Дискретное вероятностное пространство

Современная основа теории вероятностей – аксиоматика А.Н. Колмогорова, построенная на теории меры А. Лебега. В 1933 г. Колмогоров предложил использовать для моделирования эксперимента со случайными исходами вероятностное пространство (англ. – probability space) – тройку $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Первый объект, входящий в "тройку" вероятностного пространства, *множество элементарных исходов* Ω. Это непустое множество произвольной природы (необязательно числовое). Также встречается название "пространство элементарных исходов", ПЭИ; англ. – sample space. Его элементы обычно обозначаются как ω.

Пример. Для броска 6-гранного игрального кубика $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; для броска монеты мы можем выбрать $\Omega = \{O, P\}$, где O соответствует орлу, а P – решке, или, скажем, $\Omega = \{0, 1\}$, где 1 соответствует орлу, а 0 – решке.

В выборе пространства элементарных исходов для описания данного эксперимента есть изрядный произвол. Главное – включить в него все интересующие ситуации: так, если я хочу заниматься исследованием реальной монеты с высокой точностью, то неплохо бы добавить к возможным исходам броска случай "монета встала на ребро".

Следующий элемент вероятностного пространства, $\mathcal{F}$ – *множество случайных событий*, элементами которого являются подмножества Ω.

Зачем используется $\mathcal{F}$?

Если мы хотим описать случайный эксперимент – подбрасывание 6-гранного кубика, то кажется естественным задать вероятности для всех 6 элементарных исходов, то есть на множестве Ω. Однако сложности возникнут, например, если мы захотим описать ситуацию, когда нам доступна неполная информация об эксперименте. Например: как описать вероятностную модель для броска 6-гранного кубика, если всё, что нам становится известно после броска – это чётность выпавшего числа?

Ещё более важно, что задавая вероятности на множестве элементарных исходов, мы не можем описать объекты, где Ω несчётно, – например, модель поведения обменных валютных курсов, или случайное время до появления нового заказа в интернет-магазине.

Таким образом, приходим к выводу, что вероятности нужно задавать не на $\omega \in \Omega$, а на (некоторых) случайных событиях – $A \subset \Omega : A \in \mathcal{F}$. Выбор, какие подмножества Ω включать в $\mathcal{F}$, а какие – нет, в первую очередь зависит от того, какая информация станет доступной экспериментатору после проведения случайного эксперимента.

Последний элемент "тройки", *вероятностная мера* $\mathbf{P}$ – это функция, задаваемая на множествах, входящих в $\mathcal{F}$, и принимающая значения на отрезке $[0, 1]$.

Определение. Элементы $\mathcal{F}$ – случайные события – также называются *измеримыми подмножествами* Ω. Нестрого говоря, это те наборы элементарных исходов, которые может различить экспериментатор, работающий с вероятностным пространством $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Сигма-алгебры подмножеств

Определение. Семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества Ω называется *σ-алгеброй*, если выполнены следующие условия:

1. Множества $\emptyset$ и Ω являются элементами $\mathcal{F}$
2. Для любого множества A из $\mathcal{F}$, его дополнение $\overline{A}$ является элементом $\mathcal{F}$
3. Для любой последовательности измеримых множеств $A_1, A_2, \ldots$ их пересечение $A = \cap_{i=1}^{\infty} A_i$ принадлежит $\mathcal{F}$.

В контексте теории вероятностей эти свойства σ-алгебр имеют очень простое объяснение. Во-первых, проводя случайный эксперимент, исследователь знает, что должен реализоваться один из возможных элементарных исходов $\omega \in \Omega$, т.е. события “не произошло ничего” и “произошло что-то” являются измеримыми. Во-вторых, если некоторое событие $A \in \mathcal{F}$ является измеримым, то применяя элементарные логические соображения, экспериментатор также может понять, произошло ли событие, обратное к A. Аналогично, если какие-то два события A_1 и A_2 являются измеримыми, то экспериментатор может понять, произошли ли они оба вместе (т.е. произошло событие $A_3 = A_1 \cap A_2$), или нет.

