

ma $\Sigma$ prof $\int$ .ru

Высшая математика – просто и доступно!

**Интенсивный курс  
«Как найти производную?»**

***Настоящая методичка*** позволяет в кратчайшие сроки (буквально часы) **научиться дифференцировать (находить производные)** функции одной переменной. Материал предназначен для учащихся средней школы и студентов-заочников с начальным уровнем подготовки.

*Автор: Александр Емелин*

## Оглавление

1. Как найти производную? .....	3
2. Производная сложной функции .....	10
3. Производная очень сложной функции :) .....	17
4. Логарифмическое дифференцирование .....	24
5. Производные второго и более высоких порядков .....	27
6. Производная функции, заданной неявно .....	32
7. Производная параметрически заданной функции .....	37
8. Решения и ответы .....	41

## 1. Как найти производную?

Или, что то же самое, **как взять производную?** Для прохождения этого интенсивного курса нам потребуются *Приложения Горячие школьные формулы и Правила дифференцирования и таблица производных*. По возможности их лучше распечатать (особенно второе) и положить рядышком – чтобы справочные материалы постоянно были под рукой, перед глазами и в сердце =)

...Есть? Приступим. У меня для вас есть **две новости**: хорошая и очень хорошая.

Хорошая новость состоит в следующем: чтобы научиться находить производные совсем не обязательно знать и понимать, что такое производная. И очень хорошая новость состоит в том, что научиться брать производные не так сложно – существует довольно чёткий алгоритм решения (и объяснения) этого задания. Интегралы или пределы, например, освоить труднее.

В рамках данной методички я не буду останавливаться на понятии производной, а попытаюсь в доступной форме, шаг за шагом, **научить вас находить** эти самые производные. Вся информация изложена подробно, простыми словами. Собственно, сразу рассмотрим пример:

### Пример 1

Найти производную функции  $y = \sqrt{x}$ . И здесь нужно сделать **немедленное замечание**: функцию можно равноценно записать через  $f(x) = \sqrt{x}$ , однако, на практике чаще встречается «игрек», и поэтому я буду пользоваться буквой «игрек».

**Решение:**  $y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Это простейший пример, пожалуйста, найдите его в таблице производных. До сих пор не под рукой?! ...Ай-яй-яй..., негоже пренебрегать рабочей таблицей!

Теперь посмотрим на решение и проанализируем, что же произошло? А произошла следующая вещь: у нас была функция  $y = \sqrt{x}$ , которая в результате решения превратилась в функцию  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

Говоря совсем просто, для того чтобы найти производную функции, нужно по определённым правилам превратить её в другую функцию. Посмотрите еще раз на таблицу производных – там функции превращаются в другие функции. Единственным исключением является экспоненциальная функция  $y = e^x$ , которая превращается сама в себя.

**Операция нахождения производной называется дифференцированием.**

**Обозначения:** производную обозначают  $y'$ ,  $f'(x)$  или  $\frac{dy}{dx}$

Вернемся к нашей таблице производных. Из данной таблицы желательно **запомнить наизусть**: правила дифференцирования и производные некоторых элементарных функций, особенно:

производную константы:

$$(C)' = 0 \quad (C - \text{произвольное число});$$

производную степенной функции:

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \text{ в частности: } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (x)' = 1, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Зачем запоминать? Данные знания являются элементарными знаниями о производных. И если вы не сможете ответить преподавателю на вопрос «Чему равна производная числа?», то учеба в ВУЗе может для вас закончиться (лично знаком с двумя подобными случаями из жизни). Кроме того, это наиболее распространенные формулы, которыми приходится пользоваться практически каждый раз, когда мы сталкиваемся с производными.

В реальности простые табличные примеры – редкость, обычно при нахождении производных **сначала** используют правила дифференцирования, а **затем** – таблицу.

В этой связи переходим к рассмотрению **правил дифференцирования**:

### 1) Константу можно (и нужно) вынести за знак производной

$$(Cu)' = Cu' \quad (C - \text{произвольное число})$$

#### Пример 2

Найти производную функции  $y = 3\cos x$

Смотрим в таблицу производных. Производная косинуса там есть, но у нас  $3\cos x$ .

Решаем:

$$y' = (3\cos x)'$$

Самое время использовать правило, выносим постоянный множитель за знак производной:

$$y' = (3\cos x)' = 3(\cos x)'$$

А теперь превращаем наш косинус по таблице:

$$y' = (3\cos x)' = 3(\cos x)' = 3(-\sin x)$$

Ну и результат желательно немного «причесать» – ставим минус на первое место, заодно избавляясь от скобок:

$$y' = (3\cos x)' = 3(\cos x)' = 3(-\sin x) = -3\sin x$$

## 2) Производная суммы равна сумме производных

$$(u + v)' = u' + v'$$

**! Напоминаю**, что разность всегда можно представить в виде суммы:

$u - v = u + (-v)$ , следовательно:  $(u - v)' = (u + (-v))' = u' + (-1 \cdot v)' = u'$  по Правилу 1:  
 $= u' - 1 \cdot v' = u' - v'$

Данное правило, очевидно, справедливо не только для двух, но и для бОльшего количества слагаемых:

### Пример 3

Найти производную функции  $y = 6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 11\text{ctgx}$

Решаем. Как вы, наверное, уже заметили, **первое действие**, которое всегда выполняется при нахождении производной, состоит в том, что мы заключаем в скобки всё выражение и ставим штрих справа сверху:

$$y' = \left( 6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 11\text{ctgx} \right)'$$

Применяем второе правило. Попутно все корни записываем в виде  $x^{\frac{a}{b}}$ , а если они находятся в знаменателе, то перемещаем их вверх (как это сделать – рассмотрено в Приложениях):

$$= (6)' + (x)' + (3x^2)' - (\sin x)' - \left( 2x^{\frac{1}{3}} \right)' + (x^{-2})' - (11\text{ctgx})' =$$

Теперь вспоминаем о первом правиле дифференцирования – постоянные множители (числа) выносим за знак производной:

$$= (6)' + (x)' + 3(x^2)' - (\sin x)' - 2\left( x^{\frac{1}{3}} \right)' + (x^{-2})' - 11(\text{ctgx})' =$$

Обычно в ходе решения эти два правила применяют одновременно (чтобы не переписывать лишний раз длинное выражение). Теперь все функции, находящиеся под штрихами, являются элементарными табличными функциями, с помощью таблицы осуществляем превращение:

$$= 0 + 1 + 3 \cdot 2x - \cos x - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} + (-2) \cdot x^{-3} - 11 \cdot \left( -\frac{1}{\sin^2 x} \right) =$$

В принципе, можно всё оставить в таком виде, так как штрихов больше нет, и производная найдена. Тем не менее, подобные выражения обычно упрощают:

$$= 1 + 6x - \cos x - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3} + \frac{11}{\sin^2 x}, \text{ при этом все степени вида } x^{\frac{a}{b}} \text{ желательно снова}$$

представить в виде корней, степени с отрицательными показателями – сбросить в знаменатель. Хотя этого можно и не делать, ошибкой не будет.

### Пример 4

Найти производную функции  $y = 5 \ln x + \frac{2}{\sqrt[5]{x^7}} + \operatorname{arctg} x - \lg 20 \cdot 2^x + \operatorname{tg} 3$

Попробуйте решить данный пример самостоятельно.

### **3) Производная произведения функций**

Вроде бы по аналогии напрашивается формула  $(uv)' = u'v'$  ..., но неожиданность состоит в том, что:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Эта необычное правило следует из определения производной, но с теорией мы повременим – сейчас важнее научиться решать:

### Пример 5

Найти производную функции  $y = x^3 \arcsin x$

Здесь у нас произведение двух функций, зависящих от  $x$ . Сначала применяем наше странное правило, а затем превращаем функции по таблице производных:

$$\begin{aligned} y' &= (x^3 \arcsin x)' = (x^3)' \arcsin x + x^3 (\arcsin x)' = \\ &= 3x^2 \arcsin x + x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 3x^2 \arcsin x + \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Сложно? Вовсе нет, вполне доступно даже для «чайника».

### Пример 6

Найти производную функции  $y = (x^2 + 7x - 1) \log_3 x$

В данной функции содержится произведение двух функций – квадратного трёхчлена  $(x^2 + 7x - 1)$  и логарифма  $\log_3 x$ . Со школы мы помним, что умножение и деление имеют приоритет перед сложением и вычитанием. Здесь всё так же. **СНАЧАЛА** мы используем правило дифференцирования произведения:

$$y' = ((x^2 + 7x - 1) \log_3 x)' = (x^2 + 7x - 1)' \log_3 x + (x^2 + 7x - 1) (\log_3 x)' =$$

Теперь для скобки  $(x^2 + 7x - 1)'$  используем два первых правила:

$$= ((x^2)' + 7(x)' - (1)') \log_3 x + (x^2 + 7x - 1) (\log_3 x)' =$$

В результате применения правил дифференцирования под штрихами у нас остались только табличные функции, по таблице производных превращаем их в другие функции:

$$= (2x + 7 \cdot 1 - 0) \log_3 x + (x^2 + 7x - 1) \cdot \frac{1}{x \ln 3} = (2x + 7) \log_3 x + \frac{(x^2 + 7x - 1)}{x \ln 3}$$

Готово.

Следует отметить, что простые производные вроде  $(x^2 + 7x - 1)'$  не обязательно расписывать так подробно. Обычно их находят устно и сразу записывают, что  $(x^2 + 7x - 1)' = 2x + 7$ .

### Пример 7

Найти производную функции  $y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^2} \cos x$

Это пример для самостоятельного решения.

### **4) Производная частного**

В потолке открылся люк, не пугайся, это глюк.

А вот это вот суровая действительность:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

### Пример 8

Найти производную функции  $y = \frac{2(3x - 4)}{x^2 + 1}$

Чего здесь только нет – сумма, разность, произведение, дробь.... С чего бы начать?! Есть сомнения, нет сомнений, но, **В ЛЮБОМ СЛУЧАЕ** для начала рисуем скобочки и справа сверху ставим штрих:

$$y' = \left(\frac{2(3x - 4)}{x^2 + 1}\right)'$$

Теперь смотрим на выражение в скобках, как бы его упростить? Прежде всего, замечаем множитель-константу, который, согласно первому правилу, целесообразно вынести за знак производной:

$$y' = \left(\frac{2(3x - 4)}{x^2 + 1}\right)' = 2 \cdot \left(\frac{3x - 4}{x^2 + 1}\right)'$$

Заодно избавились от скобок в числителе, которые теперь не нужны. Вообще говоря, множители-константы можно и не выносить, но в этом случае они будут «путаться под ногами», что загромождает и затрудняет решение.

Смотрим на наше выражение в скобках. У нас есть сложение, вычитание и деление. Со школы мы помним, что деление выполняется в первую очередь. И здесь – сначала применяем правило дифференцирования частного:

$$y' = \left(\frac{2(3x - 4)}{x^2 + 1}\right)' = 2 \cdot \left(\frac{3x - 4}{x^2 + 1}\right)' = 2 \cdot \left(\frac{(3x - 4)'(x^2 + 1) - (3x - 4)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2}\right)$$

Таким образом, наша страшная производная свелась к производным от двух простых скобок. Применяем первое и второе правило, здесь это сделаем устно, надеюсь, вы уже немного освоились в производных:

$$y' = \left( \frac{2(3x-4)}{x^2+1} \right)' = 2 \cdot \left( \frac{3x-4}{x^2+1} \right)' = 2 \cdot \left( \frac{(3x-4)'(x^2+1) - (3x-4)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \right) =$$

$$= 2 \cdot \left( \frac{3 \cdot (x^2+1) - (3x-4) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \right)$$

Штрихов больше нет, задание выполнено.

На практике обычно (но не всегда) ответ упрощают «школьными» методами:

$$\dots = 2 \cdot \left( \frac{3x^2 + 3 - 6x^2 + 8x}{(x^2+1)^2} \right) = \frac{2(-3x^2 + 8x + 3)}{(x^2+1)^2}$$

Самостоятельно:

### Пример 9

Найти производную функции  $y = \frac{3^x + 5}{\cos x}$

Время от времени встречаются хитрые задачки:

### Пример 10

Найти производную функции  $y = \frac{x^2 + \sqrt{x} - 3}{x}$

Смотрим на данную функцию. Здесь снова дробь. Однако перед тем как использовать правило дифференцирования частного (а его можно использовать), всегда имеет смысл посмотреть, а нельзя ли упростить саму дробь, или вообще избавиться от нее?

Дело в том, что формула  $\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$  достаточно громоздка, и применять ее совсем не хочется.

В данном случае можно почленно поделить числитель на знаменатель.

