РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИСЧИСЛЕНИЕ СОБЫТИЙ

Случайное событие A, связанное с опытом S, – это такое событие, которое может произойти или не произойти в результате опыта *S*, причём заранее, до проведения опыта, неизвестно, произойдет оно или нет. Достоверным событием, связанным с опытом *S*, называется такое событие Ω, которое обязательно произойдёт в результате опыта *S*. Невозможным событием, связанным с опытом *S*, называется такое событие $\varnothing$, которое обязательно не произойдет в результате опыта *S*.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИСЧИСЛЕНИЕ СОБЫТИЙ

Над событиями A и B, связанными с одним и тем же опытом S, определены следующие операции.

- ***Событие A влечет за собой событие B (или событие A вложено в событие B)***, если каждое появление события A сопровождается появлением события B. Это обозначается как $A \subseteq B$. События A и B называют ***эквивалентными***, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Эквивалентность обозначается как $A = B$.
- ***Объединением (или суммой) событий A и B*** называется событие $A \cup B$ (или $A + B$), которое наступает всегда, когда наступает либо событие A, либо событие B.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИСЧИСЛЕНИЕ СОБЫТИЙ

- *Пересечением (или произведением) событий A и B* называется событие $A \cap B$ (или AB), которое наступает всегда, когда события A и B наступают одновременно.
- *Дополнением события B до события A* (или разностью событий A и B) называется событие $A \setminus B$, которое наступает всегда, когда наступает событие A, и при этом не наступает событие B.
- *Противоположным событию A* называется событие $\bar{A} = \Omega \setminus A$ (читается «не A»), которое наступает всегда, когда событие A не наступает.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИСЧИСЛЕНИЕ СОБЫТИЙ

- *События A и B* называются *несовместными*, если в результате опыта S события A и B не могут наступить одновременно, т.е. если $A \cap B = \emptyset$.

Говорят, что события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу, если они попарно несовместны ($H_i \cap H_j = \emptyset, \;\; i \neq j$) и их объединение эквивалентно достоверному событию ($H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$).

Случайное событие ω, связанное с опытом S, которое невозможно представить как объединение или пересечение более простых событий, связанных с тем же опытом, называется *элементарным событием*.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

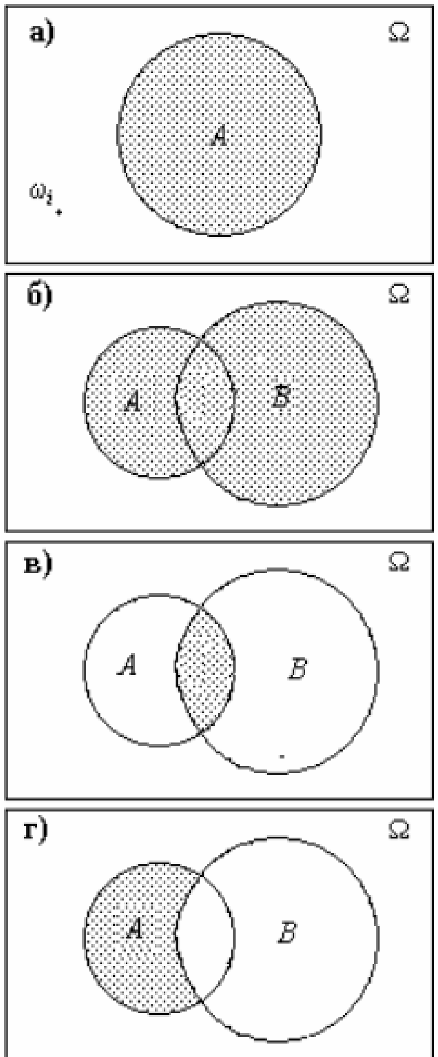
ИСЧИСЛЕНИЕ СОБЫТИЙ

Очевидно, что достоверное событие $\Omega = \{\omega\}$ – это множество всех элементарных событий (поэтому Ω называют ещё ***пространством элементарных событий***), а невозможное событие $\emptyset$ – это пустое множество. Любое событие, связанное с опытом S, можно представить как некоторое подмножество достоверного события Ω, т.е. как множество некоторых элементарных событий.

