

# 线性代数基础复习

CSCI 6751 期中考试必备 | Normal Equation 需要的线性代数知识

## 1 向量 (Vector)

### 什么是向量?

向量就是一列 (或一行) 数字。

列向量:

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

行向量:

$$u = [4 \quad 5 \quad 6]$$

### 在 ML 中的应用

- 特征向量: 房子的特征 =  $[100m^2, 2\text{卧室}, 10\text{年}]$
- 参数向量:  $\theta = [\text{截距}, \text{斜率}]$
- 预测向量:  $\hat{y} = [\text{预测值1}, \text{预测值2}, \dots]$

## 2 矩阵 (Matrix)

### 什么是矩阵?

矩阵就是一个数字表格 (有行有列)。

3×2 矩阵 (3行2列):

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

大小:  $m \times n = \text{行数} \times \text{列数}$

### 在 ML 中的应用

数据矩阵 (Design Matrix):

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 1 & 150 \\ 1 & 200 \end{bmatrix}$$

含义:

- 第1列: 截距项 (全是1)
- 第2列: 房子面积
- 每一行: 一个数据样本

## 3 矩阵转置 (Transpose) ★★★★★★

## 定义

行变列，列变行！

例子：

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \Rightarrow X^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

规则：

- $X$  的第1行  $\rightarrow X^T$  的第1列
- $X$  的第2行  $\rightarrow X^T$  的第2列
- $X$  的第3行  $\rightarrow X^T$  的第3列

大小变化： $(m \times n) \rightarrow (n \times m)$

## 练习 1：

计算以下矩阵的转置：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^T = ?$$

答案：

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

解析:

- $A$  的第1列  $[1, 2] \rightarrow A^T$  的第1行
- $A$  的第2列  $[4, 5] \rightarrow A^T$  的第2行
- $A$  的第3列  $[7, 8] \rightarrow A^T$  的第3行

## 4 矩阵乘法 (Matrix Multiplication) ★★★★★★

⚠ 核心! Normal Equation 中的  $X^T X$  和  $X^T y$

### 规则

只有当: 第一个矩阵的列数 = 第二个矩阵的行数 时, 才能相乘!

大小规则:

$$(m \times n) \times (n \times p) = (m \times p)$$

$$A (m \times n) \quad \times \quad B (n \times p) \quad = C (m \times p)$$

↑ 红线部分的  $n$  必须相等!

### 计算方法

例子:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

步骤：

$$= 2 \times 1 + 3 \times 4$$

$$= 2 + 12$$

$$= 14$$

答案： [14]

## 练习 2：

计算：

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = ?$$

答案：

$$= 5 \times 2 + 6 \times 3$$

$$= 10 + 18$$

$$= 28$$

## 更复杂的例子

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = ?$$

计算第1个元素（第1行）：

$$= 1 \times 5 + 2 \times 6 = 5 + 12 = 17$$

计算第2个元素（第2行）：

$$= 3 \times 5 + 4 \times 6 = 15 + 24 = 39$$

答案：

$$\begin{bmatrix} 17 \\ 39 \end{bmatrix}$$

练习 3：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = ?$$

答案：

第1行： $2 \times 4 + 1 \times 5 = 8 + 5 = 13$

第2行： $0 \times 4 + 3 \times 5 = 0 + 15 = 15$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 15 \end{bmatrix}$$

## 5 矩阵求逆 (Matrix Inverse) ★★★★★★

⚠ Normal Equation 中的  $(X^T X)^{-1}$

定义

如果  $A \times A^{-1} = I$  (单位矩阵)，则  $A^{-1}$  是  $A$  的逆矩阵。

**单位矩阵 (Identity Matrix) :**

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(对角线是1, 其他是0)

## 2×2 矩阵求逆公式

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

**行列式 (Determinant) :**

$$\det(A) = ad - bc$$

**逆矩阵:**

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

### 练习 4:

计算以下矩阵的逆：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

### 答案：

**步骤 1: 计算行列式**

$$\det(A) = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 2 - 1 = 1$$

## 步骤 2：应用公式

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

验证：

$$A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \checkmark$$

## 6 应用：Normal Equation

⚠ 期中考试必背公式！

### 公式

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

### 步骤分解

步骤	操作	结果大小
1	计算 $X^T$	$(n \times m)$
2	计算 $X^T X$	$(n \times n)$
3	计算 $(X^T X)^{-1}$	$(n \times n)$

4	计算 $X^T y$	$(n \times 1)$
5	计算 $(X^T X)^{-1} X^T y$	$(n \times 1)$

## 完整例子

数据:

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \hline 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{array}$$

设计矩阵:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

步骤 1:  $X^T$

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

步骤 2:  $X^T X$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

步骤 3:  $(X^T X)^{-1}$

$$\det(X^T X) = 2 \times 5 - 3 \times 3 = 10 - 9 = 1$$

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

步骤 4:  $X^T y$

$$X^T y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix}$$

步骤 5:  $\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$

$$\theta = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 - 39 \\ -24 + 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

结果:  $b = 1, a = 2$

公式:  $y = 2x + 1 \checkmark$

## 7 综合练习

### 练习 5: 完整 Normal Equation

给定数据:

$x$	$y$
0	1
1	3
2	5

使用 Normal Equation 求  $y = ax + b$  的参数。

提示:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

答案:

按步骤计算...

最终结果:  $\theta = [1, 2]^\top$



## 总结：考试要点

### 必须记住的操作

- 矩阵转置：行变列，列变行
- 矩阵乘法：第一个的列数 = 第二个的行数
- 矩阵求逆 ( $2 \times 2$ )：对角交换，副对角取负，除以行列式
- Normal Equation:  $\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$

### 考试常见错误

- 矩阵大小不匹配就相乘
- 转置时忘记交换行列
- 行列式计算错误 ( $ad - bc$ , 不是  $ad + bc$ )
- 矩阵乘法顺序错误 ( $AB \neq BA$ )