Следствием определения является то, что объединение не более чем счётного набора множеств из $\mathcal{F}$ также принадлежит $\mathcal{F}$.

Действительно,

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \mid \omega \in B\} = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \in \mathcal{F}.$$

Таким образом, семейство $\mathcal{F}$ является σ-алгеброй, если оно содержит $\emptyset$ и Ω и является “замкнутым” относительно операций дополнения и пересечения (объединения) в том смысле, что, применяя эти операции к множеству или паре множеств из $\mathcal{F}$, нельзя получить множество, не являющееся элементом $\mathcal{F}$.

Пример. Простейший пример σ-алгебры подмножеств произвольного множества Ω – это семейство, состояшее из двух элементов $\emptyset$ и Ω. Такую σ-алгебру будем называть беднейшей σ-алгеброй подмножеств множества Ω (по понятным причинам) и обозначать $\mathcal{F}_{\min}(\Omega)$.

Пример. Другой, в некотором смысле противоположный пример σ-алгебры подмножеств произвольного множества Ω – это семейство, состоящее из всех возможных подмножеств множества Ω. Такую σ-алгебру будем называть богатейшей σ-алгеброй подмножеств множества Ω (по столь же понятным причинам) и обозначать 2^{Ω}.

Свойства вероятностной меры P

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1, \mathbf{P}(\emptyset) = 0,$
2. Счётная аддитивность: пусть $A_1, A_2, \ldots$ – случайные события и пусть

$$A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \text{ тогда } \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(A_n\right).$$

Нетрудно проверить, что

- выполнено свойство конечной аддитивности: если $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$,

$$A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \text{ то } \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(A_i\right).$$

- выполнено свойство монотонности: $A, B \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$
- справедливо равенство $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$

Задача. Доказать, что

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B).$$

Решение. Воспользуемся аксиомой, что для двух несовместных[2] событий X и Y вероятность их объединения равна сумме отдельных вероятностей, $\Pr(X \cup Y) = \Pr(X) + \Pr(Y)$. Тогда для произвольных событий A и B можно записать $A \cup B = A \cup (B \backslash A) \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B \backslash A)$. Поскольку событие B можно

[2] Два или более событий называются несовместными, или несовместимыми, если никакие из них не могут появиться одновременно в результате однократного проведения эксперимента, т.е. они не имеют общих элементарных исходов.

представить как объединение двух несовместных событий, $B = (B\backslash A) \cup (A \cap B)$, то

$$\Pr(B) = \Pr(B\backslash A) + \Pr(B \cap A) \Rightarrow \Pr(B\backslash A) = \Pr(B) - \Pr(B \cap A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B).$$

Классическая вероятность

Важным частным случаем является т.н. классическая схема или классическая (комбинаторная) вероятность. Пространство Ω конечно, $|\Omega| = N$ и все элементарные исходы равновероятны, а значит имеют вероятность $\Pr(\omega_i) = \frac{1}{N}$, $i \in \{1, \ldots, N\}$.

В этом случае

$$\Pr(A) = \frac{N_A}{N}$$

для любого события A, где N_A – количество элементарных исходов в A.

Иными словами, нахождение вероятности любого события сводится к подсчёту числа элементарных исходов, составляющих это событие. Именно к этой схеме сводятся многочисленные задачи, связанные с подбрасыванием монет, кубиков, вытаскиванием шаров из коробок и т. п.

Задача. Студент на устном экзамене знает k билетов из n. Какая вероятность того, что он, стоя в очереди m-м, вытянет знакомый билет? Считаем, что $m < n$.

Решение. Этот эксперимент соответствует модели с упорядоченным выбором без возвращения. Соответственно, $\Omega = \{\omega = (i_1, \ldots, i_m),\ i_j \neq i_l \text{ при } j \neq l\}$, $|\Omega| = A_n^m$, $\Pr(\omega) = \frac{1}{A_n^m}$ (вероятность одного произвольного элементарного исхода).

