Vorschlag zum Mathe-Abitur 2020
an der IGS Auguste Cornelius Mainz-Hechtsheim

Stefan Görig

8. Dezember 2023

1 Unterrichtliche Voraussetzungen

1.1 Vorschlag I: Hypothesentests

Hypothesentests wurden im Schuljahr 12.2 noch vor dem Lockdown behandelt und im Schuljahr 13 wiederholt. Fehler 1. und 2. Art wurden im Unterricht anhand überlappender Graphen von Binomialverteilungen besprochen; Vierfeldertafeln wurden nur im Zusammenhang mit der Bayesschen Regel besprochen.

Die Verknüpfung von beidem, wie in Aufgabe 3c gefordert, stellt damit eine Transferleistung dar.

1.2 Vorschlag II: Markovketten

Markovketten wurden im Schuljahr 12.1 besprochen und in 13 wiederholt. Zustandsdiagramme wurden selbstständig gezeichnet, Fundamentalmatrizen aufgestellt und angewendet. Die SuS sind den Umgang mit dem Taschenrechner geübt und können z.B. Inversen damit schnell bestimmen. Die Inversenbildung von Hand mit Formel oder Gauß-Jordan-Verfahren wurde aber auch sowohl in Klassenstufe 12.1 als auch in 13 geübt.

Der umgekehrte Weg, aus der Fundamentalmatrix das Zustandsdiagramm zu bestimmen, wurde nicht im Unterricht behandelt und stellt somit eine Transferleistung dar.

1.3 Vorschlag III: Affine Abiildungen

Affine Abbildungen wurden am anfang von 12.1 beprochen und in 13 wiederholt. Mit dem Aufstellen von Abbildungsgleichungen sind die SuS ebenso vertraut wie mit dem Abbildungen von Punkten und Geraden.

Die Vektordarstellung von aus Geraden und Kreisbögen zusammengesetzter Bilder, die Anpassung eines ebenen Bildes an eine nicht-senkrechte Perspektive wurde in 13 besprochen, ebenso Drehmatrizen mit zeitlich veränderlichem Winkel.

Die Anwendung von Drehmatrizen auf zweidimensionale Abbildungen ist allerdings neu und setzt einen Transfer voraus.

2 Zuordnung zu Anforderungsbereichen, Zeitansätze und Bewertung

2.1 Vorschlag I

Aufg.	A1	A2	A3	L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
1	13	2		x	x			x	x		x		x	
2	3	12		x			x	x	x		x		x	
3		7	11				x	x	x	x	x	x		x
$\sum$	16	21	11											

Zeitansatz: 80 Minuten.

2.2 Vorschlag II

Aufg.	A1	A2	A3	L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
1	14			x									x	
2		20		x				x	x			x	x	
3		7	11	x			x	x	x	x		x	x	x
$\sum$	14	27	11											

Zeitansatz: 80 Minuten.

2.3 Vorschlag III

Aufg.	A1	A2	A3	L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
1	10			x	x	x	x					x	x	
2		4	9	x	x	x				x	x	x	x	
3	4	15	3	x		x	x				x	x	x	
$\sum$	16	19	12											

Zeitansatz: 80 Minuten.

2.4 Legende

Anforderungsbereiche

A1	Reproduktion
A2	Anwendung
A3	Transfer

Leitideen

L1	Algorithmus
L2	Messen
L3	Raum und Form
L4	Funktion
L5	Zufall

Kompetenzbereiche

K1	argumentieren
K2	Probleme lösen
K3	modellieren
K4	darstellen
K5	Technik nutzen
K6	kommunizieren

Vorschlag I: Hypothesentests

Laut Statistischem Landesamt hat der Landkreis Hintertupfingen hat 36.811 Einwohner, davon sind 18.760 weiblich und 15.312 sind über sechzig Jahre alt.

