©МатБюро - Решение задач по математике, статистике, экономике, программированию Еще решения математической статистики: www.matburo.ru/ex_subject.php?p=ms

Метод наибольшего правдоподобия для геометрического распределения

Задание. Найти методом наибольшего правдоподобия по выборке x_1, x_2, x_n точечную оценку параметра p геометрического распределения:

$$P(X = x_i) = (1-p)^{x_i-1} p,$$

где x_i - число испытаний, произведенных до появления события, p - вероятность появления события в одном испытании.

Решение. Составим функцию правдоподобия

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{x_i-1} p = p^n \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{x_i-1}.$$

Тогда

$$\ln L(p) = \ln \left[p^{n} \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{x_{i}-1} \right] = \ln \left[p^{n} \right] + \ln \left[\prod_{i=1}^{n} (1-p)^{x_{i}-1} \right] =$$

$$= n \ln p + \sum_{i=1}^{n} \ln \left((1-p)^{x_{i}-1} \right) = n \ln p + \sum_{i=1}^{n} (x_{i}-1) \ln (1-p) =$$

$$= n \ln p + \ln (1-p) \sum_{i=1}^{n} (x_{i}-1) = n \ln p + \ln (1-p) \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i} - n \right) =$$

$$= n \ln p + \ln (1-p) \sum_{i=1}^{n} x_{i} - n \ln (1-p).$$

Условия экстремума:

$$\frac{d \ln L}{dp} = \left(n \ln p + \ln \left(1 - p \right) \sum_{i=1}^{n} x_i - n \ln \left(1 - p \right) \right)^{-1} = n \frac{1}{p} + \frac{-1}{1 - p} \sum_{i=1}^{n} x_i - n \frac{-1}{1 - p} = 0,$$

$$n \frac{1}{p} + \frac{1}{p - 1} \sum_{i=1}^{n} x_i - n \frac{1}{p - 1} = 0,$$

Преобразуем:

Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru

©МатБюро - Решение задач по математике, статистике, экономике, программированию Еще решения математической статистики: www.matburo.ru/ex_subject.php?p=ms

$$\frac{1}{p-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n \right) = -n \frac{1}{p}$$

$$-\frac{p-1}{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}{n},$$

$$\frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - 1,$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$p = 1 / \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right).$$

Таким образом, в качестве оценки получаем: $p^* = 1/\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) = 1/\overline{x_B}$.