Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина
Физико-
технологический
институт

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Методические указания

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Методические указания к лабораторной работе
по теории вероятностей

Рекомендовано методическим советом УрФУ для студентов, обучающихся по техническим специальностям по направлению подготовки 210100.62 – Электроника и наноэлектроника, 140800.62 – Ядерные физика и технологии

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2014

УДК 519.25(075.8)

Составители: Г. А. Чердынцева, Н. М. Кравченко, Е. А. Успенская

Научный редактор – канд. физ.-мат. наук, доц. Е. А. Голикова

Случайные величины : метод. указ. / сост. Г. А. Чердынцева, Н. М. Кравченко, Е. А. Успенская. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 56 с.

Методические указания разработаны к запланированной в рабочей программе курса «Теория вероятностей и математическая статистика» расчетно-графической работе по теме «Математическая статистика». В работе приведены 25 вариантов расчетно-графической работы и подробно разобраны решения предлагаемых задач.

Издание подготовлено при поддержке физико-технологического института УрФУ

Библиогр.: 6 назв. Рис. 7.

УДК 519.25(075.8)

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Рассмотрим решение типовых задач, аналогичных задачам прилагаемых вариантов индивидуального задания по случайным величинам.

Задача 1. В партии из шести деталей содержится четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных, найти ее функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

Решение. Случайная величина X может принимать значения: 1, 2, 3. Вычислим соответствующие вероятности по классической формуле

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A, n – общее число элементарных исходов.

Найдем вероятность того, что среди отобранных трех деталей ровно одна стандартная. Общее число элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно выбрать три детали из шести деталей, т. е. C_6^3 – числу сочетаний из 6 элементов по 3. Следовательно, $n=C_6^3$. Найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди трех деталей ровно одна стандартная). Одну стандартную деталь можно выбрать из четырех стандартных деталей C_4^1 способами, при этом остальные две детали должны быть нестандартными; взять же две нестандартные детали из двух нестандартных можно C_2^2 способами. Следовательно, $m=C_4^1C_2^2$. Напомним, что число сочетаний из n элементов по m элементов вычисляется по формуле

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Тогда вероятность события X= 1 равна

$$P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=0,2.$$

Аналогично вычисляются вероятности событий $X = 2$ и $X = 3$:

$$P(X=2)=\frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3}=0,6 \ ,$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=0,2 \ .$$

Следовательно, ряд распределения случайной величины X имеет вид:

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,6	0,2

Найдем функцию распределения случайной величины X. Функцией распределения случайной величины X называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x вероятность того, что X примет значение, меньшее, чем x, т. е. $F(x) = P(X < x)$.

Будем задавать различные значения x и находить для них $F(x) = P(X < x)$.

1. Пусть $x \le 1$. Тогда $F(x) = P(X < x) = 0$, т. к. для любого значения $x < 1$ случайная величина X не принимает значений, меньших x. В частности, при $x = 1$ имеем $F(1) = P(X < 1) = 0$, т. к. случайная величина X не принимает значений, меньших 1.

2. Пусть $1 < x \le 2$. Тогда $F(x) = P(X < x) = P(X = 1) = 0,2$. Например, при $x = 1,5$ имеем $F(1,5) = P(X < 1,5) = P(X = 1) = 0,2$.

3. Пусть $2 < x \le 3$.

Тогда $F(x) = P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,2 + 0,6 = 0,8$.

4. Пусть $x > 3$.

Тогда $F(x) = P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,2 + 0,6 + 0,2 = 1$.

Таким образом, функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ 0,2 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 0,8 & \text{при } 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис.1.

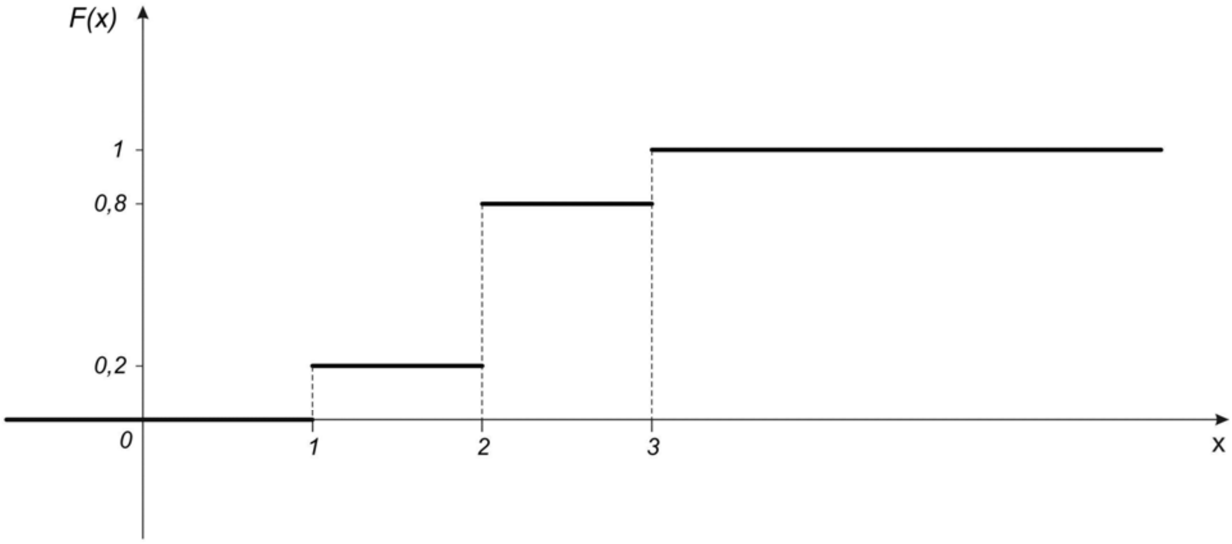

Рис. 1. Функция распределения

Вычислим математическое ожидание случайной величины X. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности. Следовательно,

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,2 = 2.$$

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2.$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле $D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2$. Найдем математическое ожидание X^2. Для этого составим ряд распределения случайной величины X^2. Учитываем при этом, что $P(X^2 = 1) = P(X = 1)$.

x_i^2	1	4	9
p_i	0,2	0,6	0,2

Тогда $M(X^2) = 1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,6 + 9 \cdot 0,2 = 4,4$.

Следовательно, $D(X) = 4,4 - 4 = 0,4$.

Найдем среднеквадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,4} \approx 0,63.$$

Построим многоугольник распределения случайной величины X. По оси абсцисс будем откладывать возможные значения x_i, а по оси ординат – соответствующие вероятности p_i. Отметим точки $M_1(1;\,0,2)$,

$M_2(2;\,0{,}6)$, $M_3(3;\,0{,}2)$. Соединив эти точки отрезками прямых, получим искомый многоугольник распределения (рис. 2).

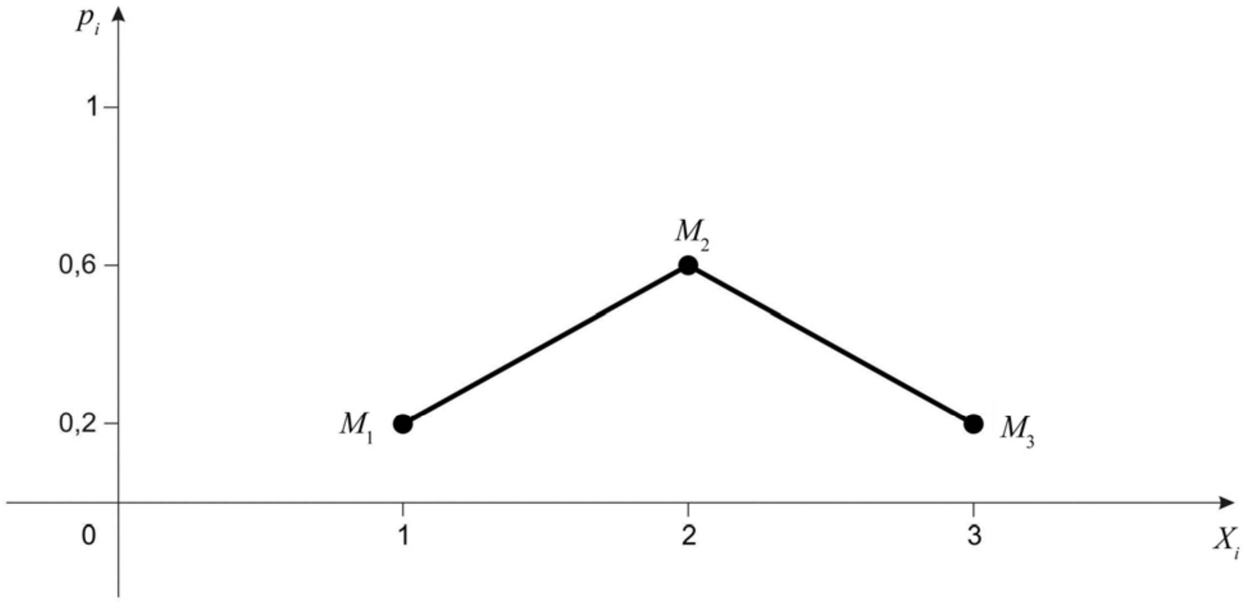

Рис. 2. Многоугольник распределения

Задача 2. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{a}\left(1-\dfrac{x}{a}\right), & x\in(0,3),\\ 0, & x\notin(0,3).\end{cases}$$

Найти значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Решение. Для того, чтобы найти параметр a, воспользуемся следующим свойством плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$$

Так как $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^3\dfrac{2}{a}\left(1-\dfrac{x}{a}\right)dx=\dfrac{2}{a}(x-\dfrac{x^2}{2a})\Big|_0^3=\dfrac{2}{a}(3-\dfrac{9}{2a})=\dfrac{6a-9}{a^2}=1$, то $a=3$.