Для наглядного представления событий, операций над событиями и отношений между ними используются диаграммы Венна – Эйлера.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

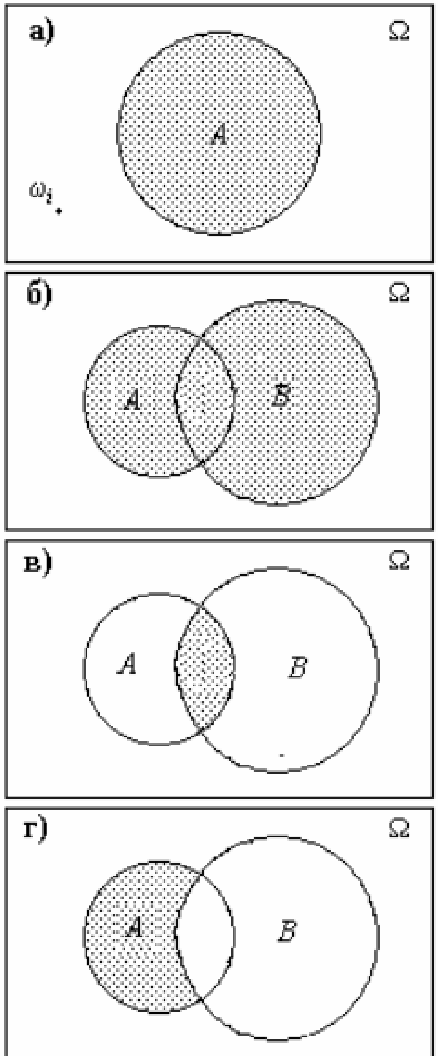
ИСЧИСЛЕНИЕ СОБЫТИЙ



На этих диаграммах достоверное событие Ω изображается в виде некоторой области на плоскости, элементарные события ω_i – точками внутри области, соответствующей Ω. При этом любому случайному событию A будет соответствовать некоторая геометрическая фигура внутри области, соответствующей Ω (а). Объединение $A \cup B$ событий A и B состоит из всех элементарных событий, принадлежащих, по крайней мере, одному из событий A и B (б).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

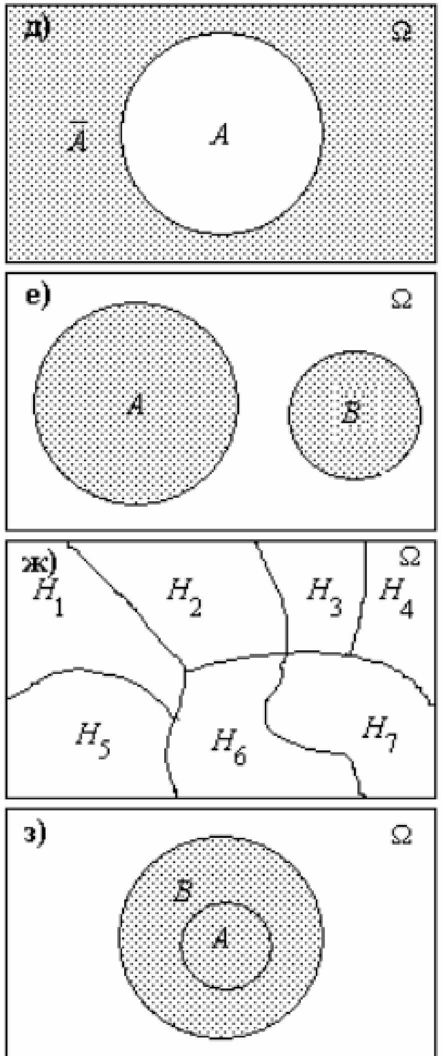
ИСЧИСЛЕНИЕ СОБЫТИЙ



Пересечение $A \cap B$ событий A и B состоит из всех элементарных событий, принадлежащих одновременно обоим событиям A и B (в).

