Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра прикладной и вычислительной математики

Исследование наследственного класса рёберных графов двудольных графов

Выпускная квалификационная работа
по направлению подготовки специалистов
01.05.01 Фундаментальные математика и механики

Выполнил:
студент группы МАС-301-О
Горбунов Никита Викторович

____
(подпись студента)

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Ильев Виктор Петрович

____
(подпись руководителя)

Омск 2018

Содержание

Введение

Целью дипломной работы является исследование наследственных классов графов в терминах запрещённых подграфов. Особое внимание уделено исследованию наследственного класса рёберных графов двудольных графов.

Актуальность темы дипломной работы объясняется тем, что исследуемый класс рёберных графов нашёл применение в доказательстве "Сильной теоремы о совершенных графах". В 1963 году в статье Бержа была высказана гипотеза об эквивалентности классов совершенных графов и графов Бержа. Гипотеза была доказана в 2002 году, как "Сильная теорема о совершенных графах" и опубликована в 2006 году М.Чудновской, Н.Робертсоном, П.Сеймуром и Р.Томасом [8].

Кроме того, рёберные графы двудольных графов играют важную роль в характеризации графов баз матроидов [10].

Пусть $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ – неориентированные графы. Графы G и G' называются *изоморфными*, если существует биекция $\varphi : V \to V'$, такая, что $xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$ при всех $x, y \in V$. Если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$, то G' называется *подграфом* графа G, обозначается $G' \subseteq G$.

Множество графов, замкнутое относительно изоморфизма, называется *классом* графов.

Если $G' \subseteq G$ и G' содержит все рёбра $xy \in E$ при $x, y \in V'$, то G' – *порождённый* подграф G.

Класс графов, замкнутый относительно операции удаления вершин, называется *наследственным.* Иначе этот класс может быть определён в терминах запрещённых порождённых подграфов.

Если X класс графов, то через *Forb(X)* обозначается класс всех графов, не содержащих порождённых подграфов, изоморфных графам из X. Графы из X называются *запрещёнными* порождёнными подграфами. Верен следующий критерий наследственности класса графов. Аналогичное утверждение для случая миноров можно найти в книге Дистеля [4].

Теорема 1. *Класс графов Y является наследственным классом тогда и только тогда, когда $Y = Forb(X)$ для некоторого X.*

Наследственный класс графов называется *монотонным*, если он замкнут относительно операций удаления вершин и рёбер. Иначе он может быть определён в терминах запрещённых подграфов, необязательно порождённых.

Теорема 2. *Класс графов Y является монотонным наследственным тогда и только тогда, когда Y не содержит подграфов, изоморфных графам некоторого класса X.*

Запрещённый порождённый подграф является *минимальным*, если при удалении любой вершины он перестаёт быть запрещённым. Запрещённый подграф является *минимальным*, если при удалении любой вершины или ребра он перестаёт быть запрещённым.

В данной дипломной работе будут рассмотрены примеры наследственных классов графов, дано их описание через запрещённые подграфы.

В параграфе 1 приведены минимальные запрещённые подграфы для основных классов графов. В параграфе 2.1 подробнее рассмотрены рёберные графы. В параграфе 2.2 даётся введение в класс рёберных графов двудольных графов. В параграфе 2.3 найдены запрещённые подграфы для класса рёберных графов двудольных графов.

Далее будут рассматриваться только *обыкновенные графы*, т.е. графы без петель и кратных рёбер.

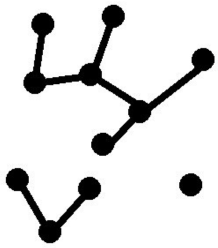

Рис. 1: Лес

1 Примеры наследственных классов графов

1.1 Леса

Граф называется *ациклическим*, если в нём нет циклов. *Дерево* – это связный ациклический граф. Каждый граф, не содержащий циклов, называется *лесом* (рис. 1).

Маршрутом в графе G называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер $v_0, e_1, v_1, ..., v_{n-1}, e_n, v_n$ такая, что $e_i = v_{i-1}v_i$ для любого i. *Простой цепью* в графе G называется маршрут, в котором все вершины различны. Простая цепь с n вершинами обозначается P_n. Замкнутая цепь называется *циклом.* Замкнутый маршрут называется *простым циклом*, если все его n вершин различны и $n \geq 3$. Простой цикл с n вершинами обозначается C_n.