Преобразуем функцию:

$$y = \frac{x^2 + \sqrt{x} - 3}{x} = x + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x}$$

Ну вот, совсем другое дело, теперь дифференцировать просто и приятно:



$$y' = \left( x + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x} \right)' = (x)' + \left( x^{-\frac{1}{2}} \right)' - 3(x^{-1})' =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} - 3(-1)x^{-2} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{3}{x^2}$$

Готово.

### Пример 11

Найти производную функции  $y = \frac{x}{e^{-x}}$

Здесь ситуация похожа, превратим нашу дробь в произведение, для этого поднимем экспоненту в числитель, сменив у показателя знак:

$$y = \frac{x}{e^{-x}} = xe^x$$

Произведение все-таки дифференцировать проще:

$$y' = (xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = 1 \cdot e^x + xe^x = e^x(x+1)$$

Вот и всё.

### Пример 12

Найти производную функции  $y = -\frac{\operatorname{arccotg} x}{\sqrt[3]{x}}$

Это пример для самостоятельного решения. Кстати, вопрос «на засыпку»: а можно ли здесь вынести минус за знак производной? И если можно, то почему? И нужно ли, если можно? ☺ ;-)

**И я поздравляю вас с первыми успехами!**

**Однако если что-то осталось недопонятым, то перечитайте материал ещё раз!**

Хотя проблемы здесь, как правило, бывают не с производными, а с алгебраическими действиями, в частности, с преобразованием степеней. В случае непреодолимых затруднений следует немного освежить в памяти школьную программу.

Едем дальше:

## 2. Производная сложной функции

На практике с производной сложной функции приходится сталкиваться очень часто, я бы даже сказал, почти всегда, когда вам даны задания на нахождение производных.

Смотрим в *Приложение* на правило дифференцирования сложной функции (№ 5):

$$(u(v))' = u'(v) \cdot v'$$

Разбираемся. Прежде всего, обратим внимание на запись  $u(v)$ . Здесь у нас две функции –  $u$  и  $v$ , причем функция  $v$ , образно говоря, вложена в функцию  $u$ . Функция такого вида (когда одна функция вложена в другую) и называется сложной функцией.

Функцию  $u$  я буду называть **внешней функцией**, а функцию  $v$  – **внутренней (или вложенной) функцией**.

**! Примечание:** данные определения не являются теоретическими и не должны фигурировать в чистовом оформлении заданий. Я применяю неформальные выражения «внешняя» функция и «внутренняя» функция только для того, чтобы вам легче было понять материал.

Проясним ситуацию на конкретном примере:

### Пример 13

Найти производную функции  $y = \sin(3x - 5)$

Под синусом у нас находится не просто буква «икс», а целое выражение  $3x - 5$ , поэтому найти производную сразу по таблице не получится. Также мы замечаем, что здесь невозможно применить первые четыре правила, вроде бы есть разность, но дело в том, что «разрывать на части» синус нельзя:

~~$$\sin(3x - 5) = \sin(3x) - \sin 5$$~~

В данном примере уже из этих объяснений интуитивно понятно, что функция  $y = \sin(3x - 5)$  – это сложная функция, причем двучлен  $3x - 5$  является внутренней функцией (вложением), а  $\sin(3x - 5)$  – внешней функцией.

**Первый шаг**, который нужно выполнить при нахождении производной сложной функции состоит в том, чтобы **разобраться, какая функция является внутренней, а какая – внешней**.

В случае простых примеров вроде  $\sin(3x - 5)$  понятно, что под синус вложен двучлен  $3x - 5$ . Но как же быть, если всё не очевидно? Как точно определить, какая функция является внешней, а какая внутренней? Для этого я предлагаю использовать следующий прием, который можно проводить мысленно или на черновике, перелистываем страничку:

Представим, что нам нужно вычислить на калькуляторе значение выражения  $\sin(3x - 5)$  при  $x = 1$  (вместо единицы может быть любое число).

Что мы вычислим в первую очередь? **В первую очередь** нужно выполнить следующее действие:  $3 \cdot 1 - 5 = -2$ , поэтому двучлен  $3x - 5$  и есть внутренняя функция  $v$ :

$$y = \sin(\underbrace{3x - 5}_v)$$

**Во вторую очередь** нужно найти  $\sin(-2)$ , поэтому синус – внешняя функция:

$$y = \underbrace{\sin(\underbrace{3x - 5}_v)}_{u(v)}$$

После того, как мы **РАЗОБРАЛИСЬ** с внутренней и внешней функциями самое время применить правило дифференцирования сложной функции  $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ .

Начинаем решать. Как мы помним из предыдущего параграфа, оформление решения любой производной всегда начинается так – заключаем всё хозяйство в скобки и ставим справа сверху штрих:

$$y' = (\sin(3x - 5))'$$

**Сначала** находим производную внешней функции  $u'(v)$  (синуса). Для этого смотрим в таблицу производных и замечаем, что  $(\sin x)' = \cos x$ . Но это только цветочки! **Все табличные шаблоны применимы и в том случае, если «икс» ЗАМЕНИТЬ любой дифференцируемой функцией  $v$ .**

В данном случае ВМЕСТО «икс» у нас  $v = 3x - 5$ , и поэтому  $\sin(3x - 5)$  превращается в косинус того же аргумента:

$u'(v) = \cos(3x - 5)$  – ещё раз обратите внимание, что внутренняя функция  $v = 3x - 5$  не изменилась, её мы не трогаем.

Ну и совершенно понятно, что  $v' = (3x - 5)'$ .

Результат применения формулы  $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$  в чистовом оформлении выглядит так:

$$y' = (\sin(3x - 5))' = \cos(3x - 5) \cdot (3x - 5)' =$$

Далее мы берем производную внутренней функции, она очень простая:

$$\begin{aligned} &= \cos(3x - 5) \cdot (3 - 0) = \text{и постоянный множитель обычно выносят в самое начало:} \\ &= 3\cos(3x - 5) \end{aligned}$$

Если осталось какое-либо недопонимание, перепишите решение своей рукой и еще раз прочитайте объяснения.

Разминаемся:

### Пример 14

Найти производные функций: а)  $y = \cos 2x$ , б)  $y = e^{-x}$

и продолжаем:

### Пример 15

Найти производную функции  $y = (2x + 1)^5$

Как всегда записываем:

$$y' = ((2x + 1)^5)'$$

Разбираемся, где у нас внешняя функция, а где внутренняя. Для этого пробуем (мысленно или на черновике) вычислить значение выражения  $(2x + 1)^5$  при  $x = 1$ . Что нужно выполнить в первую очередь? В первую очередь нужно сосчитать чему равно основание:  $2 \cdot 1 + 1 = 3$ , значит, двучлен  $(2x + 1)$  – и есть внутренняя функция:

$$y = \underbrace{(2x + 1)}_v^5$$

И только потом выполняется возведение в степень  $3^5$ , следовательно, степенная функция – это внешняя функция:

$$y = \underbrace{\underbrace{(2x + 1)}_v^5}_{u(v)}$$

Согласно формуле  $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ , сначала нужно найти производную от внешней функции, в данном случае, от степени. Разыскиваем в таблице нужную формулу:  $(x^n)' = nx^{n-1}$ . Повторяем еще раз: **любой табличный шаблон справедлив не только для «икс», но и для функции  $v$** . Таким образом, результат применения правила дифференцирования сложной функции  $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$  следующий:

$$y' = ((2x + 1)^5)' = 5 \cdot (2x + 1)^4 \cdot (2x + 1)'$$

Снова подчёркиваю, что когда мы берем производную от внешней функции  $u'(v)$ , внутренняя функция  $v$  у нас не меняется:

$$5 \cdot \underbrace{(2x + 1)}_{\text{не меняется}}^4$$

Осталось найти совсем простую производную от внутренней функции и немного «причесать» результат:

$$\begin{aligned} y' &= ((2x + 1)^5)' = 5 \cdot (2x + 1)^4 \cdot (2x + 1)' = \\ &= 5 \cdot (2x + 1)^4 \cdot (2 + 0) = 10 \cdot (2x + 1)^4 \end{aligned}$$

Готово. Теперь ваша очередь:

### Пример 16

Найти производную функции  $y = \frac{1}{(x^2 - 1)^7}$

Решение и ответ в конце методички. И для закрепления материала приведу пример без комментариев, попробуйте самостоятельно разобраться, порассуждать, где внешняя и где внутренняя функция, почему задания решены именно так?

### Пример 17

Найти производные функций: а)  $y = \arctg \sqrt{x}$ , б)  $y = \sqrt{\arctg x}$

$$\text{а) } y' = (\arctg \sqrt{x})' = \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{1 + x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)}$$

$$\text{б) } y' = (\sqrt{\arctg x})' = \frac{1}{2\sqrt{\arctg x}} \cdot (\arctg x)' = \frac{1}{2(1 + x^2)\sqrt{\arctg x}}$$

...Есть? Тогда добавим оборотов. И «наворотов».)

### Пример 18

Найти производную функции  $y = \sqrt[3]{x^2 + \text{tg}x + 15}$

Здесь у нас корень, а для того, чтобы продифференцировать корень, его удобно представить в виде степени  $x^{\frac{a}{b}}$ . Таким образом, сначала приводим функцию к нужному виду:

$$y = \sqrt[3]{x^2 + \text{tg}x + 15} = (x^2 + \text{tg}x + 15)^{\frac{1}{3}}$$

Анализируя функцию, приходим к выводу, что сумма трех слагаемых – это внутренняя функция, а возведение в степень – внешняя функция. Применяем правило дифференцирования сложной функции  $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ :

$$y' = \left( (x^2 + \text{tg}x + 15)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3} \cdot (x^2 + \text{tg}x + 15)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + \text{tg}x + 15)' =$$

Степень снова представляем в виде радикала (корня), а для производной внутренней функции применяем правило дифференцирования суммы:

$$= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + \text{tg}x + 15)^2}} \cdot ((x^2)' + (\text{tg}x)' + (15)') = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + \text{tg}x + 15)^2}} \cdot \left( 2x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

Готово.

Можно еще в скобках привести выражение к общему знаменателю и записать всё одной дробью. Красиво, конечно, но когда получаются громоздкие длинные производные – лучше этого не делать (легко запутаться, допустить ненужную ошибку, да и преподавателю будет неудобно проверять).

### Пример 19

Найти производную функции  $y = \frac{5}{\sqrt[5]{x + \ln x}}$

Самостоятельно ;) И мы продолжаем тему:

### Пример 20

Найти производную функции  $y = -\frac{1}{\cos x}$

Здесь можно применить формулу  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ , но такое решение будет выглядеть ~~как извращение~~ необычно. Производную гораздо выгоднее найти через правило дифференцирования сложной функции. Для этого поднимаем косинус вверх:

$$y = -\frac{1}{\cos x} = -\cos^{-1} x$$

Минус (константу  $-1$ ) сразу выносим за знак производной:

$$y' = -(\cos^{-1} x)'$$

Косинус – внутренняя функция, возведение в степень – внешняя функция.

Используем наше правило  $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ :

$$y' = -(\cos^{-1} x)' = -(-1) \cdot \cos^{-2} x \cdot (\cos x)' =$$

Находим производную внутренней функции, а косинус сбрасываем обратно вниз:

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Готово. В рассмотренном примере важно не запутаться в знаках. Кстати, попробуйте решить его с помощью правила  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ , ответы должны совпасть.

### Пример 21

Найти производную функции  $y = \frac{1}{\arccos^2 x}$

Это пример для самостоятельного решения.

Как вы уже успели заметить, правило дифференцирования сложной функции очень часто применяется в комбинации с остальными правилами дифференцирования:

### Пример 22

Найти производную функции  $y = -2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x$

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' =$$

Сначала используем правило дифференцирования суммы  $(u + v)' = u' + v'$  и заодно в первом слагаемом выносим постоянный множитель по правилу  $(Cu)' = Cu'$ :

$$= -2(xe^{3x})' + ((x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' =$$

В обоих слагаемых под штрихами у нас находится произведение функций, следовательно, нужно дважды применить правило  $(uv)' = u'v + uv'$ :

$$= -2((x)'e^{3x} + x(e^{3x})') + (x^2 - 4x + 3)' \sin 7x + (x^2 - 4x + 3)(\sin 7x)' =$$

Замечаем, что под некоторыми штрихами у нас находятся сложные функции:  $e^{3x}$  и  $\sin 7x$ . Несмотря на то, что это простейшие из сложных функций (такой вот каламбур), я распишу их производные подробно. Согласно правилу  $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ , получаем:

$$\begin{aligned} &= -2(1 \cdot e^{3x} + x \cdot e^{3x} \cdot (3x)') + (2x - 4 + 0) \sin 7x + (x^2 - 4x + 3) \cos 7x \cdot (7x)' = \\ &= -2(e^{3x} + 3xe^{3x}) + (2x - 4) \sin 7x + 7(x^2 - 4x + 3) \cos 7x \end{aligned}$$

Готово.