Следовательно,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{x}{3}\right), & x\in(0,3),\\ 0, & x\notin(0,3).\end{cases}$$

Найдем функцию распределения. Для непрерывной случайной величины функция распределения $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Если $x \le 0$, то $f(x) = 0$, следовательно, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0$.

Если $0 < x < 3$,

то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{x} \frac{2}{3}(1 - \frac{x}{3})dx = \int\limits_{0}^{x} \frac{2}{3}(1 - \frac{x}{3})dx = \frac{2}{3}(x - \frac{x^2}{6})\Big|_0^x = \frac{x}{3}(2 - \frac{x}{3})$.

Если $x \ge 3$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{3} \frac{2}{3}(1 - \frac{x}{3})dx + \int\limits_{3}^{x} 0dx = \int\limits_{0}^{3} \frac{2}{3}(1 - \frac{x}{3})dx = \frac{2}{3}(x - \frac{x^2}{6})\Big|_0^3 = 1$.

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{3}(2 - \frac{x}{3}), & 0 < x < 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Графики $f(x)$ и $F(x)$ изображены на рис. 3, 4.

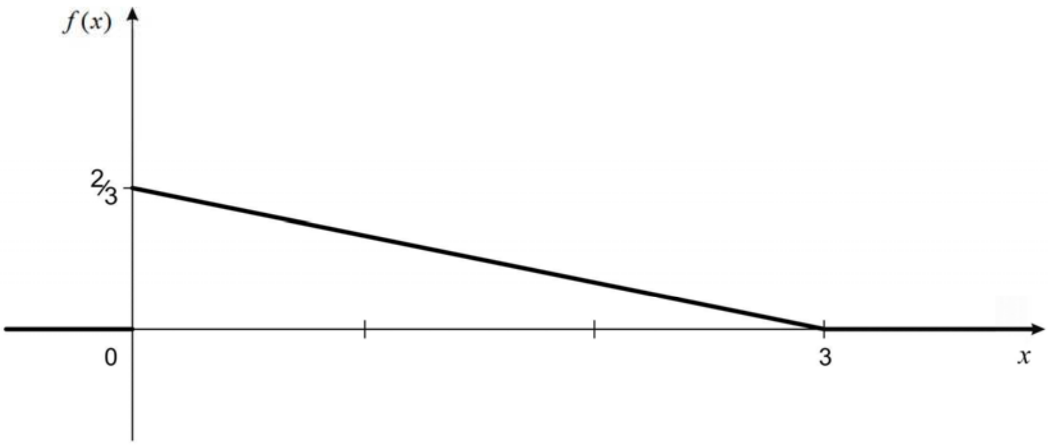

Рис. 3. График $f(x)$

Рис. 4. График *F(x)*

Находим математическое ожидание по определению:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{3}\frac{2x}{3}(1-\frac{x}{3})dx+\int_{3}^{+\infty} 0dx=\int_{0}^{3}\frac{2x}{3}(1-\frac{x}{3})dx=(\frac{x^2}{3}-\frac{2x^3}{27})\Big|_0^3=1$$

Задача 3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(\frac{\pi}{3}<X<\frac{\pi}{2})$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0\le x\le \pi, \\ 1, & x>\pi. \end{cases}$$

Решение. Для отыскания плотности распределения $f(x)$ воспользуемся тем, что $f(x)=F^{/}(x)$. Получим

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{1}{2}\sin x, & 0\le x\le \pi, \\ 0, & x>\pi. \end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ изображены на рис. 5, 6.

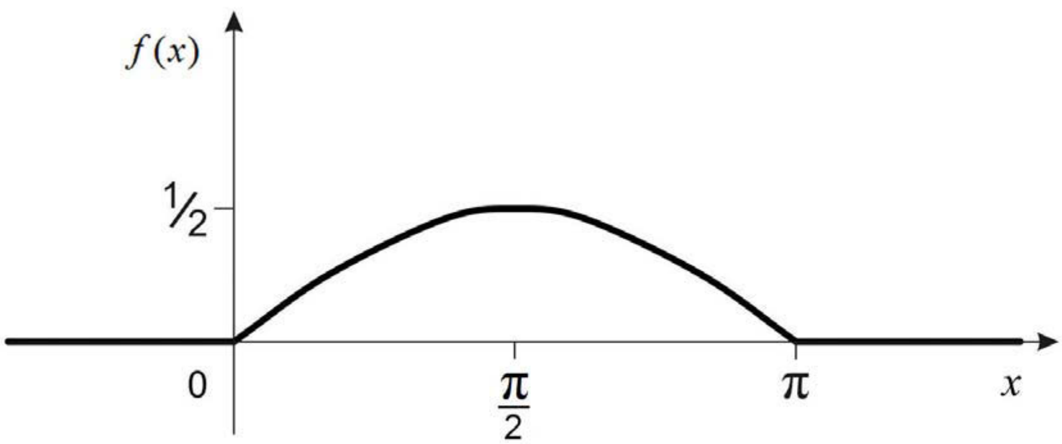

Рис. 5. График $f(x)$

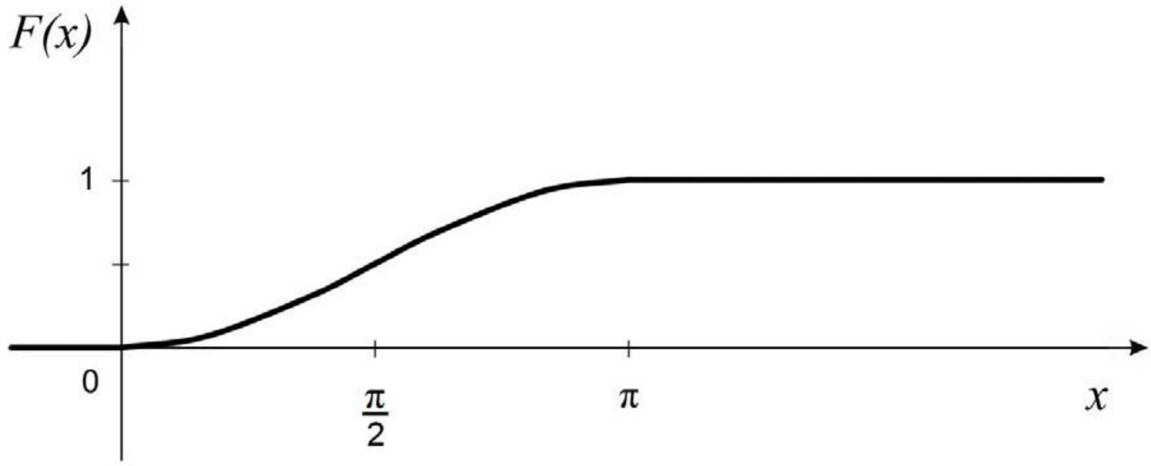

Рис. 6. График *F(x)*

Найдем математическое ожидание случайной величины X.

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} x\sin x dx=\frac{1}{2}\left(-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi}\cos x dx\right)=\frac{1}{2}(\pi+\sin x\Big|_0^{\pi})=\frac{\pi}{2}.$$

Вычислим дисперсию по формуле

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2.$$

Найдем математическое ожидание X^2, используя метод интегрирования по частям:

$$M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} x^2\sin x dx=\frac{1}{2}\left(-x^2\cos x\Big|_0^{\pi}+2\int\limits_0^{\pi}x\cos x dx\right)=$$

$$=\frac{\pi^2}{2}+\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}-2.$$

Следовательно, $D(X)=\frac{\pi^2}{2}-2-\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{4}-2\approx 0,47$. Среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-2}\approx 0,68$.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, заключенное в интервале *(a, b)*, найдем по формуле $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$.

Тогда $P(\frac{\pi}{3}<X<\frac{\pi}{2})=F(\frac{\pi}{2})-F(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}(1-\cos\frac{\pi}{2})-\frac{1}{2}(1-\cos\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

Задача 4. Размер диаметра детали, выпускаемой цехом – случайная величина ξ, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием $a=5$ см и среднеквадратическим отклонением $\sigma=0,9$ см.

Требуется

1. Записать формулу плотности распределения и построить ее график.

2. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали имеет размеры в пределах от 4 до 7 см.

3. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали отличается от математического ожидания не более, чем на 2 см.

4. Найти, в каких границах следует ожидать размер диаметра детали, чтобы вероятность невыхода за эти границы была равна 0,95.

Решение

1. Плотность нормального распределения с математическим ожиданием a и среднеквадратическим отклонением σ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

По условию $a = 5$ см и $\sigma = 0{,}9$ см, следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{0{,}9\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{1{,}62}}.$$

График плотности распределения изображен на рис. 7.

