Производная

Мы переходим к ключевому понятию производной. На интуитивном уровне производная функции f в точке x_0 — это скорость роста f в x_0 или, что то же самое, тангенс угла наклона касательной к графику функции f в точке x_0 по отношению к оси абсцисс.

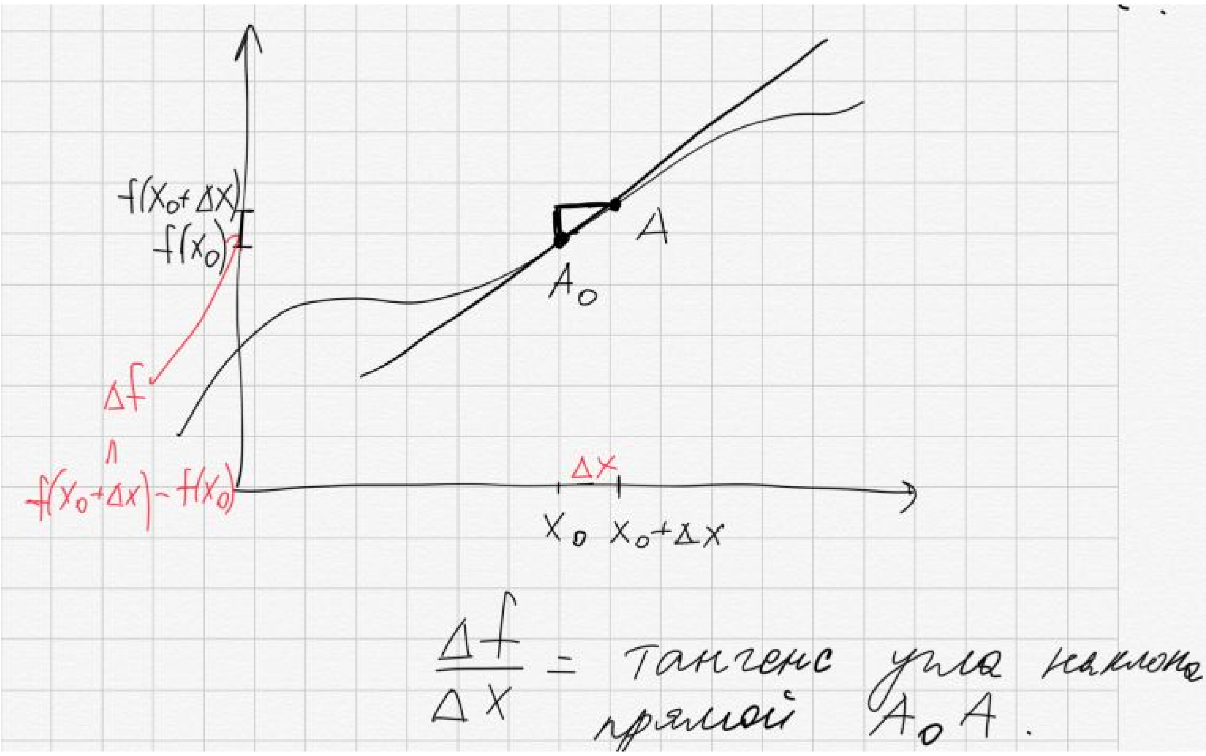
Формальное определение производной вводится через предел.

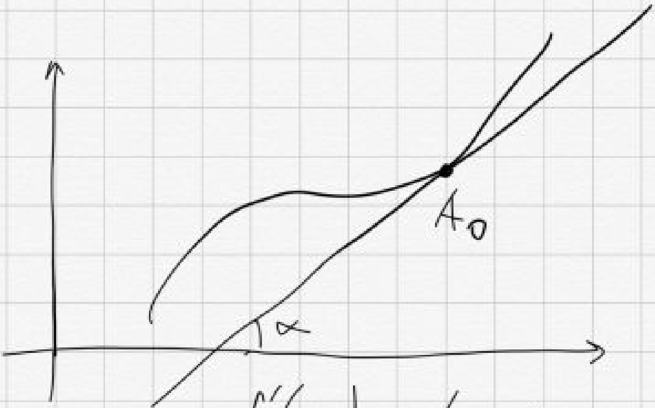
Определение. *Производной* функции f в точке x_0 называется число

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Если функция имеет производную в точке x_0, то она называется *дифференцируемой в точке* x_0. Функция называется *дифференцируемой*, если она дифференцируема в каждой своей точке.

На интуитивном уровне дифференцируемость функции означает, что в каждой точке к ней можно провести касательную. Иными словами, дифференцируемость означает как бы “гладкость” функции.