Класс всех лесов является монотонным наследственным классом графов. Минимальными запрещёнными подграфами в классе лесов являются простые циклы.

1.2 Двудольные графы

Граф $G = (V, E)$ называется *двудольным*, если V допускает такое разбиение на два подмножества V_1 и V_2 (*доли*), при котором концы каждого ребра лежат в разных долях (рис. 2). Если каждая вершина множества V_1 смежна с каждой вершиной из мно-

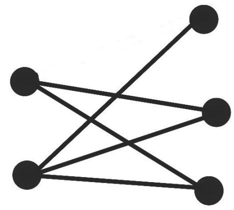

Рис. 2: Двудольный граф

жества V_2, то такой граф называется *полным двудольным.* Если при этом множество V_1 содержит m вершин, а множество V_2 – n вершин, то такой граф обозначается $K_{m,n}$. *Звездой* называется полный двудольный граф $K_{1,n}$.

Класс двудольных графов является монотонным наследственным классом. Минимальными запрещеными подграфами в классе двудольных графов являются все простые циклы нечётной длины. Последнее верно в силу следующего известного критерия двудольности графа.

Теорема 3 (Кёниг)**.** *Граф двудолен, если и только если он не содержит циклов нечётной длины.*

Доказательство данного критерия можно найти в книге Ф.Харари [5].

1.3 Клики

Регулярный граф – граф, степени всех вершин которого равны. *Пустым графом* называется регулярный граф степени 0, то есть граф без рёбер. Обозначается O_n, где n – количество вершин. *Клика* – полный граф (рис. 3). Клика с n вершинами обозначается K_n. Класс всех клик является наследственным классом. Единственным минимальным запрещённым порождённым подграфом для класса клик является пустой двухвершинный граф O_2.

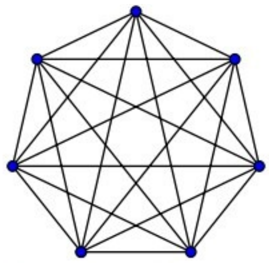

Рис. 3: Клика K_7

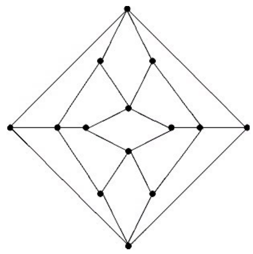

Рис. 4: Планарный граф

1.4 Планарные графы

Говорят, что граф *укладывается* на плоскости, если его можно нарисовать на плоскости так, что никакие два его ребра не пересекаются вне вершин.

Граф называется *планарным*, если его можно уложить на плоскости (рис. 4). Два графа называются *гомеоморфными*, если их можно получить из одного графа с помощью последовательности подразбиений рёбер (рис. 5).

Класс планарных графов является монотонным наследственным. В следующем критерии планарности графа описаны все минимальные запрещённые подграфы для класса планарных графов.

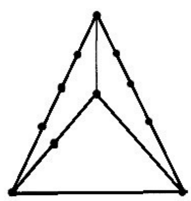

Рис. 5: Граф, гомеоморфный графу K_4

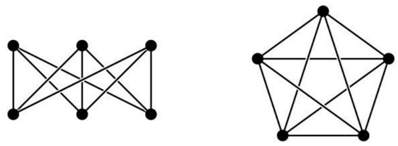

Рис. 6: Графы $K_{3,3}$ и K_5

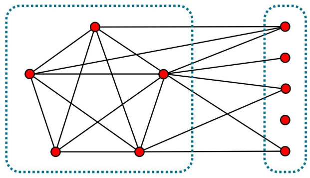

Рис. 7: Расщепляемый граф

Теорема 4 (Понтрягин-Куратовский). *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$ (рис. 6).*

1.5 Расщепляемые графы

Множество вершин является *независимым*, если никакие два его элемента несмежны. *Расщепляемый* граф – это граф, множество вершин которого можно разложить на клику и независимое множество (рис. 7).

Класс расщепляемых графов является наследственным. Минимальными запрещёнными порождёнными подграфами являются графы изоморфные C_4, C_5 и $K_2 \cup K_2$ (дополнение к графу C_4) [9].

