Предел последовательности

Математический анализ — это раздел математики, который изучает поведение числовых функций на основании предельного перехода. А именно, оказывается интересно изучать, как ведёт себя функция в окрестности некоторой точки. Так мы приходим к понятию предела функции в точке.

Оказывается, что для изучения предельных свойств функций прежде всего необходимо построить теорию пределов числовых последовательностей.

Определение. Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots$ — последовательность действительных чисел (пишут $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$). Действительное число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если верно следующее. Какую бы малую окрестность числа a мы не брали, с какого-то момента в этой окрестности оказываются ВСЕ члены последовательности $\{x_n\}$. Формально,

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon.$$

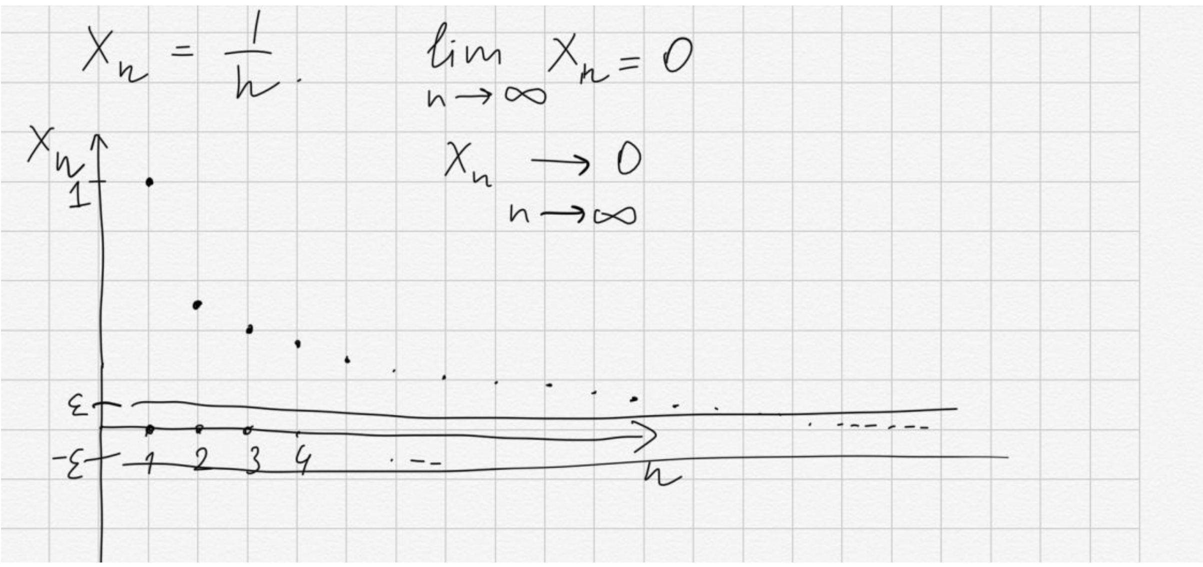
В таком случае пишут $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ или $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$.

Говорят, что предел равен $+\infty$, если

$$\forall B > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N : x_n > B.$$

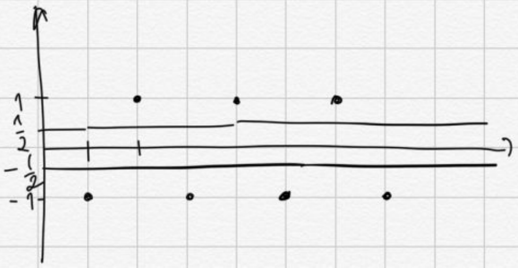
Аналогично определяется предел $-\infty$.

Пример 1.



Пример 2

$x_n = (-1)^n$

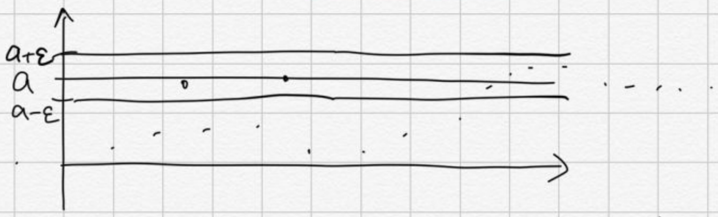


$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n > N \ \ |x_n - 0| > \varepsilon$$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ \ \underline{|x_n - a| < \varepsilon}.$$



$|x_n - a| < \varepsilon \Longleftrightarrow$

$x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$

Утв. $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

$x_n = \frac{1}{n}$

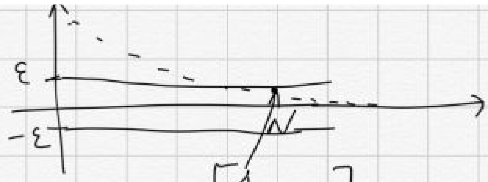
Докажем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ \ \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Найдём N такое, что

$\forall n > N \ \ \underline{\frac{1}{n} < \varepsilon}.$

$\underline{\frac{1}{N} < \varepsilon}$ $\qquad N > \frac{1}{\varepsilon}$



$$\left[\frac{1}{\varepsilon}+1\right]$$

$$\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil$$

($\varepsilon = \frac{1}{1000000}$, то $N = 1000001$.)