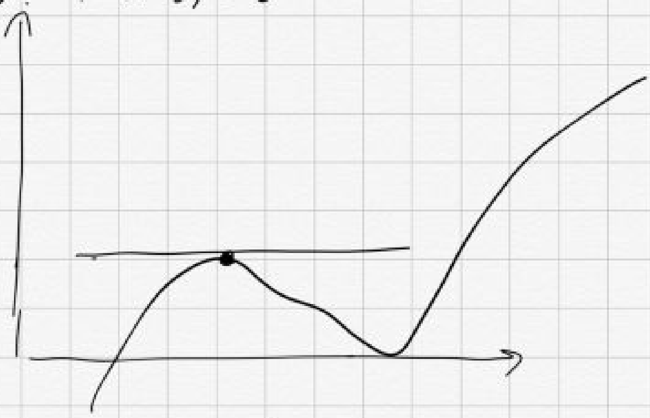


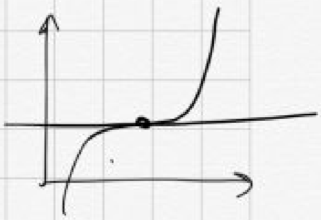


$f'(x_0) = tg\alpha$, где α – угол наклона каст. к графику

Производная – скорость роста функции в точке.

Пример. $f'(x_0) = 0$





Вывод: $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0$ – точка, подозрит. на лок. минимум или лок. максимум.

Пример: задача лин. регрессии

$$\overline{x^1} = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots, x_n^1) \to y^1$$

$$\overline{x^2} = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2) \to y^2$$

$$\vdots$$

$$\overline{x^l} = (x_1^l, x_2^l, \dots, x_n^l) \to y^l$$

$$y = \underbrace{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n} + b$$

$$\left| y^i - (w_1 x_1^i + w_2 x_2^i + \dots + w_n x_n^i + b) \right| \to \min_{w, b}$$

$$\sum_{i=1}^{l} \left| y^i - (\langle w, \overline{x^i} \rangle + b) \right| \to \min_{w, b}$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{l} \left| y^i - (\langle w, \overline{x^i} \rangle + b) \right|^2}_{} \to \min_{w, b}$$

для вычисления минимума ф-ции потерь необходимо будет считать производную.

1. Найдите производную следующих функций (по определению):

(a) $f(x) = c$; **(b)** $f(x) = ax$; **(c)** $f(x) = x^2$; **(d)** $f(x) = \frac{1}{x}$;
(e) $f(x) = \sin x$ (в точке 0); **(f)** $f(x) = e^x$ (в точке 0).

Задача 1a.

$$f(x) = c. \quad f'(x) = ?$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

$$f'(x) = 0. \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Задача 1b.

$$f(x) = ax. \quad f'(x) = ?$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{ax - ax_0}{x - x_0} =$$

$$= \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a.$$

$$f'(x) = a. \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Задача 1c.

$$f(x) = x^2. \quad f'(x) = ?$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x - x_0)}(x + x_0)}{\cancel{x - x_0}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

$$f'(x) = 2x.$$

Задача 1e.

$$f(x) = \sin x \quad f'(x_0), \quad x_0 = 0.$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \overset{0}{\cancel{\sin 0}}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

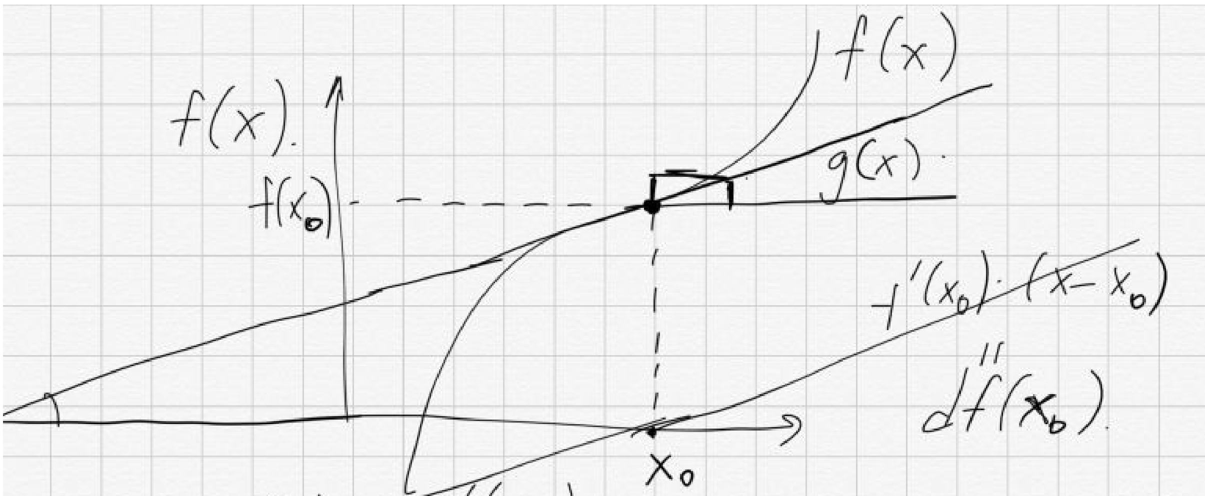
$$f'(0) = 1.$$

Утверждение 1 (Ключевое свойство производной, скорость роста)**.** *Функция f имеет в точке x_0 производную а тогда и только тогда, когда в окрестности точки x_0 выполняется*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + o(x - x_0).$$

Интуиция здесь такая. Слева в последнем равенстве написана сама функция. Справа написана *линейная функция* $f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ плюс маленькая прибавка $o(x - x_0)$ (поймите, почему она действительно маленькая по сравнению с самой функцией).