**! Обратите внимание на приоритет (порядок) применения правил: правило дифференцирования сложной функции применяется в последнюю очередь.**

### Пример 23

Найти производную функции  $y = \sqrt{x^2 + 4} \cdot \ln(\sin x)$

Это пример для самостоятельного решения.

В ходе изучения математического анализа дифференцировать придется часто, и поэтому **крайне желательно научиться находить не очень трудные производные УСТНО**. Более того, во многих заданиях и не требуется подробная роспись –

предполагается, что вместо длинной цепочки  $(\operatorname{tg} 2x)' = \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot (2x)' = \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 = \frac{2}{\cos^2 2x}$  студент сразу сможет записать, что  $(\operatorname{tg} 2x)' = \frac{2}{\cos^2 2x}$ .

...Представьте, что в 3 часа ночи у вас раздался телефонный звонок, и приятный голос спросил: «Чему равна производная тангенса двух икс?». На это должен последовать почти мгновенный и вежливый ответ, что  $(\operatorname{tg} 2x)' = \frac{2}{\cos^2 2x}$ ! И как раз отработке этого навыка будет посвящён:

### Производный диктант

Найти следующие производные устно, в одно действие, например:  $(e^{-2x})' = -2e^{2x}$ .  
Очень хорошо, если у вас эта страница на бумаге – записывайте ответы прямо тут, справа:

$$(\sqrt{1-x^2})' =$$

$$((2-x)^4)' =$$

$$\left(\frac{1}{2x+1}\right)' =$$

$$(e^{\frac{x}{5}})' =$$

$$\left(\left(\frac{x}{3}+4\right)^{10}\right)' =$$

$$\left(7^{\frac{1}{2}x^2}\right)' =$$

$$(\ln(x-x^2))' =$$

$$(\sin^2 x)' =$$

$$(\sin x^2)' =$$

$$(\cos(2x^2-x+1))' =$$

$$(tg \sqrt{x})' =$$

$$(ctg(3x+5))' =$$

$$(e^{\sin x})' =$$

$$(\sqrt{\log_3 x})' =$$

$$(\ln(\arctg x))' =$$

$$(\arctg(\ln x))' =$$

$$(2^{x^3+x-4})' =$$

$$(\arctg 4x)' =$$



$$(\operatorname{arccotg}^4 x)' =$$

$$(\arcsin(2x^3))' =$$

$$(\arccos(3-5x))' =$$

Пожалуй, достаточно. Свериться с правильными ответами можно в конце методички. И ничего страшного, если где-то попутались – это быстро пройдёт =)

Теперь лучше сделать небольшой перерыв, чтобы с новыми силами приступить к изучению следующего параграфа.

### 3. Производная очень сложной функции :)

До сих пор мы рассматривали случаи, когда у нас в сложной функции было только одно вложение. В практических же заданиях часто можно встретить производные, где как матрёшки, одна в другую, вложены сразу 3, а то и 4-5 функций.

#### Пример 24

Найти производную функции  $y = 7^{\arcsin^2 x}$

Разбираемся во вложениях этой функции. Для этого вспоминаем наш технический вспомогательный приём, а именно пробуем вычислить выражение  $7^{\arcsin^2 x}$  с помощью подопытного значения  $x = 1$ . Как бы мы считали на калькуляторе?

Сначала нужно найти  $\arcsin 1$ , значит, арксинус – самое глубокое вложение:

$$7^{\arcsin^2 x}$$

Затем этот арксинус единицы следует возвести в квадрат  $\arcsin^2 1$ :

$$7^{\arcsin^2 x}$$

И, наконец, семёрку возводим в степень  $7^{\arcsin^2 1}$ :

$$7^{\arcsin^2 x}$$

То есть, в данном примере у нас два вложения, при этом, самой внутренней функцией является арксинус, а самой внешней функцией – показательная функция.

Начинаем решать..., вспоминаем – что нужно сделать на первом шаге? Прежде всего, нужно «навесить» штрих:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})'$$

Согласно правилу  $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ , сначала нужно взять производную от внешней функции. Смотрим в таблицу производных и находим производную показательной функции:  $(a^x)' = a^x \ln a$ . Единственное отличие – ВМЕСТО «икс» у нас функция  $v = \arcsin^2 x$ , что не отменяет справедливость этого шаблона. Итак, результат применения правила дифференцирования сложной функции  $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$  следующий:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' =$$

Под штрихом у нас снова сложная функция! Но она уже проще. Как мы только что убедились, внутренняя функция – арксинус, внешняя функция – степень:

$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2 \arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)' =$$

Теперь все просто, находим по таблице производную арксинуса и немного «причесываем» результат:

$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2 \ln 7 \cdot 7^{\arcsin^2 x} \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Готово.

### Пример 25

Найти производные следующих функций:

$$\text{а) } y = \ln^2(2x-1), \quad \text{б) } y = \cos \sqrt{\arctg(x^3)}$$

Это пример для самостоятельного решения.

...Ну как оно, сложно? Следует отметить, что сложность сложности рознь – зачастую, то, что кажется сложным, вовсе не является таковым! Давайте, наконец, сформулируем это **золотое правило**:

**Перед тем, как находить производную, всегда целесообразно посмотреть, а нельзя ли как-нибудь упростить запись функции ещё ДО дифференцирования?**

Зачем? Чтобы жить было легче:

### Пример 26

$$\text{Найти производную функции } y = \sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)}$$

Изучаем нашу функцию. По первой оглядке, здесь нужно взять производную от корня, затем от 4-й степени, затем от синуса, и в последнюю очередь ещё и от дроби. Перспектива, так скажем, малоприятная. И поэтому зададимся вопросом, а нельзя ли записать функцию как-нибудь попроще?

Во-первых, можно преобразовать корень:

$$y = \sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)} = \sin^{\frac{4}{5}}\left(\frac{x-3}{x}\right) \text{ (корень 5-й степени относится именно к синусу).}$$

И во-вторых, можно упростить начинку синуса, ибо использовать правило

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ как-то... да ну его. Разделим почленно числитель на знаменатель:}$$

$$y = \sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)} = \sin^{\frac{4}{5}}\left(\frac{x-3}{x}\right) = \sin^{\frac{4}{5}}\left(1 - \frac{3}{x}\right)$$

Таким образом, на поверку здесь оказалось не три, а всего лишь два вложения: под степень вложен синус, а под синус вложена разность  $\left(1 - \frac{3}{x}\right)$ . Найдем производную, используя правило дифференцирования сложной функции  $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$  два раза:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sin^{\frac{4}{5}}\left(1 - \frac{3}{x}\right)\right)' = \frac{4}{5} \cdot \sin^{-\frac{1}{5}}\left(1 - \frac{3}{x}\right) \cdot \left(\sin\left(1 - \frac{3}{x}\right)\right)' = \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{\sin\left(1 - \frac{3}{x}\right)}} \cdot \cos\left(1 - \frac{3}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{x}\right)' = \frac{4 \cos\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{5 \cdot \sqrt[5]{\sin\left(1 - \frac{3}{x}\right)}} \cdot \left(0 + \frac{3}{x^2}\right) = \frac{12 \cos\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{5x^2 \cdot \sqrt[5]{\sin\left(1 - \frac{3}{x}\right)}} \end{aligned}$$

Ну и для красоты можно восстановить первоначальный марафет:

$$\dots = \frac{12 \cos\left(\frac{x-3}{x}\right)}{5x^2 \cdot \sqrt[5]{\sin\left(\frac{x-3}{x}\right)}}$$

Готово.

Следующая интересность для самостоятельного разбора:

### Пример 27

Найти производную функции

$$y = \sqrt[5]{\frac{2}{\sqrt{x} + 1}}$$

Готовы?

Тогда без комплексов и страхов переходим к следующим примерам:

### Пример 28

Найти производную функции  $y = \sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))}$

Нет-нет-нет, я вовсе не изверг, такие штуки реально встречаются на практике, и более того, их любят предлагать на зачётах и экзаменах, в том числе студентам-заочникам! И поэтому я не рекомендую вам пропускать ближайшие примеры.

Как уже отмечалось, при нахождении производной сложной функции, прежде всего, необходимо **правильно** РАЗОБРАТЬСЯ во вложениях. В тех случаях, когда есть сомнения, берём подопытное значение «икс», например,  $x = 1$  и пробуем (мысленно или на черновике) подставить данное значение в «страшное выражение»:

1) Сначала нам нужно вычислить  $1 + \sqrt{1} = 2$ , значит, сумма  $(x + \sqrt{x})$  – самое глубокое вложение.

2) Затем необходимо вычислить логарифм:  $\ln 2$

3) Далее косинус:  $\cos(\ln 2)$

4) Потом косинус возвести в куб:  $\cos^3(\ln 2)$

5) На пятом шаге – разность:  $3 - \cos^3(\ln 2)$

6) И, наконец, самая внешняя функция – это квадратный корень:  $\sqrt{3 - \cos^3(\ln 2)}$

Формула дифференцирования сложной функции  $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$  применяется в обратном порядке, от самой внешней функции, до самой внутренней. Сначала полное решение, затем комментарии:

$$\begin{aligned} y' &= \left( \sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))} \right)' \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2\sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))}} \cdot (3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x})))' \stackrel{(2)}{=} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))}} \cdot ((3)' - (\cos^3(\ln(x + \sqrt{x})))') \stackrel{(3)}{=} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))}} \cdot (0 - 3\cos^2(\ln(x + \sqrt{x})) \cdot (\cos(\ln(x + \sqrt{x})))') \stackrel{(4)}{=} \\ &= \frac{-3\cos^2(\ln(x + \sqrt{x})) \cdot (-\sin(\ln(x + \sqrt{x}))) \cdot (\ln(x + \sqrt{x}))'}{2\sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))}} \stackrel{(5)}{=} \\ &= \frac{3\cos^2(\ln(x + \sqrt{x})) \cdot \sin(\ln(x + \sqrt{x}))}{2\sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))} \cdot (x + \sqrt{x})} \cdot (x + \sqrt{x})' \stackrel{(6)}{=} \\ &= \frac{3\cos^2(\ln(x + \sqrt{x})) \cdot \sin(\ln(x + \sqrt{x}))}{2\sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))} \cdot (x + \sqrt{x})} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \end{aligned}$$

- (1) Берем производную от квадратного корня.
- (2) Берем производную от разности, используя правило  $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- (3) Производная тройки равна нулю. Во втором слагаемом берем производную от степени (куба).
- (4) Берем производную от косинуса.
- (5) Берем производную от логарифма.
- (6) И, наконец, берем производную от самого глубокого вложения  $(x + \sqrt{x})$ .

Вроде без ошибок.... Самостоятельно:

### Пример 29

Найти производную функции  $y = 5x^2 + x \operatorname{arctg}(\sqrt[3]{\sin e^{3x}})$

*Подсказка: в первую очередь используем свойство линейности*

Настало время перейти к чему-нибудь более компактному и симпатичному.

Не редка ситуация, когда в примере дано произведение не двух, а трёх функций. Как найти производную от произведения трёх множителей?

### Пример 30

Найти производную функции  $y = x^2 e^{3-2x} \log_2 x$

Сначала смотрим, а нельзя ли произведение трех функций превратить в произведение двух функций? Например, если бы у нас было произведение 2 многочленов, то тогда можно было бы раскрыть скобки. Но в рассматриваемом примере все функции разные: степень, экспонента и логарифм.

В таких случаях нужно **последовательно** применить правило дифференцирования произведения  $(uv)' = u'v + uv'$  **два раза**.

Фокус состоит в том, что за «у» мы обозначим произведение двух функций:  $u = x^2 e^{3-2x}$ , а за «вэ» – логарифм:  $v = \log_2 x$ . Почему так можно сделать? А разве  $(x^2 e^{3-2x}) \cdot \log_2 x$  – это не произведение двух множителей и правило не работает?! Ничего сложного нет:

$$y' = (x^2 e^{3-2x} \cdot \log_2 x)' = (x^2 e^{3-2x})' \cdot \log_2 x + x^2 e^{3-2x} \cdot (\log_2 x)'$$

Теперь осталось применить правило  $(uv)' = u'v + uv'$  к скобке  $(x^2 e^{3-2x})'$ :

$$= ((x^2)' e^{3-2x} + x^2 (e^{3-2x})') \cdot \log_2 x + x^2 e^{3-2x} \cdot \frac{1}{x \ln 2} = (2x e^{3-2x} - 2x^2 e^{3-2x}) \cdot \log_2 x + \frac{x e^{3-2x}}{\ln 2}$$

Ответ лучше оставить именно в таком виде – легче будет проверять.

