Комбинаторика.

Базовые правила комбинаторики

Задача 1

Велосипедисты клуба "Superstitious"считают, что цифра 8 в номере членского билета клуба – плохой знак. Поэтому председатель клуба решил раздать всем членам клуба новые билеты, в номерах которых не будет цифры 8. Членов в клубе всего 90. Сможет ли председатель раздать всем членам клуба различные номера, если номер состоит из 2 цифр?

Утверждение 1. *Даны предметы, относящиеся к n различным видам. Из них составляют всевозможные упорядоченные расстановки по k предметов в каждой (k-расстановки). В одну расстановку могут входить несколько предметов одного вида, а две расстановки считаются различными, если они отличаются друг от друга видом или порядком входящих в них предметов.*
*Число k-**размещений с повторениями** из элементов n видов обозначается $\overline{A}_n^k$ и*

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Задача 2

В магазине есть 10 ручек и 20 карандашей. Сколькими способами можно выбрать:

1. Одну письменную принадлежность;
2. Одну ручку и один карандаш?

Утверждение 2. ***Правило суммы**: Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а другой объект B можно выбрать n способами, то выбор "либо A, либо B можно осуществить $m+n$ способами.*

Утверждение 3. ***Правило произведения**: Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а другой объект B можно выбрать n способами, то выбор пары (A, B) в указанном порядке можно осуществить mn способами.*

Задача 3

Мошенник собрался взломать сейф директора одной фирмы. Сейф защищен трехзначным кодом. Информатор сказал мошеннику, что знает, что в коде обязательно есть цифра 5. Сколько комбинаций в худшем случае придется перебрать мошеннику, чтобы взломать сейф?

Задача 4

Сколько существует различных:

1. Трехзначных чисел;
2. Трехзначных нечетных чисел?

Утверждение 4. *Первый элемент может быть одного из n_1 видов, второй – из n_2 видов, ... k-й – из n_k видов. Из них составляют всевозможные упорядоченные расстановки k-расстановки. В одну расстановку могут входить несколько предметов одного вида, а две расстановки считаются различными, если они отличаются друг от друга видом или порядком входящих в них предметов. Число таких k-расстановок: $n_1 n_2 ... n_k$.*

Задача 5

Сколько существует различных:

1. Трехзначных чисел, в которых нет двух подряд стоящих одинаковых цифр
2. Трехзначных чисел, в которых не встречается "подчисла"54?

Утверждение 5. *В таких задачах, где число возможных выборов на каждом шагу зависит от того, какие элементы были выбраны ранее, удоюно изображать процесс составления комбинаций в виде дерева.*

Размещения, перестановки и сочетания

Задача 6

В футбольном первенстве участвовали 17 команд. Сколькими способами могут быть распределены медали между командами, если:

1. Разыгрывается только золотая медаль;
2. Разыгрываются золотая и серебряная медали;
3. Разыгрываются золотая, серебряная и бронзовая медали;
4. А если нужно распределить все места между командами?

Утверждение 6. *Даны n различных предметов. Из них составляют всевозможные упорядоченные k-расстановки. Две расстановки считаются различными, если они отличаются друг от друга хотя бы одним элементом или порядком входящих в них предметов.*
*Число k-**размещений без повторений** обозначается A_n^k и*

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

*В случае n=k размещение превращается в **перестановку**, и $A_n^k = n!$*

Задача 7

Сколько ожерелий можно составить из 7 различных бусин?

Задача 8

В языке племени "ма"есть всего две буквы: "м"и "а". Сколько различных:

1. двухбуквенных слов содержит язык племени "ма";
2. всего слов содержит язык племени "ма"?

Утверждение 7. *Имеются предметы k различных типов. Сколько перестановок можно сделать из n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа, ... n_k элементов k-го типа?*

$$P(n_1, n_2, ...n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

Задача 9

Сколько различных слов (перестановок) можно сделать из букв слова "Миссисипи"?

Задача 10

В первом раунде футбольного первенства участвовали 17 команд. Во второй раунд проходят только 13 из 17 команд. Сколькими способами можно выбрать 4 команды, которые не пройдут во второй раунд?

Утверждение 8. *Даны n различных предметов. Из них составляют всевозможные неупорядоченные k-расстановки. Две расстановки считаются различными, если они отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.*
*Число k-**размещений без повторений** обозначается A_n^k и*

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Заметим, что $C_n^k = c_n^{n-k}$

Задача 11

Генуэзская лотерея. Вы покупаете билет, на котором написано одон число от 1 до 90. В день розыгрыша лотереи из мешка с бочонками достают 5 случайных бочонков. Вы выигрываете сумму, в 15 раз большую стоимости билета, если ваше число есть среди бочонков, которые достали. Какова вероятность выигрыша?
А если чисел на билете два и нужно, чтобы оба числа были среди бочонков, которые достали из мешка?

Задача 12

В магазине продаются 2 вида пирожных: эклеры и наполеон. Сколькими способами можно собрать из них набор из 5 пирожных?
А если пирожных в магазине 4 вида?

Биномиальные коэффициенты

C_n^k – биномиальные коэффициенты.

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + ... + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^0 b^n$$

Для того, чтобы понять, откуда здесь берутся биномиальные коэффициенты, представим степень в виде произведения:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)...(a+b)}_{\text{n}}$$

коэффициент перед $a^i b^{n-i}$ – сколькими способами можно выбрать i скобочек из n, откуда берется множитель a. А это $= C_n^i$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 200 252 200 120 45 10 1

Треугольник Паскаля

Свойства биномиальных коэффициентов:

- $C_n^k = C^{n\,n-k}$
- $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$
- $\sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$
- $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^n C_n^n = 0$

Шары и перегородки

Задача 13

Укротитель хочет вывести на арену цирка 5 львов и 4 тигров. При этом нельзя, чтобы два тигра шли друг за другом. Сколькими способами он может расположить зверей?

Задача 14

Сколькими способами можно расставить n нулей и k единиц так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?

Задача 15

на книжной полке стоят 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг так, чтобы никакие две из них не стояли рядом?

Задача 14

1. Сколькими способами можно составить сумму 100 из четырех ненулевых слагаемых?
2. Компьютер генерирует 4 случайных натуральных чисел, каждое число выбирается случайно, равномерно и независимо от остальных на промежутке от 1 до 100. Найдите вероятность, что сумму этих чисел равна 100.

Дополнительные задачи

Задача 15

Кидаются два игральных кубика. Какова вероятность, что:

1. Сумма чисел на кубиках будет равна 2
2. Сумма чисел на кубиках будет равна 7
3. Сумма чисел на кубиках будет четна?

Задача 16

Сколькими способами можно поставить на доску две шашки – белую и черную – так, чтобы белая шашка могла бить черную?

Задача 17

Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?