Задачи по курсу “Теория вероятностей”

лектор – доц. Родионов И.В.

осень 2016 г.

1. Системы множеств. Классическое вероятностное пространство.

1 Из n-элементного подмножества случайным образом выбирается k элементов. Опишите вероятностное пространство для схем упорядоченного выбора без повторения, упорядоченного выбора с повторением, неупорядоченного выбора без повторения и неупорядоченного выбора с повторением.

2 Случайно бросаются два M-гранных кубика, на гранях которых написаны числа от 1 до M. Опишите вероятностное пространство, события в котором соответствуют всем возможным исходам в таком эксперименте. Найдите вероятность события $A_i = \{\text{сумма чисел, выпавших на кубиках, равна } i\}$, $i = 2, \dots, 2M$.

3 Из множества N объектов выбирается случайное подмножество. Опишите соответствующее вероятностное пространство и найдите вероятность того, что это случайное подмножество имеет четную мощность.

4 По схеме случайного выбора с возвращением из множества натуральных чисел $1, \dots, N$, $N \geq 4$, выбираются числа X и Y. Что больше: $P_2 = P(X^2 - Y^2 \text{ делится на } 2)$ или $P_3 = P(X^2 - Y^2 \text{ делится на } 3)$? Прежде чем сравнить вероятности, опишите вероятностное пространство и события, вероятности которых надо сравнить, в терминах этого вероятностного пространства.

5 Можно ли пару операций $\{\cup, \overline{A}\}$ в определении алгебры заменить на а) $\{\triangle, \cup\}$; б) $\{\triangle, /\}$; в) $\{A \cup \overline{B}, \overline{A}\}$; г) $\{\cup, \cap\}$; д) $\{\overline{A \cap B}\}$?

6 Пусть $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ — $\sigma-$алгебры подмножеств пространства Ω. Будут ли $\sigma-$алгебрами системы множеств
$a)\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2 := \{A : A \in \mathfrak{B}_1 \text{ и } A \in \mathfrak{B}_2\}$,
$b)\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 := \{A : A \in \mathfrak{B}_1 \text{ или } A \in \mathfrak{B}_2\}$?

7 Из совокупности всех подмножеств множества натуральных чисел $1, \dots, N$ по схеме выбора с возвращением выбираются два множества A_1 и A_2. Найти вероятность того, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

2. Классическое вероятностное пространство. Геометрические вероятности.

1 Множество из n шаров случайно раскладывают по m ящикам. Найдите вероятность того, что все ящики непустые, если (a) шары неразличимы, (b) шары различимы.

2 В группе 25 студентов. Считаем, что день рождения каждого студента случаен (считаем, что в году 365 дней). Найдите вероятность того, что хотя бы у двух человек дни рождения совпадают.

3 Некоторые жители Долгопрудного считают трамвайный билет "счастливым", если сумма первых трех цифр его шестизначного номера совпадает с суммой последних трех цифр. Найти вероятность получить "счастливый" билет.

4 На шахматной доске размера $n \times n$ случайно размещают n ладей. Найдите вероятности следующих событий:

(a) $A = \{$ладьи не бьют друг друга$\}$.

(b) $B = \{$ладьи не бьют друг друга, и на главной диагонали нет никаких фигур$\}$.

5 Случайная точка A имеет равномерное распределение в прямоугольнике со сторонами 1 и 2. Найдите вероятности следующих событий:

(a) расстояние от точки A до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит x;

(b) расстояние от точки A до ближайшей диагонали прямоугольника не превосходит x;

(c) расстояние от точки A до любой стороны прямоугольника не превосходит x;

(d) расстояние от точки A до ближайшей стороны прямоугольника меньше, чем расстояние от A до ближайшей диагонали.

6 В круге радиуса R случайно проводится хорда. Обозначим через ξ ее длину. Найдите вероятность $\mathsf{P}\left(\xi > \sqrt{3}R\right)$, если

(a) середина хорды равномерно распределена в круге;

(b) направление хорды задано, а ее середина равномерно распределена на диаметре, перпендикулярном ее направлению;

(c) один конец хорды закреплен, а другой равномерно распределен на окружности.

