Матрицы

Определение. *Матрице* размера $m \times n$ называется таблица из mn чисел, в которой m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются *элементами* матрицы. Если число строк матрицы совпадает с числом столбцов, то матрица называется *квадратной*, иначе *прямоугольной*.

Пример. Матрицы можно записывать по-разному. В данном курсе мы будем придерживаться следующей записи.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Замечание. Аналогом матриц в программировании является двумерный массив.

Определение. Две матрицы *равны*, если у них одинаковые размеры и на каждой позиции у них стоят одинаковые элементы.

Определение. *Подматрицей* некоторой матрицы называется матрица составленная из элементов, стоящих на пересечении каких-то строк и столбцов изначальной матрицы.

Задача 1

Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(а) Выпишите подматрицу, расположенную в строках 1 и 3 и столбцах 1 и 3.

(б) Сколько всего подматриц имеет данная матрица?

Действия с матрицами

Определение. Матрицей *транспонированной* к матрице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ & & \dots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицу, транспонированную к матрице A, будем обозначать A^T.

Замечание. Для любой матрицы A верно $(A^T)^T = A$.

Определение. *Суммой* матриц A и B одинакового размера называется матрица C того же размера, у которой на каждой позиции стоит элемент, равный сумме элементов матриц A и B на этой позиции: для всех i и j $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Задача 2

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Можно ли сложить матрицы **(а)** A и B; **(б)** A^T и B; **(в)** A и B^T; **(г)** A^T и B^T?

Определение. *Произведением* матрицы A и некоторого числа α называется матрица B, все элементы которой являются элементами матрицы A, умноженными на число α, то есть $b_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Задача 3

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Вычислите матрицу $2A + 3B - C$.

Умножение матриц

Определение. *Произведением* матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times k$ называется матрица C размера $m \times k$, элементы которой заданы соотношениями $c_{ij} = \sum\limits_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj}$.

Наблюдение. Если матрица A состоит из строк $a_1, \ldots, a_m$, а матрица B из столбцов $b_1, \ldots, b_k$, то $c_{ij} = (a_i, b_j)$, где подразумевается скалярное произведение строки и столбца как векторов. Также $AB = A\begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ab_1 \ldots Ab_k \end{pmatrix}$ и $AB = \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} a_1 B \\ \ldots \\ a_m B \end{pmatrix}$

Пример. Матрица размера $m \times n$ умножается на столбец высоты n. В итоге получается столбец высоты m.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Пример. Строка длины m умножается на матрицу размера $m \times n$. В итоге получается строка длины n.

$$\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & \ldots & b_{2n} \\ & \ldots & \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m} x_i b_{i1} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{m} x_i b_{in} \end{pmatrix}$$

Пример. Столбец высоты m умножается на строку длины n. В итоге получается матрица размера $m \times n$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \ldots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \ldots & x_2y_n \\ & & \ldots & \\ x_my_1 & x_my_2 & \ldots & x_my_n \end{pmatrix}$$

Утверждение 1. *Если для матриц A, B, C определены произведения AB и $(AB)C$, то определены и произведения BC и $A(BC)$, и выполнено равенство $(AB)C = A(BC)$.*

Утверждение 2. *Если для матриц A, B, C определено выражение $A(B + C)$, то $A(B + C) = AB + AC$. Если определено выражение $(A + B)C$, то $(A + B)C = AC + BC$.*

Утверждение 3. *Если для матриц A, B определено произведение AB, то определено произведение $B^T A^T$ и выполнено $(AB)^T = B^T A^T$. Более того, можно утверждать, что $(A_1 A_2 \dots A_k)^T = A_k^T \dots A_2^T A_1^T$.*

Задача 4

Вычислите произведение матриц $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

Задача 5

Вычислите произведение матриц $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Обратная матрица

Определение. *Элементарными преобразованиями* строк матрицы называются умножение строки на число, отличное от нуля и прибавление одной строки к другой. Аналогично определяются элементарные преобразования столбцов матрицы.

Пример. Покажем, как с помощью элементарных преобразований переставить 2 строки местами.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+b \\ b-a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

Пример. Всякий набор элементарных преобразований строк матрицы A можно описать при помощи умножения матрицы A слева на некоторую квадратную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c+a & d+b \end{pmatrix}$$

Определение. Матрица, при помощи которой описываются элементарные преобразования, называется *элементарной*.

Задача 6

Подберите элементарную матрицу K так, чтобы матрица KA получалась из A:
(а) прибавлением первой строки ко второй;
(б) перестановкой первых двух строк A.

Определение. Квадратная матрица называется *невырожденной*, если её строки линейно независимы.

Утверждение 4. ***(а)*** *Элементарные преобразования строк переводят линейно независимые строки в линейно независимые, а линейно зависимые — в линейно зависимые.*

(б) *Элементарные преобразования строк переводят невырожденную матрицу в невырожденную, а вырожденную — в вырожденную.*

(в) *Каждая невырожденная матрица с помощью элементарных преобразований может быть превращена в единичную матрицу.*

(г) *Матрица невырождена тогда и только тогда, когда она раскладывается в произведение элементарных матриц.*

Определение. *Обратной* матрицей к матрице A называется матрица A^{-1} такая, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Утверждение 5. ***(а)*** *Если у матрицы есть обратная, то она единственна.*

(б) *Матрица имеет обратную тогда и только тогда, когда она невырождена.*

(в) *Для любой матрицы A, имеющей обратную, верно $(A^{-1})^{-1} = A$.*

(г) *Для любых матриц A, B таких, что у AB есть обратная, верно $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

(д) *Для любой матрицы A, имеющей обратную, верно $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Задача 7

Найдите обратную матрицу к матрице $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Ранг матрицы

Определение. *Рангом* матрицы называется наибольшее число, для которого существует невырожденная квадратная подматрица такого размера. Будем обозначать ранг матрицы A как RgA.

Утверждение 6. ***(а)*** *Ранг матрицы не меняется при транспонировании.*

(б) *Ранг любой подматрицы не превосходит ранг матрицы.*

(в) *Ранг матрицы равен наибольшему количеству линейно независимых столбцов (строк) матрицы.*

(г) *Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.*

(д) *Если матрица A невырождена и определены произведения AB и CA, то $RgAB = RgB$ и $RgCA = RgC$.*

(е) *Ранг произведения двух матриц не превосходит рангов этих матриц.*

Задача 8

Найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Задача 9

Квадратная матрица размера n имеет нулевую квадратную подматрицу размера $n-1$. Оцените ранг матрицы.

Детерминант матрицы

Определение. *Детерминантом* или *определителем* квадратной матрицы A размера n называется число $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} d_{ij}$, где d_{ij} — детерминант матрицы, полученной вычеркиванием из матрицы A i-й строки и j-го столбца.

Утверждение 7. ***(а)*** $\det A = \det A^T$.

(б) *Если столбцы матрицы линейно зависимы, то детерминант матрицы равен 0.*

(в) *Если переставить местами два столбца, то детерминант умножится на (-1).*

(г) *Если прибавить к одному столбцу другой, умноженный на некоторое число, то детерминант не изменится.*

(д) $\det AB = \det A \det B$.

Задача 10

Выразите $\det \alpha A$ через $\det A$.

Задача 11

Вычислите $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$