

# 线性代数基础复习

CSCI 6751 期中考试必备 | Normal Equation 需要的线性代数知识

## 1 向量 (Vector)

### 什么是向量？

向量就是一列（或一行）数字。

列向量：

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

行向量：

$$u = [4 \quad 5 \quad 6]$$

### 在 ML 中的应用

- 特征向量：房子的特征 = [100m<sup>2</sup>, 2卧室, 10年]
- 参数向量： $\theta$  = [截距, 斜率]
- 预测向量： $\hat{y}$  = [预测值1, 预测值2, ...]

## 2 矩阵 (Matrix)

### 什么是矩阵?

矩阵就是一个数字表格 (有行有列)。

**3×2 矩阵 (3行2列):**

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

大小:  $m \times n$  = 行数  $\times$  列数

### 在 ML 中的应用

**数据矩阵 (Design Matrix):**

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 1 & 150 \\ 1 & 200 \end{bmatrix}$$

含义:

- 第1列: 截距项 (全是1)
- 第2列: 房子面积
- 每一行: 一个数据样本

## 3 矩阵转置 (Transpose) ★★★★★

## 定义

行变列，列变行！

例子：

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \Rightarrow X^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

规则：

- $X$  的第1行  $\rightarrow X^T$  的第1列
- $X$  的第2行  $\rightarrow X^T$  的第2列
- $X$  的第3行  $\rightarrow X^T$  的第3列

大小变化：  $(m \times n) \rightarrow (n \times m)$

## 练习 1:

计算以下矩阵的转置：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$A^T = ?$

答案：

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

解析：

- A 的第1列 [1, 2]  $\rightarrow A^T$  的第1行
- A 的第2列 [4, 5]  $\rightarrow A^T$  的第2行
- A 的第3列 [7, 8]  $\rightarrow A^T$  的第3行

## 4 矩阵乘法 (Matrix Multiplication) ★★★★★

⚠ 核心！Normal Equation 中的  $X^T X$  和  $X^T y$

### 规则

只有当：第一个矩阵的列数 = 第二个矩阵的行数 时，才能相乘！

大小规则：

$$(m \times n) \times (n \times p) = (m \times p)$$

$$A (m \times \color{red}{n}) \quad \times \quad \color{red}{n} B (n \times p) \quad = C (m \times p)$$

↑ 红线部分的  $n$  必须相等！

### 计算方法

例子：

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

步骤：

$$\begin{aligned} &= 2 \times 1 + 3 \times 4 \\ &= 2 + 12 \\ &= 14 \end{aligned}$$

答案： [14]

## 练习 2：

计算：

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = ?$$

答案：

$$\begin{aligned} &= 5 \times 2 + 6 \times 3 \\ &= 10 + 18 \\ &= 28 \end{aligned}$$

## 更复杂的例子

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = ?$$

计算第1个元素（第1行）：

$$= 1 \times 5 + 2 \times 6 = 5 + 12 = 17$$

计算第2个元素（第2行）：

$$= 3 \times 5 + 4 \times 6 = 15 + 24 = 39$$

答案:

$$\begin{bmatrix} 17 \\ 39 \end{bmatrix}$$

练习 3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = ?$$

答案:

第1行:  $2 \times 4 + 1 \times 5 = 8 + 5 = 13$

第2行:  $0 \times 4 + 3 \times 5 = 0 + 15 = 15$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 15 \end{bmatrix}$$

## 5 矩阵求逆 (Matrix Inverse) ★★★★★

⚠ Normal Equation 中的  $(X^T X)^{-1}$

### 定义

如果  $A \times A^{-1} = I$  (单位矩阵), 则  $A^{-1}$  是  $A$  的逆矩阵。

单位矩阵 (Identity Matrix):

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(对角线是1, 其他是0)

## 2×2 矩阵求逆公式

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

行列式 (Determinant):

$$\det(A) = ad - bc$$

逆矩阵:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

### 练习 4:

计算以下矩阵的逆:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

答案:

步骤 1: 计算行列式

$$\det(A) = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 2 - 1 = 1$$

## 步骤 2：应用公式

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

验证：

$$A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \checkmark$$

## 6 应用：Normal Equation

⚠ 期中考试必背公式！

### 公式

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

### 步骤分解

| 步骤 | 操作                | 结果大小           |
|----|-------------------|----------------|
| 1  | 计算 $X^T$          | $(n \times m)$ |
| 2  | 计算 $X^T X$        | $(n \times n)$ |
| 3  | 计算 $(X^T X)^{-1}$ | $(n \times n)$ |



|   |                         |                |
|---|-------------------------|----------------|
| 4 | 计算 $X^T y$              | $(n \times 1)$ |
| 5 | 计算 $(X^T X)^{-1} X^T y$ | $(n \times 1)$ |

## 完整例子

数据:

$$\begin{array}{cc} x & y \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{array}$$

设计矩阵:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

步骤 1:  $X^T$

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

步骤 2:  $X^T X$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

步骤 3:  $(X^T X)^{-1}$

$$\det(X^T X) = 2 \times 5 - 3 \times 3 = 10 - 9 = 1$$

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

步骤 4:  $X^T y$

$$X^T y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix}$$

步骤 5:  $\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$

$$\theta = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 - 39 \\ -24 + 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

结果:  $b = 1, a = 2$

公式:  $y = 2x + 1 \checkmark$

## 7 综合练习

### 练习 5: 完整 Normal Equation

给定数据:

| $x$ | $y$ |
|-----|-----|
| 0   | 1   |
| 1   | 3   |
| 2   | 5   |

使用 Normal Equation 求  $y = ax + b$  的参数。

提示:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

答案:





按步骤计算...

最终结果:  $\theta = [1, 2]^T$







## 总结：考试要点

### 必须记住的操作

-  **矩阵转置**：行变列，列变行
-  **矩阵乘法**：第一个的列数 = 第二个的行数
-  **矩阵求逆 (2x2)**：对角交换，副对角取负，除以行列式
-  **Normal Equation**:  $\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$

### 考试常见错误

-  矩阵大小不匹配就相乘
-  转置时忘记交换行列
-  行列式计算错误 ( $ad - bc$ , 不是  $ad + bc$ )
-  矩阵乘法顺序错误 ( $AB \neq BA$ )