

# 🎯 Fuzzy Logic 完整教程

期中考试 Question 2 (25分) | 从概念到计算到真题

⚠️ 期中考试重点：隶属函数（Membership Functions）、Firing Strength、Centroid  
Defuzzification

# 1 什么是 Fuzzy Logic?

## 经典逻辑 vs 模糊逻辑

经典逻辑 (Classical Logic)	模糊逻辑 (Fuzzy Logic)
二元: True (1) 或 False (0)	程度: 0 到 1 之间的任何值
"今天热吗? " → 是/否	"今天热吗? " → 热度 0.7 (比较热)
20°C 是冷还是热? → 必须二选一	20°C 既有点冷 (0.3) 又有点热 (0.4)

### 💡 直觉理解

现实世界中，很多概念是模糊的：

- "这个房间热吗? " → 不是简单的是/否
- "这辆车快吗? " → 快的程度?
- "这个人高吗? " → 多高算高?

Fuzzy Logic 允许我们用"程度"来描述这些概念！

## 2 隶属函数 (Membership Functions)

### 定义

隶属函数  $\mu(x)$  表示输入  $x$  属于某个模糊集合的"程度"。

符号:

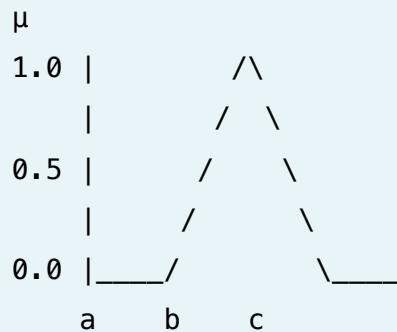
$$\mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1]$$

- $\mu_A(x) = 0 \rightarrow x$  完全不属于集合 A
- $\mu_A(x) = 1 \rightarrow x$  完全属于集合 A
- $0 < \mu_A(x) < 1 \rightarrow x$  部分属于集合 A

### 两种常见形状

#### 1. 三角形隶属函数 (Triangular Membership Function)

参数: `triangular(a, b, c)`



公式:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{if } a < x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{if } b < x < c \\ 0 & \text{if } x \geq c \end{cases}$$

关键点：

- $a$  = 左边界 (开始上升)
- $b$  = 峰值 ( $\mu = 1$ )
- $c$  = 右边界 (回到0)

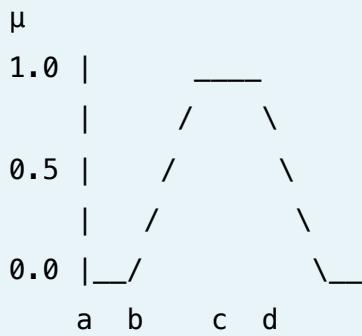
### 例子：Temperature = "Medium"

参数：triangular(20, 30, 40)

温度 (°C)	$\mu_{\text{Medium}}$	计算过程
10	0	$10 < 20 \rightarrow 0$
25	0.5	$(25-20)/(30-20) = 5/10 = 0.5$
30	1.0	峰值 $\rightarrow 1$
35	0.5	$(40-35)/(40-30) = 5/10 = 0.5$
50	0	$50 > 40 \rightarrow 0$

## 2. 梯形隶属函数 (Trapezoidal Membership Function)

参数：trapmf(a, b, c, d)



公式：

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{if } a < x < b \\ 1 & \text{if } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{if } c < x < d \\ 0 & \text{if } x \geq d \end{cases}$$

关键点：

- a, b = 左边上升段
- b 到 c = 平顶 ( $\mu = 1$ )
- c, d = 右边下降段

例子：Bean Freshness = "Fresh"

参数：trapmf(0, 0, 3, 5)

天数	$\mu_{\text{Fresh}}$	计算过程
0	1.0	在平顶 [0, 3] $\rightarrow 1$
2	1.0	在平顶 [0, 3] $\rightarrow 1$
4	0.5	$(5-4)/(5-3) = 1/2 = 0.5$