Данный пример можно решить вторым способом:

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 \cdot e^{3-2x} \log_2 x)' = (x^2)' \cdot e^{3-2x} \log_2 x + x^2 \cdot (e^{3-2x} \log_2 x)' = \\ &= 2xe^{3-2x} \log_2 x + x^2 \cdot ((e^{3-2x})' \log_2 x + e^{3-2x} (\log_2 x)') = \\ &= 2xe^{3-2x} \log_2 x + x^2 \cdot \left( -2e^{3-2x} \log_2 x + \frac{e^{3-2x}}{x \ln 2} \right) \end{aligned}$$

Следует отметить, что этот путь совершенно равноценен в плане правильности решения, разница здесь может быть только в простоте, и, разумеется, во вкусе – кому как нравится, кому как удобнее.

### Пример 31

Найти производную функции  $y = (x+1) \cdot \sqrt{x^3+2} \cdot (2x^2-1)$

Это пример для самостоятельного решения, в образце он решен первым способом.

Рассмотрим аналогичные примеры с дробями.

### Пример 32

Найти производную функции  $y = \frac{x \cos x}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}$

Здесь можно пойти несколькими путями:

$$y' = \left( x \cdot \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} \right)' = (x)' \cdot \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} + x \cdot \left( \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} \right)'$$

или так:

$$y' = \left( \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} \cdot \cos x \right)' = \left( \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} \right)' \cdot \cos x + \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} \cdot (\cos x)'$$

Но решение запишется более компактно, если в первую очередь использовать правило дифференцирования частного  $\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ , приняв за  $u$  весь числитель:

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{x \cos x}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} \right)' = \frac{(x \cos x)' \cdot \sqrt[3]{x^3+3x+1} - x \cos x \cdot ((x^3+3x+1)^{\frac{1}{3}})'}{(\sqrt[3]{x^3+3x+1})^2} = \\ &= \frac{((x)' \cos x + x(\cos x)') \cdot \sqrt[3]{x^3+3x+1} - x \cos x \cdot \frac{1}{3} (x^3+3x+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^3+3x+1)'}{\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^2}} = \\ &= \frac{(\cos x - x \sin x) \cdot \sqrt[3]{x^3+3x+1} - \frac{x \cos x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^3+3x+1)^2}} \cdot (3x^2+3)}{\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^2}} \end{aligned}$$

В принципе, пример решён, и если ответ оставить в таком виде, то это не будет ошибкой. Но при наличии времени всегда желательно проверить на черновике, а нельзя ли его упростить?

$$\begin{aligned} & (\cos x - x \sin x) \cdot \sqrt[3]{x^3 + 3x + 1} - \frac{x(x^2 + 1) \cos x}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x + 1)^2}} \\ \dots = & \frac{(\cos x - x \sin x) \cdot \sqrt[3]{x^3 + 3x + 1} - \frac{x(x^2 + 1) \cos x}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x + 1)^2}}}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x + 1)^2}} = \\ = & \frac{(\cos x - x \sin x) \cdot (x^3 + 3x + 1) - x(x^2 + 1) \cos x}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x + 1)^4}} = \\ = & \frac{(\cos x - x \sin x) \cdot (x^3 + 3x + 1) - x(x^2 + 1) \cos x}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x + 1)^4}} \end{aligned}$$

Минус дополнительных упрощений состоит в том, что есть риск допустить ошибку уже не при нахождении производной, а при банальных «школьных» преобразованиях. В частности, следует очень внимательно (и аккуратно!) разбираться с трёхэтажной дробью (см. Приложение **Горячие школьные формулы**).

С другой стороны, преподаватели нередко бракуют задание и просят «довести до ума» производную. В результате, чего, кстати, может получиться и «конфетка».

Такая вот дилемма.

Более простой пример для самостоятельного решения:

### Пример 33

Найти производную функции  $y = \frac{x^2 \ln x}{x - 2}$

Продолжаем осваивать приёмы нахождения производной, и сейчас мы рассмотрим типовой случай, когда для дифференцирования предложен «страшный» логарифм:

### Пример 34

Найти производную функции  $y = \ln \sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}}$

Тут можно пойти длинным путём, используя правило дифференцирования сложной функции:

$$y' = \left( \ln \sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}} \right)' = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \left( \sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}} \right)'$$

Но первый же шаг сразу повергает в уныние – предстоит взять неприятную производную от дробной степени  $\frac{1}{5}$ , а потом ещё и от дроби  $\frac{1-x}{1+x}$ .

Поэтому перед тем как брать производную от «навороченного» логарифма, его предварительно упрощают, используя известные школьные свойства; ввиду важности и актуальности скопирую их из *Приложения Горячие школьные формулы*:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \quad \ln a^k = k \ln a \quad (k - \text{действительное число}).$$

И это почти магия:

$$\begin{aligned} y' &= \left( \ln \sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}} \right)' = \left( \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{5}} \right)' = \left( \frac{1}{5} \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right) \right)' = \frac{1}{5} ((\ln(1-x) - \ln(1+x)))' = \\ &= \frac{1}{5} ((\ln(1-x))' - (\ln(1+x))') = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{1-x} \cdot (1-x)' - \frac{1}{1+x} \cdot (1+x)' \right) = \frac{1}{5} \left( \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left( \frac{-1-x-1+x}{(1-x)(1+x)} \right) = \frac{1}{5} \left( \frac{-2}{1-x^2} \right) = \frac{2}{5(x^2-1)} \end{aligned}$$

Как видите, предварительное преобразование логарифма значительно упростило решение. Таким образом, если вам для дифференцирования предложена подобная конструкция, то её всегда целесообразно «развалить». И это уже даже не золотое, а дважды платиновое правило ⇒ Самостоятельно:

### Пример 35

Найти производные функций: а)  $y = \ln \sqrt{x^2 + 3x}$ , б)  $y = \ln \frac{x^2 + 4}{\sqrt[3]{x-1}}$

Если производная от логарифмов – это такая сладкая музыка, то возникает вопрос, а нельзя ли в некоторых случаях организовать логарифм искусственно?

Можно! И даже нужно:

## 4. Логарифмическое дифференцирование

### Пример 36

Найти производную функции  $y = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$

Похожие примеры мы недавно решали. Здесь можно последовательно применить правило дифференцирования частного, а потом правило дифференцирования произведения. Но не хочется. Так как получится огромная трёхэтажная дробь. Поэтому используем метод *логарифмического дифференцирования*.

Логарифмы организуем искусственно, «навесив» их на обе части:

$$\ln y = \ln \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}, \text{ при этом знаки модуля } \ln|y| = \ln|...| \text{ (не вдаваясь в}$$

объяснения) можно не ставить.



Теперь нужно максимально «развалить» логарифм правой части (формулы перед глазами?). Я распишу этот процесс очень подробно:

$$\ln y = \ln \sqrt[5]{(x+4)^3} - \ln((x-1)^2(x+3)^5)$$

$$\ln y = \ln(x+4)^{\frac{3}{5}} - (\ln(x-1)^2 + \ln(x+3)^5)$$

$$\ln y = \frac{3}{5} \ln(x+4) - (2\ln(x-1) + 5\ln(x+3))$$

$$\ln y = \frac{3}{5} \ln(x+4) - 2\ln(x-1) - 5\ln(x+3)$$

Строго говоря, проведённые выше преобразования *неравносильны* (справедливы не для всех «икс» и «игрек»), но при нахождении производных это не играет роли. Ставим штрихи:

$$(\ln y)' = \left( \ln \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5} \right)' \text{ и преобразуем логарифм справа, в простых случаях это}$$

можно выполнять устно:

$$(\ln y)' = \left( \frac{3}{5} \ln(x+4) - 2\ln(x-1) - 5\ln(x+3) \right)'$$

Производную правой части я комментировать не буду, поскольку если вы читаете этот текст, то должны уверенно с ней справиться.

Как быть с левой частью? В левой части у нас **сложная функция**. ...Предвижу вопрос: «Почему? – там же одна буковка «игрек» под логарифмом». Дело в том, что эта «одна буковка игрек» – **САМА ПО СЕБЕ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ**. Поэтому логарифм – это внешняя функция, а «игрек» – внутренняя функция. И здесь мы используем то же самое правило дифференцирования сложной функции  $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ :

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{3}{5} (\ln(x+4))' - 2(\ln(x-1))' - 5(\ln(x+3))'$$

В левой части как по мановению волшебной палочки у нас «нарисовалась» производная  $y'$ . Далее по правилу пропорции перекидываем «игрек» из знаменателя левой части наверх правой части:

$$y' = \left( \frac{3}{5(x+4)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{(x+3)} \right) \cdot y$$

А теперь вспоминаем, о каком таком «игреке»-функции мы рассуждали при дифференцировании? Смотрим на условие:  $y = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$  и записываем

$$\text{окончательный ответ: } y' = \left( \frac{3}{5(x+4)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{(x+3)} \right) \cdot \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$$

### Пример 37

Найти производную функции  $y = x \cdot \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$

Это пример для самостоятельного решения. Примерный образец чистового оформления задания в конце методички.

Методом логарифмического дифференцирования можно решить и любой из примеров № 30-33, другое дело, что там функции проще, и, скорее всего, это будет не слишком-то оправдано.

### **Производная степенно-показательной функции**

Данную функцию мы еще не рассматривали. Степенно-показательная функция – это функция, у которой **и степень и основание зависят от «икс»**. Классический пример, который вам приведут в любом учебнике и на любой лекции:

$$y = x^x$$

Как найти производную степенно-показательной функции?

Нужно использовать только что рассмотренный приём – логарифмическое дифференцирование. Навешиваем логарифмы на обе части:

$$\ln y = \ln x^x$$

после чего в правой части сносим степень:

$$\ln y = x \ln x$$

В результате справа у нас получилось произведение двух функций, которое будет дифференцироваться по стандартной формуле  $(uv)' = u'v + uv'$ .

Находим производную, для этого заключаем обе части под штрихи:

$$(\ln y)' = (x \ln x)'$$

Дальнейшие действия прозрачны:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (x)' \ln x + x(\ln x)' \text{ и окончательно:}$$

$$y' = \left( \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot y = (\ln x + 1) \cdot x^x$$

Если какое-то преобразование не совсем понятно, внимательно перечитайте объяснения Примера 36.

В практических заданиях степенно-показательная функция само собой будет сложнее, чем рассмотренный лекционный пример:

### Пример 38

Найти производную функции  $y = (\ln x)^{3x}$

Выполняем стандартное действие:

$$\ln y = \ln(\ln x)^{3x}$$

$$\ln y = 3x \ln \ln x$$

В правой части у нас константа и произведение двух множителей – «икса» и «логарифма логарифма икса» (под логарифм вложен логарифм). Выносим константу за знак производной, после чего применяем знакомое правило  $(uv)' = u'v + uv'$ :

$$(\ln y)' = (3x \ln \ln x)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 3((x)' \ln \ln x + x(\ln \ln x)') \text{ и, как обычно, отправляем «игрек» наверх:}$$

$$y' = 3 \left( \ln \ln x + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' \right) \cdot y = 3 \left( \ln \ln x + \frac{1}{\ln x} \right) \cdot (\ln x)^{3x}$$

Как видите, алгоритм решения не содержит каких-то особых хитростей, и тут обычно не возникает проблем. Парочка производных для самостоятельного решения.

### Пример 39

Найти производную функций: а)  $y = x^{2x^2}$ , б)  $y = (x^2 + 1)^{\cos \frac{x}{2}}$

...Ну что же, после таких героических усилий пришло время сбавить обороты:

## **5. Производные второго и более высоких порядков**

Нет, на самом деле здесь тоже есть трудные примеры, но я ограничусь достаточно простыми заданиями – чтобы у вас было **само понимание**, как находить вторую, третью, четвертую, ... и более звёздные производные.

Начнём с производной второго порядка. Всё очень просто. Вторая производная – это **производная от первой производной**:  $(y')'$

**Распространённые обозначения второй производной:**

$$y'', f''(x) \text{ или } \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ (дробь читается так: «дэ два игрек по дэ икс квадрат»)}.$$

Чаще всего вторую производную обозначают первыми двумя вариантами. Но третий вариант тоже встречается, причем, его очень любят включать в условия контрольных заданий, например: «Найдите  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  функции...». А студент сидит и битый час чешет репу, что это вообще такое.

Рассмотрим простенький пример:  $y = 2x - 1$ .

