Векторные пространства и системы линейных уравнений.

Линейная комбинация векторов

Определение. Выражения вида $\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{v_n}$ называются *линейными комбинациями* векторов $\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}$. Числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ называют *коэффициентами* линейной комбинации.

Определение. *Линейной оболочкой* векторов $\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}$ называется множество, состоящее из всех линейных комбинаций этих векторов с произвольными коэффициентами:

$$\mathscr{M}=\langle\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}\rangle=\{\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{v_n}\mid\alpha_i\in\mathbb{R}\}$$

Линейная независимость векторов

Определение. Вектор $\overrightarrow{u}$ *раскладывается* по векторам $\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}$, если он представим, как их линейная комбинация: найдутся такие коэффициенты $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, что $\overrightarrow{u}=\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{v_n}$.

Наблюдение. Нулевой вектор раскладывается по любой системе векторов. Достаточно взять все коэффициенты, равными 0.

Определение. Система векторов $\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}$ называется *линейно независимой*, если нулевой вектор раскладывается по ней единственным образом, то есть $\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{v_n}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow 0=\alpha_1=\ldots=\alpha_n$.

Утверждение 1. ***1.*** *Если среди векторов есть нулевой, то система линейно зависима.*

2. *Если к линейно зависимой системе добавить какие-то векторы, то полученная система будет линейно зависимой.*

3. *Любая часть линейно независимой системы является линейно независимой.*

4. *Если система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.*

5. Если система из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.

Утверждение 2. ***1.*** *Если некоторый вектор раскладывается по системе векторов, то это разложение единственно тогда и только тогда, когда система векторов линейно независима.*

2. *Система из более, чем одного вектора, является линейно зависимой тогда и только тогда, когда один из её векторов раскладывается по остальным векторам системы.*

Задача 1

Докажите, что система векторов, содержащая два равных вектора, является линейно зависимой.

Базис

Определение. *Базисом* векторного пространства называется упорядоченная линейно независимая система векторов такая, что любой вектор пространства можно разложить по векторам этой системы.

Определение. Коэффициенты разложения вектора по векторам базиса называются его *компонентами* или *координатами.*

Задача 2

Проверьте, что векторы $\overrightarrow{a}(-5,-1)$ и $\overrightarrow{b}(-1,3)$ образуют базис на плоскости. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{c}(-1,2)$ и $\overrightarrow{d}(2,-6)$ в этом базисе.

Изменение системы координат

Утверждение 3. *Пусть $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ — векторы старого базиса, а $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ — векторы нового базиса и они имеют следующие разложения по векторам старого базиса:*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u_1} &= a_1^1\overrightarrow{e_1} + a_1^2\overrightarrow{e_2} + a_1^3\overrightarrow{e_3},\\
\overrightarrow{u_2} &= a_2^1\overrightarrow{e_1} + a_2^2\overrightarrow{e_2} + a_2^3\overrightarrow{e_3},\\
\overrightarrow{u_3} &= a_3^1\overrightarrow{e_1} + a_3^2\overrightarrow{e_2} + a_3^3\overrightarrow{e_3}.
\end{aligned}$$

Если вектор $\overrightarrow{v}$ имеет в старом базисе координаты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, а в новом базисе $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, то они будут связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a_1^1\beta_1 + a_2^1\beta_2 + a_3^1\beta_3, \\
\alpha_2 &= a_1^2\beta_1 + a_2^2\beta_2 + a_3^2\beta_3, \\
\alpha_3 &= a_1^3\beta_1 + a_2^3\beta_2 + a_3^3\beta_3.
\end{aligned}$$

Утверждение 4. *При изменении точки начала координат, необходимо в предыдущем утверждении в правую часть внести также слагаемые соответствующие координатам новой точки начала координат в старом базисе.*

Задача 3

На плоскости даны два базиса. Векторы второго базиса имеют в первом базисе координаты $(-1, 3)$ и $(2, -7)$ соответственно.

(а) Найдите координаты вектора в первом базисе, если он имеет координаты $(3, -1)$ во втором базисе.

(б) Найдите координаты вектора во втором базисе, если он имеет координаты $(2, -8)$ в первом базисе.

(в) Найдите координаты векторов первого базиса во втором базисе.

Задача 4

На плоскости даны две системы координат. Начало второй системы координат имеет в первой координаты $(-1, 3)$, а базисные векторы второй системы координат в первой системе координаты $(2, 3)$ и $(1, 1)$.

(а) Найдите координаты точки в первой системе координат, если она имеет координаты $(-2, 3)$ во второй системе.

