Предел функции и непрерывность

Определение предела функции

Мы переходим к ещё одному ключевому понятию в математическом анализе — понятию предела функции. Понятие предела функции — это способ формализации таких важнейших концепций, как непрерывность и производная.

Определение. Проколотой ε-окрестностью точки x_0 называется множество

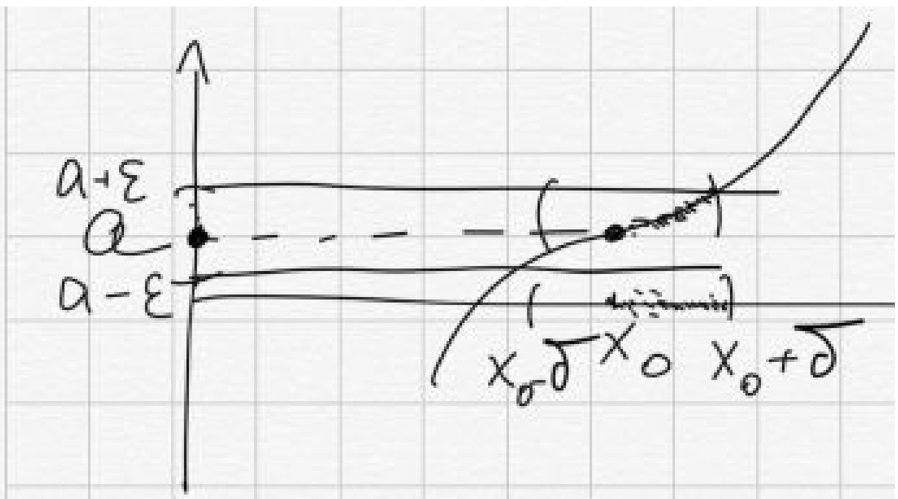
$$U'_\varepsilon(x_0) = \{x : 0 < |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

Определение (Предел по Коши)**.** Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. *Пределом* функции f в точке x_0 называется такое число a, что выполняется следующее. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если x принадлежит проколотой δ-окрестности x_0, то $f(x)$ принадлежит ε-окрестности точки a.

Формально,

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in U'_\delta(x_0) \, (|f(x) - a| < \varepsilon).$$

В таком случае пишут $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ или $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} a$.



Определение (Предел по Гейне)**.** Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. *Пределом* функции f в точке x_0 называется такое число a, что выполняется следующее. Для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, стремящейся к x_0, но не достигающей её (то есть $x_n \neq x_0$ ни для какого n) справедливо

$$f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} a.$$

Замечание. Аналогично определяются пределы, равные $+\infty$ и $-\infty$.

Теорема 1 (Эквивалентность двух определений, б/д)**.** *Определения по Коши и по Гейне эквивалентны.*

1. Найдите предел функции $f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-4x}$ в точке $x_0 = 4$ и докажите наличие предела по определению (по Коши).

$$\frac{x^2-16}{x^2-4x} = \frac{(x-4)(x+4)}{x(x-4)} \overset{(x\neq 4)}{=} \frac{x+4}{x}.$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x+4}{x} \overset{?}{=} 2.$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in U'_\delta(x_0): |f(x)-a|<\varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in U'_\delta(4): \left|\frac{x+4}{x}-2\right| < \varepsilon.$$

Фиксируем $\varepsilon>0$. Найдем $\delta(\varepsilon)$ т.ч.

$$\left|\frac{x+4}{x}-2\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{x+4-2x}{x}\right| < \varepsilon.$$

$$|4-x| < \varepsilon \cdot x.$$

(пусть $x>4$).

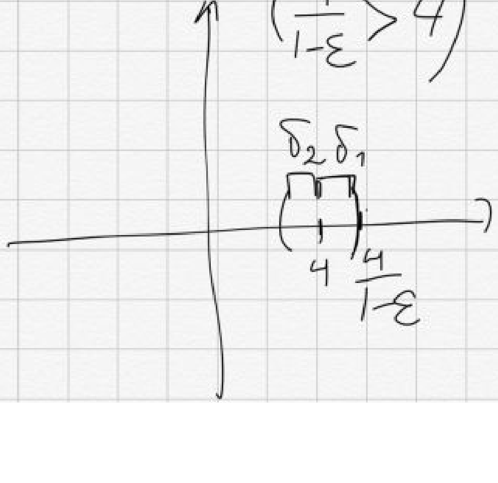
$$-4+x < \varepsilon \cdot x$$

$$\boxed{(1-\varepsilon)\cdot x < 4}$$

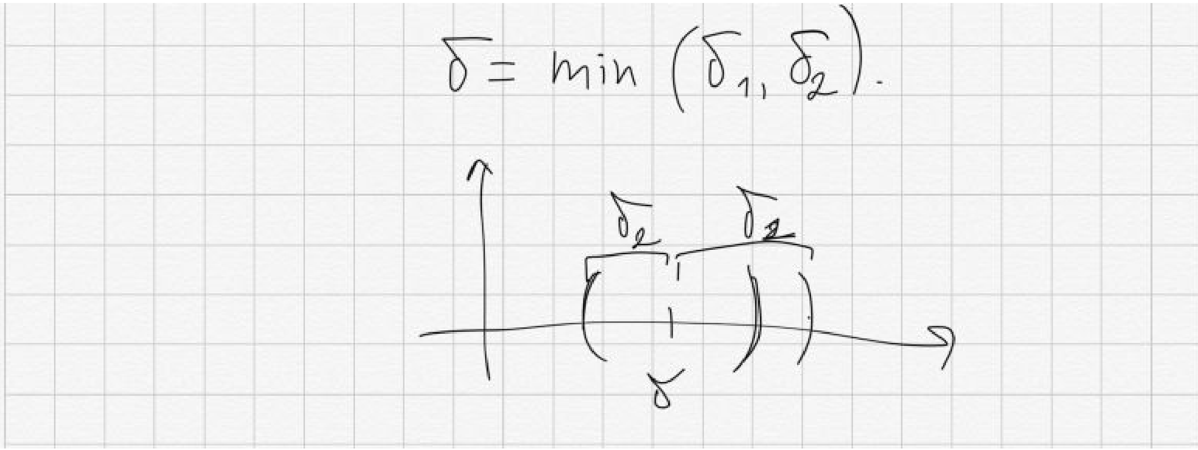
$$\underbrace{x < \frac{4}{1-\varepsilon}}$$