6

0

 $6 > 5 \rightarrow 0$

### 3 Fuzzy Inference System (模糊推理系统)

#### 四个步骤 (Mamdani 系统)

1. **Fuzzification** (模糊化): 把清晰输入转换为隶属度
2. **Rule Evaluation** (规则评估): 计算每条规则的激活强度
3. **Aggregation** (聚合): 合并所有规则的输出
4. **Defuzzification** (去模糊化): 把模糊输出转换为清晰值

#### 步骤 1: Fuzzification

例子: Temperature = 30°C

使用隶属函数计算:

- $\mu_{\text{Low}}(30) = ?$
- $\mu_{\text{Medium}}(30) = ?$
- $\mu_{\text{High}}(30) = ?$

#### 步骤 2: Rule Evaluation (Firing Strength)

规则形式:

IF X is A AND Y is B THEN Z is C

Firing Strength 计算 (使用 MIN 算子):

$$\text{Firing Strength} = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

## 为什么是 MIN?

AND 表示"同时满足", 取最小值表示最弱的环节决定整体。

### 例子:

规则: IF Temperature is Medium AND Humidity is High THEN Fan is Fast

输入:

- $\mu_{\text{Medium}}(30) = 1.0$
- $\mu_{\text{High}}(70) = 0.6$

Firing Strength:

$$FS = \min(1.0, 0.6) = 0.6$$

## 步骤 3 & 4: Aggregation + Defuzzification

Centroid Method (加权平均法):

$$\text{Output} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{FS}_i \times \text{Output}_i)}{\sum_{i=1}^n \text{FS}_i}$$

其中:

- $\text{FS}_i$  = 第  $i$  条规则的 Firing Strength
- $\text{Output}_i$  = 第  $i$  条规则的输出值



## 4 期中真题完整解答

### Question 2 (Midterm)

题目：Fan Speed Control

Temperature Fuzzy Sets:

- Low: triangular(0, 0, 25)
- Medium: triangular(20, 30, 40)
- High: triangular(35, 50, 50)

Fan Speed Outputs:

- Slow = 20
- Medium = 50
- Fast = 80

Rules:

1. IF Temperature is Low THEN Speed is Slow
2. IF Temperature is Medium THEN Speed is Medium
3. IF Temperature is High THEN Speed is Fast

输入：Temperature = 30°C

### (a) 计算 Membership Degrees

1.  $\mu_{\text{Low}}(30) - \text{triangular}(0, 0, 25)$

参数: a=0, b=0, c=25

判断:  $30 > c$  (25)  $\rightarrow$  超出右边界

$$\mu_{Low}(30) = 0$$

## 2. $\mu_{Medium}(30)$ - triangular(20, 30, 40)

参数:  $a=20, b=30, c=40$

判断:  $30 = b \rightarrow$  刚好在峰值!

$$\mu_{Medium}(30) = 1.0$$

## 3. $\mu_{High}(30)$ - triangular(35, 50, 50)

参数:  $a=35, b=50, c=50$

判断:  $30 < a$  (35)  $\rightarrow$  在左边界之外

$$\mu_{High}(30) = 0$$

✓ (a) 答案

Fuzzy Set	$\mu(30)$
Low	0
Medium	1.0
High	0

## (b) Defuzzification (Centroid Method)

步骤 1: 确定每条规则的 Firing Strength

规则	Firing Strength	Output
Rule 1: Low → Slow	0	20
Rule 2: Medium → Medium	1.0	50
Rule 3: High → Fast	0	80

步骤 2: 应用 Centroid 公式

$$\text{Fan Speed} = \frac{\sum (\text{FS}_i \times \text{Output}_i)}{\sum \text{FS}_i}$$

分子:

$$\begin{aligned} &= (0 \times 20) + (1.0 \times 50) + (0 \times 80) \\ &= 0 + 50 + 0 = 50 \end{aligned}$$

