Математика для анализа данных, МФТИ 2023/2024

Дискретная математика

Занятие #1

2 октября 2023 г.

Основные понятия и обозначения, связанные с множествами и операциями над ними

- Множества определяются своими элементами. Запись $x \in M$ означает, что x является элементом множества M. В частности, все элементы множества должны быть разными.

- Говорят, что множество A является подмножеством множества B (запись: $A \subset B$), если все элементы A являются элементами B. Иногда для того, чтобы подчеркнуть возможное равенство A и B встречается эквивалентное обозначение $A \subseteq B$.

- Множества A и B равны (запись: $A = B$), если они содержат одни и те же элементы (другими словами, если $A \subset B$ и $B \subset A$).

- Пустое множество $\emptyset$ не содержит ни одного элемента и является подмножеством любого множества.

- Пересечение $A \cap B$ двух множеств A и B состоит из элементов, которые принадлежат обоим множествам A и B. Это записывают так:
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$$
(читается: множество таких x, что ...).

- Объединение $A \cup B$ состоит из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B:
$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}.$$
Примечание. Множества A и B, не имеющие общих элементов, называются дизъюнктными. Для объединения таких событий применяется термин “дизъюнктное объединение”, для которого иногда используется специальное обозначение $A \sqcup B$. Такая запись автоматически подразумевает, что $A \cap B = \emptyset$.

- Разность $A \setminus B$ состоит из элементов, которые принадлежат A, но не принадлежат B:
$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$
Если множество B является подмножеством множества A, разность $A \setminus B$ называют также дополнением B до A. Если рассматривается набор множеств $A, B, \ldots$, каждое из которых является подмножеством некоторого множества Ω (называющегося в таком случае *объемлющим*), то дополнения этих множеств до Ω обозначаются $\overline{A}, \overline{B}, \ldots$

- Симметрическая разность $A \Delta B$ состоит из элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств A и B:
$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

- Через $\{a, b, c\}$ обозначается множество, которое содержит элементы a, b, c и не содержит других. Если среди a, b, c есть равные, оно может содержать один или два элемента. Подобное обозначение используется и в менее формальных ситуациях: множество членов последовательности $a_0, a_1, \ldots$ обозначается

$\{a_0, a_1, \ldots\}$ или даже $\{a_i\}$. Более аккуратная запись для того же множества такова: $\{a_i | i \in \mathbb{N}\}$, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

- Для любого множества X определено множество 2^X, состоящее из всех его подмножеств (булеан).

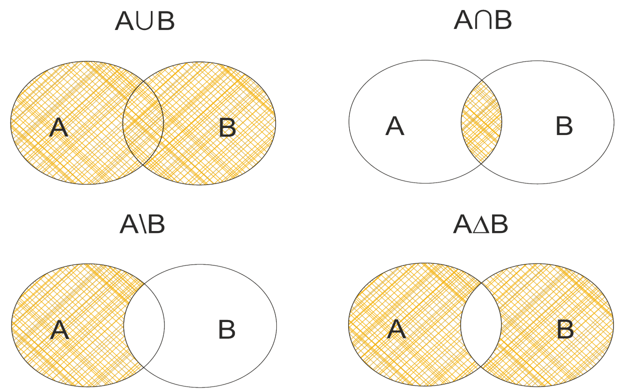

Рис. 1: Диаграммы Венна для множеств $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \Delta B$.

Число элементов в конечном множестве A называют также его мощностью и обозначают $|A|$ (а также $\#A$).

Законы де Моргана.

Пусть $\{A_i\}$ – конечный или счётный набор множеств, каждое из которых является подмножеством Ω. Тогда выполняются следующие соотношения:

$$\Omega \setminus \cup_i A_i = \cap_i (\Omega \setminus A_i) \tag{1}$$

$$\Omega \setminus \cap_i A_i = \cup_i (\Omega \setminus A_i) \tag{2}$$

Доказательство утверждения (1): стандартный способ доказательства равенства множеств $A = B$ заключается в проверке выполнения вложений $A \subset B$ и $B \subset A$. Пусть $x \in \Omega \setminus \cup_i A_i$. Это означает по определению разности множеств, что x входит (синоним слова «принадлежит») в Ω, но не входит в $\cup_i A_i$. Тогда по определению объединения множеств x не входит ни в одно из множеств A_i. Но тогда $x \in \Omega \setminus A_i$ при всех i и по определению пересечения $x \in \cap_i (\Omega \setminus A_i)$.

Докажем теперь обратное вложение. Если $x \in \cap_i (\Omega \setminus A_i)$, то x принадлежит всем множествам $\Omega \setminus A_i$, откуда следует, что $x \in \Omega$, но ни при каком i элемент x не содержится в A_i. Но тогда $x \notin \cup_i A_i$ и $x \in \Omega \setminus \cup_i A_i$.

Утверждение (2) доказывается аналогично.

Докажите следующие равенства:

a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

c) $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$.

d) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$.

Доказательство:

a) $x \in (A \cup B) \cap C \leftrightarrow \{x \in A$ или $x \in B\}$ и $x \in C \leftrightarrow \{x \in A$ и $x \in C\}$ или $\{x \in B$ и $x \in C\} \leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

b) $x \in (A \cap B) \cup C \leftrightarrow \{x \in A$ и $x \in B\}$ или $x \in C \leftrightarrow \{x \in A$ или $x \in C\}$ и $\{x \in B$ или $x \in C\} \leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

c) $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A$ и $x \in B \leftrightarrow x \in A$ и $x \notin A \backslash B \leftrightarrow x \in A \backslash (A \backslash B)$.

d) $x \in A \backslash (B \backslash C) \leftrightarrow x \in A$ и $x \notin B \backslash C \leftrightarrow \{x \in A$ и $x \notin B\}$ или $\{x \in A$ и $x \in C\} \leftrightarrow x \in (A \backslash B) \cup (A \cap C)$.

Задачи.

Пусть даны множества A, B и C. Выразить следующие множества через A, B и C при помощи операций $\cup, \cap, \backslash$ и $\triangle$.

- Множество элементов, принадлежащих всем трём множествам.
- Множество элементов, принадлежащих хотя бы двум из множеств A, B и C.
- Множество элементов, принадлежащих ровно двум из множеств A, B и C.
- Множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B и C.
- Множество элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A, B и C.

Равномощные множества

Понятие мощности определено также и для бесконечных множеств следующим образом. Два множества называют равномощными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором каждому элементу одного множества соответствует ровно один элемент другого. Для конечных множеств это означает, что в них одинаковое число элементов, но определение имеет смысл и для бесконечных множеств. Например, отрезки $[0, 1]$ и $[0, 2]$ равномощны, поскольку отображение $x \leftrightarrow 2x$ осуществляет искомое соответствие.