7 Найти вероятность того, что из трех наудачу взятых отрезков длиной не более, чем 1, можно составить треугольник.

3. Условная вероятность. Формула полной вероятности и формула Байеса.

1 Брошено 3 игральных кости. Найти вероятность того, что на всех костях выпала "шестерка", при условии что

(a) на первой кости выпала "шестерка";

(b) по крайней мере на одной кости выпала "шестерка";

(c) по крайней мере на двух костях выпало равное количество очков.

2 В одном ящике содержится 1 белый шар и 2 черных шара, а в другом ящике — 2 белых шара и 3 черных шара. В третий ящик кладут два шара, случайно выбранных из первого ящика, и два шара, случайно выбранных из второго ящика. Найдите вероятность того, что

(a) случайно выбранный из третьего ящика шар будет белым;

(b) при выборе без возвращения двух шаров из третьего ящика один из них будет будет белым, а второй — черным.

3 Группа из 15 человек сдает экзамен по теории вероятностей. В программе 31 билет, пять из которых студенты считают халявными. Каким по очереди нужно заходить в аудиторию, чтобы с наибольшей вероятностью вытянуть халявный билет?

4 Мимо магазина пончиков проходят юноши с частотой $0,6$; девушки — с частотой $0,3$; преподаватели — с частотой $0,1$. Юноши покупают пончик с вероятностью $0,4$; девушки — с вероятностью $0,9$; преподаватели — с вероятностью $0,2$. Известно, что последний человек купил пончик. Найдите условную вероятность того, что пончик приобрел преподаватель.

5 Во время испытаний аппарата на макаронной фабрике было установлено, что вероятность его взрыва при отсутствии помех равна 0,01, при перегреве — 0,05, при вибрации — 0,1, при вибрации и перегреве — 0,2. Найти вероятность взрыва на макаронной фабрике при работе в жарких странах (вероятность перегрева равна 0,2, вероятность вибрации 0,1), предполагая перегрев и вибрацию независимыми событиями (события A и B являются независимыми, если $P(A \cap B) = P(A)P(B)$).

4. Понятие независимости. Схема Бернулли.

1 Из ящика, содержащего черные и белые шары, извлекаются шары. Пусть событие A_k означает, что на k-м шаге извлечен белый шар. Докажите, что события $A_1, \dots, A_n$

(a) независимы в совокупности, если выбор шаров производится с возвращением;

(b) зависимы, если выбор шаров производится без возвращения.

2 Игрок A подбрасывает 3 игральные кости, а игрок B — 2 кости одновременно с игроком A. Эти испытания они проводят последовательно до первого выпадения "шестерки" хотя бы на одной из костей. Найдите вероятности следующих событий

(a) $\mathcal{A} = \{$впервые "шестерка" выпала у игрока A, а не у $B\}$;

(b) $\mathcal{B} = \{$впервые "шестерка" выпала у игрока B, а не у $A\}$;

(c) $\mathcal{C} = \{$впервые "шестерка" выпала одновременно у A и $B\}$.

3 Пусть A, B, C — попарно независимые равновероятные события, причем $A \cap B \cap C = \varnothing$. Найдите максимально возможное значение $\mathsf{P}(A)$.

4 Дано множество S из n элементов. Из него случайно и независимо выбираются три подмножества A, B, C. Каждое случайное подмножество формируется следующим образом: каждый элемент множества S независимо от других с вероятностью p включается в подмножество, а с вероятностью $(1-p)$ — не включается. Найдите вероятность события $D = \{A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B\}$.

5 Исходы $\xi_1, \xi_2, \dots$ последовательности испытаний Бернулли с m возможными исходами $1, 2, \dots, m$ и вероятностями исходов $p_1, p_2, \dots, p_m$ объединяются в блоки (ξ_{mk+1}, $\xi_{mk+2}, \dots, \xi_{mk+m}$), $k \geq 0$. Пусть ν — номер первого блока, все элементы которого различны (фактически, ν - это случайная величина). Найдите $\mathsf{P}\left(\xi_{m\nu+1} = 1\right)$.