分母:

$$= 0 + 1.0 + 0 = 1.0$$

结果:

$$\text{Fan Speed} = \frac{50}{1.0} = 50$$

✓ (b) 答案

Defuzzified Fan Speed = 50

解释：因为只有 Medium 规则被激活 ( $FS=1$ )，所以输出就是 Medium speed = 50。

## 5 更复杂的例子（多规则激活）

### 例子： Temperature = 32°C

这次不是峰值，会同时激活多条规则！

#### 步骤 1: 计算 Membership Degrees

$\mu_{Low}(32) - \text{triangular}(0, 0, 25)$

$$32 > 25 \rightarrow \mu_{Low}(32) = 0$$

$\mu_{Medium}(32) - \text{triangular}(20, 30, 40)$

参数: a=20, b=30, c=40

32 在下降段 ( $b < 32 < c$ ) :

$$\mu_{Medium}(32) = \frac{c - x}{c - b} = \frac{40 - 32}{40 - 30} = \frac{8}{10} = 0.8$$

$\mu_{High}(32) - \text{triangular}(35, 50, 50)$

$$32 < 35 \rightarrow \mu_{High}(32) = 0$$

#### 步骤 2: Firing Strengths

规则	FS	Output
Rule 1: Low → Slow	0	20

Rule 2: Medium → Medium	0.8	50
Rule 3: High → Fast	0	80

### 步骤 3: Defuzzification

$$\begin{aligned}\text{Fan Speed} &= \frac{(0 \times 20) + (0.8 \times 50) + (0 \times 80)}{0 + 0.8 + 0} \\ &= \frac{0 + 40 + 0}{0.8} = \frac{40}{0.8} = 50\end{aligned}$$

💡 注意：虽然 FS 变了，但输出还是 50，因为只有一条规则被激活！

## 6 真正复杂的例子 (Midterm Coffee Maker)

### Midterm Question 2 (真题)

#### Coffee Maker 系统

##### Inputs:

- Bean Freshness (days):
  - Fresh: trapmf(0, 0, 3, 5)
  - Medium: trapmf(3, 5, 10, 14)
  - Old: trapmf(10, 14, 21, 21)
- Water Quality (ppm):
  - Soft: trapmf(0, 0, 50, 100)
  - Medium: trapmf(50, 100, 150, 200)
  - Hard: trapmf(150, 200, 300, 300)

##### Output: Brew Strength

- Mild: trapmf(0, 0, 3, 4)
- Balanced: trapmf(3, 4, 6, 7)
- Strong: trapmf(6, 7, 10, 10)

##### Rules:

1. IF Beans are Fresh AND Water is Soft THEN Strength is Mild
2. IF Beans are Medium AND Water is Medium THEN Strength is Balanced
3. IF Beans are Old AND Water is Hard THEN Strength is Strong

输入： Bean Freshness = 6 days, Water Quality = 120 ppm

步骤 1: 计算 Bean Freshness = 6 days 的隶属度

**Fresh: trapmf(0, 0, 3, 5)**

$6 > d(5) \rightarrow \mu_{Fresh}(6) = 0$

**Medium: trapmf(3, 5, 10, 14)**

参数: a=3, b=5, c=10, d=14

6 在平顶区间  $[b, c] = [5, 10]$ :

$$\mu_{Medium}(6) = 1.0$$

**Old: trapmf(10, 14, 21, 21)**

$6 < a(10) \rightarrow \mu_{Old}(6) = 0$

**步骤 2: 计算 Water Quality = 120 ppm 的隶属度**

**Soft: trapmf(0, 0, 50, 100)**

$120 > d(100) \rightarrow \mu_{Soft}(120) = 0$

**Medium: trapmf(50, 100, 150, 200)**

参数: a=50, b=100, c=150, d=200

120 在平顶区间  $[b, c] = [100, 150]$ :