Множество называется счётным, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел, то есть, если его можно представить в виде последовательности $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ (здесь x_i – элемент, соответствующий натуральному числу i; соответствие взаимно однозначно, так что все x_i должны быть различны). Например, множество целых чисел $\mathbb{Z}$ счётно, так как целые числа можно расположить в последовательность $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$

Задача. В отеле бесконечное счётное количество номеров. Все номера заняты туристами. Приехал ещё один турист. Как переразместить всех постояльцев, чтобы всем хватило места?

Решение. Эта задача эквивалентна нахождению взаимно-однозначного соответствия между множествами $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Поселим нового туриста в первой комнате; того, кто раньше жил в первой комнате переселим во вторую, из второй в 3ю, итд. Таким образом задаётся взаимно-однозначное соответствие между всеми туристами и всеми номерами комнат, значит всем хватит места.

Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел также счётно, поскольку все рациональные числа представляются несократимыми дробями с целым числителем и знаменателем. Множество простых дробей с каким-либо фиксированным знаменателем счётно, поэтому $\mathbb{Q}$ представимо в виде объединения счётного числа счётных множеств – а такое объединение всегда также является счётным.

Через $\mathbb{Q}$, как обычно, обозначается множество всех рациональных чисел на прямой $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Через $\mathbb{Q}_{[0;1]}$ будет обозначаться множество всех рациональных чисел из отрезка $[0; 1]$. Запись $\mathbb{Q}_{[0;1]} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет означать, что множество $\mathbb{Q}_{[0;1]}$ занумеровано некоторым образом.

Если $A \sim [0, 1]$, то говорят, что множество A имеет мощность континуума.

О несчётности отрезка $[0,1]$. Предположим, что утверждение неверно, и множество $[0,1]$ счётно. Это означает, что все точки отрезка $[0,1]$ можно как-то занумеровать, т. е. $[0,1] = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Выберем отрезок $I_1 = [a_1, b_1] \subset [0,1]$ так, чтобы $x_1 \notin I_1$. Затем выберем отрезок $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1$ так, чтобы $x_2 \notin I_2$, и т. д. По индукции мы получим такую последовательность отрезков $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, что $x_n \notin I_n$. Согласно принципу вложенных отрезков существует точка

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Но тогда для любого n выполнено неравенство $x \neq x_n$, и мы приходим к противоречию.

Пример. Множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно множеству всех подмножеств натурального ряда. (В самом деле, сопоставим с каждой последовательностью множество номеров мест, на которых стоят единицы: например, последовательность из одних нулей соответствует пустому множеству, из одних единиц – натуральному ряду, а последовательность $10101010\ldots$ – множеству нечётных чисел).

Пример. Множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно множеству чисел отрезка $[0,1]$. Действительно, взаимно-однозначное соответствие между элементами двух множеств можно построить на основе двоичного представления чисел отрезка $[0,1]$.

Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, а также любые отрезки, интервалы и полуинтервалы на $\mathbb{R}$ несчётны (синоним – имеют мощность континуума), поскольку для каждого из них можно найти подмножество, равномощное $\mathbb{N}$, а обратное невозможно.

Комбинаторная задача о выборках

Пусть есть n различных предметов (можно считать их занумерованными числами от 1 до n), – и из этого множества нам нужно выбрать k элементов. Число различных возможных выборок зависит от двух обстоятельств:

- выборка упорядоченная или неупорядоченная;
- выборка с возвращением или без возвращения.

Найдите общее число различных выборок в каждом случае и постройте формальные описания множества разных исходов.

Решение.

Эта задача аналогична четырём случаям размещения k шаров по n ящикам:

a) Шары различимы, и в каждом ящике может быть любое количество шаров (соответствует упорядоченной выборке с возвращением). Множество исходов:

$$\Omega = \big\{\omega : \omega = (r_1, \ldots, r_k),\, r_i \in \{1, \ldots, n\}\big\},$$

где r_i – номер ящика для i-го шара; $|\Omega| = n^k$, поскольку для каждого из шаров возможны n разных размещений. Данный случай соответствует физической модели статистического ансамбля Максвелла-Больцмана.

b) Шары различимы, и в каждом ящике – не более одного шара (соответствует упорядоченной выборке без возвращения). Решение возможно лишь при $n \geq k$. Множество исходов:

$$\Omega = \big\{\omega : \omega = (r_1, \ldots, r_k),\, r_i \neq r_j \text{ при } i \neq j,\, r_i \in \{1, \ldots, n\}\big\}.$$

Первый шар можно разместить n способами, второй – $(n-1)$ способами, ..., k-й шар – $(n-k+1)$ способами. Всего способов $|\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$ – число размещений из n по k.

c) Шары неразличимы, и в каждом ящике не более одного шара (соответствует неупорядоченной выборке без возвращения). Решение возможно лишь при $n \geq k$. Очевидно, этот случай можно получить из п. b), поделив количество размещений на число перестановок среди k шаров, равное $k!$ В таком случае $|\Omega| = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Поскольку шары неразличимы, то их распределение по n ящикам описывается неупорядоченным набором $[r_1, \ldots, r_k]$. Множество исходов:

$$\Omega_1 = \big\{w : w = [r_1, \ldots, r_k],\, r_i \neq r_j \text{ при } i \neq j,\, r_i \in \{1, \ldots, n\}\big\}.$$

Другое множество исходов, которое так же пригодно для описания этого эксперимента, можно сформулировать в терминах векторов длины n, содержащих нули и единицы, и описывающих итоговое заполнение ящиков шарами:

$$\Omega_2 = \left\{\omega : \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n),\ \omega_i \in \{0, 1\},\ \sum_{i=1}^{n} \omega_i = k\right\}.$$

Такая модель используется в физике под названием “статистической ансамбль Ферми-Дирака”.

d) Шары неразличимы, и в каждом ящике может быть любое число шаров (соответствует неупорядоченной выборке с возвращением).

Множество исходов:

$$\Omega_1 = \big\{\omega : \omega = [r_1, \ldots, r_k],\, r_i \in \{1, \ldots, n\}\big\},$$

но можно использовать другое, более удобное описание – поскольку любое размещение можно представить, разложив подряд k шаров, и поместив $n-1$ перегородку на любых позициях перед-, после- и между шарами.

$$\Omega_2 = \left\{\omega : \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{n+k-1}),\ \omega_i \in \{0, 1\},\ \sum_{i=1}^{n+k-1} \omega_i = n-1\right\}.$$

Здесь $\omega_i = 0$ соответствует шару, а $\omega_i = 1$ – перегородке. Например, размещение 6 шаров по 4 ящиками может реализоваться следующим образом:

$$(0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0).$$

Здесь 2 шара попало в первый ящик, 1 шар – во второй, 0 – в третий, 3 – в четвертый. Видно, что общее количество разных элементов равно $k + n - 1 = 9$.