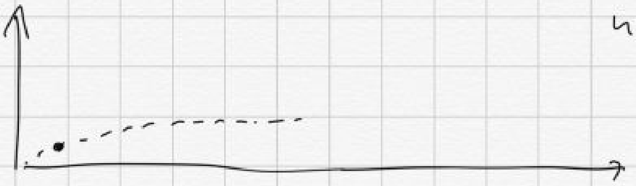
Мы нашли такое $N(\varepsilon)$, для которого вып-ся условие $\forall n > N$ $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Задача решена. ∎

<u>Задача</u> 1а. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где $x_n = \frac{n-1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$



Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Необходимо найти $N(\varepsilon)$, начиная с которого $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}.$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Подходит $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1\right]$. ∎

<u>Альт. решение:</u> $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$.

Задача 1 b. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$

2^n растёт быстрее чем n. След-но, предел равен 0.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

Задача 1 c. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^{10}}{\sqrt{n}} = ?$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^{10}}{\sqrt{n}} = 0.$$

Замена: $n = e^t$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(\ln(e^t))^{10}}{\sqrt{e^t}} =$$

$u = t^{10}$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{10}}{e^{t/2}} = \lim_{u\to\infty} \frac{u}{e^{\sqrt[10]{u}/2}} = 0.$$

Задача 4. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n}$.

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Необх-мо найти $N \in \mathbb{N}$ $\quad \forall n > N \quad |n^{1/n} - 1| < \varepsilon$.

$$\underbrace{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon)\dots(1+\varepsilon)}_{n \text{ раз}}$$

$$n^{1/n} - 1 < \varepsilon$$

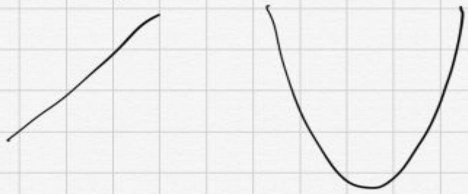
$$n^{1/n} < \varepsilon + 1$$

$$n < (\varepsilon+1)^n.$$

$$\rotatebox{90}{$\leq$}$$

$$\boxed{n} < \boxed{1 + \varepsilon n + \varepsilon^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}}$$

$$(1+\varepsilon)^n = 1^n \cdot \varepsilon^0 + 1^{n-1}\cdot \varepsilon^1 \cdot n + 1^{n-2}\cdot\varepsilon^2 \cdot C_n^2 + \dots \geq 1 + \varepsilon \cdot n + \varepsilon^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2};$$



Начиная с некоторого N нер-во $n^{1/n} - 1 < \varepsilon$ справедливо. ∎

$$(1+\varepsilon)(1+\varepsilon)(1+\varepsilon) = 1 + \varepsilon \cdot C_3^1 + \varepsilon^2 \cdot C_3^2 + \varepsilon^3$$

$$(1+\varepsilon)(1+\varepsilon) = 1 + \underbrace{2}_{= C_2^1} \cdot \varepsilon + \varepsilon^2$$

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^n = {} & a^n \cdot b^0 \cdot C_n^0 + a^{n-1}\cdot b^1 \cdot C_n^1 + \\ & + a^{n-2}\cdot b^2 \cdot C_n^2 + \dots + a^{n-k}\cdot b^k \cdot C_n^k + \\ & + \dots + a^1 \cdot b^{n-1} \cdot C_n^{n-1} + a^0 \cdot b^n \cdot C_n^n\end{aligned}}$$

Бином Ньютона

Теорема 1 (Арифметические операции под знаком предела). *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — две последовательности, причём $x_n \to a$, $y_n \to b$. Тогда*

- $x_n \pm y_n \to a \pm b$;
- $x_n y_n \to ab$;
- *Если $y \neq 0$, то $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$.*

Пример

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) =$$

$\cancel{x}_n = 1 \qquad y_n = \frac{1}{n}$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} (1)} - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - 0 = 1. \blacksquare$$

Задача 2. Найти предел x_n, где

а) $x_n = \dfrac{3n^2 - 1}{2n^2 - n + 2}$.