1.6 Кёниговы графы

Для определения кёнигова графа нам понадобятся следующие определения. Пусть X – множество графов на n вершинах. *X-упаковкой* графа G называется множество его непересекающихся порождённых подграфов, каждый из которых изоморфен какому-нибудь графу из X. Наибольшее число подграфов в X-упаковке графа G обозначается через $pack(X;G)$. X-*покрытием* графа G называется множество вершин, после удаления которых получается граф, не содержащий порождённых подграфов, принадлежащих X. Наименьшее число вершин в X-покрытии графа будет обозначаться через $cover(X;G)$. Граф G называется *кёниговым графом* относительно множества X, если для любого его порождённого подграфа H выполняется равенство $pack(X;H) = cover(X;H)$ (рис. 8).

Кёниговы графы можно определить и в терминах запрещённых подграфов [1]. Граф G является кёниговым, если он не содержит порождённых подграфов из множества $A \cup B \cup C \cup D \cup E$, где

A – множество состоящее из трёх графов: $K_1 * P_4, K_1 * (K_1 + P_3), K_2 * O_3$ ("$+$" в данном случае просто объединение графов с непересекающимися множествами вершин, "$*$" – к сумме добавляются все ребра, соединяющие вершины из разных слагаемых (рис. 9));

B – множество всех циклов, длина которых не кратна 3;

C – множество всех графов, которые можно получить добавлением к циклу, длина которого кратна 3, двух вершин, не смежных между собой, каждая из которых соединяется ребром с одной вершиной цикла, причем расстояние между этими вершинами должно быть не кратно 3;

D – множество всех графов, которые можно получить добавлением к циклу, длина которого кратна 3, двух вершин, не смежных между собой, одна из которых соединяется ребром с одной вершиной цикла, а другая с тремя подряд идущими вершинами цикла, причём расстояние между добавленными вершинами, должно быть сравнимо с 1 по модулю 3;

E – множество всех графов, которые можно получить из циклов длины, кратной 3, путём замены 2-кликами трёх вершин цик-

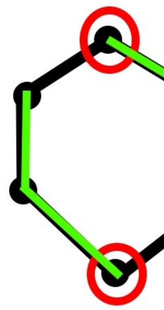

Рис. 8: Кенигов граф. $cover(X, H) = pack(X, H) = 2$. $X = K_{1,2}$

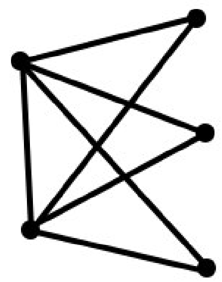

Рис. 9: $K_2 * O_3$

ла, разбивающих цикл на отрезки, длина каждого из которых не меньше 4 и сравнима с 1 по модулю 3.

1.7 Блочные леса

Связным графом называется граф, в котором любая пара вершин соединена простой цепью. *Компонентой связности* графа G называется максимальный связный подграф графа G. *Шарниром* называется вершина графа, при удалении которой количество компонент связности возрастает.

Связный граф, не содержащий шарниров, называется *блоком*. *Блочный лес* – это множество неориентированных графов, в которых каждый блок является кликой (рис. 10).

Класс блочных лесов является наследственным. Запрещёнными порождёнными подграфами в нём являются $K_4 - e$ (рис. 11) и простые циклы длины 4 и более [6].

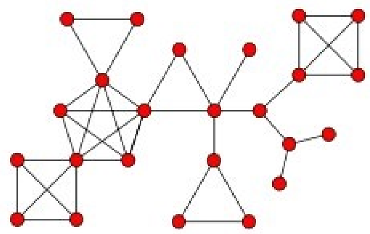

Рис. 10: Блочный лес

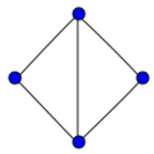

Рис. 11: $K_4 - e$

2 Рёберные графы

2.1 Характеризация рёберных графов

Ещё одним примером наследственного класса графов является класс рёберных графов.

Рёберным графом произвольного графа G называется граф $L(G)$, множество вершин которого взаимно однозначно соответствует множеству рёбер графа G, и две вершины в $L(G)$ смежны тогда и только тогда, когда соответствующие рёбра в G имеют общую вершину (рис. 12).

