Аналитическая геометрия.

Векторы и операции с ними

Определение. *Направленным отрезком* называется отрезок с заданным на нём направлением, то есть один из его концов является началом, а другой — концом.

Определение. Два направленных отрезка называются *равными*, если у них совпадают длина и направление, то есть они совпадают при наложении.

Определение. Пусть дан направленный отрезок. Множество всех направленных отрезков, совпадающих с данным, называется *вектором.*

Замечание. Длину вектора $\overrightarrow{v}$ будем обозначать $|\overrightarrow{v}|$.

Замечание. Любой вектор задаётся направлением и длиной. Введя систему координат начала всех векторов можно перенести в точку начала координат. Тогда каждый вектор будет задаваться координатами конца.

Определение. *Суммой векторов* $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ называется вектор $\overrightarrow{AC}$.

Определение. *Произведением* вектора $\overrightarrow{v}$ на некоторое число α называется вектор $\overrightarrow{u}$ такой, что $|\overrightarrow{v}| = |\alpha| \cdot |\overrightarrow{u}|$ и если $\alpha > 0$, то $\overrightarrow{u}$ сонаправлен вектору $\overrightarrow{v}$, а если $\alpha < 0$, то $\overrightarrow{u}$ противоположно направлен вектору $\overrightarrow{v}$.

Задача 1

Даны векторы $\overrightarrow{v} = (-3, 0, 2)$ и $\overrightarrow{u} = (1, 2, -5)$. Найдите координаты векторов **(a)** $4\overrightarrow{u}$; **(b)** $3\overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{u}$.

Способы задать прямую

Определение. *Общим уравнением* прямой называется уравнение вида $Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$.

Наблюдение. Векторы, начинающиеся и заканчивающиеся в точках, лежащих на одной прямой, сонаправлены или противоположно направлены.

Определение. *Параметрическим уравнением* прямой называется уравнение вида $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} = t \cdot \overrightarrow{v}$, где $\overrightarrow{r_0}$ — вектор из начала координат в некоторую точку M_0 на прямой, $\overrightarrow{v}$ — фиксированный вектор длины 1, начинающийся в точке M_0 и направленный вдоль прямой.

Задача 2

Запишите уравнение прямой $x = 2+3t, y = 3+2t$ в виде $Ax+By+C = 0$.

Задача 3

Запишите параметрическое уравнение прямой, заданной общим уравнением $3x - 4y + 4 = 0$.

Задача 4

Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(-3, 1)$ и $B(1, 2)$.

Коллинеарность векторов

Определение. *Коллинеарными* векторами называется пара сонаправленных или противоположно направленных векторов.

Утверждение 1. *Если точки* $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ *и* (x_2, y_2) *лежат на одной прямой, то* $\dfrac{x_2 - x_0}{y_2 - y_0} = \dfrac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$.

Задача 5

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3, 4)$ и параллельной прямой $x - 2y + 5 = 0$.

Скалярное произведение векторов

Определение. *Скалярным произведением* векторов $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{u}$ называется число $|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{u}| \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{u}$ обозначается $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$.

Утверждение 2. *Для любых векторов* $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ *и* $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ *верно следующее* $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2$.

Утверждение 3. *Для любых векторов* $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}$ *и чисел* α, β *верно утверждение* $(\alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = \alpha(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + \beta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$.

Задача 6

Найдите скалярное произведение векторов **(a)** $\overrightarrow{v} = (3, 7), \overrightarrow{u} = (8, -4)$; **(b)** $\overrightarrow{v} = (-2, 4, 5), \overrightarrow{u} = (1, -4, 3)$.

Задача 7

Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}$, таких что $|\overrightarrow{v}| = 6, |\overrightarrow{u}| = 7$ и угол между векторами равен $120°$.

Перпендикулярность векторов

Утверждение 4. *Векторы* $\overrightarrow{v}$ *и* $\overrightarrow{u}$ *перпендикулярны тогда и только тогда, когда* $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = 0$.

Задача 8

Докажите, что векторы $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) - \overrightarrow{w}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$ перпендикулярны.

Вектор нормали

Определение. *Вектором номрали* к прямой называется вектор, перпендикулярный прямой.

Наблюдение. Прямая однозначно определяется своим вектором нормали.

Определение. *Нормальным векторным уравнением* прямой называется уравнение вида $(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{n}) = 0$, где $\overrightarrow{r_0}$ — радиус-вектор до некоторой точки, лежащей на прямой, а $\overrightarrow{n}$ — вектор нормали к прямой.

Задача 9

Укажите любой вектор нормали для прямой $Ax + By + C = 0$.

Расстояние от точки до прямой

Утверждение 5. *Расстояние от точки с радиус-вектором* $\overrightarrow{r_1}$ *до прямой заданной нормальным веторным уравнением равно* $\dfrac{|(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{n})|}{|\overrightarrow{n}|}$.

Утверждение 6. *Расстояние от точки* (x_1, y_1) *до прямой заданной общим уравнением равно* $\dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Задача 10

Найдите расстояние от точки $A(-1, 2)$ до прямой $4x - 3y - 15 = 0$.

Способы задать плоскость

Определение. *Параметрическим уравнением* плоскости называется уравнение вида $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{u}$, где $\overrightarrow{r_0}$ — радиус-вектор некоторой точки плоскости, а два других вектора — направляющие векторы плоскости.

Определение. *Нормальным векторным уравнением* плоскости называется уравнение вида $(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{n}) = 0$, где $\overrightarrow{r_0}$ — радиус-вектор некоторой точки плоскости, а $\overrightarrow{n}$ — вектор нормали к плоскости.

Определение. *Общим уравнением* плоскости называется уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Задача 11

(a) Зная параметрическое уравнение плоскости: $x = 1 + u - v, y = 2 + u + 2v, z = -1 - u + 2v$, составьте общее уравнение плоскости.

(b) Зная общее уравнение плоскости $2x - 3y + z + 1 = 0$, составьте параметрическое уравнение плоскости.

Расстояние от точки до плоскости

Утверждение 7. *Расстояние от точки с радиус-вектором* $\overrightarrow{r_1}$ *до прямой заданной нормальным веторным уравнением равно* $\dfrac{|(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{n})|}{|\overrightarrow{n}|}$.

Утверждение 8. *Расстояние от точки* (x_1, y_1, z_1) *до плоскости заданной общим уравнением равно* $\dfrac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Задача 12

Найти расстояние от точки $A(3, 1, -1)$ до плоскости $x - 2y + 2z - 2 = 0$.