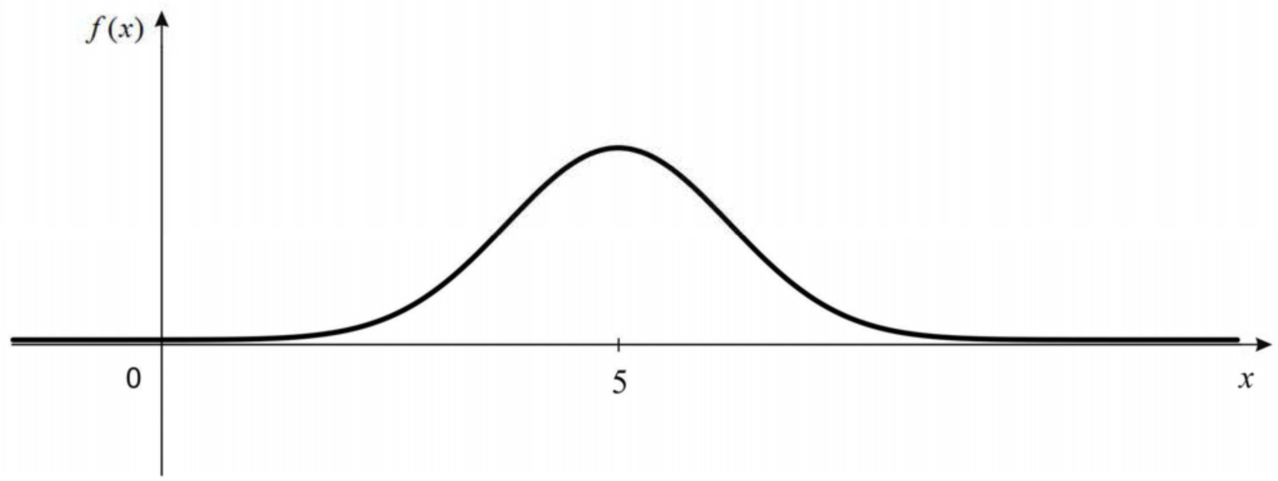

Рис. 7. График плотности

2. Для случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами a, σ, вероятность попадания в интервал (α, β) вычисляется по формуле

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ – функция Лапласа.

Следовательно, $P(4<\xi<7)=\Phi\left(\frac{7-5}{0,9}\right)-\Phi\left(\frac{4-5}{0,9}\right)=\Phi(2,22)-\Phi(-1,11)=$

$=\Phi(2,22)+\Phi(1,11)=0,4868+0,3665=0,8533$.

При вычислении было использовано свойство функции Лапласа: $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, значения $\Phi(x)$ найдены по таблице значений функции Лапласа.

3. Для симметричного относительно a интервала имеем

$$P(|\xi-a|<l)=P(a-l<\xi<a+l)=\Phi\left(\frac{a+l-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-l-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{a}{l}\right)-\Phi\left(-\frac{a}{l}\right)=2\Phi\left(\frac{a}{l}\right).$$

Поэтому, $P(|\xi-5|<l)=P(5-l<\xi<5+l)=2\Phi\left(\frac{l}{0,9}\right)=0,95$.

Отсюда $\Phi\left(\frac{l}{0,9}\right)=0,475$.

4. По таблице значений функции Лапласа находим, что $\Phi(x)=0,475$ при $x=1,96$. Следовательно, $x=\frac{l}{0,9}=1,96$ и $l\approx1,8$.

Задача 5. Таблицей задан закон распределения двумерной дискретной случайной величины (X,Y). Найти коэффициент корреляции и $P\left((X,Y)\in D:\{|x|<1;-\infty<y<+\infty\}\right)$.

$x\,/\,y$	**–2**	**1**	**3**	**4**
–1	0,06	0,13	0,07	**0,10**
0	0,12	0,10	0,04	**0,04**
3	**0,09**	**0,08**	**0,14**	**0,03**

Решение. Коэффициент корреляции вычисляется по формуле $r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)}$, где $K_{xy}=M(XY)-M(X)M(Y)$ – корреляционный момент. Найдем математическое ожидание произведения XY по формуле

$$M(XY)=\sum x_i y_j p_{ij}.$$

Следовательно,

$$M(XY)=(-1)\cdot(-2)\cdot0,06+0\cdot(-2)\cdot0,12+3\cdot(-2)\cdot0,09+(-1)\cdot1\cdot0,13+$$

$$+0\cdot 1\cdot 0{,}10+3\cdot 1\cdot 0{,}08+(-1)\cdot 3\cdot 0{,}07+0\cdot 3\cdot 0{,}04+3\cdot 3\cdot 0{,}14+$$
$$+(-1)\cdot 5\cdot 0{,}10+0\cdot 5\cdot 0{,}04+3\cdot 5\cdot 0{,}03=0{,}77\,.$$

Чтобы вычислить $M(X)$ и $M(Y)$, выпишем законы распределения составляющих X и Y. Сложив вероятности «по строкам», получим вероятности возможных значений X. Например, $P(X = -1) = 0{,}06 + 0{,}13 + 0{,}07 + 0{,}10 = 0{,}36$. Аналогично, сложив вероятности «по столбцам», получим вероятности возможных значений Y. Законы распределения X и Y имеют вид:

x_i	x	–1	0	3
p_i	p	0,36	0,30	0,34

y_j	y	–2	1	3	4
p_j	p	0,27	0,31	0,25	0,17

Вычислим математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайных величин X и Y.

$$M(X)=\sum x_i p_i=(-1)\cdot 0{,}36+0\cdot 0{,}30+3\cdot 0{,}34=0{,}66\,,$$

$$M(X^2)=\sum x_i^2 p_i=(-1)^2\cdot 0{,}36+0\cdot 0{,}30+3^2\cdot 0{,}34=3{,}42\,,$$

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2=3{,}42-(0{,}66)^2=3{,}42-0{,}4356=2{,}9844\,,$$
$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx 1{,}73\,.$$

Аналогично,

$$M(Y)=\sum y_j p_j=(-2)\cdot 0{,}27+1\cdot 0{,}31+3\cdot 0{,}25+4\cdot 0{,}17=1{,}2\,;$$

$$M(Y^2)=\sum y_j^2 p_j=(-2)^2\cdot 0{,}27+1^2\cdot 0{,}31+3^2\cdot 0{,}25+4^2\cdot 0{,}17=6{,}36\,;$$

$$D(Y)=6{,}36-(1{,}2)^2=6{,}36-1{,}44=4{,}92\,;$$
$$\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}\approx 2{,}22\,.$$

Далее,

$$K_{xy}=0{,}77-0{,}66\cdot 1{,}2=0{,}77-0{,}792=-0{,}022\,.$$

Таким образом, $r_{xy}\approx\dfrac{-0{,}022}{1{,}73\cdot 2{,}22}=\dfrac{-0{,}022}{3{,}8406}\approx -0{,}0057\,.$

Вычислим вероятность попадания случайной величины (X,Y) в область $D:\{|x|<1;-\infty<y<+\infty\}$:

$$P=P\left(X=0,Y=-2\right)+P\left(X=0,Y=1\right)+P\left(X=0,Y=3\right)+P\left(X=0,Y=4\right)=$$
$$=0{,}12+0{,}10+0{,}04+0{,}04=0{,}30\,.$$

Задача 6. Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) задана совместной плотностью распределения

$$f(x,y)=\frac{a}{(16+x^2)(25+y^2)},\ x,y\in R\,.$$

Найти: значение параметра a, совместную функцию распределения $F(x,y)$, частные плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$, вероятность $P\left(X\le 4,Y\le 5\right)$.

Решение. Для отыскания параметра a воспользуемся свойством плотности распределения

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1\,.$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{(16+x^2)(25+y^2)}dxdy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{a}{25+y^2}\cdot\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\bigg|_{-\infty}^{+\infty}\right)dy=\frac{a}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\pi}{25+y^2}dy=\frac{a\pi}{20}\operatorname{arctg}\frac{y}{5}\bigg|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{a\pi^2}{20}\,.$$

Из условия $\frac{a\pi^2}{20}=1$ следует, что $a=\frac{20}{\pi^2}$. Таким образом, плотность распределения $f(x,y)=\frac{20}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}$.

Найдем совместную функцию распределения $F(x,y)$:

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{20}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}dxdy=$$

$$=\frac{20}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{y}\left(\frac{1}{(25+y^2)}\cdot\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\bigg|_{-\infty}^{x}\right)dy=\frac{5}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{1}{25+y^2}dy=$$

$$=\frac{5}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{y}{5}\bigg|_{-\infty}^{y}=\frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{5}+\frac{\pi}{2}\right).$$

Найдем частные плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$.

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{20}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}dy=$$

$$=\frac{20}{\pi^2(16+x^2)}\cdot\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{y}{5}\bigg|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{4\pi}{\pi^2(16+x^2)}=\frac{4}{\pi(16+x^2)}\,.$$

Аналогично

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{20}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}dx = \frac{5}{\pi(25+y^2)}.$$

Далее

$$P\left(X \le 4, Y \le 5\right) = F(4,5) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}1 + \frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg}1 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{3\pi}{4} = \frac{9}{16}.$$

Задача 7. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами $a=0$ и $\sigma=1$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta=\xi^2$.

Решение. По условию плотность распределения случайной величины задана формулой $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty<x<+\infty$. Функция $y=x^2$ не монотонна на интервале $(-\infty;+\infty)$. Разобьем этот интервал на интервалы $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$, на каждом их которых рассматриваемая функция монотонна. На интервале $(-\infty;0)$ обратной к функции $y=x^2$ является функция $\varphi_1(y)=-\sqrt{y}$; на интервале $(0;+\infty)$ обратной к функции $y=x^2$ является функция $\varphi_2(y)=\sqrt{y}$. Искомая плотность распределения может быть найдена из равенства $g(y)=f(\varphi_1(y))\cdot\left|\varphi_1'(y)\right|+f(\varphi_2(y))\cdot\left|\varphi_2'(y)\right|$.

Найдем производные обратных функций:

$$\varphi_1'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}};\ \varphi_2'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Тогда

$$\left|\varphi_1'(y)\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}};\ \left|\varphi_2'(y)\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Учитывая, что $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\varphi_1(y)=-\sqrt{y}$, $\varphi_2(y)=\sqrt{y}$, получаем

$$f(\varphi_1(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}},\ f(\varphi_2(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}.$$

Следовательно, $g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}$.