В такой постановке сразу очевидно, что число элементарных исходов в Ω_2 равно количеству размещений $n-1$ единиц по $k+n-1$ местам, и поэтому $|\Omega_2| = C_{k+n-1}^k = C_{k+n-1}^{n-1}$. Этот случай соответствует статистистическому ансамблю Бозе-Эйнштейна.

Задача. Найдите число решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ в натуральных[1] числах.

Решение. Искомое количество равно числу размещений десяти единиц между 4 “корзинами” – x_1, x_2, x_3 и x_4. Таким образом, количество решений равно $C_{10+4-1}^3 = 286$.

[1]Включая число 0.

Дискретное вероятностное пространство

Современная основа теории вероятностей – аксиоматика А.Н. Колмогорова, построенная на теории меры А. Лебега. В 1933 г. Колмогоров предложил использовать для моделирования эксперимента со случайными исходами вероятностное пространство (англ. – probability space) – тройку $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Первый объект, входящий в "тройку" вероятностного пространства, *множество элементарных исходов* Ω. Это непустое множество произвольной природы (необязательно числовое). Также встречается название "пространство элементарных исходов", ПЭИ; англ. – sample space. Его элементы обычно обозначаются как ω.

Пример. Для броска 6-гранного игрального кубика $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; для броска монеты мы можем выбрать $\Omega = \{O, P\}$, где O соответствует орлу, а P – решке, или, скажем, $\Omega = \{0, 1\}$, где 1 соответствует орлу, а 0 – решке.

В выборе пространства элементарных исходов для описания данного эксперимента есть изрядный произвол. Главное – включить в него все интересующие ситуации: так, если я хочу заниматься исследованием реальной монеты с высокой точностью, то неплохо бы добавить к возможным исходам броска случай "монета встала на ребро".

Следующий элемент вероятностного пространства, $\mathcal{F}$ – *множество случайных событий*, элементами которого являются подмножества Ω.

Зачем используется $\mathcal{F}$?

Если мы хотим описать случайный эксперимент – подбрасывание 6-гранного кубика, то кажется естественным задать вероятности для всех 6 элементарных исходов, то есть на множестве Ω. Однако сложности возникнут, например, если мы захотим описать ситуацию, когда нам доступна неполная информация об эксперименте. Например: как описать вероятностную модель для броска 6-гранного кубика, если всё, что нам становится известно после броска – это чётность выпавшего числа?

Ещё более важно, что задавая вероятности на множестве элементарных исходов, мы не можем описать объекты, где Ω несчётно, – например, модель поведения обменных валютных курсов, или случайное время до появления нового заказа в интернет-магазине.

Таким образом, приходим к выводу, что вероятности нужно задавать не на $\omega \in \Omega$, а на (некоторых) случайных событиях – $A \subset \Omega : A \in \mathcal{F}$. Выбор, какие подмножества Ω включать в $\mathcal{F}$, а какие – нет, в первую очередь зависит от того, какая информация станет доступной экспериментатору после проведения случайного эксперимента.

Последний элемент "тройки", *вероятностная мера* $\mathbf{P}$ – это функция, задаваемая на множествах, входящих в $\mathcal{F}$, и принимающая значения на отрезке $[0, 1]$.

Определение. Элементы $\mathcal{F}$ – случайные события – также называются *измеримыми подмножествами* Ω. Нестрого говоря, это те наборы элементарных исходов, которые может различить экспериментатор, работающий с вероятностным пространством $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Сигма-алгебры подмножеств

Определение. Семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества Ω называется *σ-алгеброй*, если выполнены следующие условия:

1. Множества $\emptyset$ и Ω являются элементами $\mathcal{F}$
2. Для любого множества A из $\mathcal{F}$, его дополнение $\overline{A}$ является элементом $\mathcal{F}$
3. Для любой последовательности измеримых множеств $A_1, A_2, \ldots$ их пересечение $A = \cap_{i=1}^{\infty} A_i$ принадлежит $\mathcal{F}$.

В контексте теории вероятностей эти свойства σ-алгебр имеют очень простое объяснение. Во-первых, проводя случайный эксперимент, исследователь знает, что должен реализоваться один из возможных элементарных исходов $\omega \in \Omega$, т.е. события "не произошло ничего" и "произошло что-то" являются измеримыми. Во-вторых, если некоторое событие $A \in \mathcal{F}$ является измеримым, то применяя элементарные логические соображения, экспериментатор также может понять, произошло ли событие, обратное к A. Аналогично, если какие-то два события A_1 и A_2 являются измеримыми, то экспериментатор может понять, произошли ли они оба вместе (т.е. произошло событие $A_3 = A_1 \cap A_2$), или нет.

Следствием определения является то, что объединение не более чем счётного набора множеств из $\mathcal{F}$ также принадлежит $\mathcal{F}$.

Действительно,

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \mid \omega \in B\} = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \in \mathcal{F}.$$

Таким образом, семейство $\mathcal{F}$ является σ-алгеброй, если оно содержит $\emptyset$ и Ω и является "замкнутым" относительно операций дополнения и пересечения (объединения) в том смысле, что, применяя эти операции к множеству или паре множеств из $\mathcal{F}$, нельзя получить множество, не являющееся элементом $\mathcal{F}$.

Пример. Простейший пример σ-алгебры подмножеств произвольного множества Ω – это семейство, состояшее из двух элементов $\emptyset$ и Ω. Такую σ-алгебру будем называть беднейшей σ-алгеброй подмножеств множества Ω (по понятным причинам) и обозначать $\mathcal{F}_{\min}(\Omega)$.

Пример. Другой, в некотором смысле противоположный пример σ-алгебры подмножеств произвольного множества Ω – это семейство, состоящее из всех возможных подмножеств множества Ω. Такую σ-алгебру будем называть богатейшей σ-алгеброй подмножеств множества Ω (по столь же понятным причинам) и обозначать 2^{Ω}.

Свойства вероятностной меры P

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1, \mathbf{P}(\emptyset) = 0,$
2. Счётная аддитивность: пусть $A_1, A_2, \ldots$ – случайные события и пусть

$$A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \text{ тогда } \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(A_n\right).$$

Нетрудно проверить, что

- выполнено свойство конечной аддитивности: если $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$,

$$A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \text{ то } \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(A_i\right).$$

- выполнено свойство монотонности: $A, B \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$
- справедливо равенство $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$

Задача. Доказать, что

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B).$$

Решение. Воспользуемся аксиомой, что для двух несовместных[2] событий X и Y вероятность их объединения равна сумме отдельных вероятностей, $\Pr(X \cup Y) = \Pr(X) + \Pr(Y)$. Тогда для произвольных событий A и B можно записать $A \cup B = A \cup (B \backslash A) \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B \backslash A)$. Поскольку событие B можно

[2] Два или более событий называются несовместными, или несовместимыми, если никакие из них не могут появиться одновременно в результате однократного проведения эксперимента, т.е. они не имеют общих элементарных исходов.

