

Домашнее задание №1 по теории вероятностей

Внимание! Решения, основанные на вычислениях, сделанных в Python и на других языках программирования, приниматься не будут. Но, конечно, для самопроверки своих решений пользоваться Python не возбраняется.

1. На полке стоит 100 разных книг. Из них выбрали несколько книг, а затем положили их обратно, причем каждая книга выбирается независимо от других с вероятностью p . На следующий день с этой полки снова взяли несколько книг по такой же схеме. Найдите вероятность того, что во второй день не взяли ни одной книги из тех, что были взяты в первый день.
2. Пусть выбрано случайное натуральное число $N \leq 1000$. Найти вероятность того, что оно делится на 2 или на 3, но не делится на 12.
3. На шахматной доске $n \times n$ случайно размещают n ладей. Найдите вероятность того, что ладьи не бьют друг друга.
4. В веб-поиске при решении различных задач машинного обучения часто используется статистический метод, который называется бутстрэппинг. Суть состоит в следующем. Предположим, что у нас есть N веб-страниц. Мы хотим узнать, насколько наш алгоритм устойчив. Для этого выбираются случайно N страниц (некоторые могут совпадать) большое количество раз.

Если выбор производится упорядоченно, то найдите вероятность того, что первая страница встречается в ровно одной такой выборке k раз, а вторая — r раз.

5. Мишень имеет форму прямоугольника со сторонами 1 и 2. Стрелок выигрывает приз, если расстояние от пораженной точки до ближайшей стороны прямоугольника меньше расстояния от этой точки до ближайшей диагонали. Найдите вероятность, что стрелок, выстреливший в мишень случайным образом, получит приз.
6. Группа из 15 человек сдает экзамен по теории вероятностей. В программе 31 билет, пять из которых студенты считают халявными. Каким по очереди нужно заходить в аудиторию, чтобы с наибольшей вероятностью вытянуть халявный билет?

Указание. Вычисление в явном виде вероятности вытянуть халявный билет для первых $n < 15$ через формулу полной вероятности не будет засчитываться как решение задачи. Попробуйте, например, использовать метод кодирования, представив последовательность вытаскивания билетов в виде двоичного вектора размера 31.

7. Мимо магазина пончиков проходят юноши с частотой 0.6, девушки — с частотой 0.3, преподаватели — с частотой 0.1. Юноши покупают пончик с вероятностью 0.4, девушки — с вероятностью 0.9, преподаватели — с вероятностью 0.2. Известно, что последний человек купил пончик. Найдите условную вероятность того, что пончик приобрел преподаватель.
8. По каналу связи передается одна из последовательностей букв $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$ с вероятностями p_1 , p_2 , p_3 ($p_1 + p_2 + p_3 = 1$). Каждая передаваемая буква принимается правильно с вероятностью α и с вероятностями $\frac{1}{2}(1 - \alpha)$ и $\frac{1}{2}(1 - \alpha)$ принимается за каждую из двух других букв. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что было передано $AAAA$, если принято $ABCA$.