6 Ребра полного графа K_n независимо друг от друга раскрашиваются с равной вероятностью $\frac{1}{k}$ в любой из k цветов. Пусть V — множество вершин графа K_n, а $S \subset V$. Обозначим через A_S следующее событие: $A_S = \{$все ребра K_n, вершины которых принадлежат S, покрашены в один и тот же цвет$\}$. При каких условиях на взаимное расположение подмножеств $S, T \subset V$ события A_S и A_T независимы?

5. Распределения вероятностей.

1 Пусть $F(x)$ — функция распределения, соответствующая распределению вероятностей P. Доказать равенства:

a) $\mathsf{P}((a,b]) = F(b) - F(a)$,
b) $\mathsf{P}([a,b]) = F(b) - F(a-)$,
c) $\mathsf{P}((a,b)) = F(b-) - F(a)$,
d) $\mathsf{P}([a,b)) = F(b-) - F(a-)$,
e) $\mathsf{P}(\{x\}) = F(x) - F(x-)$.

2 Показать, что каждая из функций $G_1(x,y) = I(x+y \geq 0)$, $G_2(x,y) = [x+y]$, где $[\cdot]$ — целая часть числа, является непрерывной справа, возрастающей по каждой переменной, но не является функцией распределения в $\mathbb{R}^2$.

3 Плотность абсолютно непрерывного распределения P, заданного на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, равна $p(x)$. Найти функцию распределения, если

a) $p(x) = \lambda e^{-\lambda x} I(x \geq 0)$ (экспоненциальное, или показательное, распределение с параметром $\lambda > 0$),

b) $p(x) = \frac{\theta}{\pi(\theta^2 + (x-x_0)^2)}$ (распределение Коши с параметром θ и смещением x_0),

c) $p(x) = \frac{1}{b-a} I(a \leq x \leq b)$ (равномерное распределение на $[a,b]$),

d) $p(x) = k(x-1)^{k-1} I(1 \leq x \leq 2)$, $k \in \mathbb{N}$,

e) $p(x) = xe^{-x} I(x > 0)$ (гамма-распределение с параметрами (2, 1)).

4 Пусть P — дискретное распределение вероятностей на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $p(x) = \mathsf{P}(\{x\})$.

a) Если $p(x) = \frac{1}{2N} I(x \in \{1, \ldots, N\} \cup \{2N+1, \ldots, 3N\})$ (равномерное распределение на множестве $\{1, \ldots, N\} \cup \{2N+1, \ldots, 3N\}$), то найти функцию распределения, соответствующую распределению вероятностей P.

b) Если $p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} I(x \in \mathbb{Z}_+)$, где $\lambda > 0$ (пуассоновское распределение с параметром λ), то найти $\mathsf{P}(2\mathbb{Z}_+)$, где $2\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных четных чисел.

c) Если $p(x) = (1-p)^{x-1} p I(x \in \mathbb{N})$, где $p \in (0,1)$ (геометрическое распределение с параметром p), то найти функцию распределения, соответствующую распределению вероятностей P, и $\mathsf{P}(2\mathbb{Z}_+)$.

5 Стрелок в тире стреляет в “четверть круга”, то есть в область $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$. Распределение вероятности попадания P — равномерное в области D. Иными словами, плотность такого распределения равна $p(x,y) = \frac{1}{\pi/4} I((x,y) \in D)$.

a) Найдите маргинальную функцию распределения и плотность распределения вероятностей P_1, равной проекции P по первой координате,.

b) найдите вероятность попадания стрелка в квадрат $[0, 3/4] \times [0, 3/4]$,

c) найдите вероятность попадания в отрезок $[1/2, 3/4]$ по оси y.

6 Пусть P — вероятностная мера на $(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}(\mathbb{R}^3))$, определенная равенством $\mathsf{P} = \mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2 \times \mathsf{P}_3$, где P_1 и P_2 — равномерные распределения на $[0,1]$, P_3 — экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$. Найдите

a) $\mathsf{P}(\{(x,y,z) :\ x + z \leq 3\})$,
b) $\mathsf{P}(\{(x,y,z) :\ x - y + z \geq 0\})$,
c) $\mathsf{P}(\{(x,y,z) :\ 1/2 \leq xy \leq 3z\})$.

6. Случайные величины.