представить как объединение двух несовместных событий, $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, то

$$\Pr(B) = \Pr(B \setminus A) + \Pr(B \cap A) \Rightarrow \Pr(B \setminus A) = \Pr(B) - \Pr(B \cap A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B).$$

Классическая вероятность

Важным частным случаем является т.н. классическая схема или классическая (комбинаторная) вероятность. Пространство Ω конечно, $|\Omega| = N$ и все элементарные исходы равновероятны, а значит имеют вероятность $\Pr(\omega_i) = \frac{1}{N}$, $i \in \{1, \ldots, N\}$.

В этом случае

$$\Pr(A) = \frac{N_A}{N}$$

для любого события A, где N_A – количество элементарных исходов в A.

Иными словами, нахождение вероятности любого события сводится к подсчёту числа элементарных исходов, составляющих это событие. Именно к этой схеме сводятся многочисленные задачи, связанные с подбрасыванием монет, кубиков, вытаскиванием шаров из коробок и т. п.

Задача. Студент на устном экзамене знает k билетов из n. Какая вероятность того, что он, стоя в очереди m-м, вытянет знакомый билет? Считаем, что $m < n$.

Решение. Этот эксперимент соответствует модели с упорядоченным выбором без возвращения. Соответственно, $\Omega = \{\omega = (i_1, \ldots, i_m),\ i_j \neq i_l$ при $j \neq l\}$, $|\Omega| = A_n^m$, $\Pr(\omega) = \frac{1}{A_n^m}$ (вероятность одного произвольного элементарного исхода).

Нас интересует событие $A = \big\{(i_1, \ldots, i_m) \in \Omega : i_m \in \{1, \ldots, k\}\big\}$. Решая аналогично задаче об упорядоченных выборках без возвращения, получаем, что $|A| = k \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$, поскольку билет для нашего студента выбирается k способами, для первого из остальных студентов – $(n-1)$ способами и так далее. Итого, $\Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)} = \frac{k}{n}$. Как и следовало ожидать, нашему студенту совершенно неважно каким тянуть билет, вероятность всегда одна и та же. В каких-то случаях его шансы вытянуть удачный билет повышаются, в каких-то понижаются, но все эти случаи волшебным образом воплощаются в той же вероятности, как если бы он стоял первым в очереди.

Задача. Имеется m белых и n красных шаров. Шары одного цвета неразличимы. Шары случайным образом расположены в линию. Чему равна вероятность того, что в конфигурации нет двух рядом расположенных белых шаров?

Решение. Ясно, что если $m > n+1$, то искомая вероятность равна 0. Пусть $m \leq n+1$. Общее число размещений шаров равно $N = C_{m+n}^m$ – из $m+n$ возможных ячеек выбираем m ячеек, куда помещаем белые шары, в оставшиеся ячейки помещаем красные шары. Чтобы получить требуемую конфигурацию, надо среди $n+1$ возможных промежутков между красными шарами (включая ячейку слева от первого и справа от последнего шара) выбрать m промежутков, куда будут помещены белые шары. Это можно сделать $M = C_{n+1}^m$ способами. Искомая вероятность есть

$$p = \frac{M}{N} = \frac{C_{n+1}^m}{C_{m+n}^m}.$$

Интересно заметить, что эту задачу можно решить по-другому. Разложим m белых шаров подряд и поместим между ними $m-1$ красный шар. Оставшиеся $n-m+1$ красные шары можно поместить на любое $m+1$ место между, слева и справа от белых шаров по схеме “шары неразличимы, в каждом ящике может быть любое число шаров ”. Тогда число конфигураций равно $C_{n-m+1+(m+1)-1}^m = C_{n+1}^m$. Ответы при разных решениях совпадают.

Задача. Если в аудитории n человек, то какова вероятность того, что все дни рождения различны?

Решение. Делаем предположение, что день рождения каждого из присутствующих с равной вероятностью может быть любым из 365 дней года, и не зависит от дней рождения остальных людей. Тогда вероятность того, что дни рождения не совпадут равна

$$p_n = \frac{365(365-1)\cdot\ldots\cdot(365-n+1)}{365^n}.$$

При $n = 25$ значение выражения приближенно равно 0.43.

Задача. Колоду из 36 карт наудачу разделяют на две равные половины. Какова вероятность того, что в каждой половине будет одинаковое число красных и черных карт?

Решение. Общее число способов выбора 18 карт из 36 равно C_{36}^{18}. Число благоприятствующих исходов равно $(C_{18}^9)^2$ (из 18-ти черных карт выбираем 9, после чего из 18-ти красных карт выбираем 9 и объединяем с выбранными черными). Поэтому вероятность равна $\frac{(C_{18}^9)^2}{C_{36}^{18}}$. Чтобы оценить это выражение, можно воспользоваться формулой Стирлинга: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}$. После преобразований получаем: $p \approx \frac{2}{\sqrt{18\pi}} = 0.266$.

Задача. Холостяк приобрел 5 разных пар носков. Каждый день в течение рабочей недели (5 дней) он надевает два случайно выбиранных из общего количества носка, без возвращения. Найдите вероятность того, что он наденет "парные" носки в 3й и 5й дни.

Решение. Пронумеруем носки числами $1\ldots 10$ (под номерами 1 и 2 – носки из первой пары, и т. д.). Существуют 10! перестановок между ними, и будем считать, что первые два числа в перестановке – номера носков, выбранных в понедельник, и т. д. Нужная нам вероятность находится следующим способом: первый носок на среду можно выбрать любым из имеющихся десяти, но вторым носком должен быть парный к первому – и его можно выбрать только одним способом. Аналогично, на пятницу первым носком может быть любой из оставшихся восьми, а вторым – единственный парный к первому. Среди оставшихся носков есть 6! перестановок. Итоговая вероятность равна

$$p = \frac{10\cdot 8\cdot 6!}{10!} = \frac{80}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} = \frac{1}{63}.$$

Системы множеств

Задача. Два игрока по очереди подбрасывают монетку; каждый из них видит только результат своего броска. Постройте сигма-алгебры случайных событий, соответствующие случайным экспериментам, в которых экспериментатор имеет доступ к информации о результатах:

a) Известных первому игроку;

b) Известных второму игроку;

c) Известных обоим игрокам одновременно;

d) Известных хотя бы одному из игроков.