Для того чтобы найти вторую производную, как многие догадались, нужно сначала найти первую производную:

$$y' = (2x - 1)' = 2$$

Теперь находим вторую производную:

$$y'' = (y')' = (2)' = 0$$

Рассмотрим более содержательные примеры.

#### Пример 40

Найти вторую производную функции  $y = \sin^2 \frac{x}{3}$

Найдём первую производную:

$$y' = \left( \sin^2 \frac{x}{3} \right)' = 2 \sin \frac{x}{3} \left( \sin \frac{x}{3} \right)' = 2 \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} \cdot \left( \frac{x}{3} \right)' = \frac{2}{3} \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}$$

Теперь нам предстоит дифференцировать произведение двух функций, но мы избежим от этой неприятности (*золотое правило!*), применив известную тригонометрическую формулу  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ . Точнее говоря, использовать формулу будем в обратном направлении:  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ , в данном случае  $\alpha = \frac{x}{3}$ :

$$y' = \frac{2}{3} \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{2x}{3} = \frac{1}{3} \sin \frac{2x}{3}$$

Находим вторую производную:

$$y'' = (y')' = \left( \frac{1}{3} \sin \frac{2x}{3} \right)' = \frac{1}{3} \left( \sin \frac{2x}{3} \right)' = \frac{1}{3} \cos \frac{2x}{3} \cdot \left( \frac{2x}{3} \right)' = \frac{2}{9} \cos \frac{2x}{3}$$

Можно было пойти другим путём – понизить степень функции ещё перед дифференцированием, используя формулу  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ :

$$y = \sin^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2x}{3} \right)$$

Для интереса возьмите первую и вторую производные снова. Результаты, естественно, должны совпасть.

**Формулы**  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$  **запишите, зазубрите, запомните!**

Для самостоятельного решения:

### Пример 41

Найти вторую производную функции  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .

На каждом шаге смотрим, нельзя ли что-нибудь упростить!

Наверное, многим уже понятно, что такое третья, четвёртая, пятая и т. д. производная.

Найдём третью производную, например, в Примере 40. Для этого нужно взять производную от второй производной:

$$\begin{aligned} y''' = (y'')' &= \frac{2}{9} \left( \cos \frac{2x}{3} \right)' = \frac{2}{9} \cdot \left( -\sin \frac{2x}{3} \right) \cdot \left( \frac{2x}{3} \right)' = \\ &= -\frac{2}{9} \sin \frac{2x}{3} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{4}{27} \sin \frac{2x}{3} \end{aligned}$$

Вот и всё! ...Всё только начинается =):

Распишем каноничный пример с многочленом:

$$y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

Найдём первую производную этой функции:

$$y' = (x^3 + 2x^2 + 3x + 4)' = 3x^2 + 4x + 3$$

И вторую:

$$y'' = (y')' = (3x^2 + 4x + 3)' = 6x + 4$$

Третья производная – это производная от 2-й производной:

$$y''' = (y'')' = (6x + 4)' = 6$$

Четвёртая производная – это производная от 3-й производной:

$$y^{IV} = (y''')' = (6)' = 0$$

Пятая производная:  $y^V = (y^{IV})' = (0)' = 0$ , и очевидно, что все производные более высоких порядков тоже будут равны нулю:

$$y^V = y^{VI} = y^{VII} = y^{IX} = y^X = \dots = 0$$

Помимо римской нумерации на практике часто используют следующие **обозначения**:

$y^{(4)}, y^{(5)}, y^{(6)}, y^{(7)}, y^{(8)}, y^{(9)}, y^{(10)}, \dots$ , производную же  $n$ -ного порядка обозначают через  $y^{(n)}$ . При этом **надстрочный индекс нужно обязательно заключать в скобки** – чтобы отличать производную от «игрека» в степени.

Иногда встречается такая запись:  $\frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^4 y}{dx^4}, \frac{d^5 y}{dx^5}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}, \dots$  – третья, четвёртая, пятая, ...,  $n$ -ная производные соответственно.

Вперёд без страха и сомнений:

### **Пример 42**

Дана функция  $y = e^{3x}$ . Найти  $y^{(4)}$ .

**Решение:** что тут попишешь... – вперёд за четвёртой производной:)

$$y' = (e^{3x})' = e^{3x} \cdot (3x)' = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$$

$$y'' = (y')' = (3e^{3x})' = 3(e^{3x})' = 3e^{3x} \cdot 3 = 3^2 e^{3x}$$

$$y''' = (y'')' = (3^2 e^{3x})' = 3^2 e^{3x} \cdot 3 = 3^3 e^{3x}$$

Четыре штриха ставить уже не принято, поэтому переходим на числовые индексы:

$$y^{(4)} = (y''')' = (3^3 e^{3x})' = 3^3 e^{3x} \cdot 3 = 3^4 e^{3x}$$

**Ответ:**  $y^{(4)} = 3^4 e^{3x}$

Хорошо, а теперь задумаемся над таким вопросом: что делать, если по условию требуется найти не 4-ю, а например, 20-ю производную? Если для 3-4-5-й производной решение оформляется достаточно быстро, то до производных более высоких порядков мы «доберёмся» ой как не скоро. Не записывать же, в самом деле, 20 строк!

В подобной ситуации нужно **проанализировать несколько найденных производных, увидеть закономерность и составить формулу  $n$ -ной производной**.

Так, в рассмотренном примере легко увидеть, что при каждом следующем дифференцировании перед экспонентой будет «выскакивать» дополнительная «тройка», причём на любом шаге степень «тройки» равна номеру производной, следовательно:

$$y^{(n)} = 3^n e^{3x}, \text{ где } n - \text{произвольное натуральное число.}$$

И действительно, если  $n = 1$ , то получается в точности 1-я производная:  $y' = 3^1 e^{3x} = 3e^{3x}$ , если  $n = 2$  – то вторая:  $y'' = 3^2 e^{3x}$  и т. д. Таким образом, двадцатая производная определяется мгновенно:  $y^{(20)} = 3^{20} e^{3x}$  – и никаких «километровых простыней»!

Решаем самостоятельно:

### Пример 43

Найти  $y^{(5)}$  функции  $y = 5^x$ . Записать производную  $n$ -го порядка

И после бодрящей разминки рассмотрим более сложные примеры, в которых отработаем вышеприведённый алгоритм решения:

### Пример 44

Найти  $y^{(10)}$  для функции  $y = \ln(2x - 1)$ .

**Решение:** чтобы прояснить ситуацию найдём несколько производных:

$y' = (\ln(2x - 1))' = \frac{1}{2x - 1} \cdot (2x - 1)' = \frac{1 \cdot 2}{2x - 1}$  – полученные наверху числа перемножать не спешим! ;-)

$$y'' = \left( \frac{1 \cdot 2}{2x - 1} \right)' = 1 \cdot 2 \cdot ((2x - 1)^{-1})' = -1 \cdot 2 \cdot (2x - 1)^{-2} \cdot (2x - 1)' = -\frac{1 \cdot 2}{(2x - 1)^2} \cdot 2 = -\frac{1 \cdot 2^2}{(2x - 1)^2}$$

$$y''' = \left( -\frac{1 \cdot 2^2}{(2x - 1)^2} \right)' = -1 \cdot 2^2 \cdot ((2x - 1)^{-2})' = -1 \cdot 2^2 \cdot (-2) \cdot (2x - 1)^{-3} \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 2^3}{(2x - 1)^3}$$

$$y^{(4)} = \left( \frac{1 \cdot 2 \cdot 2^3}{(2x - 1)^3} \right)' = 1 \cdot 2 \cdot 2^3 \cdot ((2x - 1)^{-3})' = 1 \cdot 2 \cdot 2^3 \cdot (-3) \cdot (2x - 1)^{-4} \cdot 2 = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^4}{(2x - 1)^4}$$

Пожалуй, хватит....

На следующем шаге лучше всего составить формулу «энной» производной (*коль скоро, условие этого не требует, то можно обойтись черновиком*). Для этого **смотрим на полученные результаты и выявляем закономерность**, по которой получается каждая следующая производная.

Во-первых, они знакопереваются. Поскольку 1-я производная положительна, то в общую формулу войдёт «мигалка»:  $y^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot \dots$ . Подойдёт и эквивалентный вариант  $(-1)^{n-1}$ , но лично я, как оптимист, люблю знак «плюс» =)

Во-вторых, в числителе «накручивается» **факториал**, причём он «отстаёт» от номера производной на одну единицу:  $y^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot (n - 1)! \cdot \dots$

И, в-третьих, в числителе растёт степень «двойки», которая равна номеру производной. То же самое можно сказать о степени знаменателя. Окончательно:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n - 1)! \cdot 2^n}{(2x - 1)^n}$$

В целях проверки подставим 2-3 значения «эн», при этом лучше начать с самых младших производных, поскольку именно в них чаще всего обнаруживаются огрехи:

$$n = 1 \Rightarrow y' = \frac{(-1)^{1+1} \cdot 0! \cdot 2^1}{(2x-1)^1} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2}{(2x-1)} = \frac{2}{2x-1};$$

$$n = 2 \Rightarrow y'' = \frac{(-1)^{2+1} \cdot 1! \cdot 2^2}{(2x-1)^2} = -\frac{2^2}{(2x-1)^2}.$$

Значения  $n = 3$ ,  $n = 4$  подставляем устно (не ленимся!). ...Замечательно, теперь допустить ошибку – просто грех.

$$\text{Коль скоро } y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot 2^n}{(2x-1)^n}, \text{ то}$$

$$\text{при } n = 10 \Rightarrow y^{(10)} = \frac{(-1)^{11} \cdot 9! \cdot 2^{10}}{(2x-1)^{10}} = -\frac{9! \cdot 2^{10}}{(2x-1)^{10}}$$

$$\text{Ответ: } y^{(10)} = -\frac{9! \cdot 2^{10}}{(2x-1)^{10}}$$

Повторюсь, что составлять энную производную здесь вовсе не обязательно, но она практически 100%-но убережёт от ошибки! Поэтому настоятельно рекомендую.

Более простая функция для самостоятельного решения:

#### Пример 45

$$\text{Найти } y^{(20)} \text{ функции } y = \frac{1}{x-2}.$$

Сверяемся с ответом в конце методички и переходим к **важнейшему** параграфу:

## **6. Производная функции, заданной неявно**

Или короче – производная неявной функции. Встречается часто и повсеместно. Начнём с традиционного вопроса: что это такое? И что такое вообще функция? Таки обратимся к теории:

**Функция одной переменной**  $y = f(x)$  – это правило, по которому каждому значению независимой переменной  $x$  соответствует одно и только одно значение функции  $y$ .

Переменная  $x$  называется **независимой переменной** или **аргументом**.

Переменная  $y$  называется **зависимой переменной** или **функцией**.

Грубо говоря, буковка «игрек» – и есть функция.



До сих пор мы рассматривали функции, заданные в *явном* виде. Что это значит? Устроим разбор полётов на конкретных примерах.

Рассмотрим функцию  $y = 3x^4 + x^2 - 1$ .

Мы видим, что слева у нас одинокий «игрек» (функция), а справа – **только «иксы»**. В таких случаях говорят, что функция  $y$  **в явном виде** выражена через независимую переменную  $x$ .

Рассмотрим другую функцию:  $3x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$

Здесь переменные  $x$  и  $y$  расположены «вперемешку». Причём **никакими способами невозможно** выразить «игрек» в виде  $y = f(x)$ . Что это за способы? Перенос слагаемых из части в часть со сменой знака, вынесение за скобки, перекидывание множителей по правилу пропорции и другие «школьные» методы. Перепишите равенство  $3x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$  на бумагу и попробуйте выразить «игрек» в явном виде:  $y = \text{всё зависит от } x$ . Можно крутить-вертеть уравнение часами, но у вас этого не получится.

Разрешите познакомиться:  $3x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$  – пример  **неявной функции**.

В курсе математического анализа доказано, что неявная функция **существует** (однако не всегда), у неё есть график (точно так же, как и у «нормальной» функции). У неявной функции точно так же **существуют** (при определённых условиях) первая производная, вторая производная и т. д. Как говорится, все права секс-меньшинств соблюдены. ...Хотя, если задуматься, то это большинство =)

И в этом параграфе мы научимся находить производную от функции, которая задана неявно. Это не так сложно! Тем более что **все правила дифференцирования и таблица производных остаются в силе!** Разница будет в одном своеобразном моменте, который мы рассмотрим прямо сейчас.

