Математика для анализа данных, МФТИ 2023/2024

Дискретная математика

Домашнее задание

21 сентября 2023 г.

Задача 1.

Пусть даны множества A, B и C. Выразить следующие множества через A, B и C при помощи операций $\cup, \cap, \setminus$ и $\triangle$.

a) Множество элементов, принадлежащих всем трём множествам.

b) Множество элементов, принадлежащих хотя бы двум из множеств A, B и C.

c) Множество элементов, принадлежащих ровно двум из множеств A, B и C.

d) Множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B и C.

e) Множество элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A, B и C.

Задача 2.

a) Доказать, что множества $[0,1), (0,1], (0,1)$ равномощны отрезку $[0,1]$ (и следовательно имеют мощность континуума).

b) Доказать, что множества $\mathbb{R}, [0,\infty), (0,\infty), (-\infty,0), (-\infty,0]$ имеют мощность континуум.

Задача 3.

Игральный кубик подбрасывается один раз. В первый момент времени наблюдатель узнаёт, выпала ли чётная грань или нет. Во второй момент времени наблюдатель дополнительно узнаёт, выпала ли грань больше двух или нет. В третий момент времени наблюдатель точно узнаёт, какая грань выпала. Укажите множество элементарных событий и соответствующие три алебры событий.

Задача 4.

Пусть $\Omega = [0,1]$ и на нём задана система множеств $C = \{[0,0.4],[0.3,1]\}$. Постройте минимальную σ-алгебру, содержащую C.

Задача 5.

Пусть $\Omega = \{a,b,c\}$ – объемлющее пространство, на котором заданы две системы множеств

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{a,b\}\} \quad \text{и} \quad \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b,c\}\}.$$

a) Являются ли $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ сигма-алгебрами? Топологиями?

b) Найдите наименьшую топологию, содержащую $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$.

c) Найдите наименьшую σ-алгебру, содержащую $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$.