Элементарные функции

1 Многочлены, дробно-рациональные функции

Определение. *Многочленом* называется формальная запись вида $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Числа $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ называются *коэффициентами многочлена.* Многочлен естественным образом задаёт функцию $f(x)$.

Теорема 1. *Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет не более двух вещественных корней, которые вычисляются по формуле*

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Теорема 2 (Виета)**.** *Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c$. Тогда справедливы равенства*

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$;
- $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Теорема 3 (Безу)**.** *Пусть $P(x)$ — некоторый многочлен. Тогда $P(x)$ можно представить в виде $(x-a)Q(x)$ тогда и только тогда, когда $P(a) = 0$.*

1. Решите уравнение

(a) $x^2 - 6x + 8 = 0$;
(b) $2x^2 + x - 6$;
(c) $x^2 - 3x + 6 = 0$;
(d) $x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0$.

2. Постройте график функции $4x^2 - 4x + 4$.

3. Докажите, что при $a \geqslant 0$ и любом $b \in \mathbb{R}$ уравнение

$$x^3 + ax + b = 0$$

имеет только один действительный корень.

4. Прямая пересекает график функции $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс — в точке с абсциссой x_3. Докажите, что

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}.$$

5. Представьте выражение $\frac{x+3}{3x^2-2x-1}$ в виде суммы двух рациональных дробей с константными числителями и линейными знаменателями.

2 Тригонометрические функции

Определение. Рассмотрим на координатной плоскости единичную окружность с центром в точке $(0,0)$. Рассмотрим некоторое число α и отложим от луча Ox угол α (в радианах). Этот луч пересекает окружность в точке A, для которой длина дуги от точки $(1,0)$ до A равна α. Координаты x и y точки A называются соответственно *косинусом* и *синусом* (пишут $\cos\alpha, \sin\alpha$). *Тангенсом* (пишут $\operatorname{tg}\alpha$) называют отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Свойства тригонометрических функций

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{1}$$
$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha \tag{2}$$
$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha \tag{3}$$
$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \tag{4}$$
$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha \tag{5}$$
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \tag{6}$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \tag{7}$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{8}$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{9}$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{10}$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \tag{11}$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{12}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \tag{13}$$

1. Докажите основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

2. Найдите значения $\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{6}$.

3. Докажите тождества

(a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;

(b) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$;

(c) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;

(d) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

4. Найдите формулу для $\sin 3x$.

5. Решите уравнение

(a) $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$.

3 Степенная функция, экспонента, логарифм

Определение. *Экспоненциальной* или *показательной функцией* при $a > 0$ называется $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, действующая по формуле

$$f(x) = a^x.$$

В случае, если $a = e = 2.71828\ldots$, то функция e^x называется экспонентой.

Свойства экспоненты

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^0 = 0$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{1/x} = \sqrt[1/x]{a}$$

Определение. Пусть a — положительное число. *Логарифмом числа* $x > 0$ *по основанию* a называется такое число $\log_a x$, что

$$a^{\log_a x} = x.$$

Логарифм по основанию числа e записывается как $\ln x$.

Свойства логарифма

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

$$a^{log_a x} = x$$

1. Вычислите

(a) $\log_3 \sqrt{27}$;

(b) $7^{2\log_{49} 2}$;

(c) $\frac{\log_{\sqrt{3}} a + \log_9 a}{\log_{81} a}$;

2. Решите уравнение **(a)** $\ln \ln x + \ln(\ln x^4 - 3) = 0$.