Да, и сообщу хорошую новость – рассмотренные ниже задания выполняются по довольно жесткому и чёткому алгоритму:

#### Пример 46

Найти производную от функции, заданной неявно  $3x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$

Поехали:

1) На первом этапе навешиваем штрихи на обе части:

$$(3x^2y^2 - 5x + \sin y)' = (3y - 1)'$$

2) Используем свойство линейности производной (помним такое?):

$$3(x^2y^2)' - 5(x)' + (\sin y)' = 3(y)' - (1)'$$

### 3) Непосредственное дифференцирование.

Как дифференцировать  $(x)'$  и  $(1)'$  совершенно понятно. Что делать там, где под штрихами есть «игреки»?

$(y)'$  – просто до безобразия, *производная от функции равна её производной*:  
 $(y)' = y'$ .

Как дифференцировать  $(\sin y)' = ?$  ...Есть идеи? ;)

Здесь у нас **сложная функция**. Почему? Потому что буква «игрек» **САМА ПО СЕБЕ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ** (см. определение в начале параграфа). Таким образом, синус – внешняя функция,  $y$  – внутренняя функция. Используем правило дифференцирования сложной функции  $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ :

$$(\sin y)' = \cos y \cdot y' = y' \cos y$$

Произведение  $x^2 y^2$  дифференцируем по обычному правилу  $(uv)' = u'v + uv'$ :

$$(x^2 y^2)' = (x^2)' y^2 + x^2 (y^2)'$$

Обратите внимание, что  $(y^2)'$  – тоже сложная функция, и вообще – **любой «игрек с наворотами» – это сложная функция**:

$$(x^2 y^2)' = (x^2)' y^2 + x^2 (y^2)' = 2xy^2 + x^2 \cdot 2yy' = 2xy^2 + 2x^2 yy'$$

Само оформление решения должно выглядеть примерно так:

$$3((x^2)' y^2 + x^2 (y^2)') - 5 + \cos y \cdot y' = 3y' - 0$$

$$3(2xy^2 + x^2 \cdot 2yy') - 5 + y' \cos y = 3y', \text{ и если есть скобки, то раскрываем их:}$$

$$6xy^2 + 6x^2 yy' - 5 + y' \cos y = 3y'$$

**4)** В левой части собираем слагаемые, в которых есть «игрек» со штрихом. В правую часть переносим всё остальное:

$$6x^2 yy' + y' \cos y - 3y' = 5 - 6xy^2$$

**5)** В левой части выносим производную  $y'$  за скобки:

$$(6x^2 y + \cos y - 3)y' = 5 - 6xy^2$$

**6)** И по правилу пропорции сбрасываем эти скобки в знаменатель правой части:

$$y' = \frac{5 - 6xy^2}{6x^2 y + \cos y - 3}$$

Производная найдена. Готово.

Интересно отметить, что в неявном виде можно переписать и «обычную» функцию. Например, функцию  $y = 3x^4 + x^2 - 1$  можно переписать так:  $1 - x^2 = 3x^4 - y$ , и более того, продифференцировать её по только что рассмотренному алгоритму.

Вообще, фразы «функция, заданная в неявном виде» и «неявная функция» отличаются одним смысловым нюансом. Фраза «функция, заданная в неявном виде» более общая и корректная:  $1 - x^2 = 3x^4 - y$  — эта функция задана в неявном виде, но здесь можно выразить «игрек» и представить функцию в явном виде. Под фразой «неявная функция» чаще понимают «классическую» неявную функцию, когда «игрек» выразить нельзя.

Рассмотрим ещё несколько примеров.

#### Пример 47

Найти производную от функции, заданной неявно  $3x^4y^5 + e^{7x-4y} = 4x^5 + 2y^4$

Навешиваем штрихи на обе части:

$$(3x^4y^5 + e^{7x-4y})' = (4x^5 + 2y^4)'$$

Используем свойство линейности:

$$3(x^4y^5)' + (e^{7x-4y})' = 4(x^5)' + 2(y^4)'$$

Находим производные:

$$\begin{aligned} 3((x^4)'y^5 + x^4(y^5)') + e^{7x-4y} \cdot (7x - 4y)' &= 4 \cdot 5x^4 + 2 \cdot 4y^3y' \\ 3(4x^3y^5 + x^4 \cdot 5y^4y') + e^{7x-4y} \cdot (7 - 4y') &= 20x^4 + 8y^3y' \end{aligned}$$

Раскрываем все скобки:

$$12x^3y^5 + 15x^4y^4y' + 7e^{7x-4y} - 4y'e^{7x-4y} = 20x^4 + 8y^3y'$$

Переносим все слагаемые с  $y'$  в левую часть, остальное собираем в правой части:

$$15x^4y^4y' - 8y^3y' - 4y'e^{7x-4y} = 20x^4 - 7e^{7x-4y} - 12x^3y^5$$

В левой части выносим  $y'$  за скобку:

$$(15x^4y^4 - 8y^3 - 4e^{7x-4y})y' = 20x^4 - 7e^{7x-4y} - 12x^3y^5$$

Окончательный ответ:

$$y' = \frac{20x^4 - 7e^{7x-4y} - 12x^3y^5}{15x^4y^4 - 8y^3 - 4e^{7x-4y}}$$

Страшноватым он получился, но правильным ☺..., надеюсь ;)

### Пример 48

Найти производную от функции, заданной неявно  $y \sin x = \cos(x - y)$

Это пример для самостоятельного решения.

Не редкость, когда после дифференцирования возникают дроби. В таких случаях от дробей нужно избавляться:

### Пример 49

Найти производную от неявной функции  $e^{xy} + \frac{y}{x} = \cos 3x$

Закключаем обе части под штрихи и используем свойство линейности:

$$\left( e^{xy} + \frac{y}{x} \right)' = (\cos 3x)'$$
$$(e^{xy})' + \left( \frac{y}{x} \right)' = (\cos 3x)'$$

Дифференцируем, используя правило дифференцирования сложной функции

$$(u(v))' = u'(v) \cdot v' \text{ и правило дифференцирования частного } \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} :$$

$$e^{xy} \cdot (xy)' + \frac{y'x - y(x)'}{x^2} = -\sin 3x \cdot (3x)'$$

$$e^{xy} \cdot ((x)'y + xy') + \frac{y'x - y}{x^2} = -3\sin 3x$$

$$e^{xy} \cdot (y + xy') + \frac{y'x - y}{x^2} = -3\sin 3x$$

Раскрываем скобки:

$$ye^{xy} + xy'e^{xy} + \frac{y'x - y}{x^2} = -3\sin 3x$$

Теперь нам нужно избавиться от дроби. Это можно сделать и позже, но рациональнее сделать сразу же. В знаменателе дроби находится  $x^2$ . Умножаем обе части на  $x^2$ . Если подробно, то выглядеть это будет так:

$$x^2 \cdot \left( ye^{xy} + xy'e^{xy} + \frac{y'x - y}{x^2} \right) = x^2 \cdot (-3\sin 3x)$$

$$x^2 \cdot ye^{xy} + x^2 \cdot xy'e^{xy} + x^2 \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = -3x^2 \sin 3x$$

$$x^2 ye^{xy} + x^3 y'e^{xy} + y'x - y = -3x^2 \sin 3x$$

иногда, к слову, дробей несколько, и в этих случаях процедуру нужно повторить.

Далее алгоритм работает стандартно, после того, как все скобки раскрыты, все дроби устранены, слагаемые, где есть «игрек штрих», собираем в левой части, а в правую часть переносим всё остальное:

$$x^3 y' e^{xy} + y' x = y - 3x^2 \sin 3x - x^2 y e^{xy}$$

В левой части выносим  $y'$  за скобки:

$$(x^3 e^{xy} + x)y' = y - 3x^2 \sin 3x - x^2 y e^{xy} \text{ и сбрасываем эти скобки в правую часть:}$$

$$y' = \frac{y - 3x^2 \sin 3x - x^2 y e^{xy}}{x^3 e^{xy} + x}$$

### Пример 50

Найти производную от неявной функции  $\ln y = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$

Это пример для самостоятельного решения. Единственное, в нём, перед тем как избавиться от дроби, предварительно нужно будет избавиться от трехэтажности самой дроби (см. Приложение *Горячие школьные формулы*).

## 7. Производная параметрически заданной функции

Не напрягаемся, в заключительном параграфе тоже всё просто. Можно записать общую формулу параметрически заданной функции, но для того, чтобы было понятно, я сразу запишу конкретный пример. В параметрическом виде функция задается двумя уравнениями:  $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = t^3 \end{cases}$ . Частенько уравнения записывают не под фигурными скобками, а последовательно:  $x = 3t + 1, y = t^3$ .

**Переменная  $t$  называется параметром** и может принимать значения от «минус бесконечности» до «плюс бесконечности». Рассмотрим, например, значение  $t = 1$  и подставим его в оба уравнения:  $\begin{cases} x = 3 \cdot 1 + 1 \\ y = 1^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ . Или по человечески: «если  $x$  равен четырем, то  $y$  равно единице». На координатной плоскости можно отметить точку  $(4; 1)$ , и эта точка будет соответствовать значению параметра  $t = 1$ . Аналогично можно найти точку для любого значения параметра « $t$ э». Как и для «обычной» функции, для параметрически заданной функции все права обычно тоже соблюдены: можно построить график, найти производные и т. д.

В простейших случаях есть возможность представить функцию в явном виде. Выразим из первого уравнения параметр:  $x = 3t + 1 \Rightarrow 3t = x - 1 \Rightarrow t = \frac{x-1}{3}$  – и

подставим его во второе уравнение:  $y = t^3 = \left(\frac{x-1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}(x-1)^3$  – в результате получена обыкновенная кубическая функция.

В более «тяжелых» случаях такой фокус не прокатывает. Но это не беда, потому что для нахождения производной параметрической функции существует **формула**:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Находим производную от «игрека по переменной тэ»:

$$y'_t = (t^3)'_t = 3t^2$$

Все правила дифференцирования и таблица производных справедливы, естественно, и для буквы  $t$ , таким образом, **какой-то новизны в самом процессе нахождения производных нет**. Просто мысленно замените в таблице все «иксы» на букву «тэ».

Находим производную от «икса по переменной тэ»:

$$x'_t = (3t + 1)'_t = 3$$

Теперь только осталось подставить найденные производные в нашу формулу:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2}{3} = t^2$$

Готово. Производная, как и сама функция, тоже зависит от параметра  $t$ .

Что касается обозначений, то в формуле вместо записи  $y'_x$  можно было просто записать  $y'$  без подстрочного индекса, поскольку это «обычная» производная по «икс». Но в литературе чаще встречается вариант  $y'_x$ , поэтому я не буду отклоняться от стандарта.

### Пример 51

Найти производную параметрически заданной функции  $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2} \\ y = \arcsin(t - 1) \end{cases}$

Используем формулу  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ . В данном случае:

$$y'_t = (\arcsin(t - 1))'_t = \frac{1}{\sqrt{1 - (t - 1)^2}} \cdot (t - 1)'_t = \frac{1}{\sqrt{1 - (t^2 - 2t + 1)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2 + 2t - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2t - t^2}}$$

$$x'_t = (\sqrt{2t - t^2})'_t = \frac{1}{2\sqrt{2t - t^2}} \cdot (2t - t^2)'_t = \frac{(2 - 2t)}{2\sqrt{2t - t^2}} = \frac{1 - t}{\sqrt{2t - t^2}}$$

$$\text{Таким образом: } y'_x = \frac{\frac{1}{\sqrt{2t - t^2}}}{\frac{1 - t}{\sqrt{2t - t^2}}} = \frac{\sqrt{2t - t^2}}{\sqrt{2t - t^2} \cdot (1 - t)} = \frac{1}{1 - t}$$

И здесь у нас снова актуален «золотой» мотив: **на каждом шаге результат выгодно максимально упрощать**. Так, в рассмотренном выше примере при нахождении  $y'_t$  я раскрыл скобки под корнем (хотя мог этого и не делать). Велик шанс, что при подстановке  $x'_t$  и  $y'_t$  в формулу многие вещи хорошо сократятся. Хотя встречаются, конечно, примеры и с корявыми ответами.

Самостоятельно:

### Пример 52

Найти производную функции  $\begin{cases} x = \frac{\sin t}{1 + \sin t} \\ y = \cos t + t \sin t \end{cases}$

Для параметрически заданной функции довольно часто предлагают найти и вторую производную. Без проблем – вот готовая **формула**:  $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$ .