1 Если $|\xi|$ является $\mathcal{F}$–измеримой, то верно ли, что ξ также $\mathcal{F}$–измерима?

2 Пусть ξ, η — две случайные величины, заданные на $(\Omega, \mathcal{F})$. Пусть, кроме того, $A \in \mathcal{F}$. Докажите, что функция $\zeta(\omega) = \xi(\omega) I(\omega \in A) + \eta(\omega) I(\omega \in \overline{A})$ также является случайной величиной.

3 Случайная величина ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ. Найдите плотности распределения случайных величин

a) $\sqrt{\xi}$,

b) ξ^k, $k \in \mathbb{N}$,

c) $\frac{1}{\lambda} \ln \xi$,

d) $\{\xi\}$, где $\{\cdot\}$ — дробная доля,

e) $1 - e^{-\alpha\xi}$.

4 Случайная величина ξ имеет стандартное распределение Коши. Найдите плотности распределения случайных величин $\frac{\xi^2}{1+\xi^2}$, $\frac{1}{1+\xi^2}$, $\frac{2\xi}{1-\xi^2}$, $\frac{1}{\xi}$.

5 Плотность распределения случайного вектора (ξ, η) равна $\frac{1}{\pi/4} I(x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0)$. Найдите плотность случайной величины $\xi + \eta$.

6 Пусть ξ — случайная величина с непрерывной функцией распределения F. Каково распределение случайной величины $F(\xi)$?

7 Являются ли следующие множества борелевскими:
a) $B_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
b) $B_2 = \{(x, y) : x + y < 2\}$;
c) множество Кантора на отрезке $[0, 1]$?

7. Независимость. Формула свертки.

1 Пусть ξ_1, ξ_2 — случайные величины, каждая из которых не зависит от случайной величины ξ. Верно ли, что вектор (ξ_1, ξ_2) также не зависит от случайной величины ξ?

2 Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$. Упорядочим значения $\xi_1, \ldots, \xi_n$ по неубыванию. Возникает новая последовательность случайных величин $\xi_{(1)} \leq \ldots \leq \xi_{(n)}$, называемая вариационным рядом. Найдите

a) функцию распределения случайной величины $\xi_{(k)}$ для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$,

b) плотность случайной величины $\xi_{(k)},\ k = 1, \ldots, n$, если $F(x)$ имеет плотность $f(x)$.

3 Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, a]$. Найдите плотности распределения случайных величин $\xi + \eta$, $\xi - \eta$, $\xi\eta$, ξ/η.

4 Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы. С помощью формулы свертки найдите распределение $\xi_1 + \xi_2$, если

a) $\xi_i \sim Bin(n_i, p)$, $i = 1, 2$,

b) $\xi_i \sim Pois(\lambda_i)$, $i = 1, 2$,

c) $\xi_i \sim \mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$,

d) $\xi_i \sim \Gamma(\alpha_i, \lambda)$, $i = 1, 2$ (предполагается, что $p_{\xi_i}(x) = \frac{x^{\alpha_i - 1}\lambda^{\alpha_i} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha_i)} I(x > 0)$).

5 Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найдите распределение случайной величины $\eta = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$.

6 Пусть X, Y — независимые случайные величины. Найдите вероятность того, что из отрезков с длинами X, Y и 1 можно составить треугольник, если $X \sim R[0, 1]$, а $Y \sim Exp(1)$.

8. Математическое ожидание и дисперсия. Абсолютно непрерывный и дискретный случаи.

1 Пусть $R_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Случайная величина ξ равна количеству элементов R_n, остающихся на своих местах при случайной перестановке. Найдите $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$.

2 Экипаж космического корабля, состоящий из k космонавтов, отправился на освоение планет. Космонавты случайно высаживаются на m планетах. Случайная величина ξ равна количеству планет, на которые никто не высадился при таком случайном размещении. Найдите $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$, если (a) планеты неразличимы, (b) планеты различимы.

3 Рассматривается модель случайного графа $G(n, p)$. Найдите $\mathsf{E}X$, если

a) X — количество треугольников (циклов длины 3) в случайном графе,

b) X — количество циклов длины k в случайном графе,

c) X — количество клик (подграфов, являющихся полными графами) мощности k в случайном графе.