Laut einer repräsentativen Stichprobe bezeichnen sich 14% der Befragten selbst als Skeptiker:Innen der Corona-Eindämmungsmaßnahmen.

Aufgabe 1 - Grundlegende Statistik

a) Bestimme den Anteil

i) weiblicher Einwohner,

ii) männlicher Einwohner über sechzig Jahre,

iii) männlicher Einwohner unter den den über Sechzigjährigen.

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit p, dafür, dass von 50 zufällig ausgewählten Bürgern des Landkreises Hintertupfingen

i) 27 weiblich sind

ii) höchstens 24 weiblich sind

iii) mindestens 19 männlich sind

iv) zwischen 26 und 28 weiblich sind.

c) Schätze den Anteil weiblicher Corona-Skeptiker laut Datenlage.

d) Diskutiere die Aussagekraft deiner Schätzung aus Aufgabenteil c.

Aufgabe 2 - Hypothesentest

Das Gesundheitsamt behauptet, dass im örtlichen Schlachthof 5% der 1.235 Beschäftigten mit dem Corona-Virus infiziert sind. Der Schlachthof soll deswegen vorübergehend geschlossen werden.

Ein *Querdenker* findet die Maßnahme unangebracht. Er verweist darauf, dass er „mindestens acht" Mitarbeiter des Schlachthofs persönlich kenne und keiner davon als Corona-positiv getestet worden sei.

a) Diskutiere die Aussage des Querdenkes hinsichtlich der Konzepte *Relevanz* und *Signifikanz*.

b) Ein statistischer Test soll die Kritiker beruhigen. Getestet werden soll die Aussage „Die Infektionsrate liegt bei 5 %" gegen die Aussage „Die Infektionsrate ist kleiner als 5%". Begründe, welche der beiden Aussage zur *Nullhypothese* H_0 und welche zur *Alternative* H_1 erklärt werden sollte.

c) Alle Mitarbeiter zu testen wäre extrem aufwändig. Andererseits schreibt *3-σ-Regel* eine bestimmte Mindestgröße für den Stichprobenumfang n vor. Bestimme ihn.

d) Formuliere nun einen Hypothesentest mit einem Stichprobenumfang von $n = 200$ zu einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$, mit dem die Zweifel der Querdenker überpüft werden können.

e) Angenommen, der Test liefert ein Ergebnis von $k = 12$ Corona-positiven Personen. Bestimme nun auf der Basis dieses Wertes das Vertrauensintervall I für eine Schätzung des wahren Wertes der Infizierten zu einem Vetrauensniveau von $v = 90\%$.

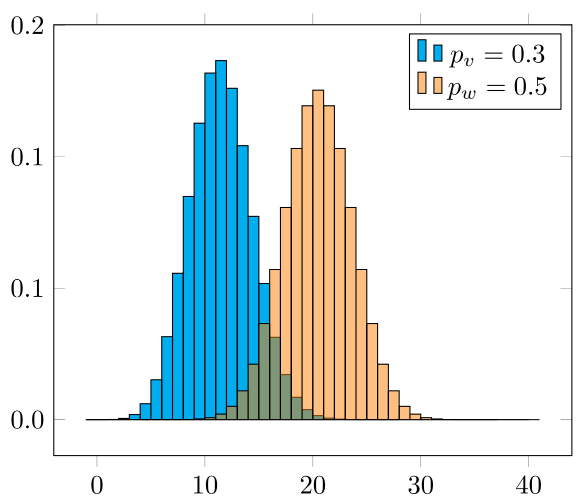
Aufgabe 3 - Gütekriterien beim Testen

Die Querdenker sind noch nicht überzeugt. Als nächstes zweifeln sie die Zuverlässigkeit der Tests an.

a) Erkläre die statistischen Konzepte *Fehler 1.* und *2. Art* bzw. im Anwendungsfall medizinischer Diagnostik die Konzepte *Sensitivität* s und *Spezifität* z.

b) Erkläre, inwiefern Fehler 1. und 2. Art von einander abhängen und was man tun kann (und was nicht), um beide zu minimieren.