Нас интересует событие $A = \big\{(i_1, \ldots, i_m) \in \Omega : i_m \in \{1, \ldots, k\}\big\}$. Решая аналогично задаче об упорядоченных выборках без возвращения, получаем, что $|A| = k \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$, поскольку билет для нашего студента выбирается k способами, для первого из остальных студентов – $(n-1)$ способами и так далее. Итого, $\Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)} = \frac{k}{n}$. Как и следовало ожидать, нашему студенту совершенно неважно каким тянуть билет, вероятность всегда одна и та же. В каких-то случаях его шансы вытянуть удачный билет повышаются, в каких-то понижаются, но все эти случаи волшебным образом воплощаются в той же вероятности, как если бы он стоял первым в очереди.

Задача. Имеется m белых и n красных шаров. Шары одного цвета неразличимы. Шары случайным образом расположены в линию. Чему равна вероятность того, что в конфигурации нет двух рядом расположенных белых шаров?

Решение. Ясно, что если $m > n+1$, то искомая вероятность равна 0. Пусть $m \leq n+1$. Общее число размещений шаров равно $N = C_{m+n}^m$ – из $m+n$ возможных ячеек выбираем m ячеек, куда помещаем белые шары, в оставшиеся ячейки помещаем красные шары. Чтобы получить требуемую конфигурацию, надо среди $n+1$ возможных промежутков между красными шарами (включая ячейку слева от первого и справа от последнего шара) выбрать m промежутков, куда будут помещены белые шары. Это можно сделать $M = C_{n+1}^m$ способами. Искомая вероятность есть

$$p = \frac{M}{N} = \frac{C_{n+1}^m}{C_{m+n}^m}.$$

Интересно заметить, что эту задачу можно решить по-другому. Разложим m белых шаров подряд и поместим между ними $m-1$ красный шар. Оставшиеся $n-m+1$ красные шары можно поместить на любое $m+1$ место между, слева и справа от белых шаров по схеме “шары неразличимы, в каждом ящике может быть любое число шаров ”. Тогда число конфигураций равно $C_{n-m+1+(m+1)-1}^m = C_{n+1}^m$. Ответы при разных решениях совпадают.

Задача. Если в аудитории n человек, то какова вероятность того, что все дни рождения различны?

Решение. Делаем предположение, что день рождения каждого из присутствующих с равной вероятностью может быть любым из 365 дней года, и не зависит от дней рождения остальных людей. Тогда вероятность того, что дни рождения не совпадут равна

$$p_n = \frac{365(365-1)\cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n}.$$

При $n = 25$ значение выражения приближенно равно 0.43.

Задача. Колоду из 36 карт наудачу разделяют на две равные половины. Какова вероятность того, что в каждой половине будет одинаковое число красных и черных карт?

Решение. Общее число способов выбора 18 карт из 36 равно C_{36}^{18}. Число благоприятствующих исходов равно $(C_{18}^{9})^2$ (из 18-ти черных карт выбираем 9, после чего из 18-ти красных карт выбираем 9 и объединяем с выбранными черными). Поэтому вероятность равна $\frac{(C_{18}^{9})^2}{C_{36}^{18}}$. Чтобы оценить это выражение, можно воспользоваться формулой Стирлинга: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}$. После преобразований получаем: $p \approx \frac{2}{\sqrt{18\pi}} = 0.266$.

Задача. Холостяк приобрел 5 разных пар носков. Каждый день в течение рабочей недели (5 дней) он надевает два случайно выбиранных из общего количества носка, без возвращения. Найдите вероятность того, что он наденет “парные″ носки в 3й и 5й дни.

Решение. Пронумеруем носки числами $1\ldots 10$ (под номерами 1 и 2 – носки из первой пары, и т. д.). Существуют 10! перестановок между ними, и будем считать, что первые два числа в перестановке – номера носков, выбранных в понедельник, и т. д. Нужная нам вероятность находится следующим способом: первый носок на среду можно выбрать любым из имеющихся десяти, но вторым носком должен быть парный к первому – и его можно выбрать только одним способом. Аналогично, на пятницу первым носком может быть любой из оставшихся восьми, а вторым – единственный парный к первому. Среди оставшихся носков есть 6! перестановок. Итоговая вероятность равна

$$p = \frac{10\cdot 8\cdot 6!}{10!} = \frac{80}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} = \frac{1}{63}.$$