Предел равен $\lim \dfrac{3n^2}{2n^2} = \dfrac{3}{2}$.

$$\frac{3n^2-1}{2n^2-n+2} = \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} \ominus$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{1}{n^2}\right) = 3 - \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = 3.$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)} = 2 - \lim\frac{1}{n} + \lim\frac{2}{n^2} = 2.$$

(по теореме о пределе суммы и разности).

(по т. о пределе частного)

$$\ominus \ \frac{\lim(\ldots)}{\lim(\ldots)} = \frac{3}{2}. \blacksquare$$

Предел частного:

- Если предел числителя – беск, а предел знаменателя конеч., то

  lim = ∞.

- Если lim числ. = const, а lim зн. бесконечный, то

  lim = 0

- Если lim числ = ∞
  lim зн = ∞ ; то
  нужны доп. рассуждения.

Задача 26. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)},$$ где $P(n)$, $Q(n)$ - многочлены

$$P(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$$

$$Q(n) = b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \ldots + b_1 n + b_0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{P(n)}{n^l}}{\frac{Q(n)}{n^l}} =$$

$=$

$$/ \lim_{n\to\infty} \frac{Q(n)}{n^l} = b_l, \; b_l \neq 0. / = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{n^l}}{b_l}$$

- Если $l = k$, то $\frac{a_k}{b_l}$
- Если $l > k$, то 0
- Если $l < k$, то $\pm\infty$.

Задача 2с) Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=$$

$$=\frac{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=\frac{1}{1}=1.$$

рукомахание

$$\lim\sqrt{1+\frac{2}{n}}=\sqrt{\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)}=$$

$$=\sqrt{1}=1.$$

Определение. Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — две последовательности.

- Если $\frac{x_n}{y_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, то говорят, что последовательность x_n есть *о-малое относительно* последовательности y_n, и пишут $x_n=o(y_n)$.
- Если $\frac{x_n}{y_n}$ ограничено сверху, то говорят, что последовательность x_n есть *О-большое относительно* последовательности y_n, и пишут $x_n=O(y_n)$
- Если $x_n=o(1)$, то x_n называют *бесконечно малой последовательностью.*

Пример: $n=\bar{o}(2^n),\ n\to\infty$

$$\frac{1}{n}=\bar{o}(1);\ n\to\infty.$$

$$n=\underline{O}(2^n).$$

$$n^2=\underline{O}\left(\sqrt{n^4+n^3}\right)$$

$$2\sqrt{n^4+n^3}=\underline{O}(n^2).$$

• Посл-ти x_n и y_n называются <u>эквивалентными</u>, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1. \quad (\text{пишут } x_n \sim y_n)$$

В частности, если $x_n \sim y_n$, то $x_n = \underline{O}(y_n)$, $y_n = \underline{O}(x_n)$.

<u>Утв.</u> Пусть x_n и y_n - экв. посл-ти; z_n и t_n - экв посл-ти.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{z_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{t_n}$.

<u>Пример</u>. $\lim \frac{n^2+2n}{3n^2-4} = \lim \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}$.

$n^2+2n \sim n^2 \ (n\to\infty)$

$3n^2-4 \sim 3n^2 \ (n\to\infty)$. ▣

$n^2+2n \sim n^2$.

$2n$ мало по отн-ю к n^2

$\Updownarrow$

$\underline{2n = \bar{\bar{o}}(n^2)}$

$$\frac{n^2+2n}{n^2} = 1 + \frac{2n}{n^2} \to 0$$

Задача 3 Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} =$

Решение.

$$\underbrace{(-2)^n}_{\text{поб.}} + \underbrace{3^n}_{\text{осн.}} \sim 3^n$$

$$\left(\text{т.к. } (-2)^n = \bar{\bar{o}}(3^n) \quad \frac{(-2)^n}{3^n} = \left(-\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$$

$$\underbrace{(-2)^{n+1}}_{\text{поб.}} + \underbrace{3^{n+1}}_{\text{осн.}} \sim 3^{n+1}.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}.$$

Итог: Есть два способа находить предел частного.

1) делить числитель и знаменатель на „главное" слагаемое

2) заменять числитель и знаменатель на эквивалентные.

Определение. Предел последовательности $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ называется числом Эйлера и обозначается как $e = 2.718281828459045\ldots$.

Число Эйлера иррационально.

Задача. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

$$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot e$$

$$\parallel$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n=$$

$$\Big/\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n^2}\Big/$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n}=$$

не вполне корректно.

ведёт себя как const≠1

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n^2}}=\sqrt[n]{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n^2}}=\sqrt[n]{e}\to 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n^2}=\Big/\!\!\Big/ t=n^2-1\Big/\!\!\Big/=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$$

Вывод: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\lim(\ldots)} = \frac{1}{e}.$$

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

$$\lim\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = e.$$