Решение: $\Omega = \{(O,O),(O,P),(P,O),(P,P)\}$ – общее для всех случаев. Вероятность любого случайного события $A_{i,j} \in \mathcal{F}_j,\ j = 1,\ldots,4$ тоже можно сразу определить (в силу равной вероятности каждого элементарного исхода) для всех четырёх случаев, как отношение количества элементарных исходов в событии $A_{i,j}$ к их количеству в Ω:

$$\Pr(A_{i,j}) = \frac{|A_{i,j}|}{|\Omega|}.$$

a) Первый игрок не может различать события (O,P) и (O,O), (P,P) и (P,O). Поэтому алгебра событий в этом случае будет иметь вид:

$$\mathcal{F}_1 = \big\{\emptyset, \{(O,P),(O,O)\}, \{(P,P),(P,O)\}, \Omega\big\}.$$

b) Этот случай симметричен первому:

$$\mathcal{F}_2 = \big\{\emptyset, \{(O,O),(P,O)\}, \{(O,P),(P,P)\}, \Omega\big\}.$$

c) События, взаимно-известные обоим игрокам, должны принадлежать $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ одновременно:

$$\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega\}.$$

d) $\mathcal{F}_4$ должна содержать все элементы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, но можно заметить, что простое объединение $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ не является алгеброй:

$$F = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \big\{\emptyset, \{(O,O),(P,O)\}, \{(O,P),(P,P)\}, \{(O,P),(O,O)\}, \{(P,P),(P,O)\}, \Omega\big\},$$

$$\{(O,O),(P,O)\} \cap \{(O,P),(O,O)\} = \{(O,O)\} \notin F.$$

Поэтому $\mathcal{F}_4$ является пополнением F – минимальной алгеброй, содержащей все элементы F. Можно заметить, что все элементарные события $\omega \in \Omega$ можно представить в виде пересечения множеств, являющихся элементами F. Тогда $\mathcal{F}_4$ должна содержать все возможные наборы элементарных исходов, т.е. $\mathcal{F}_4 = 2^{\Omega}$. Интуитивное объяснение полученному результату – информация, известная двум игрокам, позволяет однозначно определить исход эксперимента, – поэтому не существует таких подмножеств Ω (наборов элементарных исходов), которые экспериментатор не смог бы отличить друг от друга, – а следовательно, на каждом подмножестве Ω определена его вероятность.

Возникает естественный вопрос, а можно ли построить вероятностное пространство, если пространство элементарных исходов несчётно – например, отрезок. Пусть $\Omega = [0, 10]$.

Требуется построить

1. Систему $\mathcal{F}$ случайных событий (подмножеств Ω), являющуюся сигма-алгеброй;

2. Вероятность на $\mathcal{F}$, удовлетворяющую аксиомам вероятности.

Это очень непростая математическая проблема, которую мы в нашем курсе не сможем решить во всей полноте, поскольку для этого требуется весьма продвинутая математика. Но соответствующие теоремы будут сформулированы, а некоторые и доказаны.[3]

Оказывается, что если действовать прямолинейно и взять в качестве $\mathcal{F}$ множество всех подмножеств Ω (естественно, являющуюся σ-алгеброй), то на такой σ-алгебре невозможно задать равномерную вероятность и все её модификации, и поэтому такой подход неприемлем. Тем не менее, хочется, например, чтобы любой интервал $(x,y) \subset \Omega$ был измеримым множеством – т.е. элементом семейства $\mathcal{F}$.

Формально:

$$(x,y) \in \mathcal{F} \quad \forall x, y \in \Omega.$$

[3] Более подробно эта тема разобрана, например, в видеокурсе ОВиТМ И.Эрлиха на Youtube; см. лекции с 6й по 9ю.

Но тогда автоматически в силу определения семейство $\mathcal{F}$ должно содержать ещё огромное количество множеств, которые получаются применением операций счётного объединения, пересечения, дополнения к интервалам, затем к вновь полученным множествам и т.д. Можно ли конструктивно описать все случайные события (измеримые множества) в такой σ-алгебре? Ответ на этот вопрос отрицательный, но все "хорошие" подмножества отрезка оказываются измеримыми. Надо очень постараться, чтобы придумать неизмеримое множество.

Упражнение. Покажите, что σ-алгебра, построенная на всех интервалах[4] Ω содержит также

a) Любой отрезок;

b) Любой полуоткрытый отрезок;

c) Любую точку;

d) Множество рациональных точек Ω;

e) Множество иррациональных точек Ω.

Минимальные σ-алгебры

Пусть в пространстве Ω заданы две сигма-алгебры $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$.

Предложение 1. Пересечение

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$$

является сигма-алгеброй.

Доказательство.

1. По определению $\Omega, \emptyset \in G_1$, а также $\Omega, \emptyset \in \mathcal{G}_2$. Значит, $\Omega, \emptyset \in \mathcal{G}$.

2. Пусть $A \in \mathcal{G}$. Тогда по построению $A \in \mathcal{G}_1; A \in \mathcal{G}_2$. Поскольку $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ – сигма-алгебры, то $\overline{A} \in \mathcal{G}_1$ и $\overline{A} \in \mathcal{G}_2$, откуда $\overline{A} \in G$.

Аналогично доказывается замкнутость $\mathcal{G}$ относительно счётных пересечений.

Предложение 1 очевидным образом обобщается на пересечение не только двух, но вообще любого семейства сигма-алгебр. Пусть $\{\mathcal{G}_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ – семейство сигма-алгебр на Ω (в Предложении 1 множество Γ состоит из двух точек).

Предложение 2. Пересечение $\mathcal{G} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{G}_\gamma$ является сигма-алгеброй.

Доказательство аналогично доказательству Предложения 1.

Пусть C – произвольное семейство подмножеств в Ω.

Определение. Семейство подмножеств, обозначаемое $\sigma(C)$, называется минимальной сигма-алгеброй, содержащей семейство C, если

1. $C \subset \sigma(C)$;

2. $\sigma(C)$ является сигма-алгеброй;

3. Если $\mathcal{G}$ – какая-то сигма-алгебра, содержащая C, т.е. $C \subset \mathcal{G}$, то $\sigma(C) \subset \mathcal{G}$ (минимальность).

[4] В этом примере с $\Omega = [0, 10]$ граничные точки $\{0\}$ и $\{10\}$ обладают особыми свойствами в силу топологических особенностей такого пространства. В частности, все полуинтервалы $(y, 10]$ и $[0, x)$ будут являться открытыми множествами. Поэтому для этого случая нужно считать, что помимо всех интервалов нам изначально доступны все полуинтервалы вышеуказанного вида, а также весь отрезок $[0, 10]$.

Семейство $\sigma(C)$ называют также сигма-алгеброй, порождённой семейством C.

Предложение 3. Минимальная сигма-алгебра, содержащая семейство C, существует.

Доказательство. Обозначим через $\{D_\delta, \delta \in \Delta\}$ совокупность всех сигма-алгебр, каждая из которых содержит C. Эта совокупность не пуста, поскольку содержит максимальную сигма-алгебру 2^Ω. Рассмотрим пересечение $\bigcap_{\delta\in\Delta} D_\delta$ и обозначим его $\sigma(C)$. Тогда в силу Предложения 2 семейство $\sigma(C)$ является сигма-алгеброй. Поскольку для каждого $\delta \in \Delta$ выполнено включение $C \subset D_\delta$, то $C \subset \sigma(C)$. Если $\mathcal{G}$ – какая-то сигма-алгебра, содержащая C, то по определению $\mathcal{G}$ совпадает с какой-то сигма-алгеброй D_{δ_0} из семейства $\{D_\delta, \delta \in \Delta\}$. Поэтому $\sigma(C) = \bigcap_{\delta\in\Delta} D_\delta \subset D_{\delta_0} = \mathcal{G}$.