Граф G называется *рёберным графом*, если он изоморфен

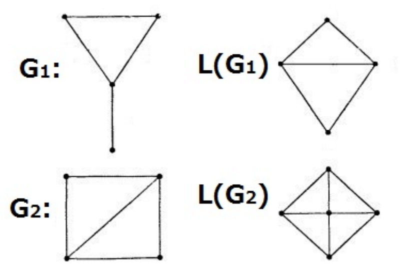

Рис. 12: Рёберные графы

реберному графу $L(H)$ некоторого графа H.

Теорема 5. *[5] Если G, G' n-вершинные графы, где $n > 4$, то любой изоморфизм φ_1 графа $L(G)$ на граф $L(G')$ порождается точно одним изоморфизмом графа G на граф G'.*

Следствие 1. *[5] Пусть G и G' – связные графы, рёберные графы которых изоморфны. Графы G и G' изоморфны всегда, кроме случая, когда один из них есть K_3, а другой $K_{1,3}$.*

Следствие 2. *[5] Связный граф G изоморфен своему рёберному графу $L(G)$ тогда и только тогда, когда G – простой цикл.*

Треугольник T графа G (т.е. подграф, изоморфный K_3) называется *нечётным*, если в G имеется вершина, смежная с нечётным числом вершин в T, и *чётным* в противном случае.

Теорема 6. *[5] Следующие утверждения эквивалентны:*
(1) G – реберный граф;
(2) Рёбра графа G можно разбить на полные подграфы таким образом, чтобы ни одна из вершин не принадлежала более чем двум подграфам;
(3) Граф G не содержит звезду $K_{1,3}$ в качестве порождённого подграфа, и если два нечётных треугольника имеют общее ребро, то подграф, порождённый их вершинами, есть K_4;
(4) Ни один из девяти графов, приведённых на рис. 13, не является порождённым подграфом графа G.

В 1991 году Soltes смог усилить эту теорему, уменьшив количество запрещённых порождённых подграфов до семи, с условием, что рёберный граф G не изоморфен графам G_8, G_9 (рис. 13), а также трём графам, приведённым на рис. 14 [12].

2.2 Рёберные графы двудольных графов

Степенью вершины v в графе G называется число рёбер, инцидентных v.

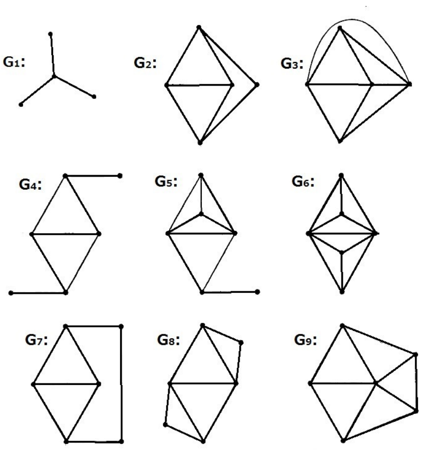

Рис. 13: Девять запрещённых порождённых подграфов для рёберных графов

Теорема 7. *[5] Если $m \neq 4$ и $n \neq 4$, то G – рёберный граф полного двудольного графа $K_{m,n}$ (рис. 15) тогда и только тогда, когда*

1) G имеет mn вершин;

2) G – регулярный граф степени $m + n - 2$;

3) Любые две несмежные вершины одновременно смежны точно с двумя вершинами;

4) Среди смежных пар вешин точно $n\binom{m}{2}$ пар одновременно смежны ровно с $m - 2$ вершинами, а другие $m\binom{n}{2}$ пар – ровно с $n - 2$ вершинами.

В случае $m = 4 = n$ существует только один граф, удовлетворяющий этим условиям и не являющийся рёберным графом графа $K_{4,4}$ [5].

Рёберный граф графа $K_{m,n}$ также можно назвать *ладейным графом* (m, n). Он представляет допустимые ходы ладьи на доске размера $n * m$. Вершинам графа можно задать координаты (x, y), где $1 \leq x \leq n$ и $1 \leq y \leq m$. Две вершины (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда либо $x_1 = x_2$, либо $y_1 = y_2$, т.е. если они лежат на одной и той же линии клеток (горизонтальной или вертикальной). Мун [11] доказал, что единственным

