Метод моментов:

$\underline{13}$ 5.1

N1

Найдем мат. ожидание:

$$E(x) = \sum_{j=0}^{\infty} k(1-p)^k p = p(1-p)\sum_{j=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = p(1-p)\left(\sum_{j=1}^{\infty}(1-p)^k\right)' =$$

$$= p(1-p)\left(\frac{1-p}{1-(1-p)}\right)' = p(1-p)\left(-1+\frac{1}{1-(1-p)}\right)' =$$

$$= \frac{p(1-p)}{(1-(1-p))^2} = \frac{1-p}{p}$$

Таким образом, для нахождение оценки параметра p по методу моментов получаем:

$\overline{x} = \frac{1-p}{p}$, откуда $\hat{p}\ \frac{1}{\overline{x}+1}$, где $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Метод максимального правдоподобия:

Ф-ия правдоподобия: $L(p) = \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i}$

$$\ln L(p) = \sum_{i=1}^{n}\left[\ln(p) + x_i \ln(1-p)\right]$$

Найдем оценку максимального правдоподобия, параметра p

$$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{p} - \frac{x_i}{1-p}\right] = 0$$

$$\frac{n}{p} - \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-p} = 0$$

$$\frac{n}{p} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-p}$$

$$n(1-p) = p\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$n - np = p\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$np + p\sum_{i=1}^{n} x_i = n$$

$$p\left(n + \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = n$$

$$p = \frac{n}{n + \sum_{i=1}^{n} x_i} \Rightarrow \hat{p} = \frac{n}{n + \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

~~Д5.5~~
Д3 №5.1
№2
(ММ)

Метод моментов:

$M_1' = E[X] = \frac{a+b}{2}$

$M_2' = E[X^2] = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$

Сравниваем теоретические моменты с их выборочными аналогами, которые вычисляются с использованием выборки $X_1, \dots X_n$:

1. $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

2. $\bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

Решим ур-я относительно параметров a и b:

1. $M_1' = \bar{X} \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

2. $M_2' = \bar{X}^2 \Rightarrow \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

Из 1 найдем выражение для b:

$\frac{a+b}{2} = \bar{X} \Rightarrow b = 2\bar{X} - a$

Подставим во второе:

$\frac{1}{3}(a^2 + a(2\bar{X}-a) + (2\bar{X}-a)^2) = \bar{X}^2$

упростим и решим, относительно a:

$\frac{1}{3}(a^2 + 2a\bar{X} - a^2 + 4\bar{X}^2 - 4a\bar{X} + a^2) = \bar{X}^2$

$a^2 - 4a\bar{X} + 4\bar{X}^2 - 3\bar{X}^2 = 0$

$a^2 - 4a\bar{X} + \bar{X}^2 = 0$

$(a - 2\bar{X})^2 = 0$

$a = 2\bar{X}$

Найдем b:

$b = 2\bar{X} - a$

$b = 2\bar{X} - 2\bar{X}$

$b = 0.$

Оценка для a: $2\bar{X}$

для b: 0

ДЗ 5.1
N2.
(ММП)

Метод максимального правдоподобия:

Ф-ия правдоподобия:

$$L(a,b) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b-a} I(a < X_i < b)$$

Учитывая условия $a < X_i < b$, ф-ию правдоподобия можно переписать так:

$$L(a,b) = \frac{1}{(b-a)^n} \prod_{i=1}^{n} I(a < X_i < b)$$

Так как $I(a < X_i < b)$ равно 1 только при выполнении условие $a < X_i < b$, то максимизация L эквивалентна максимизации $(b-a)^{-n}$. Следовательно, оценка ММП для $b-a$ будет максимальной, когда она сама максимальна.

Оценка ММП для $b-a$ равна длине интервала между максимальным и минимальным значениями в выборке:

$$\hat{b} - \hat{a} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) - \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Оценка ММП для a равна минимальному зн-ю в выборке, а для b - максимальному.

ДЗ N5.1
N 3

Обозначим выборочное среднее, как: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Рассмотрим $(\bar{X})^2$

По ЦПТ мы знаем, что $\sqrt{n}(\bar{X}-\theta) \xrightarrow{d} N(0, \lambda^2)$,

Так же известно, что если $Y_n \xrightarrow{d} Y$, то $g(Y_n) \xrightarrow{d} g(Y)$ для непрерывной ф-ции g.