(б) Найдите координаты точки во второй системе координат, если она имеет координаты $(-2, 10)$ во первой системе.

(в) Найдите координаты начала первой системы координат и векторов первого базиса во второй системе координат.

Векторные и линейные пространства и подпространства

Определение. Множество называется *замкнутым* относительно некоторой операции, если для любых элементов множества результат применения этой операции принадлежит данному множеству.

Определение. Множество векторов, замкнутое относительно линейных операций, называется *векторным пространством.* Если одно векторное пространство является подмножеством другого, то оно называется его *подпространством.*

Определение. Множество объектов называется *линейным пространством*, если для любых его элементов x, y, z и чисел α, β выполнены следующие аксиомы:

1. $x + y = y + x$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3. существует 0 такой, что для любого x выполнено $x + 0 = x$;
4. для любого x существует $-x$ такой, что $x + (-x) = 0$;
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
8. $1x = x$.

Замечание. Векторное пространство является частным случаем линейного пространства.

Утверждение 5. ***1.*** *Если в линейном пространстве имеется базис из n векторов, то система из $m > n$ является линейно зависимой.*

2. *Все базисы линейного пространства состоят из одинакового количества векторов.*

Задача 5

Является ли линейным пространством множество векторов, все координаты которых равны между собой?

Размерность пространства

Определение. Векторное пространство, в котором есть базис из n векторов, называется *n-мерным.* Число n называется *размерностью* пространства. Размерность пространства V обозначается $\dim V$.

Утверждение 6. *Размерность линейной оболочки из n векторов не превосходит n.*

Утверждение 7. *Размерность подпространства не превосходит размерность пространства.*

Задача 6

Какова размерность линейного пространства, состоящего из множества векторов, все координаты которых равны между собой?

Системы линейных уравнений

Определение. Система уравнений вида

$$\begin{aligned} a_1^1 x_1 + \ldots + a_n^1 x_n &= b_1 \\ a_1^2 x_1 + \ldots + a_n^2 x_n &= b_2 \\ &\ldots \\ a_1^m x_1 + \ldots + a_n^m x_n &= b_m \end{aligned}$$

называется *системой m линейных уравнений с n неизвестными.*

Определение. Совокупность n чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ называется *решением системы*, если каждое уравнение системы обращается в числовое равенство после подстановки в него чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ вместо соответствующих неизвестных $x_1, \ldots, x_n$.

Определение. Система, имеющая решение, называется *совместной.* Система, не имеющая решения, называется *несовместной.*

Метод Гаусса

Суть метода Гаусса заключается в том, чтобы привести систему линейных уравнений к виду.

$$
\begin{aligned}
a^1_{j_1}x_{j_1} + a^1_{j_2}x_{j_2} + \ldots + a^1_{j_r}x_{j_r} + \ldots + a^1_{j_n}x_{j_n} &= b'_1 \\
a^2_{j_2}x_{j_2} + \ldots + a^2_{j_r}x_{j_r} + \ldots + a^2_{j_n}x_{j_n} &= b'_2 \\
&\ldots \\
a^r_{j_r}x_{j_r} + \ldots + a^r_{j_n}x_{j_n} &= b'_r \\
0 &= b'_{r+1} \\
&\ldots \\
0 &= b'_m
\end{aligned}
$$

Задача 7

При помощи метода Гаусса решите следующую систему линейных уравнений:

$$
\begin{cases}
2x + y - z & = 8 \\
-3x - y + 2z & = -11 \\
-2x + y + 2z & = -3
\end{cases}
$$

Недоопределённые и переопределённые системы

Определение. Система линейных уравнений называется *недоопределённой*, если число уравнений меньше числа неизвестных.

Утверждение 8. *Недоопределённая система имеет либо бесконечное число решений, либо не имеет решений вовсе.*

Определение. Система линейных уравнений называется *переопределённой*, если число уравнений больше числа неизвестных.

Утверждение 9. *Количество решений переопределённой системы зависит от количества линейно независимых уравнений.*

Задача 8

Сколько решений имеют системы

(а)

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x + y + 2z &= 3 \end{cases}$$

(б)

$$\begin{cases} y - x &= 1 \\ y + 2x &= -1 \\ y - 3x &= -2 \end{cases}$$

Системы с нулевой и ненулевой правыми частями

Утверждение 10. *Для решения системы с ненулевой правой частью необходимо отыскать решение системы с такой же левой частью и с нулевой правой, а также найти некоторое частное решение изначальной системы.*

Задача 9

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 1 \end{cases}$$