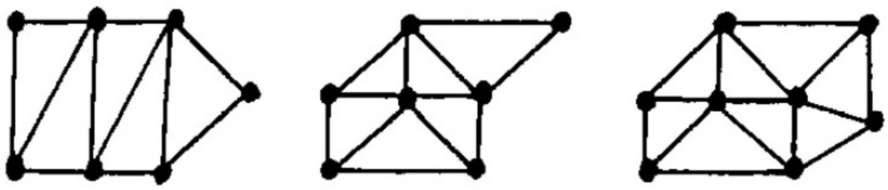

Рис. 14: Три запрещённых графа из статьи [12]

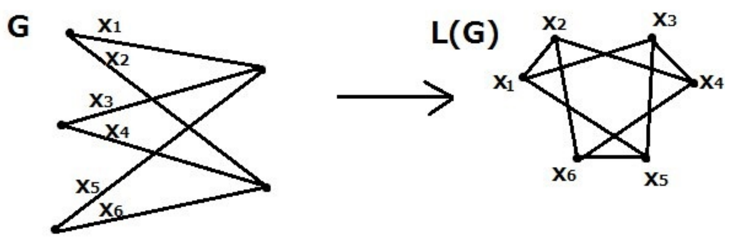

Рис. 15: Рёберный граф полного двудольного графа $G = K_{3,2}$

классом графов обладающим свойствами из теоремы 7, являются ладейные графы.

Далее выясним, какие графы являются запрещёнными порождёнными подграфами для класса рёберных графов двудольных графов.

2.3 Запрещённые подграфы рёберных графов двудольных графов

Лемма 1. *Пусть для некоторого графа G его рёберный граф $L(G)$ является простым циклом нечётной длины, не меньшей 5, без хорд. Тогда G изоморфен $L(G)$, т.е. G также является простым циклом нечётной длины, не меньшей 5, без хорд .*

Доказательство. Предположим противное, пусть G не яв-

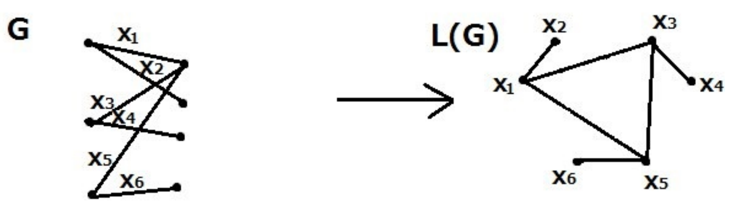

Рис. 16: Рёберный граф двудольного графа

ляется простым циклом нечётной длины, не меньшей 5, без хорд. Рассмотрим граф C, изоморфный $L(G)$. По следствию 2 граф $L(C)$ изоморфен графу C, а C изоморфен графу $L(G)$, значит $L(C)$ изоморфен $L(G)$. Тогда по следствию 1, C и G должны быть изоморфны, противоречие. Лемма доказана.

Помимо девяти графов, указанных в теореме 6, в классе рёберных графов двудольных графов имеется бесконечная серия запрещённых порождённых подграфов. Эта серия описана в следующей теореме.

Теорема 8. *В классе рёберных графов двудольных графов запрещены, в качестве порождённых, все простые циклы нечётной длины, начиная с длины 5, без хорд.*

Доказательство. От противного, пусть G произвольный двудольный граф, $L(G)$ его рёберный граф (рис. 16). Предположим, что $L(G)$ содержит порождённый подграф H, являющийся простым циклом нечётной длины, не меньшей 5. Т.к. класс рёберных графов двудольных графов является наследственным, то граф $H = L(C)$ для некоторого двудольного графа C. Докажем, что C подграф графа G. Так как существует биекция между рёбрами графа G и вершинами графа $L(G)$, будем удалять по ребру из графа G (либо по висячей вершине с инцидентным ей ребром) и по соответствующей вершине с инцидентными ей рёбрами из графа $L(G)$. За конечное количество таких действий мы получим подграф H в $L(G)$ и соответствующий ему подграф C в G.

По лемме 1, C изоморфен $H = L(C)$, т.е. является простым циклом нечётной длины, не меньшей 5, без хорд. Противоречие с теоремой 3 Кёнига. Теорема доказана.

Из теорем 6 и 8 вытекает следующее утверждение:

Следствие 3. *В классе рёберных графов двудольных графов запрещёнными порождёнными подграфами являются* G_1 - G_6,

G_8 (рис. 13), а также все простые нечётные циклы длины 5 и более, без хорд.