4 Дана случайная величина ξ. Найдите математическое ожидание и дисперсию ξ, если она имеет

a) биномиальное распределение с параметрами (n, p),

b) пуассоновское распределение с параметром λ,

c) геометрическое распределение с параметром p (т.е. $\mathsf{P}(\xi = k) = (1-p)^{k-1}p$, $k = 1, 2, \ldots$),

d) нормальное распределение с параметрами (a, σ^2),

e) равномерное распределение на отрезке (a, b),

f) гамма распределение с параметрами (α, λ),

g) бета распределение с параметрами (α, β).

5 Случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Вычислите $\mathsf{E}\xi^k$ и $\mathsf{E}|\xi|^k$ для $k \in \mathbb{N}$. Вычислить те же характеристики, если $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

9. Математическое ожидание и дисперсия, другие случаи. Ковариация.

1 Приведите пример двух таких зависимых случайных величин ξ, η, ковариация которых равна 0, что

а) ξ, η не являются нормальными,

б) ξ, η являются нормальными.

2 Случайная величина ξ имеет следующую функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -2; \\ 1/5, & \text{если } -2 \le x < 1; \\ x^2/4, & \text{если } 1 \le x < 2; \\ 1, & \text{если } x \ge 2; \end{cases}$$

Вычислите математическое ожидание и дисперсию ξ.

3 Стрелок в тире стреляет в "четверть круга", то есть в область $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$. Случайный вектор $(\xi,\ \eta)$ является точкой попадания стрелка и имеет равномерное распределение в D. Найдите распределение координат точки попадания, а также $cov(\xi, \eta)$.

4 Случайные величины ξ, η (возможно, зависимые) обладают конечными дисперсиями: $D\xi = \sigma_1^2, D\eta = \sigma_2^2$. Указать пределы, в которых может изменяться $D(\xi + \eta)$.

5 Случайный вектор (ξ, η) имеет плотность

$$p_{(\xi,\eta)}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - r^2}}\, e^{-(x^2 - 2xyr + y^2)/(2(1 - r^2))},$$

где $|r| < 1$. Вычислите матрицу ковариаций случайного вектора (ξ, η). Каково распределение случайной величины ξ?

10. Виды сходимостей случайных величин.

1 Докажите, что в вероятностных пространствах с не более чем счетным числом элементарных исходов сходимость с вероятностью 1 эквивалентна сходимости по вероятности.

2 Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ независимы и имеют распределение Бернулли, причем $\xi_n \sim Bern(p_n)$. Найдите необходимое и достаточное условие на числа $p_1, p_2, \ldots$ того, что (a) $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$; (b) $\xi_n \xrightarrow{L_p} 0$, $p \geq 1$; (c) $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$.

3 Пусть последовательность случайных величин $(\xi_n)_{n\geq 1}$ такова, что для некоторого $p > 0$ выполнено $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}|\xi_n|^p < \infty$. Показать, что $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$.

4 Пусть последовательность случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ сходится по распределению к константе C. Докажите, что тогда $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} C$.

5 Пусть $(\xi_n)_{n\geq 1}$ — последовательность случайных величин. Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Покажите, что если $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, то $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$. Докажите, что сходимость почти наверное нельзя заменить на сходимость по вероятности.

11. Случайное блуждание. Лемма Бореля-Кантелли.

На семинаре необходимо разобрать задачи: $P(S_n = x)$, принцип отражения, лемма о баллотировке.

1 Найти вероятность того, что симметричное случайное блуждание никогда не возвратится в 0. Иными словами, найти $\lim\limits_{n\to\infty} P(S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0)$.

2 Пусть $(S_n; n \in \mathbb{N})$ — симметричное случайное блуждание на прямой. Используя принцип отражения, докажите, что

$$P\left(\max_{k\le n} S_k \geq N; S_n < N\right) = P(S_n > N).$$

3 Пусть $(S_n; n \in \mathbb{N})$ — симметричное случайное блуждание на прямой. Используя результат задачи 2, найдите распределение случайной величины $M_n = \max\limits_{k\le n} S_k$ и асимптотику EM_n при $n \to \infty$.