Так как $y = x^2$, где $-\infty < x < +\infty$, то $0 < y < +\infty$. Таким образом, в интервале $(0;+\infty)$ искомая плотность распределения $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}$, вне этого интервала $g(y) = 0$.

Замечание. В случае монотонности функции $y = \psi(x)$ находим плотность распределения по формуле $g(y) = f(\varphi(y)) \cdot |\varphi'(y)|$, где $\varphi(y)$ – функция, обратная к функции $y = \psi(x)$ на заданном интервале изменения x.

Задача 8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = 3$ и $\sigma = 2$, а η – равномерное распределение на отрезке [1; 3]. Найти: $M(\xi\eta - 2\xi + \eta^2)$, $D(3\xi - \eta)$, $M(\xi - 2\eta + 1)$.

Решение. Ввиду линейности математического ожидания имеем равенство

$$M(\xi\eta - 2\xi + \eta^2) = M(\xi\eta) - 2M(\xi) + M(\eta^2).$$

Так как случайные величины ξ и η независимы, то $M(\xi\eta) = M(\xi)M(\eta)$. По условию случайная величина ξ имеет математическое ожидание $M(\xi) = a = 3$. Для случайной величины η с равномерным распределением на отрезке $[a;b]$ плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Следовательно,

$$M(\eta) = \int_a^b x \cdot f(x)dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}dx = \int_1^3 x \cdot \frac{1}{3-1}dx = \int_1^3 \frac{x}{2}dx = \left.\frac{x^2}{4}\right|_1^3 = 2.$$

Аналогично

$$M(\eta^2) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}dx = \int_1^3 x^2 \cdot \frac{1}{3-1}dx = \int_1^3 \frac{x^2}{2}dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_1^3 = \frac{13}{3}.$$

Таким образом,

$$M(\xi\eta - 2\xi + \eta^2) = M(\xi)M(\eta) - 2M(\xi) + M(\eta^2) = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + \frac{13}{3} = \frac{13}{3}.$$

Аналогично

$$M(\xi - 2\eta + 1) = M(\xi) - 2M(\eta) + 1 = 3 - 2 \cdot 2 + 1 = 0.$$

Для вычисления $D(3\xi - \eta)$ используем свойство дисперсии

$$D(\lambda\xi + \mu\eta) = \lambda^2 D(\xi) + \mu^2 D(\eta),$$

где λ, μ – действительные числа.

Поэтому

$$D(3\xi - \eta) = 3^2 D(\xi) + (-1)^2 D(\eta).$$

Находим далее $D(\xi) = \sigma^2 = 4$; $D(\eta) = M(\eta^2) - \left(M(\eta)\right)^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$.

Следовательно, $D(3\xi - \eta) = 9 \cdot 4 + \frac{1}{3} = 36\frac{1}{3}$.

2. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант № 1

1. Производятся последовательные независимые испытания пяти приборов на надежность. Каждый прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Вероятность выдержать испытания для каждого из приборов равна p = 0,9. Составить ряд распределения дискретной случайной величины X ─ числа испытанных приборов, найти ее функцию распределения $F(x)$ и числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} a\cos^2 x, & |x| \le \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(1 \le X \le 3)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0{,}5, \\ 1 - e^{1-2x}, & x > 0{,}5. \end{cases}$$

4. Случайное отклонение размера детали от номинала ξ при изготовлении ее на данном станке имеет нулевое математическое ожидание и σ = 5 мм. Запишите формулу для плотности

распределения ξ и постройте ее график. Сколько необходимо изготовить деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,9 среди них была бы хотя бы одна годная, если для годной детали допустимо отклонение от номинала не более, чем на 2 мм?

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины *(X, Y)*. Найти регрессию *Y* на *X* и построить линию регрессии.

X/Y	–2	2	3	4
–2	0,03	0,02	0,06	0,04
0	0,03	0,10	0,10	0,09
2	0,05	0,08	0,20	0,20

6. Двумерная случайная величина (X, Y) задана совместной плотностью распределения $f(x, y)$. Найти значение параметра a и математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$.

$$f(x,y)=\begin{cases} a\cos(x+y), & (x,y)\in D:\{|x|\le \pi/4, \quad |y|\le \pi/4\}, \\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$$

7. Пусть случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке [0; 1]. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = -\ln\xi$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = 2$ и $\sigma = 0{,}5$, а η — равномерное распределение на отрезке [0; 4].

Найти: $M(\xi + 2\xi\eta - 1)$, $D(2\xi - 4\xi\eta - 5)$, $M(3\xi^2 - 0{,}5)$.

Вариант № 2

1. В урне имеются четыре шара с номерами от 1 до 4. Из нее вынули два шара. Составить ряд распределения дискретной случайной величины X — суммы номеров вынутых шаров, найти ее функцию распределения $F(x)$ и числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{4-x^2}}, & |x|\le 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$ Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание и дисперсию, вероятность $P(\pi/3\le X\le\pi)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ (1/2)\cdot(1-\cos 2x), & 0\le x\le \pi/2,\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$$

4. Стрельба ведется из точки O вдоль прямой OX. Средняя дальность полета снаряда a = 1000 м. Предполагая, что дальность полета ξ распределена по нормальному закону со среднеквадратичным отклонением σ = 80 м, найти какой процент выпускаемых снарядов даст перелет от 120 до 160 м. Запишите формулу для плотности распределения ξ и постройте ее график.

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти регрессию X на Y и построить линию регрессии.

X/Y	–2	–1	0	2
–1	0,02	0,05	0,04	0,10
2	0,03	0,08	0,05	0,20
4	0,02	0,05	0,06	0,30

6. Двумерная случайная величина (X, Y) задана совместной плотностью распределения.

$$f(x,y)=\begin{cases}c\cdot(2x+7), & (x,y)\in D:\{x\ge 0,\quad y\ge 0\quad x+y\le 3\},\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Найти значение параметра c, частные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$. Зависимы ли X и Y?

7. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке [0; 1]. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет показательное распределение с параметром λ = 0,5, а η — равномерное распределение на отрезке [0; 3]. Найти: $M(\xi - \xi\eta + 1)$, $D(\xi - 5\xi\eta+4)$, $M(\eta^2+2)$.

Вариант № 3

1. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, извлекают шары по одному без возвращения до тех пор, пока не появится белый шар. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X – числа вынутых черных шаров, найти ее функцию распределения $F(x)$ и числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции F(x).

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ ax^2, & 0 \le x < 2, \\ a(4-x), & 2 \le x < 4, \\ 0, & x \ge 4. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(-1 \le X \le 2)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ (4/\pi)\cdot \operatorname{arctg}(x/2), & 0 \le x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

4. Диаметр детали, изготавливаемой на станке, — случайная величина ξ, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием a = 25 см и средним квадратичным отклонением σ = 0,4 см. Найти вероятность того, что две наудачу взятые детали имеют отклонение от математического ожидания по

абсолютной величине не более 0,16 см. Запишите формулу для плотности распределения ξ и постройте ее график.

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти регрессию Y на X и построить линию регрессии.

X/Y	–2	1	2	4
0	0,13	0,05	0,03	0,05
1	0,10	0,17	0,10	0,02
3	0,12	0,09	0,04	0,10

6. Двумерная случайная величина (X, Y) равномерно распределена в треугольнике с вершинами A(0; 0), B(0; 3), C(3; 0). Найти: плотность распределения $f(x,y)$ частные плотности распределения $f_1(x)$, $f_2(y)$ и $P(X \geq 0,\ 1 \leq Y \leq 2)$.

7. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром λ=3. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^{1/2}$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}4$, а η — нормальное распределение с параметрами a = 0, и $\sigma = 0{,}2$. Найти: $M(\xi + 3\xi\eta - 8)$, $D(\xi - 3\xi\eta - 5)$, $M(\xi^2 - \eta)$.

Вариант № 4

1. На пути движения автомашины 4 светофора. Каждый из них либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение автомобиля с вероятностью 0,5. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X – числа светофоров, пройденных автомашиной без остановки, найти ее функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения, математическое ожидание.

$$f(x)=\begin{cases} a\cos^2 x, & |x|\le \pi/2, \\ 0, & |x|>\pi/2. \end{cases}$$

Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(-\pi \le X \le -\pi/6)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-\pi/2, \\ \sin(x/2+\pi/4), & |x|\le \pi/2, \\ 1, & x>\pi/2. \end{cases}$$

4. Завод изготавливает шарики для подшипников, номинальный диаметр которых равен 10 мм, а фактический диаметр ξ случайно распределен по нормальному закону с параметрами a = 10мм и σ = 0,4мм. При контроле бракуются все шарики, не проходящие через отверстие диаметром d_1 = 10,7 мм, и все, проходящие через отверстие диаметром d_2 = 9,3мм. Найти процент годных шариков. Запишите формулу для плотности распределения ξ и постройте ее график.

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти регрессию X на Y. Построить линию регрессии.

X/Y	–4	–2	1	2
–2	0,06	0,05	0,05	0,03
0	0,17	0,06	0,10	0,10
1	0,10	0,10	0,07	0,11

6. Двумерная случайная величина (X,Y) задана совместной плотностью распределения

$$f(x,y)=\begin{cases} a(x^2+y^2), & (x,y)\in D:\{x^2+y^2\le 4, \quad x\ge 0, \quad y\le 0\}, \\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$$

Найти значение параметра a и коэффициент корреляции r_{xy}.

7. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = e^{-2\xi}$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}5$, а η – нормальное распределение с а = 2,2 и $\sigma = 0{,}5$. Найти: $M(\xi - 3\xi^2 + 3)$, $D(3\eta - 3\xi\eta + 1)$, $M(2\xi\eta - 3{,}2)$.

Вариант № 5

1. Бросают две симметричные кости, на парах граней которых выбиты цифры 1, 2, 3. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X — произведения числа очков на выпавших гранях, найти ее функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} axe^{-x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, вероятность $P(0{,}5 \le X \le 1{,}5)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ (2/\pi)\cdot \arcsin x, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

4. Случайная величина ξ подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $a = 10$. Каково должно быть средне-квадратическое отклонение σ этой случайной величины, чтобы с вероятностью 0,8 отклонение от математического ожидания по

абсолютной величине не превышало 0,2? Запишите формулу для плотности распределения ξ и постройте ее график

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти регрессию Y на X. Построить линию регрессии.

X/Y	0	1	2	4
–1	0,04	0,02	0,04	0,02
2	0,18	0,05	0,07	0,10
3	0,05	0,15	0,15	0,13

6. Двумерная случайная величина *(X, Y)* задана совместной плотностью распределения

$$f(x,y)=\begin{cases} a(x^2+y^2), & (x,y)\in D:\{x^2+y^2\le 9, \quad x\le 0, \ \ y\le 0\}, \\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$$

Найти значение параметра a и частные плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$.

7. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с $a=0$ и $\sigma=1$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta=\xi^4$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0,5$, а η – нормальное распределение с параметрами $a = 2,2$ и $\sigma = 0,5$. Найти: $M(2\xi^2-3\eta+2,7)$, $D(3\eta-2\xi\eta+1,8)$, $M(2\xi\eta+2\xi)$.

Вариант № 6

1. В распоряжении электрика имеется 5 лампочек, каждая из которых с вероятностью $p=1/5$ имеет дефект. Лампочка ввинчивается в патрон и включается ток. При включении тока дефектная лампочка сразу же перегорает и заменяется другой. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X – числа лампочек, которое будет испробовано, найти ее функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{9+x^2}, & x\in[-\sqrt{3},3],\\ 0, & x\notin[-\sqrt{3},3].\end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(-0{,}2\le \text{X} \le 0{,}2)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi/2,\\ \cos(x/2-\pi/4), & |x|\le\pi/2,\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$$

4. Случайные ошибки измерения ξ подчинены нормальному закону распределения со среднеквадратическим отклонением σ = 25мм и математическим ожиданием $a = 0$. Записать формулу для плотности распределения случайной величины ξ и построить ее график. Найти вероятность того, что из четырех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 20 мм.

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти регрессию X на Y. Построить линию регрессии.

X/Y	0	2	3	5
–2	0,05	0,07	0,10	0,08
1	0,10	0,09	0,10	0,05
2	0,15	0,08	0,12	0,01

6. Двумерная случайная величина (X,Y) задана совместной плотностью распределения

$$f(x,y)=\begin{cases}axy, & (x,y)\in D:\{0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2-2x\},\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Найти: значение параметра a, безусловные и условные плотности распределения составляющих. Зависимы ли X и Y?

7. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке [0; 1]. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = e^{\xi-1}$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет равномерное распределение на отрезке [12; 18], а η – равномерное распределение на отрезке [–3; 6]. Найти: $M(2\eta-3\xi^2+4)$, $D(4\xi\eta-5\xi)$, $M(3\xi\eta-2\xi-0,6)$.

Вариант № 7

1. Стрелок делает четыре выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна $p = 3/4$. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X — числа попаданий в мишень, найти ее функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} a\sin^2 x, & x \in [0, \pi], \\ 0, & x \notin [0, \pi]. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(-\pi/6 \leq X \leq \pi)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0,5 \cdot e^{5x}, & x < 0, \\ 1 - 0,5 \cdot e^{-5x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

4. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение. Известно, что $P(X < 0,44) = 0,1$ а $P(X \geq 3,88) = 0,33$. Найти плотность распределения ξ и построить ее график.

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти регрессию Y на X. Построить линию регрессии.

X/Y	–1	0	2	4
–2	0,04	0,05	0,07	0,05
1	0,05	0,08	0,09	0,08
2	0,10	0,12	0,10	0,17

6. Двумерная случайная величина (X,Y) задана совместной плотностью распределения

$$f(x,y)=\begin{cases} a\sin(2x)\cdot\sin(y/3), & (x,y)\in D:\{0\le x\le \pi/4, \quad 0\le y\le \pi\}, \\ 0, \ (x,y)\notin D. \end{cases}$$

Найти: значение параметра a, безусловные и условные плотности распределения составляющих. Зависимы ли X и Y?

7. Случайная величина ξ распределена равномерно на интервале $(-\pi/2, \ \pi/2)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \sin\xi$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = 1$ и $\sigma = 1{,}2$, а η – равномерное распределение на отрезке [1; 4]. Найти: $M(3\xi\eta-\eta+5)$, $D(2\xi\eta-5\xi)$, $M(\xi^2-2\eta)$.

Вариант № 8

1. Имея боезапас из пяти патронов, стрелок стреляет по мишени до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p=2/3. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X – числа израсходованных патронов, найти ее функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}2a(2-|x|), & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(-1\le X\le \sqrt{3}/3)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ (4/\pi)\cdot \mathrm{arctg} x, & 0\le x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

4. Внешний диаметр (ВД) годных для сборки стальных стержней распределен по нормальному закону с параметрами a = 2,3 см и $\sigma=0{,}06$ см. Пределы допуска $2{,}31\pm 0{,}10$ см. Изделие с ВД ниже нижнего предела считается ломом, тогда как при превышении ВД верхнего предела изделие можно доработать. Каков процент лома? Сколько процентов продукции нуждается в доработке?

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти регрессию Y на X. Построить линию регрессии.

X/Y	–2	0	2	4
–3	0,04	0,08	0,05	0,04
–1	0,08	0,09	0,06	0,07
2	0,14	0,12	0,12	0,11

6. Двумерная случайная величина *(X, Y)* задана совместной плотностью распределения $f(x,y)=\dfrac{a}{(4+x^2)(9+y^2)}$

Найти: значение параметра a, частные плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$, вероятность $P(X\le 2,\ Y\le 3)$.

7. Случайная величина ξ распределена равномерно на интервале $(0, \pi)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \cos\xi$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет нормальное распределение с параметрами a = 1 и σ = 0,5,

η – показательное распределение с $\lambda = 2{,}5$. Найти: $M(2\xi^2 - \eta/2)$, $D(3\xi\eta - \xi - 1{,}7)$, $M(\xi - 2\xi\eta + 4{,}5)$.

Вариант № 9

1. С целью привлечения покупателей компания «Coca-Cola» проводит рекламную акцию, в которой каждая десятая бутылка напитка, выпущенного фирмой, является призовой. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X – числа призовых бутылок из четырех приобретенных, найти ее функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{9 - x^2}}, & |x| < 3, \\ 0, & |x| \geq 3. \end{cases}$$

Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(\pi / 12 \leq X \leq \pi)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi / 4, \\ 0{,}5 \cdot (1 + \sin 2x), & |x| \leq \pi / 4, \\ 1, & x > \pi / 4. \end{cases}$$

4. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение. Известно, что $P(\xi > 2) = 0{,}5$, а $P(\xi < 3) = 0{,}975$. Найти плотность распределения ξ и построить ее график.

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти регрессию X на Y. Построить линию регрессии.

X/Y	–2	1	3	6
–2	0,02	0,07	0,09	0,09
0	0,04	0,08	0,16	0,11
3	0,05	0,08	0,11	0,10

6. Двумерная случайная величина *(X, Y)* задана совместной плотностью распределения

$$f(x,y)=\begin{cases}2a\cdot\sin(x+2y), & (x,y)\in D:\{0\le x\le \pi/2, \quad 0\le y\le \pi/4\},\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Найти: значение параметра a, частные плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$. Зависимы ли X и Y?

7. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке [0, 1]. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = -\ln(1-\xi)$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет равномерное распределение на отрезке [–2; 6] а η – показательное распределение с параметром λ = 0,4. Найти: $M(3\xi^2-\eta-6)$, $D(2\xi\eta-\eta+3)$, $M(2\xi-5\xi\eta+\xi)$.

Вариант № 10

1. Имея в своем распоряжении пять патронов, охотник стреляет по удаляющейся мишени. Вероятность попадания при первом выстреле равна p_1=0,8 и с каждым последующим выстрелом она уменьшается на 0,1. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X — числа израсходованных патронов, найти ее функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot e^{-|x|}, & |x|<\ln 2,\\ 0, & |x|\geq \ln 2. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(1/4\leq X\leq 2/3)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-0,5,\\ 1/2+(1/\pi)\cdot\arcsin(2x), & |x|\leq 0,5,\\ 1, & x>0,5. \end{cases}$$

4. Случайная ошибка измерения некоторой величины ξ подчинена нормальному закону распределения с σ = 10 мм. Измерения производятся прибором, не имеющим систематической ошибки (то есть a = 0). Записать формулу для плотности распределения случайной величины ξ и построить ее график. Найти вероятность того, что в серии из пяти независимых измерений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет 6 мм.

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти регрессию Y на X. Построить линию регрессии.

