Системы множеств

Задача. Два игрока по очереди подбрасывают монетку; каждый из них видит только результат своего броска. Постройте сигма-алгебры случайных событий, соответствующие случайным экспериментам, в которых экспериментатор имеет доступ к информации о результатах:

a) Известных первому игроку;

b) Известных второму игроку;

c) Известных обоим игрокам одновременно;

d) Известных хотя бы одному из игроков.

Решение: $\Omega = \{(O,O),(O,P),(P,O),(P,P)\}$ – общее для всех случаев. Вероятность любого случайного события $A_{i,j} \in \mathcal{F}_j,\ j = 1,\dots,4$ тоже можно сразу определить (в силу равной вероятности каждого элементарного исхода) для всех четырёх случаев, как отношение количества элементарных исходов в событии $A_{i,j}$ к их количеству в Ω:

$$\Pr(A_{i,j}) = \frac{|A_{i,j}|}{|\Omega|}.$$

a) Первый игрок не может различать события (O, P) и (O, O), (P, P) и (P, O). Поэтому алгебра событий в этом случае будет иметь вид:

$$\mathcal{F}_1 = \big\{\emptyset, \{(O, P), (O, O)\}, \{(P, P), (P, O)\}, \Omega\big\}.$$

b) Этот случай симметричен первому:

$$\mathcal{F}_2 = \big\{\emptyset, \{(O, O), (P, O)\}, \{(O, P), (P, P)\}, \Omega\big\}.$$

c) События, взаимно-известные обоим игрокам, должны принадлежать $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ одновременно:

$$\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega\}.$$

d) $\mathcal{F}_4$ должна содержать все элементы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, но можно заметить, что простое объединение $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ не является алгеброй:

$$F = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \big\{\emptyset, \{(O, O), (P, O)\}, \{(O, P), (P, P)\}, \{(O, P), (O, O)\}, \{(P, P), (P, O)\}, \Omega\big\},$$

$$\{(O, O), (P, O)\} \cap \{(O, P), (O, O)\} = \{(O, O)\} \notin F.$$

Поэтому $\mathcal{F}_4$ является пополнением F – минимальной алгеброй, содержащей все элементы F. Можно заметить, что все элементарные события $\omega \in \Omega$ можно представить в виде пересечения множеств, являющихся элементами F. Тогда $\mathcal{F}_4$ должна содержать все возможные наборы элементарных исходов, т.е. $\mathcal{F}_4 = 2^{\Omega}$. Интуитивное объяснение полученному результату – информация, известная двум игрокам, позволяет однозначно определить исход эксперимента, – поэтому не существует таких подмножеств Ω (наборов элементарных исходов), которые экспериментатор не смог бы отличить друг от друга, – а следовательно, на каждом подмножестве Ω определена его вероятность.

Возникает естественный вопрос, а можно ли построить вероятностное пространство, если пространство элементарных исходов несчётно – например, отрезок. Пусть $\Omega = [0, 10]$.

Требуется построить

1. Систему $\mathcal{F}$ случайных событий (подмножеств Ω), являющуюся сигма-алгеброй;

2. Вероятность на $\mathcal{F}$, удовлетворяющую аксиомам вероятности.

Это очень непростая математическая проблема, которую мы в нашем курсе не сможем решить во всей полноте, поскольку для этого требуется весьма продвинутая математика. Но соответствующие теоремы будут сформулированы, а некоторые и доказаны.[3]

Оказывается, что если действовать прямолинейно и взять в качестве $\mathcal{F}$ множество всех подмножеств Ω (естественно, являющуюся σ-алгеброй), то на такой σ-алгебре невозможно задать равномерную вероятность и все её модификации, и поэтому такой подход неприемлем. Тем не менее, хочется, например, чтобы любой интервал $(x, y) \subset \Omega$ был измеримым множеством – т.е. элементом семейства $\mathcal{F}$.

Формально:

$$(x, y) \in \mathcal{F} \quad \forall x, y \in \Omega.$$

[3]Более подробно эта тема разобрана, например, в видеокурсе ОВиТМ И.Эрлиха на Youtube; см. лекции с 6й по 9ю.

Но тогда автоматически в силу определения семейство $\mathcal{F}$ должно содержать ещё огромное количество множеств, которые получаются применением операций счётного объединения, пересечения, дополнения к интервалам, затем к вновь полученным множествам и т.д. Можно ли конструктивно описать все случайные события (измеримые множества) в такой σ-алгебре? Ответ на этот вопрос отрицательный, но все "хорошие" подмножества отрезка оказываются измеримыми. Надо очень постараться, чтобы придумать неизмеримое множество.

Упражнение. Покажите, что σ-алгебра, построенная на всех интервалах[4] Ω содержит также

a) Любой отрезок;

b) Любой полуоткрытый отрезок;

c) Любую точку;

d) Множество рациональных точек Ω;

e) Множество иррациональных точек Ω.