Du kannst dazu das nebenstehende Diagramm benutzen.



Eine andere Gruppe von Querdenkern schlägt nun vor, die Bevölkerung in voller Breite zu testen, damit alle Infizierten in Quarantäne gesteckt werden können, bis keine Ansteckungsgefahr mehr droht.

c) Erläutere den Vorschlag anhand einer Vierfeldertafel. Gehe dazu von einer Sensitivität von $s = 99\%$ sowie einer Spezifität von ebenfalls $z = 99\%$ aus. Nimm ferner eine Rate von 80 Infizierten je 100.000 Einwohnern und eine Bevölkerungszahl von 82.000.000 Bürgern an.

Vorschlag I - Musterlösung

Aufgabe 1 - Grundlegende Statistik

a) i) $p(w) = \frac{18.760}{36.811} = 51.0\%$

ii) $p(m \cap 60+) = \frac{36.811-18.760}{36.811} \cdot \frac{15.312}{36.811} = 20.4\%$

iii) $p_{60+}(m) = \frac{p(m \cap 60+)}{p(60+)} = \frac{20.4\% \cdot 36.811}{15.312} = 49.0\%$

b) i) $B_{n=50;p=0.51}(X = 27) = 10.3\%$

ii) $B_{n=50;p=0.51}(X \leq 24) = 38.8\%$

iii) $B_{n=50;p=0.49}(X \geq 19) = 1 - B_{n=50;p=0.49}(X \leq 18) = 95.6\%$

iv) $B_{50;0.51}(26 \geq X \geq 28) = B_{50;0.51}(X \leq 28) - B_{50;0.51}(X \leq 26) = 80.2\% - 60.1\% = 20.1\%$

c) $51\% \cdot 14\% = 7.1\%$

d) Die Rechnung basiert auf der Annahme, dass die Daten unkorreliert sind, was in Abwesendheit weiterer Informationen eine vernünftige Annahme ist (Prinzip der maximalen Entropie). Das Rechenergebnis ist damit aber nur insoweit verlässlich, als diese Annahme gerechtfertig ist.

Aufgabe 2 - Hypothesentest

a) Der Stichprobenumfang von $n = 8$ ist zu gering, als dass er als repräsentativ gelten könnte. Die unumgänglichen Schwankungen einer solchen Erhebung sind damit zwar *signifikant*, weil zu einem abweichenden Ergebnis führen, aber sie sind nicht *relevant*.

b) Es gilt das Konservativitäts-Prinzip: Die alte Hypthese wird erst verworfen, wenn die neue bestätigt wurde. Da die Hürde hierfür hoch liegt, häuft man, wenn das Prinzip oft genug angewendet wurde, im Lauf der Zeit ausschließlich gut fundierte Thesen an.

c) $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 3 \to n = \left(\frac{3}{\sqrt{0.05 \cdot 0.95}}\right)^2 = 189.5 \to n = 190$

d) $H_0 : p = 5\%$, $H_1 : p < 5\%$. Annahmebereich $A = [6; 200]$, Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 3.6\%$.

e) $h = \frac{12}{200} = 0.06 = 6\%$; $I = [h - 1.64\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}, h + 1.64\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}] = [0.06 - 1.64\sqrt{\frac{0.06(0.94)}{200}}, 0.06 + 1.64\sqrt{\frac{0.06(0.94)}{200}}] = [3.2\%, 8.7\%]$

Aufgabe 3 - Gütekriterien beim Testen

a) Fehler 1. Art werden begangen, wenn Hypothesen verworfen werden, obwohl sie zutreffen. Die Wahrscheinlichkeit dafür wird mit α bezeichnet.

Fehler 2. Art werden begangen, wenn Hypothesen H_0 akzeptiert werden, obwohl sie falsch sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür wird mit β bezeichnet.