$$\delta_1 = \frac{4}{1-\varepsilon} - 4.$$

$$\left(\frac{4}{1-\varepsilon} > 4\right)$$



Аналогично определяется дельта_2 (для случая x < 4).



Теорема 2 (Арифметические операции под знаком предела)**.** *Пусть $f(x)$, $g(x)$ — две функции, причём $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$. Тогда*

- $f(x) \pm g(x) \to a \pm b;$
- $f(x)g(x) \to ab;$
- *Если $b \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{a}{b}$.*

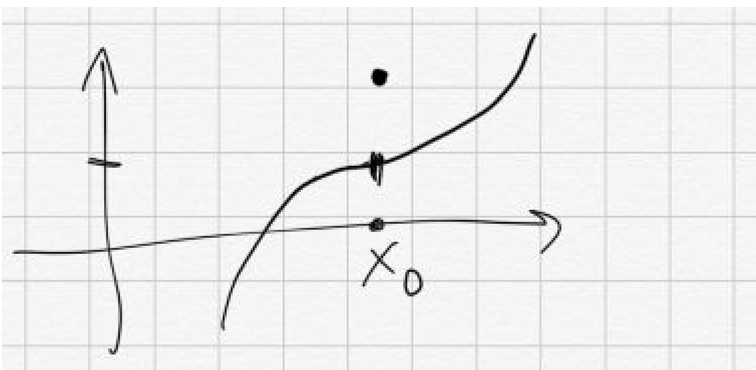
Непрерывные функции

Определение. Функция f называется *непрерывной* в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функция f называется *непрерывной*, если она непрерывна в каждой своей точке.

Замечание. На интуитивном уровне непрерывность функции означает, что её график можно нарисовать, не отрывая ручки от бумаги.



Пример. Найти предел $f(x)$

$$\lim \frac{\ln \cos x}{x^2+8x} \text{ в т. } x_0 = 2\pi.$$

$$\frac{\ln \cos 2\pi}{(2\pi)^2+16\pi} = \frac{\ln 1}{(2\pi)^2+16\pi} = 0.$$

$$f(2\pi) = 0.$$

Если f – непрерывна в т. 2π, то

$$\boxed{\lim_{x \to 2\pi} f(x) = f(2\pi) = 0.}$$

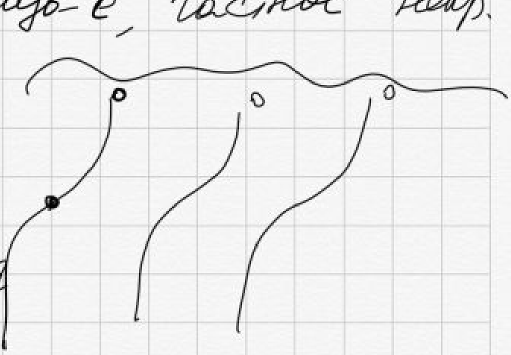
из непр-и

Хорошая новость:

1) Все элементарные функции непр. на всей области опр-я.

2) Сумма, разность, произв-е, частное непр. функций – непр. функция

3) Композиция непр. функций – непр. функция



$$\ln \cos \sqrt{x^3+x}$$

Последняя функция непрерывна в точке 0, поскольку определена в ней и составлена из элементарных функций.

3. Найдите

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$; **(b)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$; **(d)** $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

а) $x_0 = 1$.

$$\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

б) $x_0 = 2$.

в точке $x_0=2$ неопр-ть $\frac{0}{0}$.

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+1)} \quad (x \neq 2) = \frac{x+2}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+1} = \frac{4}{3}$$

в) $x_0 = +\infty$

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$$ (пределы посл-тей).

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1.$$

г) $x_0 = -1$.

$$\boxed{\lim_{x\to -1} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \infty.}$$

x^2-x-2 – непр. ф-ция (в т. -1).

Если мы хотим воспользоваться любым способом раскрытия неопределённостей любого вида, например,

$$\frac{c}{0},\ c\neq 0 \qquad \frac{0}{0},\ \frac{c}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{\infty}$$

нам необходимо сначала проверить непрерывность функции в точке.

Предел функции VS предел последовательности

$$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$f: U'_{\varepsilon}(x_0)\to\mathbb{R}$$

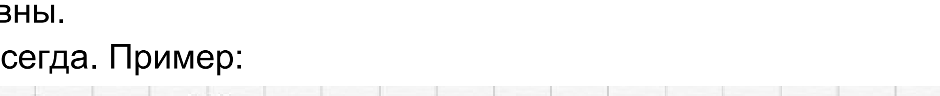
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\dots$$

$$f: \mathbb{N}\to\mathbb{R}$$

$$f(n)=x_n.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2(x^2+x)} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2(n^2+n)}$$

Последние два предела -- вообще говоря отличаются! Но если функция хорошо себя ведёт на бесконечности (например, если она монотонна), то эти пределы равны.
Так бывает не всегда. Пример:



$$f(x)=\sin\pi x.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin\pi n = 0$$

$$\nexists \lim_{x\to+\infty}\sin\pi x$$