Минимальные σ-алгебры

Пусть в пространстве Ω заданы две сигма-алгебры $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$.

Предложение 1. Пересечение

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$$

является сигма-алгеброй.

Доказательство.

1. По определению $\Omega, \emptyset \in G_1$, а также $\Omega, \emptyset \in \mathcal{G}_2$. Значит, $\Omega, \emptyset \in \mathcal{G}$.

2. Пусть $A \in \mathcal{G}$. Тогда по построению $A \in \mathcal{G}_1; A \in \mathcal{G}_2$. Поскольку $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ – сигма-алгебры, то $\overline{A} \in \mathcal{G}_1$ и $\overline{A} \in \mathcal{G}_2$, откуда $\overline{A} \in G$.

Аналогично доказывается замкнутость $\mathcal{G}$ относительно счётных пересечений.

Предложение 1 очевидным образом обобщается на пересечение не только двух, но вообще любого семейства сигма-алгебр. Пусть $\{\mathcal{G}_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ – семейство сигма-алгебр на Ω (в Предложении 1 множество Γ состоит из двух точек).

Предложение 2. Пересечение $\mathcal{G} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{G}_\gamma$ является сигма-алгеброй.

Доказательство аналогично доказательству Предложения 1.

Пусть C – произвольное семейство подмножеств в Ω.

Определение. Семейство подмножеств, обозначаемое $\sigma(C)$, называется минимальной сигма-алгеброй, содержащей семейство C, если

1. $C \subset \sigma(C)$;

2. $\sigma(C)$ является сигма-алгеброй;

3. Если $\mathcal{G}$ – какая-то сигма-алгебра, содержащая C, т.е. $C \subset \mathcal{G}$, то $\sigma(C) \subset \mathcal{G}$ (минимальность).

[4] В этом примере с $\Omega = [0, 10]$ граничные точки $\{0\}$ и $\{10\}$ обладают особыми свойствами в силу топологических особенностей такого пространства. В частности, все полуинтервалы $(y, 10]$ и $[0, x)$ будут являться открытыми множествами. Поэтому для этого случая нужно считать, что помимо всех интервалов нам изначально доступны все полуинтервалы вышеуказанного вида, а также весь отрезок $[0, 10]$.

Семейство $\sigma(C)$ называют также сигма-алгеброй, порождённой семейством C.

Предложение 3. Минимальная сигма-алгебра, содержащая семейство C, существует.

Доказательство. Обозначим через $\{D_\delta, \delta \in \Delta\}$ совокупность всех сигма-алгебр, каждая из которых содержит C. Эта совокупность не пуста, поскольку содержит максимальную сигма-алгебру 2^Ω. Рассмотрим пересечение $\bigcap_{\delta\in\Delta} D_\delta$ и обозначим его $\sigma(C)$. Тогда в силу Предложения 2 семейство $\sigma(C)$ является сигма-алгеброй. Поскольку для каждого $\delta \in \Delta$ выполнено включение $C \subset D_\delta$, то $C \subset \sigma(C)$. Если $\mathcal{G}$ – какая-то сигма-алгебра, содержащая C, то по определению $\mathcal{G}$ совпадает с какой-то сигма-алгеброй D_{δ_0} из семейства $\{D_\delta, \delta \in \Delta\}$. Поэтому $\sigma(C) = \bigcap_{\delta\in\Delta} D_\delta \subset D_{\delta_0} = \mathcal{G}$.

Пример. Пусть $A \subset \Omega$ и $C = \{A\}$, т.е. C состоит из одного элемента.

Что есть $\sigma(C)$?

Так как $\sigma(C)$ – сигма-алгебра, то $\emptyset$, Ω, A, $\overline{A} \in \sigma(C)$, т.е.

$$G = \{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\} \subset \sigma(C).$$

Но G является сигма-алгеброй (легко проверяется). Значит, в силу минимальности,

$$G = \{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\} = \sigma(C).$$

Задача. Пусть $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ – единичный квадрат на плоскости. Рассмотрим две σ-алгебры подмножеств этого квадрата.

Сигма-алгебра $\mathcal{C}^v$ всех вертикальных цилиндров[5] – это семейство множеств вида

$$C_A^v = \{(x,y) \mid x \in A, y \in [0,1]\},$$

где A – произвольное подмножество отрезка $[0,1]$. Сигма-алгебра $\mathcal{C}^h$ всех горизонтальных цилиндров – это семейство множеств вида $C_B^h = \{(x,y) \mid x \in [0,1], y \in B\}$, где B – также произвольное подмножество $[0,1]$.

Из каких множеств состоит семейство $\mathcal{C}^v \bigcap \mathcal{C}^h$?

Решение.