Die Sensitivität s eines Test gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine falsche Hypothese H_0 korrekt abgelehnt wird. Die Sensitivität entspricht damit dem Komplement des Fehlers 2. Art: $s \equiv 1 - \beta$.

Die Spezifität z eines Tests gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine korrekte Hypothese H_0 verworfen wird. Die Spezifität entspricht damit dem Fehler 1. Art: $z \equiv \alpha$.

b) Angenommen, im Diagramm sei p_v der vermutete Wert und p_w der wahre Wert für einen Prozentsatz eines Merkmals einer Stichprobe. Die Ergebnisse, die zur Annahme einer Hypothese H_0 führen und diejenigen, die zur Ablehnung führend, liegen auf unterschiedlichen Seiten einer wie auch immer gesetzten Grenze des Ablehnungsbereichs. Verschiebt man diese Grenze nach rechts oder links, vergrößert sich der eine Bereich, während der andere schrumpft.

c)

	inf	$\overline{inf}$	$\sum$
$Testpos.$	64.944	819.344	884.288
$\overline{Testpos.}$	656	81.115.056	81.115.712
$\sum$	65.600	81.934.400	82.000.000

Die Anzahl der *falsch positiv* getesteten ist trotz der relative hohen Testgenauigkeit mehr als 12 Mal höher als die der *richtig positiv* getesteten. Ob dieser Umstand der Bevölkerung zugemutet werden kann, ist bedenklich und Ermessenssache.

Vorschlag II: Markovketten

Im Auftrag des Senders „RTL 0, 3“ entwickelt die erfolgsverwöhnte Entertainerin Stefanie Krää mit ihrer Produktionsfirma „Krää's Licht- und Ton Studio“ eine neue, abendfüllende Spielshow names „Müh dich, Kai T.!“.

An der Seite von Moderator Kai Tzwetschge werden zwei Kandidat:Innen den Abend lang gegeneinander „Schnick, schnack, schnuck“ spielen.

Nachdem es während der Konzeption des Spiels zu einigen Schwierigkeiten kam, sucht die Produktionsfirme einen weiteren technischen Berater - dich.

Aufgabe 1 - Der Einstellungstest

Zunächst gilt es, den Einstellungstest zu bestehen.

a) Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix};\ \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix};\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};\ \lambda = 2$$

Berechne, falls möglich.

i) $A\vec{a}$ ii) $C\vec{b}$ iii) $(CB)^{-1}$ iv) $(\lambda A)^3$

b) Löse nach $\vec{x}$ bzw. X auf.

i) $\lambda y - A\vec{x} = \vec{x}$ ii) $(BX)^{-1} = C$ iii) $(A^T B\vec{x})^T = \vec{y}$

Aufgabe 2 - Basisvariante des Spiels

Die Kandidaten zeigen pro Runde zeitgleich mit den Händen die Symbole für *Stein*, *Schere* oder *Papier*. Es gilt: *Stein schlägt Schere schlägt Papier schlägt Stein*. Wer gewinnt, erhält einen Punkt; wer verliert, verliert einen Punkt. Bei gleichen Symbolen ändern sich die Punkte nicht. Wer mit zwei Punkten führt, hat das Spiel gewonnen.

a) Zeichne ein Zustandsdiagramm des Spielablaufs und bestimme die Übergangsmatrix U.

b) Bestimme die Fundamentalmatrix F des Spieles und damit die durchschnittliche Anzahl von Spielrunden.

c) Zeige, dass die Wahrscheinlichkeiten, von Z_{-1}, Z_0 bzw. Z_1 zu gewinnen bzw. zu verlieren, sich zu jeweils 1 aufaddieren.