Дополнение $A \setminus B$ события B до события A состоит из всех элементарных событий, принадлежащих событию A и при этом не принадлежащих событию B (г).

ИСЧИСЛЕНИЕ СОБЫТИЙ



Событие $\bar{A}$, противоположное событию A, состоит из всех элементарных событий, не принадлежащих событию A (д).

Несовместные события не имеют общих элементарных событий (е). Полная группа событий представлена на рис. ж. Событие A влечёт за собой событие B, если все элементарные события, входящие в A, входят и в B (з).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИСЧИСЛЕНИЕ СОБЫТИЙ

Парадокс ремонта в России

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИСЧИСЛЕНИЕ СОБЫТИЙ

Операции над событиями обладают следующими свойствами:

коммутативность объединения событий:

$$A \cup B = B \cup A, \tag{9}$$

ассоциативность объединения событий:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \tag{10}$$

$$A \cup A = A, \tag{11}$$

$$A \cup \bar{A} = \Omega, \tag{12}$$

$$A \cup \emptyset = A, \tag{13}$$

$$A \cup \Omega = \Omega, \tag{14}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИСЧИСЛЕНИЕ СОБЫТИЙ

коммутативность пересечения событий:

$$A \cap B = B \cap A, \qquad (15)$$

ассоциативность пересечения событий:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \qquad (16)$$

дистрибутивность пересечения событий относительно объединения:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \qquad (17)$$

$$A \cap A = A, \qquad (18)$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset, \qquad (19)$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad (20)$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИСЧИСЛЕНИЕ СОБЫТИЙ

$A \cap \Omega = A,$ (21)

$A \backslash B = A \cap B,$ (22)

$\overline{\Omega} = \emptyset,$ (23)

$\overline{\emptyset} = \Omega,$ (24)

правила де Моргáна:

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},$ (25)

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$ (26)

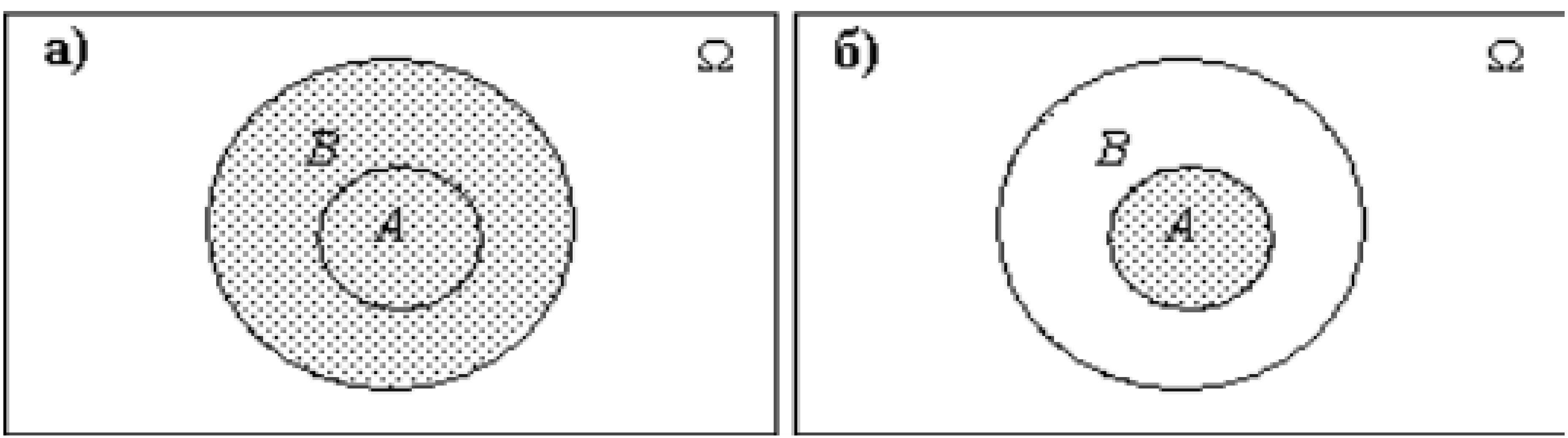
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИСЧИСЛЕНИЕ СОБЫТИЙ