### Пример 53

Найти первую и вторую производные от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = tg^2 t \end{cases}$$

Сначала найдем первую производную. Используем формулу  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

В данном случае:

$$y'_t = (tg^2 t)'_t = 2tg t \cdot (tg t)'_t = \frac{2tg t}{\cos^2 t}$$

$$x'_t = (\cos^2 t)'_t = 2\cos t \cdot (\cos t)'_t = -2\cos t \sin t$$

Подставляем найденные производные в формулу. В целях упрощений используем тригонометрическую формулу  $tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ :

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{\frac{2tg t}{\cos^2 t}}{-2\cos t \sin t} = -\frac{2tg t}{2\cos^2 t \cos t \sin t} = -\frac{tg t}{\cos^3 t \sin t} = \\ &= -\frac{\sin t}{\cos t \cos^3 t \sin t} = -\frac{1}{\cos^4 t} \end{aligned}$$

Вот так-то оно лучше, брать производную от  $-\frac{1}{\cos^4 t}$  гораздо проще, чем от  $-\frac{tg t}{\cos^3 t \sin t}$ . Распечатайте, кстати, **тригонометрические формулы**, если вы ещё не успели этого сделать – материал крайне полезный.

Вторую производную найдём по формуле  $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$ .

Знаменатель  $x'_t$  уже найден на предыдущем шаге. Осталось найти числитель – производную от первой производной по переменной «тэ»:

$$\begin{aligned}(y'_x)'_t &= \left( -\frac{1}{\cos^4 t} \right)'_t = -(\cos^{-4} t)'_t = -(-4)\cos^{-5} t \cdot (\cos t)'_t = \\ &= \frac{4}{\cos^5 t} \cdot (-\sin t) = -\frac{4\sin t}{\cos^5 t}\end{aligned}$$

Подставляем завоёванные трофеи в формулу и проводим финальное упрощение:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{4\sin t}{\cos^5 t}}{-2\cos t \sin t} = \frac{-4\sin t}{-2\cos t \sin t \cos^5 t} = \frac{2}{\cos^6 t}$$

Готово.

Для закрепления материала:

### **Пример 54**

Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  параметрически заданных функций

$$\text{а) } \begin{cases} x = \sin^4 3t \\ y = \frac{1}{2} \cos^4 3t \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = \arctg e^t \\ y = \ln(1 + e^{2t}) \end{cases}$$

Решения и ответы совсем близко.

**Поздравляю вас с прохождением курса,  
теперь вы сможете найти практически любую производную!**

И это не преувеличение – ведь я задал достаточно высокую планку. Более того, к курсу прилагается дополнительный **бонус-материал**, где рассмотрены не только ваши вопросы, но и достаточно тонкие вещи, оставшиеся за кадром.

Теоретическую информацию и дополнительные примеры по теме можно найти в **соответствующем разделе** портала [mathprofi.ru](http://mathprofi.ru) (*ссылка на аннотацию к разделу*).

Из учебной литературы рекомендую 1-й том К.А. Бохана (*попроще*), Г.М. Фихтенгольца (*посложнее*), Н.С. Пискунова (*для ВТУЗов*).

**Желаю успехов!**



## 8. Решения и ответы

**Пример 4. Решение:**

$$\begin{aligned} y' &= \left( 5 \ln x + \frac{2}{\sqrt[5]{x^7}} + \operatorname{arctg} x - \lg 20 \cdot 2^x + \operatorname{tg} 3 \right)' = \\ &= 5(\ln x)' + 2(x^{-\frac{7}{5}})' + (\operatorname{arctg} x)' - \lg 20 \cdot (2^x)' + (\operatorname{tg} 3)' = \\ &= 5 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \left( -\frac{7}{5} \right) \cdot x^{-\frac{12}{5}} + \frac{1}{1+x^2} - \lg 20 \cdot 2^x \ln 2 + 0 = \\ &= \frac{5}{x} - \frac{14}{5 \cdot \sqrt[5]{x^{12}}} + \frac{1}{1+x^2} - \lg 20 \cdot \ln 2 \cdot 2^x \end{aligned}$$

В ходе решения данного примера следует обратить внимание на тот факт, что  $\lg 20$  и  $\operatorname{tg} 3$  – постоянные величины, неважно чему они равны, важно, что это константы. Поэтому  $\lg 20$  выносится за знак производной, а  $(\operatorname{tg} 3)' = 0$ .

**Пример 7. Решение:**

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^2} \cos x \right)' = \frac{1}{2} (\sqrt[3]{x^2} \cos x)' = \\ &= \frac{1}{2} ((x^{\frac{2}{3}})' \cdot \cos x + \sqrt[3]{x^2} \cdot (\cos x)') = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \cdot \cos x + \sqrt[3]{x^2} \cdot (-\sin x) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2 \cos x}{3 \sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{x^2} \sin x \right) = \\ &= \frac{\cos x}{3 \sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^2} \sin x \end{aligned}$$

**Пример 9. Решение:**

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{3^x + 5}{\cos x} \right)' = \frac{(3^x + 5)' \cdot \cos x - (3^x + 5) \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{(3^x \ln 3 + 0) \cdot \cos x - (3^x + 5) \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{3^x \ln 3 \cdot \cos x + (3^x + 5) \sin x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

**Пример 12. Решение:**

$$\begin{aligned}y' &= \left( -\frac{\operatorname{arccctgx}}{\sqrt[3]{x}} \right)' = -(x^{-\frac{1}{3}} \operatorname{arccctgx})' = \\&= -((x^{-\frac{1}{3}})' \cdot \operatorname{arccctgx} + x^{-\frac{1}{3}} \cdot (\operatorname{arccctgx})') = \\&= -\left( -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} \cdot \operatorname{arccctgx} + x^{-\frac{1}{3}} \cdot \left( -\frac{1}{1+x^2} \right) \right) = \\&= \frac{\operatorname{arccctgx}}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}\end{aligned}$$

**Ответ на вопрос «на засынку»:** в начале решения минус вынесен по Правилу 1 (так как это множитель-константа  $-1$ ). Но этого можно было и не делать – тогда минус следует отнести к любому из множителей:  $(-x^{-\frac{1}{3}}) \cdot \operatorname{arccctgx}$  либо  $x^{-\frac{1}{3}} \cdot (-\operatorname{arccctgx})$ .

**Пример 14. Решение:**

$$a) \ y' = (\cos 2x)' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -\sin 2x \cdot 2 = -2\sin 2x$$

$$б) \ y' = (e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$$

(экспонента – внешняя функция и превратилась в саму себя)

**Пример 16. Решение:**

$$y' = \left( \frac{1}{(x^2-1)^7} \right)' = ((x^2-1)^{-7})' = -7(x^2-1)^{-8} \cdot (x^2-1)' = -\frac{7}{(x^2-1)^8} \cdot (2x-0) = -\frac{14x}{(x^2-1)^8}$$

**Пример 19. Решение:**

$$y' = \left( \frac{5}{\sqrt[5]{x+\ln x}} \right)' = 5 \cdot ((x+\ln x)^{-\frac{1}{5}})' = 5 \cdot \left( -\frac{1}{5} \right) \cdot (x+\ln x)^{-\frac{6}{5}} \cdot (x+\ln x)' = -\frac{1}{\sqrt[5]{(x+\ln x)^6}} \cdot \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$$

**Пример 21. Решение:**

$$y' = (\arccos^{-2} x)' = -2 \arccos^{-3} x \cdot (\arccos x)' = -\frac{2}{\arccos^3 x} \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arccos^3 x}$$

**Пример 23. Решение:**

$$\begin{aligned}y' &= (\sqrt{x^2+4} \cdot \ln(\sin x))' = \\&= (\sqrt{x^2+4})' \cdot \ln(\sin x) + \sqrt{x^2+4} \cdot (\ln(\sin x))' = \\&= \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot (x^2+4)' \cdot \ln(\sin x) + \sqrt{x^2+4} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \\&= \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot (2x+0) \cdot \ln(\sin x) + \sqrt{x^2+4} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \\&= \frac{x \ln(\sin x)}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{\sqrt{x^2+4} \cdot \cos x}{\sin x}\end{aligned}$$

**Ответы на Производный диктант:**

$$(\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$((2-x)^4)' = -4(2-x)^3$$

$$\left(\frac{1}{2x+1}\right)' = -\frac{2}{(2x+1)^2}$$

$$(e^{\frac{x}{5}})' = \frac{1}{5}e^{\frac{x}{5}}$$

$$\left(\left(\frac{x}{3}+4\right)^{10}\right)' = \frac{10}{3}\left(\frac{x}{3}+4\right)^9$$

$$\left(7^{\frac{1}{2}x^2}\right)' = x \ln 7 \cdot 7^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$(\ln(x-x^2))' = \frac{1-2x}{x-x^2}$$

$$(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$$

$$(\sin x^2)' = 2x \cos x^2$$

$$(\cos(2x^2-x+1))' = -(4x-1)\sin(2x^2-x+1)$$

$$(tg \sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}}$$

$$(ctg(3x+5))' = -\frac{3}{\sin^2(3x+5)}$$

$$(e^{\sin x})' = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

$$(\sqrt{\log_3 x})' = \frac{1}{2x \ln 3 \cdot \sqrt{\log_3 x}}$$

$$(\ln(\arctg x))' = \frac{1}{(1+x^2)\arctg x}$$

$$(\arctg(\ln x))' = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$$

$$(2^{x^3+x-4})' = \ln 2 \cdot (3x^2+1) \cdot 2^{x^3+x-4}$$

$$(\arctg 4x)' = \frac{4}{1+16x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg}^4 x)' = -\frac{4 \operatorname{arcctg}^3 x}{1+x^2}$$

$$(\arcsin(2x^3))' = \frac{6x^2}{\sqrt{1-4x^6}}$$

$$(\arccos(3-5x))' = \frac{5}{\sqrt{1-(3-5x)^2}}$$

**Пример 25. Решение:**

$$\begin{aligned} \text{а) } y' &= (\ln^2(2x-1))' = 2\ln(2x-1) \cdot (\ln(2x-1))' = \\ &= 2\ln(2x-1) \cdot \frac{1}{2x-1} \cdot (2x-1)' = \frac{2\ln(2x-1)}{2x-1} \cdot (2-0) = \frac{4\ln(2x-1)}{2x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } y' &= (\cos \sqrt{\arctg(x^3)})' = -\sin \sqrt{\arctg(x^3)} \cdot (\sqrt{\arctg(x^3)})' = \\ &= -\sin \sqrt{\arctg(x^3)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\arctg(x^3)}} \cdot (\arctg(x^3))' = \\ &= -\sin \sqrt{\arctg(x^3)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\arctg(x^3)}} \cdot \frac{1}{1+(x^3)^2} \cdot (x^3)' = \\ &= -\sin \sqrt{\arctg(x^3)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\arctg(x^3)}} \cdot \frac{1}{1+(x^3)^2} \cdot 3x^2 \end{aligned}$$

**Примечание:** ответ лучше оставить именно в таком виде – это значительно облегчает его проверку

**Пример 27. Решение:** преобразуем функцию:

$$y = \sqrt[5]{\frac{2}{\sqrt{x}+1}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{\sqrt{x}+1}} = \sqrt[5]{2} \cdot (\sqrt{x}+1)^{-\frac{1}{5}}$$

Найдем производную:

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt[5]{2} \cdot \left( (\sqrt{x}+1)^{-\frac{1}{5}} \right)' = -\frac{\sqrt[5]{2}}{5} \cdot ((\sqrt{x}+1))^{-\frac{6}{5}} \cdot (\sqrt{x}+1)' = \\ &= -\frac{\sqrt[5]{2}}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{(\sqrt{x}+1)^6}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt[5]{2}}{10\sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{(\sqrt{x}+1)^6}} \end{aligned}$$

**Пример 29. Решение:**

$$\begin{aligned} y' &= \left( 5x^2 + x \arctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}}) \right)' = 5(x^2)' + \left( x \arctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}}) \right)' = \\ &= 5 \cdot 2x + (x)' \cdot \arctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}}) + x \cdot \left( \arctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}}) \right)' = \\ &= 10x + \arctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}}) + \frac{x}{1+(\sqrt[3]{\sin e^{3x}})^2} \cdot \left( \sin^{\frac{1}{3}} e^{3x} \right)' = \\ &= 10x + \arctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}}) + \frac{x}{1+\sqrt[3]{\sin^2 e^{3x}}} \cdot \frac{1}{3} \sin^{-\frac{2}{3}} e^{3x} \cdot (\sin e^{3x})' = \\ &= 10x + \arctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}}) + \frac{x}{3(1+\sqrt[3]{\sin^2 e^{3x}}) \cdot \sqrt[3]{\sin^2 e^{3x}}} \cdot \cos e^{3x} \cdot (e^{3x})' = \\ &= 10x + \arctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}}) + \frac{x \cos e^{3x}}{3(1+\sqrt[3]{\sin^2 e^{3x}}) \cdot \sqrt[3]{\sin^2 e^{3x}}} \cdot 3e^{3x} = \\ &= 10x + \arctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}}) + \frac{x e^{3x} \cos e^{3x}}{(1+\sqrt[3]{\sin^2 e^{3x}}) \cdot \sqrt[3]{\sin^2 e^{3x}}} \cdot \end{aligned}$$

**Пример 31. Решение:**

$$\begin{aligned}y' &= ((x+1) \cdot \sqrt{x^3+2} \cdot (2x^2-1))' = ((x+1) \cdot \sqrt{x^3+2})' \cdot (2x^2-1) + (x+1) \cdot \sqrt{x^3+2} \cdot (2x^2-1)' = \\&= ((x+1)' \cdot \sqrt{x^3+2} + (x+1) \cdot (\sqrt{x^3+2})') \cdot (2x^2-1) + (x+1) \cdot \sqrt{x^3+2} \cdot 4x = \\&= \left( \sqrt{x^3+2} + \frac{3x^2(x+1)}{2\sqrt{x^3+2}} \right) \cdot (2x^2-1) + 4x(x+1) \cdot \sqrt{x^3+2}\end{aligned}$$

**Примечание:** перед дифференцированием можно было раскрыть скобки  $y = (x+1) \cdot \sqrt{x^3+2} \cdot (2x^2-1) = (2x^3+2x^2-x-1) \cdot \sqrt{x^3+2}$  и использовать правило  $(uv)' = u'v + uv'$  один раз.