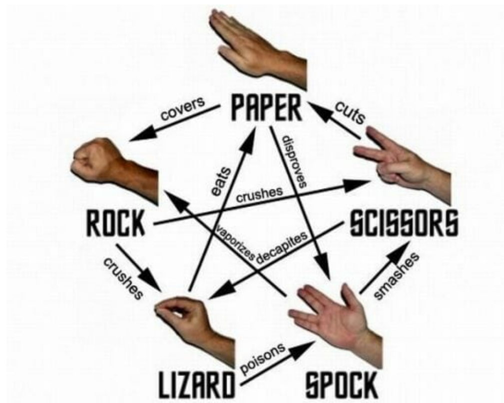
Aufgabe 3 - Modifizierte Spielregeln

Erste Rückmeldungen zu einem Testlauf vor Publikum sind allerdings ernüchternd. Die Zuschauer bemäkeln vor allem einen mangelnden Unterhaltungswert. Das Studio versucht deswegen, das Konzept nachzubessern.

Ein erster Vorschlag ist, die Menge der Symbole *Stein*, *Schere* und *Papier* zu ergänzen.

Variante A: Es werden zusätzlich die Symbolen *Echse* und *Spock* eingeführt, die sich folgendermaßen überbieten:

Schere schneidet Papier bedeckt Stein zerquetscht Echse vergiftet Spock zertrümmert Schere köpft Echse frisst Papier widerlegt Spock verdampft Stein schleift Schere.



a) Beurteile, wie die Regeländerung die durchschnittliche Spieldauer beeinflusst.

Variante B: Statt der Symbole *Echse* und *Spock* wird zusätzlich das Symbol *Brunnen* eingeführt mit folgenden Regeln:

Stein zerschlägt Schere schneidet Papier bedeckt Brunnen verschluckt Stein, Papier umwickelt Stein, Brunnen verschluckt Schere.

b) Erörtere die Auswirkungen der Regeländerungen in Variante B auf die zu erwartende Taktik der Spieler und damit die vermutete Wahrscheinlichkeit der Symbole, gezeigt zu werden.

Variante C: Der bisherige Chefentwickler der Firma schlägt als letztes vor, ausschließlich die ursprünglichen Symbole *Stein*, *Schere* und *Papier* zu verwenden. Allerdings sollen die Spieler gegen eine künstliche Intelligenz antreten, die ihr Verhalten mit steigender Rundenzahl immer besser voraussehen und somit den Sieg erschweren soll.

Die von ihm vorgeschlagene Spielvariante hat angeblich folgende Fundamentalmatrix F_C:

$$F_C = \frac{1}{6(3-\lambda)} \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ \lambda & 2\lambda & 3 \end{pmatrix}$$

Dabei soll der Parameter λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ die Schwierigkeit modellieren, zu gewinnen ($\lambda = 0$: normale Chance, $\lambda = 1$: keine Chance).

c) Rekonstruiere die Übergangsmatrix U_C, die dem Chefentwickler offenbar vorschwebt. Diskutiere seinen Ansatz kritisch.

Vorschlag II - Musterlösung

Aufgabe 1 - Der Einstellungstest

a) i) $A\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

ii) $C\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \end{pmatrix}$

iii) $(CB)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 16 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

iv) $(\lambda A^3) = \lambda^3 A^3 = 8 \begin{pmatrix} 27 & 14 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

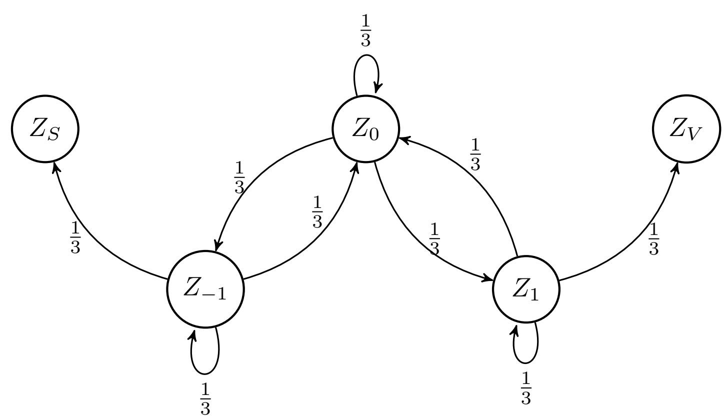
b) i) $\vec{x} = \lambda(\underline{1} + A)^{-1} y$