Пример. Пусть $A \subset \Omega$ и $C = \{A\}$, т.е. C состоит из одного элемента.

Что есть $\sigma(C)$?

Так как $\sigma(C)$ – сигма-алгебра, то $\emptyset$, Ω, A, $\overline{A} \in \sigma(C)$, т.е.

$$G = \{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\} \subset \sigma(C).$$

Но G является сигма-алгеброй (легко проверяется). Значит, в силу минимальности,

$$G = \{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\} = \sigma(C).$$

Задача. Пусть $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ – единичный квадрат на плоскости. Рассмотрим две σ-алгебры подмножеств этого квадрата.

Сигма-алгебра $\mathcal{C}^v$ всех вертикальных цилиндров[5] – это семейство множеств вида

$$C_A^v = \{(x,y) \mid x \in A, y \in [0,1]\},$$

где A – произвольное подмножество отрезка $[0,1]$. Сигма-алгебра $\mathcal{C}^h$ всех горизонтальных цилиндров – это семейство множеств вида $C_B^h = \{(x,y) \mid x \in [0,1], y \in B\}$, где B – также произвольное подмножество $[0,1]$.

Из каких множеств состоит семейство $\mathcal{C}^v \bigcap \mathcal{C}^h$?

Решение.

Частый неправильный ответ: данное семейство состоит из множеств вида $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$, т.е. “квадратиков” с произвольными сторонами $A \subseteq [0,1]$ и $B \subseteq [0,1]$. Ошибка связана с переносом операции пересечения с самих σ-алгебр на их элементы. Пересечение алгебр это не есть семейство, составленное из пересечений элементов этих алгебр! На самом деле семейство $\mathcal{C}^v \bigcap \mathcal{C}^h$ состоит всего из двух множеств: $\emptyset$ и $\Omega = [0,1]\times[0,1]$, поскольку только эти множества являются вертикальными и горизонтальными цилиндрами одновременно.

Упражнения.

1. Докажите, что $\sigma\big(\sigma(C)\big) = \sigma(C)$.

2. Пусть C_1, C_2 – два семейства подмножеств пространства Ω и $C_1 \subset C_2$. Тогда $\sigma(C_1) \subset \sigma(C_2)$.

3. Пусть $A, B \subset \Omega$ и $C = \{A, B\}$. Постройте $\sigma(C)$.

Пусть $[a,b]$ – отрезок числовой прямой. Рассмотрим систему

$$C = \{(c,d) \subset [a,b]\}$$

[5] То, что это семейство является σ-алгеброй, нетрудно проверить непосредственно, заметив, что $\overline{C_{A_i}^v} = C_{\overline{A}}^v$ и $\bigcap_{i=1}^\infty C_{A_i}^v = C^v_{\bigcap_{i=1}^\infty A_i}$ для любых подмножеств A_i отрезка $[0,1]$.

всех интервалов, содержащихся в отрезке $[a, b]$.

Определение. Минимальная сигма-алгебра, порожденная системой C, называется борелевской сигма-алгеброй отрезка $[a, b]$ и обозначается $\mathcal{B}([a, b])$.

Аналогично определяется борелевская сигма-алгебра на всей числовой прямой. Если Ω – абстрактное[6] множество, то борелевская σ-алгебра на нём – это минимальная σ-алгебра, порождённая открытыми подмножествами Ω.

Задача (множество Витали). Докажите, что не существует $\mathbf{P}$ – счетно-аддитивной функции, определённой на всех подмножествах произвольного отрезка $[a, b]$, инвариантной к сдвигам всех элементов множества на одну и ту же величину, такой, что $\mathbf{P}([a_i, b_i]) = b_i - a_i$, где $a \le a_i \le b_i \le b$.

Решение.

Идея доказательства довольно проста: без потери общности рассмотрим отрезок $[0, 1]$ и попробуем разбить его на счётный набор множеств A_i, переходящих друг в друга при сдвигах всех элементов на одну и ту же величину (обозначим эту операцию за $\oplus$, тогда $A \oplus z$ – это множество $\{x : x - z \in A\}$). Тогда, если такой набор $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ найден, то, с одной стороны, должно выполняться $\mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(A_j)$, а с другой – $\mathbf{P}([0, 1]) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$, и тогда очевидно, что не существует числа, подходящего в качестве значения $\mathbf{P}(A_i)$ – нельзя сложить счетное число одинаковых чисел и получить 1: если $\mathbf{P}(A_1) > 0$, то ряд расходится, а если $\mathbf{P}(A_1) = 0$, то сумма ряда равна 0.

Осталось описать, как можно построить $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$. Один из подходящих способов был предложен Дж. Витали, и состоит из следующих этапов:

- Все точки отрезка $[0, 1]$ разбиваются на факторгруппу $[0, 1]/\mathbb{Q}$ – т.е. на набор множеств $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, таких, что в каждом из множеств выполняется $\forall x, y \in C_\lambda,\ x - y \in \mathbb{Q}$, а также если $\lambda_1 \ne \lambda_2$, то $\forall x \in C_{\lambda_1}$ и $\forall z \in C_{\lambda_2}$, $x - z \notin \mathbb{Q}$. Поскольку каждое C_λ является счётным, то Λ – некоторое несчётное множество.

- Задаём множество A_0, отбирая в него ровно по одному элементу из каждого из множеств C_λ. Допустимость такой операции обеспечивает аксиома выбора.

- Строим счётный набор множеств $A_i = A_0 \oplus x_i$, где x_i – i-ое рациональное число из отрезка $[-1, 1]$ (в силу счетности их можно как-то пронумеровать). Иначе говоря, A_i – сдвиг множества A_0 на i-ое рациональное расстояние. Тогда $A_{i \ge 1}$ не пересекаются (в силу свойств множеств факторгруппы) и имеют одинаковую вероятность $\mathbf{P}$ (в силу того, что мера не меняется при сдвиге). Объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ содержит все точки $[0, 1]$ – так как для любого $x \in [0, 1]$ существует $y \in A_0 : x - y \in \mathbb{Q}$, и, кроме того, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ содержится в отрезке $[-1, 2]$. Тогда должно выполняться

$$\mathbf{P}([0, 1]) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i) \le \mathbf{P}([-1, 2]) \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(A_j) \text{ для всех } i, j,$$

  но это невозможно ни для какого значения $\mathbf{P}(A_i)$.