$$\mu_{Medium}(120) = 1.0$$

**Hard: trapmf(150, 200, 300, 300)**

$120 < a(150) \rightarrow \mu_{Hard}(120) = 0$

**步骤 3: 计算 Firing Strengths**

**Rule 1: Fresh AND Soft → Mild**

$$FS_1 = \min(0, 0) = 0$$

## Rule 2: Medium AND Medium → Balanced

$$FS_2 = \min(1.0, 1.0) = 1.0$$

## Rule 3: Old AND Hard → Strong

$$FS_3 = \min(0, 0) = 0$$

### ✓ 最终答案

规则	Firing Strength
Rule 1 (Mild)	0
Rule 2 (Balanced)	1.0
Rule 3 (Strong)	0

结论：只有 Rule 2 被激活！

## 7 考试常见题型

### 题型 1：计算隶属度（必考）

给定隶属函数和输入值，计算  $\mu(x)$

重点：判断  $x$  落在哪个区间（上升/平顶/下降/外部）

### 题型 2：计算 Firing Strength（必考）

给定规则和隶属度，计算 Firing Strength

公式： $FS = \min(\mu_1, \mu_2, \dots)$  对于 AND

### 题型 3：Defuzzification（必考）

使用 Centroid Method 计算最终输出

公式： $Output = \frac{\sum(FS \times Output)}{\sum(FS)}$

### 题型 4：选择题 - 概念理解

- Q: Fuzzy vs Classical sets 的区别?  
A: Classical 是 binary (0/1), Fuzzy 是 degree (0-1)

- Q: Fuzzy Inference 的四个步骤顺序?

A: Fuzzification → Rule Evaluation → Aggregation → Defuzzification

- Q: Fuzzy Union 操作?

A:  $\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$



## 考试速查表

### 必须记住的公式

#### 1. 三角形隶属函数 **triangular(a, b, c)**:

- 上升:  $\mu = (x - a) / (b - a)$
- 下降:  $\mu = (c - x) / (c - b)$
- 峰值 ( $x = b$ ):  $\mu = 1$

#### 2. 梯形隶属函数 **trapmf(a, b, c, d)**:

- 上升:  $\mu = (x - a) / (b - a)$
- 平顶 ( $b \leq x \leq c$ ):  $\mu = 1$
- 下降:  $\mu = (d - x) / (d - c)$

#### 3. Firing Strength (AND):

$$FS = \min(\mu_1, \mu_2, \dots)$$

#### 4. Centroid Defuzzification:

$$\text{Output} = \frac{\sum (FS_i \times \text{Output}_i)}{\sum FS_i}$$

### 计算步骤 (背诵! )

1.  画出隶属函数图 (标注 a, b, c, d)
2.  判断输入落在哪个区间
3.  应用对应公式计算隶属度
4.  使用 MIN 计算 Firing Strength
5.  使用 Centroid 公式计算输出

## 常见错误

- ✗ 区间判断错误（上升/下降/平顶/外部）
- ✗ AND 用 MAX（应该用 MIN）
- ✗ OR 用 MIN（应该用 MAX）
- ✗ Centroid 分子分母算错
- ✗ 梯形平顶区间忘记  $\mu = 1$

## 🎯 练习题

### 练习：自己算一遍

#### Temperature Fuzzy Sets:

- Cold: triangular(0, 10, 20)
- Warm: triangular(15, 25, 35)
- Hot: triangular(30, 40, 50)

输入： Temperature = 22°C

计算：

1.  $\mu_{\text{Cold}}(22) = ?$
2.  $\mu_{\text{Warm}}(22) = ?$
3.  $\mu_{\text{Hot}}(22) = ?$

在此处写下你的计算过程...

💡 提示：

- Cold:  $22 > c(20) \rightarrow ?$

- Warm:  $15 < 22 < 25 \rightarrow$  在哪个段?

- Hot:  $22 < a (30) \rightarrow ?$