**Пример 33. Решение:**

$$\begin{aligned}y' &= \left( \frac{x^2 \ln x}{x-2} \right)' = \frac{(x^2 \ln x)' \cdot (x-2) - x^2 \ln x \cdot (x-2)'}{(x-2)^2} = \\&= \frac{((x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)') \cdot (x-2) - x^2 \ln x \cdot (1-0)}{(x-2)^2} = \\&= \frac{\left( 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot (x-2) - x^2 \ln x}{(x-2)^2} = \frac{(2x \ln x + x)(x-2) - x^2 \ln x}{(x-2)^2}\end{aligned}$$

**Пример 35. Решение:** а) преобразуем логарифм и используем правило дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned}y' &= \left( \ln \sqrt{x^2+3x} \right)' = \left( \frac{1}{2} \ln(x^2+3x) \right)' = \frac{1}{2} \left( \ln(x^2+3x) \right)' = \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x^2+3x)} \cdot (x^2+3x)' = \frac{2x+3}{2(x^2+3x)}\end{aligned}$$

б) преобразуем логарифм и найдём производную:

$$\begin{aligned}y' &= \left( \ln \frac{x^2+4}{\sqrt[3]{x-1}} \right)' = \left( \ln(x^2+4) - \ln(x-1)^{\frac{1}{3}} \right)' = \left( \ln(x^2+4) - \frac{1}{3} \ln(x-1) \right)' = \\&= (\ln(x^2+4))' - \frac{1}{3} (\ln(x-1))' = \frac{2x}{x^2+4} - \frac{1}{3(x-1)}\end{aligned}$$

**Пример 37. Решение:** используем логарифмическое дифференцирование:

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \left[ x \cdot \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}} \right] \\ \ln y &= \ln x + \ln \left( \frac{1+x^2}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\ln y = \ln x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x^2}{1-x}$$

$$\ln y = \ln x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \ln(1-x)$$

Дифференцируем обе части:

$$(\ln y)' = \left( \ln x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \ln(1-x) \right)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\ln x)' + \frac{1}{2} (\ln(1+x^2))' - \frac{1}{2} (\ln(1-x))'$$

Таким образом:

$$y' = \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{2(1+x^2)} \cdot (0+2x) - \frac{1}{2(1-x)} \cdot (0-1) \right] \cdot y = \left[ \frac{1}{x} + \frac{x}{(1+x^2)} + \frac{1}{2(1-x)} \right] \cdot x \cdot \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$$

**Пример 39. Решение:**

а) используем логарифмическое дифференцирование:

$$\ln y = \ln x^{2x^2}$$

$$\ln y = 2x^2 \ln x$$

$$(\ln y)' = (2x^2 \ln x)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2((x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)')$$

$$y' = 2 \left( 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot y = 2(2x \ln x + x) \cdot y = 2x(2 \ln x + 1) \cdot x^{2x^2}$$

б) используем логарифмическое дифференцирование:

$$\ln y = \ln(x^2 + 1)^{\cos \frac{x}{2}}$$

$$\ln y = \cos \frac{x}{2} \cdot \ln(x^2 + 1)$$

Берём производные от обеих частей:

$$(\ln y)' = \left( \cos \frac{x}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) \right)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \left( \cos \frac{x}{2} \right)' \cdot \ln(x^2 + 1) + \cos \frac{x}{2} \cdot (\ln(x^2 + 1))'$$

и выражаем результат:

$$y' = \left( -\sin \frac{x}{2} \cdot \left( \frac{x}{2} \right)' \cdot \ln(x^2 + 1) + \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{(x^2 + 1)} \cdot (x^2 + 1)' \right) \cdot y =$$

$$= \left( -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{2x \cos \frac{x}{2}}{(x^2 + 1)} \right) \cdot (x^2 + 1)^{\cos \frac{x}{2}}$$

**Пример 41. Решение:** найдем первую производную:

$$y' = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)' = \frac{(x)' \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot (\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

Найдем вторую производную:

$$y'' = \left( \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \right)' = ((x^2+1)^{-\frac{3}{2}})' = -\frac{3}{2}(x^2+1)^{-\frac{5}{2}} \cdot (x^2+1)' =$$

$$= -\frac{3}{2\sqrt{(x^2+1)^5}} \cdot 2x = -\frac{3x}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$$

**Пример 43. Решение:** найдём пятую производную:

$$y' = (5^x)' = 5^x \cdot \ln 5$$

$$y'' = (y')' = (5^x \cdot \ln 5)' = \ln 5 \cdot (5^x)' = \ln 5 \cdot 5^x \cdot \ln 5 = 5^x \ln^2 5$$

$$y''' = (y'')' = (5^x \ln^2 5)' = \ln^2 5 \cdot (5^x)' = \ln^2 5 \cdot 5^x \cdot \ln 5 = 5^x \ln^3 5$$

$$y^{(4)} = (y''')' = (5^x \ln^3 5)' = 5^x \ln^4 5$$

$$y^{(5)} = (y^{(4)})' = (5^x \ln^4 5)' = 5^x \ln^5 5$$

Очевидно, что  $y^{(n)} = 5^x \ln^n 5$

**Ответ:**  $y^{(5)} = 5^x \ln^5 5$ ,  $y^{(n)} = 5^x \ln^n 5$

**Пример 45. Решение:** найдём несколько производных:

$$y' = ((x-2)^{-1})' = -(x-2)^{-2} = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

$$y'' = -((x-2)^{-2})' = -(-2) \cdot (x-2)^{-3} = \frac{1 \cdot 2}{(x-2)^3}$$

$$y''' = 1 \cdot 2 \cdot ((x-2)^{-3})' = 1 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot (x-2)^{-4} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(x-2)^4}$$

$$y^{(4)} = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ((x-2)^{-4})' = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot (x-2)^{-5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(x-2)^5}$$

Запишем «энную» производную:  $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-2)^{n+1}}$

Таким образом:  $y^{(20)} = \frac{(-1)^{20} \cdot 20!}{(x-2)^{21}} = \frac{20!}{(x-2)^{21}}$

**Ответ:**  $y^{(20)} = \frac{20!}{(x-2)^{21}}$

**Пример 48. Решение:**

$$\begin{aligned}(y \sin x)' &= (\cos(x - y))' \\ y' \sin x + y(\sin x)' &= -\sin(x - y) \cdot (x - y)' \\ y' \sin x + y \cos x &= -\sin(x - y) \cdot (1 - y') \\ y' \sin x + y \cos x &= -\sin(x - y) + y' \sin(x - y) \\ y' \sin x - y' \sin(x - y) &= -\sin(x - y) - y \cos x \\ (\sin x - \sin(x - y))y' &= -\sin(x - y) - y \cos x\end{aligned}$$

Таким образом:  $y' = \frac{-\sin(x - y) - y \cos x}{\sin x - \sin(x - y)}$  или красивее:  $y' = \frac{\sin(x - y) + y \cos x}{\sin(x - y) - \sin x}$

**Пример 50. Решение:**

$$\begin{aligned}(\ln y)' &= \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)' \\ \frac{1}{y} \cdot y' &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left( \frac{x}{y} \right)' \\ \frac{y'}{y} &= \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot \left( \frac{y - xy'}{y^2} \right) \\ \frac{y'}{y} &= \frac{y - xy'}{y^2 + x^2} \\ (y^2 + x^2)y' &= y^2 - xyy' \\ (y^2 + x^2)y' + xyy' &= y^2 \\ (y^2 + x^2 + xy)y' &= y^2 \\ y' &= \frac{y^2}{y^2 + x^2 + xy}\end{aligned}$$

**Пример 52. Решение:** используем формулу  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ . В данном случае:

$$\begin{aligned}y'_t &= (\cos t + t \sin t)'_t = (\cos t)'_t + (t \sin t)'_t = -\sin t + (t)'_t \sin t + t(\sin t)'_t = \\ &= -\sin t + \sin t + t \cos t = t \cos t \\ x'_t &= \left( \frac{\sin t}{1 + \sin t} \right)'_t = \frac{(\sin t)'_t(1 + \sin t) - \sin t(1 + \sin t)'_t}{(1 + \sin t)^2} = \\ &= \frac{\cos t(1 + \sin t) - \sin t \cos t}{(1 + \sin t)^2} = \frac{\cos t + \sin t \cos t - \sin t \cos t}{(1 + \sin t)^2} = \frac{\cos t}{(1 + \sin t)^2}\end{aligned}$$

Таким образом:

$$y'_x = \frac{t \cos t}{\frac{\cos t}{(1 + \sin t)^2}} = \frac{t \cos t(1 + \sin t)^2}{\cos t} = t(1 + \sin t)^2$$



**Пример 54. Решение:**

а) Найдём первую производную. Используем формулу:  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ .

В данном случае:

$$y'_t = \left( \frac{1}{2} \cos^4 3t \right)'_t = \frac{1}{2} \cdot 4 \cos^3 3t \cdot (\cos 3t)'_t = 2 \cos^3 3t \cdot (-3 \sin 3t) = -6 \cos^3 3t \sin 3t$$

$$x'_t = (\sin^4 3t)'_t = 4 \sin^3 3t \cdot (\sin 3t)'_t = 4 \sin^3 3t \cdot 3 \cos 3t = 12 \sin^3 3t \cos 3t$$

$$y'_x = \frac{-6 \cos^3 3t \sin 3t}{12 \sin^3 3t \cos 3t} = -\frac{\cos^2 3t}{2 \sin^2 3t} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 3t$$

Вторую производную найдём по формуле  $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$ .

$$(y'_x)'_t = -\frac{1}{2} (\operatorname{ctg}^2 3t)'_t = -\frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{ctg} 3t \cdot (\operatorname{ctg} 3t)'_t = -\operatorname{ctg} 3t \cdot \left( -\frac{3}{\sin^2 3t} \right) = \frac{3 \operatorname{ctg} 3t}{\sin^2 3t}$$

Таким образом:

$$y''_{xx} = \frac{\frac{3 \operatorname{ctg} 3t}{\sin^2 3t}}{12 \sin^3 3t \cos 3t} = \frac{3 \operatorname{ctg} 3t}{12 \sin^5 3t \cos 3t} = \frac{1}{4 \sin^6 3t}$$

б) Найдём первую производную:

$$x'_t = (\operatorname{arctg} e^t)'_t = \frac{1}{1 + (e^t)^2} \cdot (e^t)'_t = \frac{e^t}{1 + e^{2t}}$$

$$y'_t = (\ln(1 + e^{2t}))'_t = \frac{1}{1 + e^{2t}} \cdot (1 + e^{2t})'_t = \frac{1}{1 + e^{2t}} \cdot (0 + e^{2t} \cdot (2t)'_t) = \frac{2e^{2t}}{1 + e^{2t}}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{2e^{2t}}{1 + e^{2t}}}{\frac{e^t}{1 + e^{2t}}} = \frac{2e^{2t} \cdot (1 + e^{2t})}{(1 + e^{2t}) \cdot e^t} = 2e^t$$

Вторая производная:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

$$(y'_x)'_t = 2(e^t)'_t = 2e^t$$

В результате:

$$y''_{xx} = \frac{2e^t}{\frac{e^t}{1 + e^{2t}}} = \frac{2e^t (1 + e^{2t})}{e^t} = 2(1 + e^{2t})$$