ii) $X = B^{-1} C^{-1}$

iii) $\vec{x} = B^{-1} (A^T)^{-1} \vec{y}^T$

Aufgabe 2 - Basisvariante des Spiels

a) $\vec{x} := \begin{pmatrix} x_V \\ x_{-1} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_S \end{pmatrix}$



b) $U = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

$$F = \left(\underline{1} - Q^T\right)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 12 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{k} = F\vec{1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Die mittlere Rundezahl ist bei einem Start von Z_0 aus $k_0 = \frac{12}{2} = 6$.

c) $\vec{g}_S = \underline{F}\vec{a}_S = \underline{F} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$; $\vec{g}_V = \underline{F}\vec{a}_V = \underline{F} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$; $\vec{g}_V + \vec{g}_S = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 - Modifizierte Spielregeln

a) Es ergibt sich eine neue Übergangsmatrix: $U_A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

$F_A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; $F_A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 15 & 10 & 5 \\ 10 & 20 & 10 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}$; $\vec{k}_A = F_A\vec{1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$

Das Spiel in Variante A dauert nun im Schnitt $k_0^A = \frac{20}{4} = 5$ Runden.

b) Die Siegchancen bei verschiedene Symbolen sind nun unterschiedlich - Brunnen und Papier gewinnt doppelt so oft wie Stein und Schere.

Die Spieler könnten nun überlegen, öfter Brunnen und Papier zu zeigen. Oder dies beim Gegenüber zu antizipieren und entsprechend besonders oft Papier zu zeigen. Oder auch dies beim Gegenüber zu antizipieren und entsprechend oft Schere zu zeigen.

Da diese Gedankenkette prinzipiell unendlich oft fortgeführt werden kann, ist eine Aussage über die tatsächlichen Übergangswahrscheinlichkeiten nicht zuverlässig zu treffen.

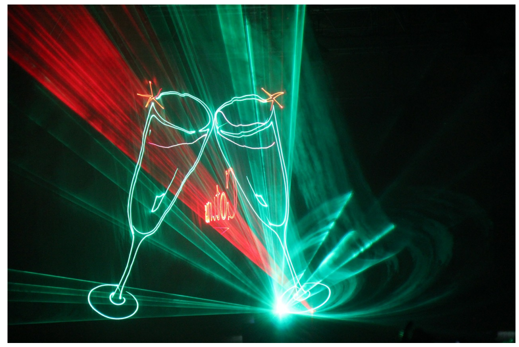
Selbst eine empirische Analyse könnte wiederum in die Überlegungen einfließen und einen ähnlichen gedanklichen Zirkel einleiten und würden an der mangelnden Vorhersagbarkeit kaum etwas ändern.

c) $F_C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -\lambda & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$

$$U_C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 3 \end{pmatrix}$$

Die Fundamentalmatrix lässt sich nur für konstante Übergangswahrscheinlichkeiten formulieren. Das Modell des Chefentwicklers ist fehlerhaft.

Vorschlag III: Affine Abbildungen



Du bist zu einer Hochzeit eingeladen! Die Brautleute wünschen sich eine Lasershow, und du bist dafür zuständig, die Anlage zu bedienen.

Aufgabe 1 - Funktionstest der Laseranlage

Zunächst soll die Anlage getestet werden.

Im Display des Projektors sehen wir die quadratische *Urbildebene*, deren einheitenlose Koordinaten sich zwischen $-1 \leq x \leq 1$ und $-1 \leq y \leq 1$ bewegen.

Für den Funktionstest stellen wir den Beamer senkrecht vor die nächstbeste glatte Hauswand und lassen den Laser senkrecht dagegen strahlen.