Последовательности множеств. Пределы

Пример. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ – некоторый (счётный) набор множеств, являющихся подмножествами Ω. Выразите при помощи операций над множествами A_i следующие элементы $\omega \in \Omega$:

а) Элементы, общие для всех A_i в наборе;

[6] Обладающее топологией, или порождающей её метрикой.

b) Элементы, являющиеся общими для всех $A_{i \geq n}$ (номер n не известен заранее);

c) Элементы, являющиеся общими для бесконечного количества A_i (например, повторяющиеся в каждом A_i с чётным номером).

Решение.

a) Очевидно, что общими для всех A_i являются элементы $\omega \in \cap_{i=1}^{\infty} A_i$.

b) Ответ: $\omega \in \cup_{j=1}^{\infty} \cap_{i=j}^{\infty} A_i$. Логика такая: $B_j = \cap_{i=j}^{\infty} A_i$ – это элементы, принадлежащие всем множествам A_i, начиная с номера j. Очевидно, что $B_j \subset B_{j+1} \subset \ldots$, тогда объединение B_j по всем натуральным j равно "самому большому" предельному множеству B_∞, в которое попадают все ω, отсутствующие только в конечном наборе A_i.

c) Дополнением к искомому множеству являются $\omega \in \Omega$, попавшие только в конечное количество множеств A_i, т.е. для каждого из этих ω существует номер n, такой, что $\omega \notin A_{i \geq n} \Rightarrow \omega \in \overline{A}_{i \geq n} = \cup_{j=1}^{\infty} \cap_{i=j}^{\infty} \overline{A}_i$. Тогда искомое множество – это $\overline{\cup_{j=1}^{\infty} \cap_{i=j}^{\infty} \overline{A}_i} = \cap_{j=1}^{\infty} \cup_{i=j}^{\infty} A_i$.

Объяснение полученного результата: рассмотрим последовательность $C_j = \cup_{i=j}^{\infty} A_i$ – элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A_i с номерами от j. Это убывающая последовательность множеств, т.е. $C_j \supset C_{j+1} \supset \ldots$, и поэтому $\cap_{j=1}^{\infty} C_j = \lim_{j \to \infty} C_j = C_\infty$. В отличие от элементов $\omega \in \Omega$, попавших только в конечное число A_i, те из них, которые попали в бесконечное количество A_i окажутся в каждом из C_j, а следовательно, и в C_∞.

Построенные в приведённом примере множества называются нижним пределом последовательности $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ – в пункте b), и верхним пределом последовательности $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ – в пункте c). Обозначения:

$$\liminf_{i \to \infty} A_i = \overline{\lim_{i \to \infty}} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=j}^{\infty} A_i, \tag{3}$$

$$\limsup_{i \to \infty} A_i = \underline{\lim_{i \to \infty}} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} A_i. \tag{4}$$

В общем случае, выражения наподобие (3) и (4) несложно получить, записав определение требуемого множества с помощью кванторов, а затем заменяя $\forall$ на пересечение, а $\exists$ на объединение. Например, верхний предел последовательности множеств $A_1, A_2, \ldots$ – это $\{\omega \in \Omega : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \geq n : \omega \in A_k\}$.

Можно заметить, что всегда выполняется

$$\liminf_{i \to \infty} A_i \subset \limsup_{i \to \infty} A_i,$$

например, если элементами A_n являются числа $(-1)^n$, то $\liminf\limits_{i \to \infty} A_i = \emptyset$, а $\limsup\limits_{i \to \infty} A_i = \{-1, 1\}$.

Последовательность множеств $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ называется *монотонной*, если $\forall i \in \mathbb{N}$ выполнено $A_i \subset A_{i+1}$, либо $A_i \supset A_{i+1}$. В первом случае последовательность называется возрастающей, во втором – убывающей. Можно заметить, что для таких последовательностей нижний предел всегда равен верхнему.

Пример. Пусть задана последовательность $A_n = [0, 1/n]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\liminf\limits_{n \to \infty} A_n = \limsup\limits_{n \to \infty} A_n = \{0\}$.

Задача.

Честную монетку подбрасывают бесконечное число раз; все возможные элементарные исходы можно представить в виде последовательностей из "O" и "P". Пусть A_n – событие, что при n-м подбрасывании выпала решка, а X_n – суммарное количество решек, выпавших после n бросков.

a) Постройте вероятностное пространство эксперимента и проверьте, что исходы $\sup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} \le 0.5$ являются случайным событием.

b) Выразите событие $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} \le \frac{2}{5}$.

Решение.

a) В качестве множества элементарных исходов можно взять все последовательности из 0 и 1:[7]

$$\Omega = \big\{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots),\ \omega_i \in \{0,1\}\big\}, \quad X_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i.$$

Прообразами событий $\{X_n < t\}$ являются наборы бесконечных последовательностей ω, таких, что в их первых n элементах $\omega_1, \ldots, \omega_n$ количество значений "P" меньше числа t. При $t < 0$ такой набор будет пустым, а при $n < t$ будет содержать все элементы Ω. По построению, для любого $n \in \mathbb{N}$ экспериментатор может отличить событие $\{X_n < t\}$ от других, т.е. они принадлежат σ-алгебре случайных событий. Событие $\left\{\sup_{n\to\infty} X_n/n \le 0.5\right\}$ можно описать так:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon > 0:\ \frac{X_n}{n} < 0.5 - \varepsilon \Rightarrow \left\{\omega:\ \sup_{n\to\infty} \frac{X_n(\omega)}{n} \le 0.5\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\varepsilon>0} \left\{\omega:\ \frac{X_n(\omega)}{n} < 0.5 - \varepsilon\right\}. \tag{5}$$

В выражении (5) переменная $\varepsilon > 0$ нужна для того, чтобы исключить случаи, когда $\frac{X_n}{n}$ образует возрастающую последовательность с пределом равным 0.5. При этом полученное выражение содержит несчётное объединение по всем возможным $\varepsilon > 0$, что легко можно заменить на счётное объединение по всем $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. В итоге получаем

$$\left\{\sup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} \le 0.5\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{\omega:\ \frac{X_n(\omega)}{n} < 0.5 - \frac{1}{k}\right\}.$$

b) Рассмотрим элементарный исход ω, для которого численная последовательность $\frac{X_n(\omega)}{n}$ имеет предел $x \le \frac{2}{5}$. В таком случае, по определению предела численной последовательности, выполняется

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall k > N,\ \left|\frac{X_k(\omega)}{k} - x\right| < \varepsilon. \tag{6}$$

Нам нужно выразить ω, для которых утверждение (6) выполнено. Зафиксируем x и $\varepsilon > 0$, тогда нужные нам исходы удовлетворяют свойствам $\left\{\omega:\ \left|\frac{X_k(\omega)}{k} - x\right| < \varepsilon\right\}$ для всех k больше некоторого номера N, то есть

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\ge n} \left\{\omega:\ \left|\frac{X_k(\omega)}{k} - x\right| < \varepsilon\right\} \tag{7}$$