Применим к нашей ситуации, где $g(x) = x^2$, тогда:

$\sqrt{n}((\bar{X})^2 - \theta^2) \xrightarrow{d} N(0, 4\lambda^2\theta^2)$

Подставим $\theta = \lambda^{-2}$ и упростим:

$\sqrt{n}((\bar{X})^2 - \lambda^{-4}) \xrightarrow{d} N(0,4)$

Таким образом, выборочное среднее в квадрате асимптотически нормально с математическим ожиданием λ^{-4} и дисперсией $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Мы знаем, что

$\sqrt{n}((\bar{X})^2 - \lambda^{-4}) \xrightarrow{d} N(0,4)$

При этом дисперсия асимптотической нормальной оценки равна квадрату стандартного отклонения этой оценки. Таким образом, асимптотическая дисперсия оценки $(\bar{X})^2$ равна 4.

Дз 5.1
N4

Дана ф-ия плотности вероятности:

$$p(x) = \theta^2 x e^{-\theta x} I(x>0)$$

Ф-ия правдоподобия будет равна произведению плотностей в точках выборки:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^2 x_i e^{-\theta x_i}$$

Логарифмическая ф-ия:

$$L(\theta) = 2n \ln(\theta) + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Найдем оценку для параметра θ, приравняв производную логарифмической ф-ии к нулю:

$$\frac{d(L(\theta))}{d(\theta)} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

ОМП: $$\hat{\theta}_{МП} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Найдем инф-ию Фишера, которая будет равна отрицательной второй производной логарифмической ф-ии:

$$I(\theta) = -\frac{2n}{\theta^2}$$

Асимптотическая нормальная оценка θ:

$$\hat{\theta}_{асим} = \hat{\theta}_{МП} + \frac{1}{n I(\hat{\theta}_{МП})} \sum_{i=1}^{n} \frac{d(l(\hat{\theta}_{МП}))}{d\theta}$$

Асимптотическая дисперсия $\hat{\theta}_{асим} = Var(\hat{\theta}_{асим}) = \frac{1}{I(\hat{\theta}_{МП})}$

ДЗ 5.1
N 5.

Для построения асимптотического доверительного интервала уровня доверия $1-\alpha$ для параметра a в экспоненциальном распределении со сдвигом мы можем использовать асимптотическую нормальность ОМП.

ОМП для параметра a в данном распределении равна минимальному зн-ю выборки.

$$a_{МП} = \min(X_1, \ldots X_n)$$

Асимптотическая оценка параметра a имеет асимптотическое нормальное распределение:

$$\sqrt{n} \cdot (\hat{a} - a) \xrightarrow{d} N(0, I^{-1}(a))$$

$\hat{a}$ - ОМП

$I(a)$ инф-я Фишера для параметра a.

Для нахождения асимптотического доверительного интервала используем стандартный нормальный квантиль $z_{\alpha/2}$.

Тогда доверительный интервал будет иметь вид:

$$\hat{a} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq a \leq \hat{a} + \frac{z_{a/2}}{\sqrt{n}}$$

Таким образом, асимптотический доверительный интервал для параметра a:

$$\left(\min(X_1, \ldots X_n) - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \min(X_1, \ldots, X_n) + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right).$$

$\Lambda \geq 5.1$
N6

Для проверки гипотезы о параметре λ в распределении Пуассона, статистика критерия Вальда может быть записана следующим образом:

$$W = \frac{(\hat{\lambda} - \lambda_0)^2}{Var(\hat{\lambda})},$$ где $\hat{\lambda}$ – ОМП для λ

λ_0 – зн-е параметра под гипотезой

$Var(\hat{\lambda})$ - дисперсия оценки $\hat{\lambda}$

ОМП для λ в пуассоновском распределении:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Дисперсия оценки $\hat{\lambda}$ равна $\frac{\hat{\lambda}}{n}$.

Для нашей выборки $X = (2, 3, 5, 4, 5, 2, 7, 1, 0, 5, 6, 4, 5, 3, 3)$

1. ОМП:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} x_i = \frac{55}{15} \approx 3,67$$

2. Дисперсия оценки:

$$Var(\hat{\lambda}) = \frac{\hat{\lambda}}{n} = \frac{3,67}{15}$$

3. Статистика критерия Вальда:

$$W = \frac{(3,67 - 5)^2}{\frac{3,67}{15}} = \frac{1,77 \cdot 15}{3,67} = 7,23$$

Для проверки гипотезы $H_0: \lambda = 5$ с использованием критерия Вальда мы сравниваем значение статистики критерия W с критическими значениями из распр χ^2.

У нас нет конкретного ур-ня значимости α для выбора критической области. Предположим, что мы используем 0.05.

Для $\alpha = 0,05/2 = 0,025$ критическое зн-е в распред χ^2 с одной степенью свободы составляет $\approx 3,841$.

$7,23 > 3,841 \Rightarrow$ W превышает крит значение $\Rightarrow$ у нас есть основание отвергнуть гипотезу H_0.