Die Wand hat eine Breite von $b = 6m$ und Höhe von $h = 4m$.

a) Skizziere die *Bildebene*. Zeichne ein Koordinatensystem so ein, dass möglichst viel Projektionsfläche genutzt wird, dass Bild aber unverzerrt quadratisch bleibt. Wähle für die Bildkoordinaten die Einheit *Meter*.

b) Stelle die Abbildungsgleichung α auf.

c) Bestimme die Gleichung des Bildes der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) Bestimme das Urbild der Geraden $h' : \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) Bestimme den Schnittwinkel von g und h.

Aufgabe 2 - Ausrichtung auf's Hausdach

Für die Feier soll als Projektionsfläche ein großes Hausdach mit einer Länge (von First zu First) von $b = 14m$ und einer Breite (von Giebel zu Traufe) von $h = 6m$ genutzt werden. Gebeamt wird von einem hohen Baum aus, so dass der Laserstrahl wieder weitgehend senkrecht auf die Fläche trifft.

a) Bestimme die Abbildungsgleichung β für eine senkrechte Projektion auf's Hausdach, so dass die Bildfläche möglichst groß ist, aber weiterhin unverzerrt quadratisch bleibt.

Was die Sache nun etwas kniffliger macht: zum einen weist das Dach eine Steigung von $\alpha = 50°$ gegen die Horizontale auf. Zum anderen werden die Brautleute so sitzen, dass sie im $\beta = 20°$-Winkel gegen die Stirnseite des Hauses auf die Projektionsfläche schauen (siehe Skizze). Das Bild muss deswegen verzerrt dargestellt werden, wenn es aus Sicht der Brautleute unverzerrt erscheinen soll.

b) Bestimme die Abbildungsgleichung γ so, dass das Bild aus Sicht der Brautleute möglichst großflächig, aber unverzerrt erscheint. Wähle als Koordinatensystem des Bildraums weiterhin die Ebene der Dachfläche.

Aufgabe 3 - Projizieren von Figuren

Jetzt, wo die Anlage aufgebau und justiert ist, können Figuren projiziert werden.

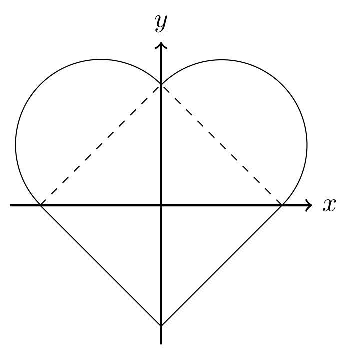
Testweise soll zunächst ein Quader mit den Seitenverhältnissen 3:4:5 gezeigt werden.

a) Gib die Koordinaten der Eckpunkte eines Quaders mit den angegeben Seitenverhältnissen an. Diese sollen den Wertebereich $-1 \leq x \leq 1$ bzw. $-1 \leq y \leq 1$ bzw. $-1 \leq z \leq 1$ möglichst breit umfassen.

b) Erst einmal soll der dreidimensionale Quader auf die zweidimensionale Bildebene projiziert werden. Nenne drei Projektionsrichtungen, die **nicht** gewählt werden dürfen, wenn im Bild alle Kanten des Quaders zu erkennen sein sollen.

Wir wollen nun das rechts dargestellte Herz projizieren.

c) Gib eine Vektordarstellung dieses Herzens im Wertebereich $-1 \leq x \leq 1$ bzw. $-1 \leq y \leq 1$ an.



Zum Schluss soll das Herz mit einer Winkelgeschwindigkeit von $\omega = \frac{2\pi}{3s}$ um die y-Achse rotieren.

d) Gib die Matrixdarstellung einer Abbildung δ an, die die Herz-Koordinaten in der geforderten Weise rotiert.

