(5) + 2)$ -local.

Claim: $N^2[S] \subseteq N^{f(5)+2}[v]$.

Claim: v est un cutvertex de $G[N^2[S]]$ (sépare a de b).



Preuve

Dimension d , fonction f : ensembles C_1, C_2, \dots, C_{d+1}
pour $r = 5$.

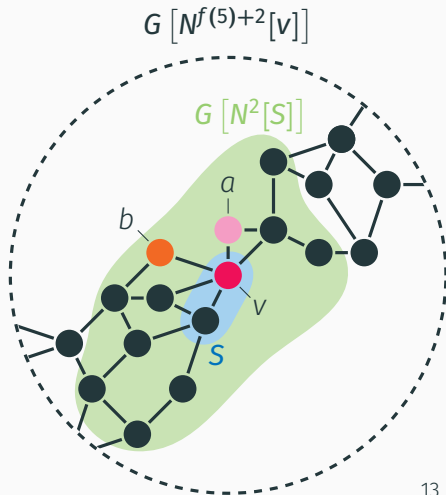
Soit S de weak-diameter $f(5)$.

$v \in S$ un cutvertex $(f(5) + 2)$ -local.

Claim: $N^2[S] \subseteq N^{f(5)+2}[v]$.

Claim: v est un cutvertex de $G[N^2[S]]$ (sépare a de b).

Claim: $\# \text{cutvertex in } S \leq 3 \text{ MDS}(G[N^2[S]], N[S]) \leq 3 \text{ MDS}(G, N[S])$.



Preuve

Dimension d , fonction f : ensembles C_1, C_2, \dots, C_{d+1}
pour $r = 5$.

Soit S de weak-diameter $f(5)$.

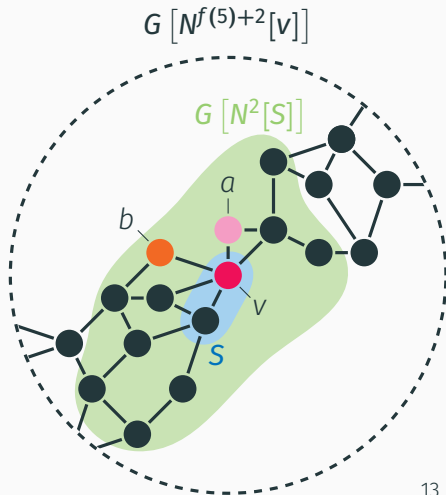
$v \in S$ un cutvertex $(f(5) + 2)$ -local.

Claim: $N^2[S] \subseteq N^{f(5)+2}[v]$.

Claim: v est un cutvertex de $G[N^2[S]]$ (sépare a de b).

Claim: $\# \text{cutvertex in } S \leq 3 \text{ MDS}(G[N^2[S]], N[S]) \leq 3 \text{ MDS}(G, N[S])$.

$$\Downarrow$$
$$\# \text{cutvertex } (f(5) + 2)\text{-local} \leq \sum_{i=1}^{d+1} \sum_{S \in C_i} 3 \cdot \text{MDS}(G, N[S])$$



$$\# \text{cutvertex } (f(5) + 2)\text{-local} \leq \sum_{i=1}^{d+1} \sum_{S \in C_i} 3 \cdot \text{MDS}(G, \underbrace{N[S]}_{\text{à distance 3}})$$

$$\# \text{cutvertex } (f(5) + 2)\text{-local} \leq \sum_{i=1}^{d+1} \sum_{S \in C_i} 3 \cdot \text{MDS}(G, \underbrace{N[S]}_{\text{à distance 3}})$$

$(N^2[S])$ sont disjoints)

$$\# \text{cutvertex } (f(5) + 2)\text{-local} \leq \sum_{i=1}^{d+1} 3 \cdot \text{MDS}(G) = 3(d + 1) \cdot \text{MDS}(G).$$

Theorem

Soit \mathcal{C} de dimension asymptotique d .

Alors $\exists r = r(\mathcal{C}), \#\text{sommets} \in \text{2-cut } r\text{-local} \leq 8(d + 1) \text{MVC}(G)$.

Theorem

S'il existe un algorithme LOCAL:

- *α -approximation de MDS*
- *sur \mathcal{C}*
- *en temps constant r*
- *+ condition technique*

Theorem

S'il existe un algorithme LOCAL:

- α -approximation de MDS
- sur \mathcal{C}
- en temps constant r
- + condition technique

et si \mathcal{D} est:

- $\Omega(r)$ -localement \mathcal{C}
- de dimension asymptotique d

Theorem

S'il existe un algorithme LOCAL:

- α -approximation de MDS
- sur \mathcal{C}
- en temps constant r
- + condition technique

et si \mathcal{D} est:

- $\Omega(r)$ -localement \mathcal{C}
- de dimension asymptotique d

alors il existe une $\alpha(d + 1)$ -approximation locale de MDS sur \mathcal{D} en temps r .

