

1 ноября 2023 г.

Задача 1.

Какие из перечисленных ниже множеств являются линейными пространствами по отношению к стандартным операциям сложения и умножения на константу?

- а) Непрерывные ограниченные функции.
- б) Чётные функции, имеющие разрыв.
- с) Линейно-дробные функции, т.е. имеющие форму $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.
- д) Функции вида $f(x) = p(x)e^{2020x}$, где $p(x)$ – полином.

Задача 2.

Найдите фундаментальное множество решений СЛАУ и размерность пространства решений.

- (а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 19x_3 = 10 \\ 5x_1 + 9x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$
- (б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 9 \\ 3x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 6x_4 = -3 \end{cases}$
- (с) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 5x_1 - 6x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$
- (д) $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 + 3x_5 = -8 \\ 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 + 22x_4 + 12x_5 = -7 \end{cases}$

Задача 3.

Вычислите ранг следующих матриц

$$(a) \begin{pmatrix} 12 & -4 & 19 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & -6 & 11 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 3 & 13 & 2 & -5 \\ 1 & 10 & 2 & -4 \\ 13 & -6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 6 & -6 & -1 & 1 \\ 11 & -11 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 3 & 1 \\ 9 & -9 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 4.

Найдите координаты вектора в предложенном базисе:

- а) $f(x) = \cos(x - \pi/4)$ в базисе $\{\sin(x), \cos(x)\}$
- б) $f(x) = x^2$ в базисе $\{1, x+1, x^2+x\}$
- с) $f(x) = \cos^3(x)$ в базисе $\{1, \cos(x), \cos(2x), \cos(3x)\}$

Задача 5.

Найдите определитель матрицы любым подходящим способом.

$$(a) \begin{vmatrix} 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 1 \\ -6 & -7 & 5 & 1 \\ 6 & -9 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} -4 & 4 & -6 & 3 \\ 5 & 4 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ -9 & 9 & -9 & -9 \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} -2 & -3 & -6 & -9 \\ -9 & 5 & 4 & -5 \\ -7 & -3 & 4 & 3 \\ -8 & -5 & -2 & -7 \end{vmatrix}$$

Задача 6.

Найдите собственные значения и собственные вектора матриц (a) $\begin{pmatrix} -6 & 2 & -5 \\ -5 & 1 & -5 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -3 & 3 & -4 \\ -5 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

$$(c) \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

Задача 7.

Для каждой из квадратичных форм проверьте её знакоопределённость

a) $-2x_1^2 + 10x_1x_2 - 10x_1x_3 - 5x_2^2 + 10x_2x_3 - x_3^2$

b) $-3x_1^2 + 18x_1x_3 - 3x_2^2 - 27x_3^2 - 5x_4^2$

c) $4x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 4x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_4^2$

d) $4x_1^2 + 3x_2^2 - 6x_2x_3 + 3x_3^2 + 4x_4^2$.

Задача 8.

Для заданных векторов x и e_i , найдите ортогональную проекцию x на линейное пространство, порождённое e_i , а также расстояние от x до линейной оболочки e_i .

a) $x = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$