Vorschlag III - Musterlösung

Aufgabe 1 - Funktionstest der Laseranlage

a) Bild: Hauswand mit mittig platziertem Koordinatensystem

b) $\alpha : \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$

c) $g' : \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 + \lambda 0,5 \\ 0,3 + \lambda 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d)

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} : \vec{x} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}' \\ h : \vec{x} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 + \mu \cdot (-1) \\ -1 + \mu \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\mu}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \alpha &= |\tan^{-1}(m_g)| + |\tan^{-1}(m_h)| \\ &= \left| \tan^{-1} \left(\frac{0,5}{1} \right) \right| + \left| \tan^{-1} \left(\frac{-1}{1} \right) \right| \\ &= 26,6^\circ + 45^\circ \\ &= 71,6^\circ \end{aligned}$$

Aufgabe 2 - Ausrichtung auf's Hausdach

a) Da das Dach länger als breit ist, ist das limitierende Maß die Dachbreite b. Als Abbildungsgleichung ergibt sich damit: $\beta : \vec{x}' = \frac{b}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = 3m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$

b) Aus der Vogelperspektive erscheint die Dachbreite b verkürzt um $b' = b \cdot \cos(\alpha)$. Ist das Dach um 30° gedreht, wandert ein Punkt mit y-Koordinate b um $x = b' \sin(\beta) = b \cos(\alpha) \sin(\beta)$ nach links. Zur Kompensation muss er also um dieses Stück nach rechts verschoben werden.

Nun muss noch die Perspektive des Brautpaares kompensiert werden.

In x-Richtung erscheinen Längen verkürzt: $l'_x = l_x \cos(\beta)$. Deswegen müssen x-Koordinaten um den Faktor $\frac{1}{\cos(\beta)}$ verbreitert werden.

In y-Richtung erscheinen Längen ebenfalls verkürzt: $l'_y = l_y \sin(\alpha)$. Da das Bild aber in y-Richtung schon die maximale Größe hat, muss, statt die y-Richtung zu vergrößern, die x-Richtung nochmals verkleinert werden, nämlich um den Faktor $\sin(\alpha)$.

Insgesamt ergibt sich damit: $\gamma : \vec{x}' = \frac{b}{2} \begin{pmatrix} \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\beta)} & 0 \\ \cos(\alpha) \tan(\beta) \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\beta)} & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = 3m \begin{pmatrix} 0.815 & 0 \\ 0.19 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$

Aufgabe 3 - Projizieren von Figuren

a)

$$\begin{aligned} A &= (1, -0.8, -0.6) & B &= (1, 0.8, -0.6) \\ C &= (-1, 0.8, -0.6) & D &= (-1, -0.8, -0.6) \\ E &= (1, -0.8, 0.6) & F &= (1, 0.8, 0.6) \\ G &= (-1, 0.8, 0.6) & H &= (-1, -0.8, 0.6) \end{aligned}$$

b) Alle, bei denen Ecken auf Ecken projiziert werden, also z.B.

$$\begin{aligned} v_{AE} &= (2, 0, 0) \\ v_{AF} &= (2, 1.6, 0) \\ v_{AG} &= (2, 0, 1.2) \end{aligned}$$

c) Geraden:

$$\begin{aligned} g_1 : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_1 &\in [0; \frac{1}{\sqrt{2}}] \\ g_2 : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 &\in [0; \frac{1}{\sqrt{2}}] \end{aligned}$$

Halbkreisbögen:

$$\begin{aligned} k_1 : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\phi_1) \\ \sin(\phi_1) \end{pmatrix} \\ \phi_1 &\in [-45°; 135°] \\ k_2 : \vec{x} &= \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\phi_2) \\ \sin(\phi_2) \end{pmatrix} \\ \phi_2 &\in [45°; 225°] \end{aligned}$$

d) Rotation um die z-Achse allgemein: $\begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}$.

Hier werden nur die xy-Koordinaten transformiert, damit bleibt:

$\delta : \vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\phi = \frac{2\pi}{3s} \cdot t$