Theorem

*Sur graphes sans le mineur $K_{2,t}$, il existe une $\mathcal{O}(1)$ -approximation (où la constante est **indépendante de t**) de Minimum Dominating Set dans le modèle LOCAL, en $f(t)$ rondes.*

Theorem

*Sur graphes sans le mineur $K_{2,t}$, il existe une $\mathcal{O}(1)$ -approximation (où la constante est **indépendante de t**) de Minimum Dominating Set dans le modèle LOCAL, en $f(t)$ rondes.*

Ancienne borne sur les classes sans mineur $K_{3,t}$: $(2 + \varepsilon) \cdot (t + 4)$ en $g(\varepsilon, t)$ rondes (Heydt, Kublenz, Ossona de Mendez, Siebertz, Vigny 2022).

Conclusion et perspectives

Récap: 2 étapes pour passer de global à local

Conclusion et perspectives

Récap: 2 étapes pour passer de global à local

🔍 Relativiser le résultat sur tous les sous-ensembles S :

$$\forall G, \forall S \subseteq V(G), |\{\text{cutvertices}\} \cap S| \leq 3 \cdot \text{MDS}(G, N[S])$$

Conclusion et perspectives

Récap: 2 étapes pour passer de global à local

🔍 Relativiser le résultat sur tous les sous-ensembles S :

$$\forall G, \forall S \subseteq V(G), |\{\text{cutvertices}\} \cap S| \leq 3 \cdot \text{MDS}(G, N[S])$$

🔧 Appliquer la dimension asymptotique

Conclusion et perspectives

Récap: 2 étapes pour passer de global à local

🔍 Relativiser le résultat sur tous les sous-ensembles S :

$$\forall G, \forall S \subseteq V(G), |\{\text{cutvertices}\} \cap S| \leq 3 \cdot \text{MDS}(G, N[S])$$

🔧 Appliquer la dimension asymptotique

Dimension asymptotique \rightarrow ensemble de petit diamètre S

Conclusion et perspectives

Récap: 2 étapes pour passer de global à local

🔍 Relativiser le résultat sur tous les sous-ensembles S :

$$\forall G, \forall S \subseteq V(G), |\{\text{cutvertices}\} \cap S| \leq 3 \cdot \text{MDS}(G, N[S])$$

🔨 Appliquer la dimension asymptotique

Dimension asymptotique \rightarrow ensemble de petit diamètre S
cutvertex local $\in S \implies$ cutvertex dans $G[S]$

Conclusion et perspectives

Récap: 2 étapes pour passer de global à local

🔍 Relativiser le résultat sur tous les sous-ensembles S :

$$\forall G, \forall S \subseteq V(G), |\{\text{cutvertices}\} \cap S| \leq 3 \cdot \text{MDS}(G, N[S])$$

🔧 Appliquer la dimension asymptotique

Dimension asymptotique \rightarrow ensemble de petit diamètre S

cutvertex local $\in S \implies$ cutvertex dans $G[S]$

Union bound pour conclure 😊

Conclusion et perspectives

Récap: 2 étapes pour passer de global à local

🔍 Relativiser le résultat sur tous les sous-ensembles S :

$$\forall G, \forall S \subseteq V(G), |\{\text{cutvertices}\} \cap S| \leq 3 \cdot \text{MDS}(G, N[S])$$

🔧 Appliquer la dimension asymptotique

Dimension asymptotique \rightarrow ensemble de petit diamètre S

cutvertex local $\in S \implies$ cutvertex dans $G[S]$

Union bound pour conclure 😊

? Sans mineur $H \rightarrow \mathcal{O}(\text{pw}(H))$ -approximation locale en temps constant ?

Conclusion et perspectives

Récap: 2 étapes pour passer de global à local

🔍 Relativiser le résultat sur tous les sous-ensembles S :

$$\forall G, \forall S \subseteq V(G), |\{\text{cutvertices}\} \cap S| \leq 3 \cdot \text{MDS}(G, N[S])$$

🔧 Appliquer la dimension asymptotique

Dimension asymptotique \rightarrow ensemble de petit diamètre S

cutvertex local $\in S \implies$ cutvertex dans $G[S]$

Union bound pour conclure 😊

? Sans mineur $H \rightarrow \mathcal{O}(\text{pw}(H))$ -approximation locale en temps constant ?

😊 Merci ! 😊