Частый неправильный ответ: данное семейство состоит из множеств вида $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$, т.е. "квадратиков" с произвольными сторонами $A \subseteq [0,1]$ и $B \subseteq [0,1]$. Ошибка связана с переносом операции пересечения с самих σ-алгебр на их элементы. Пересечение алгебр это не есть семейство, составленное из пересечений элементов этих алгебр! На самом деле семейство $\mathcal{C}^v \bigcap \mathcal{C}^h$ состоит всего из двух множеств: $\emptyset$ и $\Omega = [0,1]\times[0,1]$, поскольку только эти множества являются вертикальными и горизонтальными цилиндрами одновременно.

Упражнения.

1. Докажите, что $\sigma\big(\sigma(C)\big) = \sigma(C)$.

2. Пусть C_1, C_2 – два семейства подмножеств пространства Ω и $C_1 \subset C_2$. Тогда $\sigma(C_1) \subset \sigma(C_2)$.

3. Пусть $A, B \subset \Omega$ и $C = \{A, B\}$. Постройте $\sigma(C)$.

Пусть $[a,b]$ – отрезок числовой прямой. Рассмотрим систему

$$C = \{(c,d) \subset [a,b]\}$$

[5]То, что это семейство является σ-алгеброй, нетрудно проверить непосредственно, заметив, что $\overline{C_{A_i}^v} = C_{\overline{A}}^v$ и $\bigcap_{i=1}^\infty C_{A_i}^v = C^v_{\bigcap_{i=1}^\infty A_i}$ для любых подмножеств A_i отрезка $[0,1]$.

всех интервалов, содержащихся в отрезке $[a, b]$.

Определение. Минимальная сигма-алгебра, порожденная системой C, называется борелевской сигма-алгеброй отрезка $[a, b]$ и обозначается $\mathcal{B}([a, b])$.

Аналогично определяется борелевская сигма-алгебра на всей числовой прямой. Если Ω – абстрактное[6] множество, то борелевская σ-алгебра на нём – это минимальная σ-алгебра, порождённая открытыми подмножествами Ω.

Задача (множество Витали). Докажите, что не существует $\mathbf{P}$ – счетно-аддитивной функции, определённой на всех подмножествах произвольного отрезка $[a, b]$, инвариантной к сдвигам всех элементов множества на одну и ту же величину, такой, что $\mathbf{P}([a_i, b_i]) = b_i - a_i$, где $a \le a_i \le b_i \le b$.

Решение.

Идея доказательства довольно проста: без потери общности рассмотрим отрезок $[0, 1]$ и попробуем разбить его на счётный набор множеств A_i, переходящих друг в друга при сдвигах всех элементов на одну и ту же величину (обозначим эту операцию за $\oplus$, тогда $A \oplus z$ – это множество $\{x : x - z \in A\}$). Тогда, если такой набор $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ найден, то, с одной стороны, должно выполняться $\mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(A_j)$, а с другой – $\mathbf{P}([0, 1]) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$, и тогда очевидно, что не существует числа, подходящего в качестве значения $\mathbf{P}(A_i)$ – нельзя сложить счетное число одинаковых чисел и получить 1: если $\mathbf{P}(A_1) > 0$, то ряд расходится, а если $\mathbf{P}(A_1) = 0$, то сумма ряда равна 0.

Осталось описать, как можно построить $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$. Один из подходящих способов был предложен Дж. Витали, и состоит из следующих этапов:

- Все точки отрезка $[0, 1]$ разбиваются на факторгруппу $[0, 1]/\mathbb{Q}$ – т.е. на набор множеств $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, таких, что в каждом из множеств выполняется $\forall x, y \in C_\lambda,\ x - y \in \mathbb{Q}$, а также если $\lambda_1 \ne \lambda_2$, то $\forall x \in C_{\lambda_1}$ и $\forall z \in C_{\lambda_2}$, $x - z \notin \mathbb{Q}$. Поскольку каждое C_λ является счётным, то Λ – некоторое несчётное множество.

- Задаём множество A_0, отбирая в него ровно по одному элементу из каждого из множеств C_λ. Допустимость такой операции обеспечивает аксиома выбора.

- Строим счётный набор множеств $A_i = A_0 \oplus x_i$, где x_i – i-ое рациональное число из отрезка $[-1, 1]$ (в силу счетности их можно как-то пронумеровать). Иначе говоря, A_i – сдвиг множества A_0 на i-ое рациональное расстояние. Тогда $A_{i \ge 1}$ не пересекаются (в силу свойств множеств факторгруппы) и имеют одинаковую вероятность $\mathbf{P}$ (в силу того, что мера не меняется при сдвиге). Объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ содержит все точки $[0, 1]$ – так как для любого $x \in [0, 1]$ существует $y \in A_0 : x - y \in \mathbb{Q}$, и, кроме того, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ содержится в отрезке $[-1, 2]$. Тогда должно выполняться

$$\mathbf{P}([0, 1]) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i) \le \mathbf{P}([-1, 2]) \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(A_j) \text{ для всех } i, j,$$

но это невозможно ни для какого значения $\mathbf{P}(A_i)$.

[6] Обладающее топологией, или порождающей её метрикой.