Последнее, что осталось сделать – это избавиться от неизвестных x и ε. Поскольку наше выражение верно для произвольного $\varepsilon > 0$, то оно содержится в пересечении всех аналогичных событий, в которых ε заменен на стремящуюся к нулю сверху последовательность, например $\frac{1}{m}$ при $m \to \infty$. В случае

[7] Множество случайных событий на таком Ω определить не очень просто, поскольку, как мы знаем, Ω является несчетным множеством. Стандартной конструкцией в таком случае является т.н. циллиндрическая σ-алгебра, порожденная событиями вида $\{\omega : \omega_1 \in B_1, \ldots, \omega_n \in B_n\}$, где $B_1, \ldots B_n$ – борелевские множества на $\mathbb{R}$.

x нужно сделать объединение по всем возможным его значениям – подойдут рациональные числа на отрезке $[0,\ 0.4]$. В итоге получаем

$$\{\omega : \lim_{n\to\infty} \frac{X_n(\omega)}{n} \leq \frac{2}{5}\} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}\cap[0,0.4]} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq n} \left\{\omega : \left|\frac{X_k(\omega)}{k} - x\right| < \frac{1}{m}\right\}.$$

Полученный результат свидетельствует о том, что предельные характеристики нашего эксперимента оказалось возможным выразить, используя случайные события вида $\{X_n < t\}$. Это, в том числе, означает, что наша модель вероятностного пространства позволяет определять и работать с мерами подобных событий, что является теоретическим основанием закона больших чисел и центральной предельной теоремы в теории вероятностей.

Топологии

Определение. Пусть X непустое множество. Множество τ подмножеств X называется топологией на X если

1. само X и пустое множество $\emptyset$ принадлежат τ;
2. объединение любого (конечного или бесконечного) числа множеств из τ принадлежит τ, и
3. пересечение любых двух множеств из τ принадлежит τ. Пара (X, τ) называется топологическим пространством.

Пример. Пусть $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ и

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}.$$

Тогда τ_1 является топологией на X так как удовлетворяет условиям определения.

Пример. Пусть $X = \{a, b, c, d, e\}$ и

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, e\}, \{b, c, d\}\}$$

Тогда τ_2 не является топологией на X так как объединение

$$\{c, d\} \cup \{a, c, e\} = \{a, c, d, e\}$$

двух членов τ_2 не принадлежит τ_2; то есть, τ_2 не удовлетворяет условию (ii) определения.

Пример. Пусть $\mathbb{N}$ множество всех натуральных чисел и пусть τ состоит из $\mathbb{N}$ и всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$. Тогда τ не является топологией на $\mathbb{N}$, так как бесконечное объединение

$$\{2\} \cup \{3\} \cup \cdots \cup \{n\} \cup \cdots = \{2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

членов τ не принадлежит τ; то есть, τ не обладает свойством (ii) определения.

Определение. Пусть X любое непустое множество и пусть τ семейство всех подмножеств X. Тогда τ называется дискретной топологией на множестве X. Топологическое пространство (X, τ) называется дискретным пространством.

Определение. Пусть (X, τ) произвольное топологическое пространство. Элементы τ называются открытыми множествами.

Предложение. Пусть (X, τ) произвольное топологическое пространство, тогда

1. $X\emptyset$ являются открытыми множествами;

2. Объединение любого (конечного или бесконечного) числа открытых множеств является открытым;

3. Пересечение любого конечного числа открытых множеств является открытым.

Очевидно, что п. 1-3 являются тривиальными следствиями определения и свойств топологий.

Пример. Пусть $\mathbb{N}$ множество всех натуральных чисел и пусть τ состоит из $\emptyset$ и всех подмножеств S из $\mathbb{N}$ таких, что дополнение S в $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \backslash S$ является конечным множеством. Легко проверить, что τ имеет свойства топологии на $\mathbb{N}$. Для каждого натурального n, определим множество S_n следующим образом:

$$S_n = \{1\} \cup \{n+1\} \cup \{n+2\} \cup \{n+3\} \cup \cdots = \{1\} \cup \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \{m\}.$$

Очевидно, каждое S_n является открытым в топологии τ, так как дополнения к ним конечны. Однако,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = F.$$

Так как дополнение к F не совпадает с $\mathbb{N}$ и не является конечным множеством, множество F не открыто. Таким образом, этот пример показывает, что (бесконечное) пересечение открытых множеств S_n может не являться открытым. Аналогичные примеры мы видели, когда рассматривали счётные пересечения интервалов для построения точки или замкнутого отрезка в $\mathbb{R}$.

Примеры.

1. Пусть $\mathbb{R}$ множество всех действительных чисел. Докажите, что каждое из следующих семейств подмножеств $\mathbb{R}$ является топологией.

a) τ_1 состоит из $\mathbb{R}, \varnothing$, и всех интервалов вида $(-n, n)$, где n произвольное положительное целое число;

b) τ_2 состоит из $\mathbb{R}, \varnothing$, и всех интервалов вида $[-n, n]$, где n произвольное положительное целое число;

c) τ_3 состоит их $\mathbb{R}, \varnothing$, и всех интервалов вида $[n, \infty)$, где n произвольное положительное целое число;

2. Пусть $\mathbb{N}$ множество всех натуральных чисел. Докажите, что каждое из следующих семейств подмножеств $\mathbb{N}$ является топологией.

a) τ_1 состоит из $\mathbb{N}, \varnothing$, и всех множеств вида $\{1, 2, \ldots, n\}$, где n произвольное натуральное число. (Эта топология называется *топологией начального сегмента*.)

b) τ_2 состоит из $\mathbb{N}, \varnothing$, и всех множеств вида $\{n, n+1, \ldots\}$, где n произвольное натуральное число. (Эта топология называется *топологией конечного сегмента*.)

3. Докажите, что полуинтервал $[0, 2)$ равномощен отрезку $[0, 2]$.

Решение. Определим отображение

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{если } x \neq \frac{2}{n} \text{ где } n \in \mathbb{N} \\ \frac{2}{n+1} & \text{если } x = \frac{2}{n} \text{ где } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тогда $f(x)$ есть взаимно однозначное соответствие между $[0, 2]$ и $[0, 2)$.

4. Докажите, что множества $\mathbb{R}, [0, \infty), (0, \infty), (-\infty, 0), (-\infty, 0]$ имеют мощность континуум.

<u>Решение</u>. Аналогично решению предыдущей задаче, отерезку всегда можно взаимно-однозначно сопоставить полуинтервал или интервал. Биекция $(0, 1) \leftrightarrow (-\infty, 0)$ устанавливается отображением $f(x) = \log x$. Биекция $\mathbb{R} \leftrightarrow (0, \infty)$ устанавливается отображением $f(x) = \ln x$. Биекция $[0, \infty) \leftrightarrow (0, \infty)$ строится так же, как в задаче 3. Равенство мощностей остальных множеств проверяется аналогично.