Задачи с решениями

28. Известно, что $A \subseteq B$. Найти: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$.

РЕШЕНИЕ. Событие $A \cup B$ заштриховано на рис. а, событие $A \cap B$ – на рис. б, откуда следует, очевидно, что $A \cup B = B$, $A \cap B = A$.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИСЧИСЛЕНИЕ СОБЫТИЙ

34. Проверить, являются ли события A и $\overline{A \cup B}$ (где A и B – произвольные события) несовместными.

РЕШЕНИЕ.

$$A \cap \overline{A \cup B} = A \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = (A \cap \bar{A}) \cap \bar{B} = \emptyset \cap \bar{B} = \emptyset,$$

{по правилу де Моргáна}

{по свойству ассоциативности пересечения}

значит, события A и $\overline{A \cup B}$ являются несовместными.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИСЧИСЛЕНИЕ СОБЫТИЙ

Задачи для самостоятельного решения

26. Привести примеры противоположных случайных событий.

27. Привести примеры несовместных случайных событий.

29. Установить, при каких условиях события A и $A \cap B$ являются эквивалентными.

30. Пусть A, B, C − произвольные события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что:
а) произошло только A;
б) произошли A и B, но C не произошло;

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИСЧИСЛЕНИЕ СОБЫТИЙ

Задачи для самостоятельного решения

в) все три события произошли;
г) произошло хотя бы одно из этих событий;
д) произошло хотя бы два события;
е) ни одно из событий A, B и C не произошло;
ж) произошло не более двух из событий A, B и C;
з) произошло ровно одно из этих событий;
и) произошло ровно два из этих событий.

31. Пусть A, B, C − некоторые события, причём $A \subseteq B$. С помощью диаграмм Венна – Эйлера упростить выражения: а) $A \cap B$; б) $A \cup B$; в) $A \cap B \cap C$; г) $A \cup B \cup C$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИСЧИСЛЕНИЕ СОБЫТИЙ

Задачи для самостоятельного решения

32. Проверить справедливость следующих утверждений, сравнивая диаграммы Венна – Эйлера для событий, стоящих в левых и в правых частях:

а) $(A \cup B) \backslash C = A \cup (B \backslash C)$;

б) $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$;

в) $A \cup B \cup C = A \cup (B(A \cap B)) \cup (C(A \cap C))$;

г) $A \cup B = (A(A \cap B)) \cup B$;

д) $(A \cup B) \backslash A = B$;

е) $\overline{(A \cup B \cup C)} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$;

ж) $\overline{(A \cup B)} \cap C = (\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cap C)$;

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИСЧИСЛЕНИЕ СОБЫТИЙ

з) $\overline{(A \cup B)} \cap C = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$;

и) $\overline{(A \cup B)} \cap C = C(C \cap (A \cup B))$;

к) $A \cap B \cap C \subseteq (B \cap C) \cup (C \cap A)$;

л) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \subseteq A \cup B \cup C$;

м) $A \cap \bar{B} \cap C \subseteq A \cup B$.

33. С помощью диаграмм Венна – Эйлера убедиться в справедливости свойств (9) – (26) для произвольных событий A, B, C.

35. Проверить, образуют ли события A, $\bar{A} \cap B$, $\overline{A \cup B}$ полную группу (A и B – произвольные события).