📐 2×2 矩阵求逆练习册

CSCI 6751 期中考试必备 | 5道练习题 + 详细解答

📚 公式复习

2×2 矩阵求逆公式

给定矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

步骤 1：计算行列式（Determinant）

$$\det(A) = ad - bc$$

步骤 2：检查是否可逆

- 如果 det(A) = 0 → **不可逆**
- 如果 det(A) ≠ 0 → **可逆**

步骤 3：应用公式

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

记忆技巧：

1. **对角交换**：a 和 d 互换位置
2. **副对角取负**：b 和 c 前面加负号
3. **除以行列式**：整个矩阵除以 det(A)

⚠️ **验证方法：$A \times A^{-1} = I$（单位矩阵）**

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

✏️ 练习 1：基础题（热身）

计算以下矩阵的逆：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

💡 **提示：**

- 先算行列式：det(A) = 2×1 - 1×1 = ?
- 再应用公式

在此处写下你的计算过程...

✏️ 练习 2：标准题

计算以下矩阵的逆：

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

在此处写下你的计算过程...

✏️ 练习 3：带负数

计算以下矩阵的逆：

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

💡 **注意：**

副对角元素是负数时，取负后变成正数！

例：-(-2) = +2

在此处写下你的计算过程...

✏️ 练习 4：分数结果

计算以下矩阵的逆：

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

💡 **提示：**

这道题的行列式不是 1，所以结果会有分数！

在此处写下你的计算过程...

✏️ 练习 5：陷阱题（不可逆）

判断以下矩阵是否可逆，如果可逆则计算其逆：

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

💡 **提示：**

先算行列式！如果 det(E) = 0，说明不可逆！

在此处写下你的计算过程...

✅答案与详解

练习 1 答案

给定：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

步骤 1：计算行列式

$$\det(A) = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 2 - 1 = 1$$

步骤 2：应用公式

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

步骤 3：验证

$$A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

第1行第1列：2×1 + 1×(-1) = 2 - 1 = 1 ✓

第1行第2列：2×(-1) + 1×2 = -2 + 2 = 0 ✓

第2行第1列：1×1 + 1×(-1) = 1 - 1 = 0 ✓

第2行第2列：1×(-1) + 1×2 = -1 + 2 = 1 ✓

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \checkmark$$

练习 2 答案

给定：

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

步骤 1：计算行列式

$$\det(B) = 3 \times 4 - 2 \times 5 = 12 - 10 = 2$$

步骤 2：应用公式

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

或者写成分数形式：

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

练习 3 答案

给定：

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

步骤 1：计算行列式

$$\det(C) = 1 \times 4 - (-2) \times 3 = 4 - (-6) = 4 + 6 = 10$$

步骤 2：应用公式

$$C^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -(-2) \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

或分数形式：

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

练习 4 答案

给定：

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

步骤 1：计算行列式

$$\det(D) = 2 \times 2 - 3 \times 1 = 4 - 3 = 1$$

步骤 2：应用公式

$$D^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

练习 5 答案

给定：

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

步骤 1：计算行列式

$$\det(E) = 2 \times 2 - 4 \times 1 = 4 - 4 = 0$$

结论：

det(E) = 0，所以矩阵 E 不可逆！

这种矩阵叫做**奇异矩阵（Singular Matrix）**。

原因：第二行是第一行的倍数（第二行 = 第一行 ÷ 2）

📝 快速检查清单

考试时的步骤

1. ✅ **写出矩阵**：确认 a, b, c, d 的位置
2. ✅ **算行列式**：det(A) = ad - bc
3. ✅ **检查是否可逆**：det ≠ 0?
4. ✅ **应用公式**：对角交换、副对角取负、除以 det
5. ✅ **简化结果**：如果可能，约分或化简

常见错误

- ❌ 忘记副对角取负（-b 和 -c）
- ❌ 行列式算错（ad - bc 不是 ad + bc）
- ❌ 对角元素没交换（还是 a 和 d 的位置）
- ❌ 忘记除以行列式
- ❌ 负负得正算错（-(-2) = +2）

记忆口诀

"对角交换，副对角变号，除以行列式"

🎯 考试真题预测

> ⚠️ **如果期中考试考 Normal Equation，可能出现：**

可能的考法

题型 1：直接计算

给定数据点 (x, y) = (1, 3) 和 (2, 5)，使用 Normal Equation 求 y = ax + b 的参数。

涉及： 构建 X 矩阵、计算 X^TX、求 $(X^TX)^{-1}$

题型 2：维度判断（MCQ）

如果 X 是 100×3 矩阵，X^TX 是多少维？$(X^TX)^{-1}$ 是多少维？

答案： 都是 3×3

题型 3：判断可逆性

给定 X^TX 的行列式为 0，能否使用 Normal Equation？

答案： 不能，因为矩阵不可逆，应该用 Gradient Descent