4 Пусть $(S_n; n \in \mathbb{N})$ — случайное блуждание с вероятностью шага вправо p и шага влево q, $p + q = 1$. Докажите, что для $m \leq N$ выполнено

$$P\left(\max_{k\le n} S_k \geq N; S_n = m\right) = C_n^u p^v q^{n-v},$$

где $v = \frac{n+m}{2}$, $u = v - N$.

5 Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\xi_i \sim \mathcal{N}(0,1)$. Показать, что

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\xi_n}{\sqrt{2\ln n}} = 1\right) = 1.$$

6 Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\xi_i \sim Pois(\lambda)$, $\lambda > 0$. Показать, что, независимо от λ,

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\xi_n \ln\ln n}{\ln n} = 1\right) = 1.$$

12. Характеристические функции.

1 Найдите характеристическую функцию случайной величины ξ, если
(a) $\xi \sim Bin(n,p)$; (b) $\xi \sim Pois(\lambda)$; (c) $\xi \sim Geom(p)$; (d) $\xi \sim N(a,\sigma^2)$;
(e) $\xi \sim R(a,b)$; (f) $\xi \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$; (g) $\xi \sim Cauchy(\theta)$; (h) ξ имеет распределение Лапласа с параметром $\theta > 0$ (т.е. $p_\xi(x) = \frac{1}{2\theta}\, e^{-|x|/\theta}$).

2 Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция. Покажите, что выполняются неравенства

(a) $1 - \mathrm{Re}\,\varphi(2t) \le 4\left(1 - \mathrm{Re}\,\varphi(t)\right),$

(b) $\left(\mathrm{Im}\,\varphi(t)\right)^2 \le \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{Re}\,\varphi(2t)\right),$

(c) $\left(\mathrm{Re}\,\varphi(t)\right)^2 \le \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{Re}\,\varphi(2t)\right),$

(d) $\left|\frac{1}{h}\int\limits_{t-h}^{t+h}\varphi(u)du\right| \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \mathrm{Re}\,\varphi(h)\right)^{\frac{1}{2}}.$

3 Выясните, являются ли следующие функции характеристическими:
(a) $\sin t$, (b) $\cos t$, (c) $\cos^2 t$, (d) $\cos t^2$, (e) $e^{-|t|}I\{t<0\} + (1+t^2)^{-1}\, I\{t \ge 0\}$,
(f) $\frac{1}{1+t^2}$, (g) $\frac{1}{1+t^4}$, (h) $e^{-|t|^3}$.

4 Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины. С помощью характеристических функций найдите распределение $\xi_1 + \xi_2$, если (a) $\xi_i \sim N(a_i, \sigma_i^2)$, (b) $\xi_i \sim \Gamma(\alpha_i, \lambda)$, (c) $\xi_i \sim Cauchy(\theta_i)$.

5 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность нормальных случайных величин. Докажите, что если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то ξ — тоже нормальная случайная величина.

13. Гауссовские векторы. Центральная предельная теорема.

1 При наборе текста стенографист ошибается в символе с вероятностью 0,0005. Найти приближенное значение вероятности того, что при наборе 10000 символов стенографист ошибется не более, чем в трех.

2 По схеме выбора с возвращением выбирается 10000 случайных цифр. Найти приближенное значение вероятности того, что выбрано от 940 до 1060 девяток.

3 Имеется n случайных чисел, выбранных по схеме выбора с возвращением из $\{1, \ldots, 999999999\}$. Из этих чисел по очереди вытягиваются числа, делящиеся на 3. При каком ограничении на n можно выбрать 1025 чисел с приближенной вероятностью, не меньшей 0.95?

4 Брошено 1800 игральных костей. Найти приближенное значение вероятности того, что суммарное число появлений 2 и 6 не меньше, чем 620.

5 Пусть $X = (\xi, \eta)$ — гауссовский вектор. Подберите такие числа x_1, x_2, что случайные величины $\eta + x_1\xi, \eta + x_2\xi$ являются независимыми.

6 Случайные величины X и Y — независимые нормальные с параметрами $(0, 1)$. Докажите, что распределение случайной величины $Z = (X+a)^2 + (Y+b)^2$ зависит только лишь от величины $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.