Иными словами, функция f ведёт себя в окрестности точки x_0 близко к линейной функции $f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$.



$$g(x) = \underbrace{f'(x_0)\cdot x} + C$$

$$f(x_0) = g(x_0) = f'(x_0)\cdot x_0 + C$$

$$C = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$$

$$g(x) = f'(x_0)\cdot x + \left(f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0\right)$$

$$\boxed{g(x) = \underbrace{f'(x_0)\cdot(x - x_0)} + \underbrace{f(x_0)}}$$

Дифференциал

Определение. Линейная функция $df(x) = (x - x_0)f'(x_0)$ называется *дифференциалом* функции f в точке x_0 и обозначается df.

$f'(x)$

независимо во всех точках вычислим производную

$df(x_0)$

вычислим производную в 1 точке и восстановим лин. приращение ф-ции.

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

Поведение $f(x)$ в т. x_0 описывается значением $f'(x_0)$.

Свойства производной

Теорема 2. *Справедливы следующие формулы.*

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;
- $(cf(x))' = cf'(x)$;
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$;
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$;
- $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$;
- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Эти утверждения дают нам алгоритм вычисления любой производной.

Производные элементарных функций

Все элементарные функции дифференцируемы в любой точке области определения. Приведём производные этих функций.

Теорема 1. *Справедливы следующие равенства:*

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(a^x)' = a^x \ln a$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Практика

3. Вычислите производную следующих функций:

(a) $x^3 + x^2 + x + 1$;

(b) $7x^{13} + 13x^{-17}$;

(c) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+7}$;

(d) $5x \cos x$;

(e) $\frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}$;

(f) $\frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$;

(g) $(x^2 - 7x + 8)e^x$;

(h) $\ln \cos x$;

(i) $\sin^2 x + \sin x^2$;

(j) $\frac{x}{2}(\sin \ln x + \cos \ln x)$.

Задача 3а.

$$(x^3+x^2+x+1)' = (x^3)' + (x^2)' + (x)' + (1)' =$$
$$= 3x^2 + 2x + 1.$$

Задача 3с

$$\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+7}\right)' = \frac{(x^2-5x+6)'(x^2+x+7) - (x^2-5x+6)(x^2+x+7)'}{(x^2+x+7)^2} =$$
$$= \frac{(2x-5)(x^2+x+7) - (x^2-5x+6)(2x+1)}{(x^2+x+7)^2}.$$

Задача 3е).

$\sqrt{x} = x^{1/2}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{tg x}\right)' = \left(\frac{\sqrt{x} \cdot \cos x}{\sin x}\right)' =$$

$$= \frac{(\sqrt{x} \cdot \cos x)' \cdot \sin x - (\sqrt{x} \cdot \cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\sin x\right)\sin x - \sqrt{x} \cdot \cos^2 x}{(\sin x)^2} =$$

$$= \frac{\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{\sin^2 x}.$$

Задача 3h

$(f(g(x)))' = f' g'$

$$(\ln \cos 3x)' = \frac{1}{\cos 3x} \cdot (\cos 3x)' =$$

$$= \frac{1}{\cos 3x} \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 = -3 \, tg\, 3x.$$

$$(f(cx))' = c f'(cx).$$

Задача 3j

$$\left(\frac{x}{2}(\sin \ln x + \cos \ln x)\right)' =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\sin \ln x + \cos \ln x) + \frac{x}{2}\left((\sin \ln x)' + (\cos \ln x)'\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\sin \ln x + \cos \ln x) + \frac{\cancel{x}}{2} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{x}}\right) \cdot (\cos \ln x - \sin \ln x)$$

$$= \cos \ln x.$$

$(\sin \ln x)' = \cos \ln x \cdot \frac{1}{x}$

$(\cos \ln x)' = -\sin \ln x \cdot \frac{1}{x}.$

к-т при x соответствующего значению $f'(0)$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

(в точке 0).

$$(\sin x)' = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \ldots$$

$$(\sin x)'_{x=0} = \underline{1}.$$

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 +$$

$$+ \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \ldots$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} \cdot x^k}$$

ряд Тейлора.