Теорема 9. *В классе рёберных графов двудольных графов граф $K_4 - e$ является запрещённым порождённым подграфом (рис. 11).*

Доказательство. От противного, пусть G произвольный двудольный граф. Предположим, что в его рёберном графе $L(G)$ содержится порождённый подграф, изоморфный $K_4 - e$. Рассмотрим все случаи, из которых мог бы получится такой подграф.

Так как в графе $K_4 - e$ четыре вершины, то у породившего его подграфа H в графе G должно было быть 4 ребра. Причём, два из этих рёбер должны быть смежны всем рёбрам в графе H, так как две вершины в графе $K_4 - e$ смежны со всеми вершинами. А два оставшихся ребра не должны быть смежны друг с другом, так как две оставшиеся вершины в $K_4 - e$ не смежны друг с другом.

Единственным возможным графом H, удовлетворяющим этим условиям, является треугольник с добавлением одной вершины, смежной только с одной вершиной из треугольника (рис. 17). Но такой граф не может являться подграфом графа G, так как содержит цикл длины 3. Противоречие с теоремой 3 Кёнига. Теорема доказана.

Следствием теорем 8 и 9 является следующее утверждение:

Теорема 10. *В классе рёберных графов двудольных графов запрещёнными порождёнными подграфами являются $K_{1,3}$, $K_4 - e$ и все циклы нечётной длины, не меньшей 5, без хорд.*

Есть ли другие порождённые запрещённые подграфы для класса рёберных графов двудольных графов? В книге [7] (Corollary

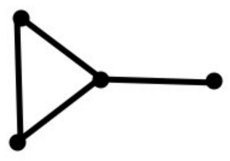

Рис. 17: Треугольник с добавлением одной вершины, смежной только с одной вершиной из треугольника

7.1.4) утверждается, что других запрещённых порождённых подграфов нет. При этом авторы данного обзора ссылаются на статью [12], но в этой статье отсутствует доказательство этого факта.

Заключение

Перечислим основные результаты дипломной работы.

1) Изучены наследственные и монотонные наследственные классы графов: леса, двудольные графы, клики, планарные графы, расщепляемые графы, кёниговы графы, блочные леса, рёберные графы. Для каждого класса приведены минимальные запрещённые подграфы.

2) Для наследственного класса рёберных графов двудольных графов найден запрещённый порождённый подграф $K_4 - e$ и бесконечное семейство порождённых запрещённых подграфов – циклов нечётной длины, не меньшей 5.

Список литературы

1. Алексеев В.Е., Замараев В.А., Захарова Д.В., Малышев Д.С., Мокеев Д.Б. Некоторые результаты о наследственных классах графов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. N 6 (1). С. 169–173.

2. Алексеев В.Е., Захарова Д.В., Малышев Д.С., Мокеев Д.Б., Сорочан С.В. Некоторые результаты о наследственных классах графов II // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2012. N 6 (1). С. 115–120.

3. Алексеев В.Е., Замараев В.А., Захарова Д.В., Малышев Д.С., Мокеев Д.Б., Сорочан С.В. Некоторые результаты о наследственных классах графов III // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013, N.6 (1). С. 165–172.

4. Дистель Р. Теория графов. Новосибирск: Издательство ИМ СО РАН, 2002.

5. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.

6. Bandelt H.J., Mulder, H. M. Distance-hereditary graphs // J. Comb. Theory, Ser. B. 1986. V. 41, No.2. P. 182–208.

7. Brandstaedt A., Le V.B., Spinrad J. Graph classes: A survey. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.

8. Chudnovsky M., Robertson N., Seymour P., Thomas R. The strong perfect graph theorem // Annals of Mathematics. 2006. V. 164, No.1. P. 51–229.

9. Golumbic M.C. Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs. NY University, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1980.

10. Maurer S.B. Matroid basis graphs I // J. Combin. Theory. Ser. B. 1973. V. 14, No. 1. P. 216-240

11. Moon J. W. On the line-graph of the complete bigraph // Annals of Mathematical Statistics. 1963. V. 34, No. 2. P. 664—667.

12. Soltes L. Forbidden induced subgraphs for line graphs // Discrete Mathematics 132, P. 391-394. Department of Mathematics, CHTF Slovak Technical University, Bratislava, Czechoslovakia, 1994.