Горячие школьные формулы

I) Формулы сокращенного умножения

1) Разность квадратов
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

2) Квадрат суммы и квадрат разности
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

3) Сумма и разность кубов:
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

4) Куб суммы и разности
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

II) Решение квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$)

Сначала находим дискриминант:
$D=b^2-4ac$

1) Если $D>0$, то уравнение имеет два действительных корня:
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

2) Если $D=0$, то уравнение имеет два совпавших действительных корня:
$$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$$

3) Если $D<0$, то уравнение имеет два сопряженных комплексных корня.
Подробная информация есть в статье «Комплексные числа для чайников»:
http://mathprofi.ru/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov.html

Практическим ориентиром правильности вычислений является тот факт, что у вас получился «хороший» дискриминант с извлечением корня нацело, например:
$D=36$ и $\sqrt{D}=\sqrt{16}=4$, а вот $D=17$ – не есть здОрово – скорее всего, вы допустили ошибку, либо в условии задачи опечатка. Хотя может так оно и должно быть.

Справедливо следующее разложение квадратного трехчлена на множители:
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Решение квадратного уравнения – одно из самых распространённых действий в ходе выполнения различных задач высшей математики.

III) Упрощение многоэтажных дробей

1) Дробь $\frac{a}{b}$ делим на число c: $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b \cdot c}$	2) Число a делим на дробь $\frac{b}{c}$: $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a \cdot c}{b}$
3) Дробь $\frac{a}{b}$ делим на дробь $\frac{c}{d}$: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$	Все три правила применимы и справа налево, то есть из двухэтажной дроби можно искусственно сделать трёх- или четырёхэтажную дробь

IV) Действия со степенями

В качестве основания степени снова возьмем всеми любимую букву x.

Надеюсь, что вы помните:

$\dfrac{1}{x^a} = x^{-a}$

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$, в частности: $\dfrac{x^a}{x^b} = x^a \cdot x^{-b} = x^{a-b}$

$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Разумеется, правила работают и в обратном порядке.

Очень важно знать: $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$, собственно, это не действие и не правило, а просто две записи ОДНОГО И ТОГО ЖЕ. Например:

$$\frac{1}{\sqrt[7]{(x+\cos 3x)^4}} = \frac{1}{(x+\cos 3x)^{\frac{4}{7}}} = (x+\cos 3x)^{-\frac{4}{7}}$$

Все три выражения – это **одно и то же**, просто запись разная.

Радикал (корень) часто записывают в виде $x^{\frac{a}{b}}$ для того, чтобы с комфортом взять от него производную или интеграл.

V) Немного о логарифмах

Основное логарифмическое тождество $(a > 0, a \neq 1, b > 0)$:

$b = a^{\log_a b}$, в частности: $b = e^{\ln b}$

Некоторые важные свойства *(на примере натурального логарифма)*. Если $a > 0, b > 0$, то справедливо следующее:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^k = k\ln a \qquad (k \text{ – любое действительное число}).$$

В контексте темы условие $a > 0, b > 0$ бывает выполнено не для всех значений x, при этом имеют место *неравносильные* преобразования. Но эти свойства всё равно можно использовать для нахождения производных.