X/Y	–3	1	2	5
0	0,05	0,08	0,11	0,06
2	0,06	0,09	0,09	0,05
4	0,08	0,18	0,11	0,04

6. Двумерная случайная величина (X, Y) задана совместной плотностью распределения

$$f(x,y)=\begin{cases} a\cdot(9-x^2-y^2), & (x,y)\in D:\{x^2+y^2\leq 9,\ x\leq 0,\ y\leq 0\},\\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$$

Найти значение параметра a и коэффициент корреляции r_{xy}.

7. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке [0; 27]. Найти плотность распределения случайной величины $\eta=\xi^{1/3}$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = -0{,}5$ и $\sigma = 2{,}3$, а η — показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}2$. Найти: $M(\xi - 2\xi\eta + 5)$, $D(-\xi + 2\xi\eta + 4{,}5)$, $M(2\eta^2 - \xi + 3{,}5)$

Вариант № 11

1. Стрелок стреляет по мишени, имея в своем распоряжении 6 патронов. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,4. Стрельба по мишени ведется до первого промаха. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X – числа израсходованных патронов, найти ее функцию распределения $F(x)$, $\mathrm{F}(x)$, числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot (\arcsin x + 1), & x \in [0; 1], \\ 0, & x \notin [0; 1]. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(-1 \le X \le 0)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3, \\ 1 - e^{-2x-6}, & x > -1. \end{cases}$$

4. Автомат изготавливает шарики для подшипников. Диаметр изготавливаемых шариков ξ распределен по нормальному закону с $a = 5$ мм. Известно, что в среднем отбраковываются 6 % шариков, диаметр которых отличается от a более, чем на 0,1 мм. Записать формулу для плотности распределения случайной величины ξ и построить ее график. Найти вероятность того, что диаметр двух наудачу выбранных шариков будет заключен в пределах от 4,95 до 5,05 мм.

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти регрессию X на Y. Построить линию регрессии.

X/Y	–3	–2	1	3
–2	0,05	0,19	0,10	0,05
0	0,07	0,11	0,07	0,05
4	0,08	0,09	0,08	0,06

6. Двумерная случайная величина (X, Y) задана совместной плотностью распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} a \cdot (x + 2y), & (x, y) \in D : \{x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y - 2 \leq 0\}, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Найти: значение параметра a, частные плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$, вероятность $P(X \geq 0, \quad 0 \leq Y \leq 1)$.

7. Случайная величина ξ имеет стандартное распределение Коши: $f(\xi) = [\pi(1+\xi^2)]^{-1}$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = (1+\xi^2)^{-1}$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}2$, а η — равномерное распределение на отрезке $[-1;\ 5]$. Найти: $M(\xi/5-\xi\eta+1)$, $M(\xi^2-\eta+0{,}5\xi)$, $D(3\eta-2\xi\eta+0{,}7)$.

Вариант № 12

1. Среди 10 заявок на ремонт бытовой техники 6 заявок на ремонт принтера. Мастер, желая найти заявку на ремонт принтера, рассматривает их поочередно и, найдя такую заявку, прекращает дальнейший просмотр. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X — числа просмотренных заявок, найти ее функцию распределения $F(x)$ и числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции распределения $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ a\cdot xe^{-x^2}, & x\geq 0.\end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(2\pi/3\leq X\leq\pi)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0.\\ 0{,}5\cdot(1-\cos(\boldsymbol{x}/2)), & 0\leq x\leq 2\pi,\\ 1, & x>2\pi.\end{cases}$$

4. Химический завод изготавливает серную кислоту. Плотность кислоты ξ — случайная величина, которая удовлетворяет нормальному закону распределения с параметром $a = 1{,}84$. В результате статистических испытаний было установлено, что 99,9 % всех выпускаемых реактивов имеют плотность в интервале (1,82; 1,86). Найти вероятность того, что кислота удовлетворяет стандарту, если для этого достаточно, чтобы ее плотность отклонялась от номинала не более, чем на 0,01 г/см^3. Запишите формулу для плотности распределения случайной величины ξ и постройте ее график.

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти регрессию X на Y. Построить линию регрессии.

X/Y	–2	2	3	6
–3	0,18	0,17	0,10	0,08
–2	0,10	0,11	0,07	0,04
0	0,04	0,04	0,04	0,04

6. Случайная величина (X, Y) равномерно распределена в круге радиуса 3. Найти: совместную плотность распределения $f(x, y)$, частные плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$, $P(X\geq 0,\quad 0\leq Y\leq 1)$.

7. Случайная величина ξ имеет стандартное распределение Коши: $f(\xi) = [\pi(1+\xi^2)]^{-1}$. Найти плотность распределения случайной вели-чины $\eta = \xi^2$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет нормальное распределение с параметром $a = -2$ и $\sigma = 0{,}5$, а η – равномерное распределение на отрезке [2; 8]. Найти: $M(2\xi^2-3\eta+8)$, $M(\xi\eta-4\eta+0{,}5\xi)$, $D(3\xi\eta-2\xi+9{,}7)$.

Вариант № 13

1. Среди 10 купленных театральных билетов 4 билета в партер. Наудачу взяли 5 билетов. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X — числа билетов в партер среди выбранных пяти, найти ее функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, средне-квадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ (a/3)\cdot\cos^3 x, & 0 \le x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(\sqrt{3}/6 \le X \le \sqrt{3}/2)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ (4/\pi)\cdot\operatorname{arctg}(x/3) & x \in [0; 3], \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

4. Масса вагона ξ – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием 65 т и средним квадратичным отклонением σ = 0,9 т. Записать формулу для плотности распределения случайной величины ξ и построить ее график. Найти вероятность того, что из двух наудачу взятых вагонов хотя бы один имеет массу, отличающуюся от математического ожидания не более чем на одну тонну.

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти регрессию Y на X. Построить линию регрессии.

X/Y	–3	–1	2	4
–3	0,08	0,09	0,09	0,03
–2	0,08	0,13	0,13	0,03
0	0,08	0,12	0,09	0,05

6. Двумерная случайная величина *(X, Y)* задана совместной плотностью распределения

$$f(x,y)=\begin{cases}2a\cdot(x^2+y^2), & (x,y)\in D:\{x\ge 0, \quad y\ge 0, \quad x^2+y^2-9\le 0\},\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Найти: значение параметра a и математические ожидания случайных величин X и Y.

7. Случайная величина ξ имеет стандартное распределение Коши: $f(\xi)=[\pi(1+\xi^2)]^{-1}$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 1/\xi$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a=-0{,}5$ и $\sigma=2{,}3$, а η – показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найти: $M(3\xi^2-\eta+\xi)$, $M(2\xi\eta+\eta+0{,}5)$, $D(3\xi\eta-\xi-4\eta)$.

Вариант № 14

1. Два стрелка независимо друг от друга делают по два выстрела в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,5, для второго – 0,6. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X – суммарного числа попаданий в

мишень, найти ее функцию распределения $F(x)$, а также числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases} a/(4+x^2), & |x|\le 2, \\ 0, & |x|>2. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(-\pi/2\le X\le \pi/3)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ x<-\pi/3, \\ (1/3)\cdot(1+2\sin(x/2)), \ -\pi/3\le x\le \pi, \\ 1, \ x>\pi. \end{cases}$$

4. В нормально распределенной совокупности 15,87 % значений ξ меньше 12 и 40,13 % значений ξ больше 16,2. Найдите среднее значение и стандартное отклонение данной совокупности. Запишите формулу для плотности распределения случайной величины ξ и постройте ее график.

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти регрессию X на Y. Построить линию регрессии.

X/Y	–5	–3	–2	2
–1	0,18	0,13	0,08	0,07
0	0,11	0,11	0,06	0,05
4	0,09	0,07	0,03	0,02

6. Двумерная случайная величина (X, Y) задана совместной плотностью распределения $f(x,y)=\begin{cases} axye^{-(x^2+y^2)}, & (x,y)\in D\colon \{x\ge 0, \quad y\ge 0\}, \\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$

Найти: значение параметра a, безусловные и условные плотности распределения составляющих. Зависимы ли X и Y?

7. Случайная величина ξ распределена равномерно на интервале $(-\pi/2,\ \pi/2)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \mathrm{tg}\xi$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[-3;\ 5]$, а η — показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найти: $M(4\xi-3\eta^2+8)$, $M(4\xi\eta-3\xi)$, $D(4\xi\eta-3\xi+3)$.

Вариант № 15

1. Из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров, извлекают 3 шара без возвращения. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X – числа белых шаров в выборке, найти ее функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos^2 2x, & |x| \le \pi/4, \\ 0, & |x| > \pi/4. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(-1 \le X \le 1)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1 + (6/\pi) \cdot \arcsin(x/2), & -1 \le x \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

4. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически. Случайная величина ξ – масса коробки распределена по нормальному

закону. Средняя масса коробок равна 1 кг. Фактическая масса коробок не менее 960 и не более 1040 грамм. Какова вероятность того, что масса двух наудачу выбранных коробок превышает 980 г? Запишите формулу для плотности распределения случайной величины ξ и постройте ее график.

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти регрессию Y на X. Построить линию регрессии.

X/Y	–1	0	3	4
–2	0,11	0,14	0,06	0,01
2	0,10	0,11	0,07	0,06
4	0,07	0,15	0,09	0,03

6. Двумерная случайная величина (X, Y) задана совместной плотностью распределения

$$f(x,y)=\begin{cases} axy, & (x,y)\in D:\{x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad x+2y-2\le 0\}, \\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$$

Найти: значение параметра a, безусловные и условные плотности распределения составляющих. Зависимы ли X и Y?

7. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = e^{\xi}$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет нормальное распределение с $a = 2$ и $\sigma = 0{,}5$, а η — показательное распределение с параметром $\lambda = 3$. Найти: $M(\xi-2\eta^2+5{,}7)$, $M(3\xi\eta+2\xi+5)$, $D(3\xi\eta-2\xi+9)$.

Вариант № 16

1. Четыре раза бросается правильная монета. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X — модуля разности числа появлений герба и числа появлений решки в данном эксперименте, найти ее функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2a \cdot \arccos x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(1 \le X \le 10)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 5, \\ 1 - (5/x)^3, & x > 5. \end{cases}$$

4. Диаметр выпускаемой детали ξ — случайная величина, подчиненная нормальному закону с математическим ожиданием a = 1,6 и среднеквадратическим отклонением σ = 1. Записать формулу для плотности распределения случайной величины ξ и построить ее график. Сколько необходимо взять деталей, чтобы с вероятностью 0,8 хотя бы одна из них попала в интервал (1,2)?

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти регрессию X на Y. Построить линию регрессии.

X/Y	–3	0	2	4
–2	0,15	0,16	0,09	0,09
–1	0,08	0,15	0,10	0,05
2	0,04	0,05	0,03	0,01

6. Двумерная случайная величина (X,Y) задана совместной плотностью распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} 2a \cdot \cos(2x + y), & (x,y) \in D: \{|x| \le \pi/8, \quad |y| \le \pi/4\}, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Найти: значение параметра a, частные плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$. Зависимы ли X и Y?

7. Случайные величина ξ имеет стандартное распределение Коши: $f(\xi) = [\pi(1+\xi^2)]^{-1}$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = (1/\pi)\text{arctg}\,\xi$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет нормальное распределение с $a = -1$ и $\sigma = 0{,}5$, а η – показательное распределение с $\lambda = 0{,}5$. Найти: $M(3\xi-2\xi\eta-7)$, $M(5\xi^2-4\xi+5\eta)$, $D(2\xi\eta-\eta+4)$.

Вариант № 17

1. Из урны, содержащей 10 белых и 4 черных шара, извлекают шары по одному без возвращения до тех пор, пока не появится белый шар. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X – числа вынутых черных шаров, найти ее функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} a / \sin^2 x, & x \in [\pi/4,\ \pi/2], \\ 0, & x \notin [\pi/4,\ \pi/2]. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(1 \le X \le 2)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - (2/\pi)\cdot\arccos x, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

4. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если нормально распределенное отклонение ξ контролируемого размера от номинала $a = 1000$ мм не превышает 10 мм. Точность изготовления деталей характеризуется стандартным отклонением σ. Какой должна

быть точность изготовления деталей, чтобы процент годных деталей был равен 98 %? Запишите формулу для плотности распределения случайной величины ξ и постройте ее график.

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти регрессию X на Y. Построить линию регрессии.

X/Y	–3	–1	0	3
2	0,16	0,11	0,08	0,08
3	0,13	0,10	0,08	0,07
4	0,05	0,07	0,03	0,04

6. Двумерная случайная величина (X, Y) задана совместной плотностью распределения

$$f(x,y)=\begin{cases} a\cdot\cos(x/6)\cdot\cos(2y), & (x,y)\in D:\{0\le x\le\pi,\quad 0\le y\le\pi/4\}, \\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$$

Найти: значение параметра a, безусловные и условные законы распределения составляющих. Зависимы ли X и Y?

7. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на интервале $(0, \pi)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \mathrm{ctg}\xi$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет равномерное распределение на отрезке [1; 4], а η – показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найти: $M(2\xi-5\xi\eta+7)$, $M(\xi^2-4\xi+\eta)$, $D(3\xi\eta-\xi+4)$.

Вариант № 18

1. Имеется 7 лампочек, среди которых 3 неисправные, на вид неотличимые от новых. Наугад берутся 4 лампочки и вставляются в 4 патрона. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X – числа лампочек, которые будут работать, найти ее функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ a\cdot xe^{-x^2}, & x\ge 0.\end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(-\pi \le X \le 0)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi/2,\\ \cos(x/3-\pi/3) & -\pi/2\le x\le \pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

4. Было установлено, что выход в граммах ξ красителя стандартного цвета со специальным оттенком распределен нормально со средним $a = 1550$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 50$. Найти вероятность того, что из трех проверок, хотя бы одна даст выход красителя выше 1575 гр. Запишите формулу для плотности распределения случайной величины ξ и постройте ее график.

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти регрессию Y на X. Построить линию регрессии.

X/Y	0	1	3	6
–2	0,04	0,15	0,10	0,04
2	0,16	0,11	0,10	0,05
3	0,06	0,13	0,03	0,03

6. Двумерная случайная величина (X, Y) задана совместной плотностью распределения

$$f(x,y)=\begin{cases}a\cdot(3x+y), & (x,y)\in D:\{x\ge 0, \quad y\ge 0, \quad 3x+y-3\le 0\},\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Найти значение параметра a безусловные и условные плотности распределения вероятностей. Зависимы ли X и Y?

7. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке [0; 1]. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi - 1/\xi$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = -1{,}5$ и $\sigma = 0{,}25$, а η – показательное распределение с параметром $\lambda = 2{,}5$. Найти: $M(2\xi\eta - 5\eta + 9)$, $M(6\xi^2 - 4\xi + 2{,}5)$.

Вариант № 19

1. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X — числа дождливых дней в период с первого по пятое сентября, найти ее функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ a \cdot xe^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(-\pi \leq X \leq -\pi/4)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi, \\ \sin(x/3 + \pi/3), & -\pi \leq x \leq \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

4. Завод выпускает круглый керамзит. Контролируется случайная величина ξ – диаметр шариков, который распределен нормально с математическим ожиданием, равным 20 мм. Фактический диаметр шариков не менее 10 и не более 30 мм. Найти вероятность того, что диаметр двух наудачу взятых шариков будет больше 15 мм.

Запишите формулу для плотности распределения случайной величины ξ и постройте ее график.

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти регрессию X на Y. Построить линию регрессии.

X/Y	–2	0	2	5
–1	0,15	0,13	0,07	0,06
2	0,13	0,15	0,08	0,04
4	0,06	0,05	0,05	0,03

6. Двумерная случайная величина (X, Y) задана совместной плотностью распределения $f(x,y)=\dfrac{a}{(1+x^2)(4+y^2)}$. Найти: значение параметра a, частные плотности распределения вероятностей $f_1(x)$ и $f_2(y)$, вероятность $P(X\le 1;\ Y\le 2)$.

7. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром λ = 1. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет нормальное распределение с $a = -1{,}5$ и $\sigma = 0{,}5$, а η – показательное распределение с параметром λ = 0,5. Найти: $M(\xi-2\xi\eta-7)$, $M(\xi^2+3\eta+0{,}8)$, $D(3\xi\eta-5\xi+14)$.

Вариант № 20

1. Из урны, содержащей 5 белых и 10 черных шаров, по схеме выбора с возвращением извлекают 5 шаров. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X – числа черных шаров среди вынутых пяти, найти ее функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$\begin{cases} a\cdot(1+|x|^3), & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(-1\le X\le 1)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ 1-e^{-x^2} & x>0. \end{cases}$$

4. Завод изготавливает шарики для подшипников, номинальный диаметр которых равен 15 мм, а фактический диаметр ξ случайно распределен по нормальному закону с параметром $a = 15$мм. При контроле бракуются все шарики, не проходящие через отверстие диаметром $d_1 = 15{,}5$мм, и все, проходящие через отверстие диаметром $d_2 = 9{,}5$мм. Чему должно быть равно среднеквадратическое отклонение такого распределения σ, чтобы брак составлял не более 2 %? Запишите формулу для плотности распределения ξ и постройте ее график.

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти регрессию Y на X. Построить линию регрессии.

X/Y	–4	–2	0	3
–3	0,16	0,15	0,10	0,04
1	0,09	0,09	0,07	0,02
2	0,10	0,10	0,05	0,03

6. Двумерная случайная величина (X, Y) задана совместной плотностью распределения

$$f(x,y)=\begin{cases} a\cdot(4-x^2-y^2), & (x,y)\in D:\{x^2+y^2\le 4,\ x\le 0,\ y\ge 0\},\\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$$

Найти: значение параметра a, математическое ожидание и дисперсию системы случайных величин (X, Y).

7. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = e^{-\xi}$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}25$, а η – равномерное распределение на отрезке $[-1; 2]$. Найти: $M(7\xi-2\xi\eta-2{,}7)$, $M(4\xi^2-\eta+2\xi)$, $D(3\xi\eta-2\eta+\xi)$.

Вариант № 21

1. На столе рубашкой вверх лежат 8 карт, среди которых 4 туза. Девушка переворачивает карты по одной, пока не найдет туза. Построить ряд распределения для случайной величины X – числа перевернутых карт, найти ее функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ a \cdot \sin^3 x, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(-5 \le X \le 4)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 1-\left(\dfrac{2}{x}\right)^5, & x > 2. \end{cases}$$

4. В нормально распределенной совокупности 50 % значений ξ больше двух и 97,5 % значений ξ меньше трех. Найдите среднее значение и стандартное отклонение данной совокупности. Запишите

формулу для плотности распределения случайной величины ξ и постройте ее график.

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти регрессию X на Y. Построить линию регрессии.

X/Y	–4	0	2	4
–2	0,12	0,10	0,10	0,05
1	0,09	0,13	0,03	0,04
2	0,10	0,15	0,05	0,04

6. Двумерная случайная величина (X, Y) задана совместной плотностью распределения

$$f(x,y)=\begin{cases} a\cdot(xy)^2, & (x,y)\in D:\{0<x<y<1\}, \\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$$

Найти: значение параметра a, частные плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$, вероятность $P(X<1/2,\, Y<1/2)$.

7. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda=2$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta=\xi^2$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda=0{,}125$, а η — равномерное распределение на отрезке [–4; 2]. Найти: $M(\xi-5\xi\eta-2)$, $M(7\xi^2-3\eta+2\xi)$, $D(2\xi\eta-5\eta+\xi)$.

Вариант № 22

1. Из множества всех двоичных последовательностей с пятью разрядами выбирается одна. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X – числа нулей в выбранной двоичной последовательности, найти ее функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot(1-|x|/3), & |x|<3, \\ 0, \quad |x|\geq 3. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(0\leq X\leq \sqrt{3}/2)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ x<-\sqrt{3}/2, \\ (1/7)\cdot(4+\dfrac{12}{\pi}\cdot\mathrm{arctg}2x), \quad x\in[-\sqrt{3}/2,\ 1/2], \\ 1, \quad x>1/2. \end{cases}$$

4. Случайное отклонение размера детали от номинала ξ подчинено нормальному закону распределения со средне-квадратическим отклонением $\sigma=5$мм и математическим ожиданием $a=0$. Записать формулу для плотности распределения случайной величины ξ и построить ее график. Сколько необходимо изготовить деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,9 среди них была хотя бы одна годная, если для годной детали допустимо отклонение от номинала не более, чем на $\sigma/2$?

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти регрессию Y на X. Построить линию регрессии.

X/Y	–4	–3	–2	–1
0	0,20	0,12	0,10	0,04
1	0,05	0,12	0,06	0,01
2	0,10	0,10	0,06	0,04

6. Двумерная случайная величина (X,Y) задана совместной плотностью распределения

$$f(x,y)=\begin{cases} a\cdot(16-x^2-y^2), \quad (x,y)\in D:\{x^2+y^2\leq 16,\ \ x\geq 0,\ \ y\leq 0\}, \\ 0, \quad (x,y)\notin D. \end{cases}$$

Найти: значение параметра a, математическое ожидание и дисперсию случайных величин X и Y.

7. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке [0, 1]. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = e^{\xi-1}$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет нормальное распределение с $a = -10$ b $\sigma = 1$, а η – показательное распределение с $\lambda = 1{,}25$. Найти: $M(3\xi-5\xi\eta+2{,}5)$, $M(2\xi^2+\xi-\eta)$, $D(-\xi\eta-2\eta+0{,}78)$.

Вариант № 23

1. В партии из 10 деталей имеется 8 годных, остальные – бракованные. Наугад отобрали 4 детали. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X – числа годных деталей среди отобранных, найти ее функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$, и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ a \cdot xe^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(-2 \leq X \leq 0)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 2\left(1 - \dfrac{1}{\pi}\arccos x\right), & x \in [-1; 0], \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

4. Завод изготавливает шарики для подшипников, номинальный диаметр которых равен 10 мм, а фактический диаметр ξ случайно распределен по нормальному закону с параметрами $a = 10$ мм и $\sigma = 0{,}4$ мм. При контроле бракуются все шарики, не проходящие через отверстие диаметром $d_1 = 10{,}5$ мм, и все, проходящие через отверстие диаметром $d_2 = 9{,}5$ мм. Найти процент годных шариков. Запишите формулу для плотности распределения ξ и постройте ее график.

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти регрессию Y на X. Построить линию регрессии.

X/Y	–4	–2	1	2
–2	0,06	0,05	0,05	0,04
0	0,15	0,08	0,11	0,09
1	0,10	0,10	0,06	0,11

6. Двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно внутри треугольника ABC. Заданы координаты точек A(−1; 0), B(0; 1), C(1; 0). Найти плотность распределения $f(x, y)$, математическое ожидание системы и вероятность $P(X > Y)$.

7. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}5$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ распределена равномерно на отрезке [–1; 11], а η имеет нормальное распределение с параметрами $a = 2$ и $\sigma = 0{,}5$. Найти: $M(\xi\eta+2{,}5\eta+0{,}5)$, $M(2\xi^2+3\xi)$, $D(-3\xi\eta+\eta+0{,}79)$.

Вариант № 24

1. Игральная кость брошена три раза. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X — числа появлений шестерки, найти ее функцию распределения $F(x)$, и числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции распределения $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} a(2-|x|), & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(-2\pi/3 \le X \le 2\pi/3)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0. \\ 0{,}5 \cdot (1-\cos(x/2)), & 0 \le x \le 2\pi, \\ 1, & x > 2\pi. \end{cases}$$

4. Внешний диаметр (ВД) годных для сборки стальных стержней распределен по нормальному закону с параметрами $a = 3{,}5$см и $\sigma = 0{,}05$см. Пределы допуска $3{,}51 \pm 0{,}10$см. Изделие с ВД ниже нижнего предела считается ломом, тогда как при превышении ВД верхнего предела можно доработать. Записать формулу для плотности распределения случайной величины ξ и построить ее график. Каков процент лома? Сколько процентов продукции нуждаются в доработке?

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти коэффициент корреляции и $P[(X,Y) \in D: \{x > -3, \quad |y| \le 2\}]$.

X/Y	–2	2	3	6
–3	0,18	0,17	0,10	0,08
–2	0,10	0,12	0,07	0,02
0	0,04	0,03	0,04	0,04

6. Двумерная случайная величина (X, Y) задана совместной плотностью распределения $f(x,y) = \dfrac{a}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Найти: значение параметра a, частные плотности распределения вероятностей $f_1(x)$ и $f_2(y)$, вероятность $P(X \le 1, \quad Y \le 2)$.

7. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 3$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = e^{-3\xi}$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет нормальное распределение с параметром $a = -1{,}5$ и $\sigma = 0{,}5$, а η — равномерное распределение на отрезке [2, 14]. Найти: $M(3\xi-5\xi\eta+2{,}5)$, $M(2\xi^2-3\eta+5)$, $D(-2\xi\eta+\eta-9)$.

Вариант № 25

1. С целью информирования покупателей фармацевтическая компания «Эвалар» в каждую десятую упаковку своей продукции кладет рекламный буклет. Построить ряд распределения для дискретной случайной величины X – числа буклетов в четырех упаковках продукции этой компании, найти ее функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения и график функции $F(x)$.

2. Задана плотность распределения случайной величины $f(x)$. Найти: значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание, построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность $P(-\pi/8 \leq X \leq \pi/2)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/4, \\ \dfrac{2}{3}\cdot(1+\sin 2x), & x \in [-\pi/4,\ \pi/12], \\ 1, & x > \pi/12. \end{cases}$$

4. Пакеты с молоком упаковываются автоматически. Случайная величина ξ – объем молока в пакете распределена по нормальному закону. Средний объем пакетов с молоком равен одному литру. Фактический объем не менее 0,95 литра и не более 1,05 литра. Какова вероятность того, что из трех наудачу выбранных пакетов с молоком два будут иметь объем более одного литра? Запишите формулу для плотности распределения случайной величины ξ и постройте ее график.

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти регрессию Y на X. Построить линию регрессии.

X/Y	–2	1	3	6
–2	0,02	0,09	0,10	0,09
0	0,05	0,07	0,15	0,11
3	0,05	0,06	0,11	0,10

6. Двумерная случайная величина (X, Y) задана совместной плотностью распределения

$$f(x,y)=\begin{cases} a\cdot(x+y), & (x,y)\in D:\{x\le y\le 1, \quad -x\le y\le 1\},\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Найти: значение параметра a, математическое ожидание системы случайных величин (X, Y), вероятность $P(X\ge 0,\ Y\ge 0)$.

7. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[0; 1]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta=-\ln(1-\xi)$.

8. Случайные величины ξ и η независимы, причем ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a=-0{,}5$ и $\sigma=0{,}1$, а η — показательное распределение с параметром $\lambda=0{,}4$. Найти: $M(3\xi\eta+2{,}5\xi-1{,}2)$, $M(\xi^2-\xi-4\eta)$, $D(-3\xi\eta-2\xi+\eta)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие. – 12-е изд., перераб. / В. Е. Гмурман. М. : Высшее образование, 2006. 476 с.
2. Венцель Е. С. Прикладные задачи теории вероятностей / Е .С. Венцель, Л. А. Овчаров М. : Радио и связь, 1983. 416 с.
3. Коршунов Д. А. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей / Д. А. Коршунов, С. Г. Фосс. М. : Новосибирск, 1997.
4. Соколов Г. А. Теория вероятностей : учебник / Г. А. Соколов, Н. А. Чистякова М.: Экзамен, 2005. 416 с.
5. Мешалкин Л. Д. Сборник задач по теории вероятностей / Л. Д. Мешалкин. М.: Изд-во МГУ, 1963. 131 с.
6. Сборник задач по математике для втузов. Теория вероятностей и математическая статистика / под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. М. : Наука, 1990. 428 с.

Учебное издание

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Составители: **Чердынцева** Галина Алексеевна
Кравченко Нелли Михайловна
Успенская Елена Алексеевна

Редактор *О. В. Гусева*
Компьютерный набор *Е. А. Успенской, Г. А. Чердынцевой*
Компьютерная верстка *В. К. Матвеева*

Подписано в печать 31.01.2014. Формат 60×90/16.
Бумага писчая. Плоская печать. Усл. печ. л. 3,5.
Уч.-изд. л. 2,93. Тираж 200 экз. Заказ № 83.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: +7 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru