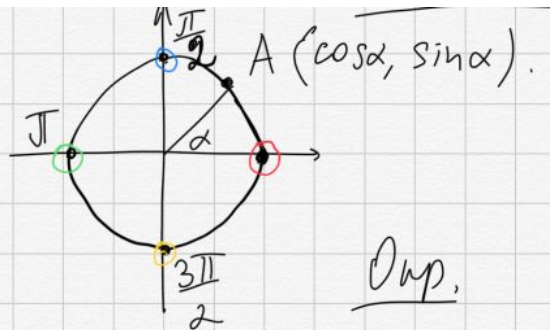
2 Тригонометрические функции

Определение. Рассмотрим на координатной плоскости единичную окружность с центром в точке $(0, 0)$. Рассмотрим некоторое число α и отложим от луча Ox угол α (в радианах). Этот луч пересекает окружность в точке A, для которой длина дуги от точки $(1, 0)$ до A равна α. Координаты x и y точки A называются соответственно *косинусом* и *синусом* (пишут $\cos\alpha$, $\sin\alpha$). *Тангенсом* (пишут $\operatorname{tg}\alpha$) называют отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.



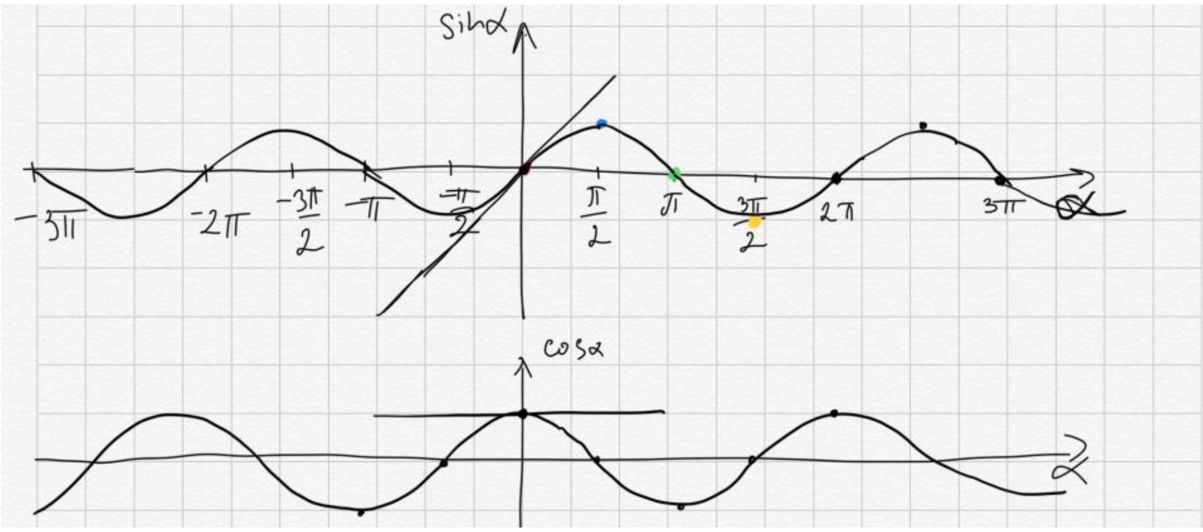
α – произв. число.

A – точка на ед. окр. с углом α.

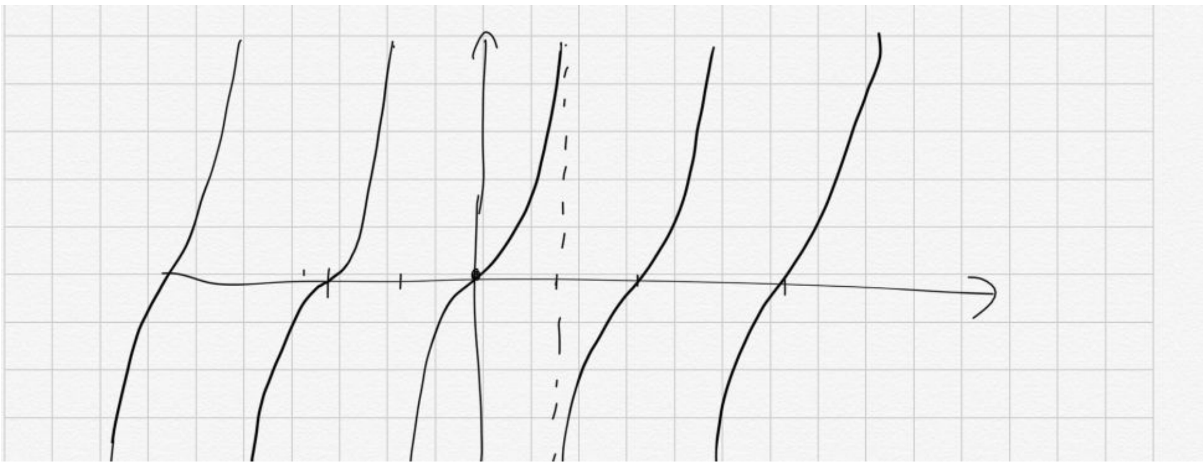
Опр.

Замечание

(угол в рад) = (угол в град) · $\frac{\pi}{180^\circ}$.



Тангенс



Свойства тригонометрических функций

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{1}$$
$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha \tag{2}$$
$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha \tag{3}$$
$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \tag{4}$$
$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha \tag{5}$$
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \tag{6}$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \tag{7}$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{8}$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{9}$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{10}$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \tag{11}$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{12}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \tag{13}$$

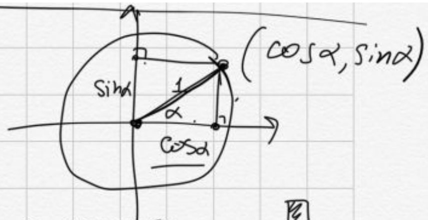
1. Докажите основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Задача 1.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

Решение: модуль вектора $(\sin\alpha, \cos\alpha)$ равен 1, из чего следует тождество.



2. Найдите значения $\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{6}$.

Устно проговорили основную идею решения. Правильный ответ: ½, $\sqrt{3}/2$. Первым делом находим значение синуса из того, что в прямоугольном треугольнике с углами 30, 60, 90 короткий катет в два раза короче гипотенузы. Значение косинуса находим из основного тригонометрического тождества.

3. Докажите тождества

(a) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;

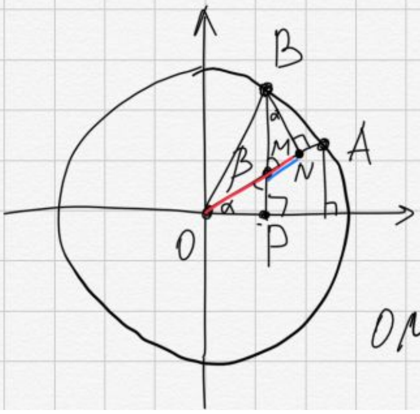
(b) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$;

(c) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;

(d) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

Задача 3а. Д-ть, что

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$



Найти длину отрезка OP.

$$OM = OP/\cos\alpha.$$

$$OM = \underline{ON} - \underline{MN} = \cos\beta - \sin\beta\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$OP = OM\cdot\cos\alpha = \cos\beta\cdot\cos\alpha - \sin\beta\cdot\sin\alpha.$$

MN – катет в $\triangle BMN$.

$$MN = BN\cdot tg\angle MBN = BN\cdot tg\alpha = \sin\beta\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\beta\cdot\cos\alpha - \sin\beta\cdot\sin\alpha.$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\cdot\sin\alpha$$

Задача 4. Найти $\sin 3x$.

$$\sin(3x) = \sin(2x+x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x \;(=)$$

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$(=)\; 2\sin x \cos^2 x + \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) =$$

$$= 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 3\sin x(1-\sin^2 x) - \sin^3 x =$$

$$= 3\sin x - 4\sin^3 x$$

Задача 5. Решить ур-е.

$$\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0.$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 4\frac{\sin x}{\cos x} + 3 = 0 \qquad \frac{\sin x}{\cos x} = tg\,x = t$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-1)(t-3) = 0$$

$$tg\,x = 1; \quad tg\,x = 3$$

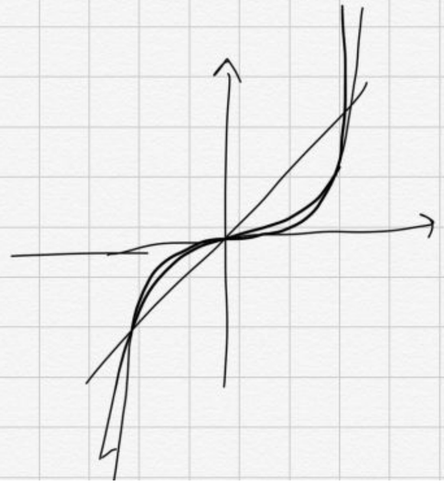
$$x = \left[\begin{array}{l} arctg\,1 + \pi n,\ n \in N \\ arctg\,3 + \pi n,\ n \in N \end{array}\right.$$

Разложения тригонометрических функций в ряд

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

В окрестности точки 0:

слагаемые $\frac{x^3}{3!}, \frac{x^5}{5!}, \dots$



Слагаемые начиная со второго малы по сравнению с первым слагаемым в разложении. Следовательно, в окрестности точки 0 имеем примерное равенство

$$\sin x \approx x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Равенство нулю коэффициента при x в разложении косинуса говорит о том, что касательная в точке 0 к графику функции косинуса параллельна оси Ox.