Производная

Мы переходим к ключевому понятию производной. На интуитивном уровне производная функции f в точке x_0 — это скорость роста f в x_0 или, что то же самое, тангенс угла наклона касательной к графику функции f в точке x_0 по отношению к оси абсцисс.

Формальное определение производной вводится через предел.

Определение. *Производной* функции f в точке x_0 называется число

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Если функция имеет производную в точке x_0, то она называется *дифференцируемой в точке* x_0. Функция называется *дифференцируемой*, если она дифференцируема в каждой своей точке.

На интуитивном уровне дифференцируемость функции означает, что в каждой точке к ней можно провести касательную. Иными словами, дифференцируемость означает как бы “гладкость” функции.

1. Найдите производную следующих функций (по определению):
(a) $f(x) = c$; **(b)** $f(x) = ax$; **(c)** $f(x) = x^2$; **(d)** $f(x) = \frac{1}{x}$;
(e) $f(x) = \sin x$ (в точке 0); **(f)** $f(x) = e^x$ (в точке 0).

2. Имеет ли функция $f(x) = |x|$ производную в точке 0?

Утверждение 1 (Ключевое свойство производной, скорость роста)**.** *Функция f имеет в точке x_0 производную а тогда и только тогда, когда в окрестности точки x_0 выполняется*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + o(x - x_0).$$

Интуиция здесь такая. Слева в последнем равенстве написана сама функция. Справа написана *линейная функция* $f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ плюс маленькая прибавка $o(x - x_0)$ (поймите, почему она действительно маленькая по сравнению с самой функцией).

Иными словами, функция f ведёт себя в окрестности точки x_0 близко к линейной функции $f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$.

Определение. Линейная функция $df(x) = (x - x_0)f'(x_0)$ называется *дифференциалом* функции f в точке x_0 и обозначается df.

Производные элементарных функций

Все элементарные функции дифференцируемы в любой точке области определения. Приведём производные этих функций.

Теорема 1. *Справедливы следующие равенства:*

$$
\begin{gathered}
(x^a)' = ax^{a-1} \\
(\sin x)' = \cos x \\
(\cos x)' = -\sin x \\
(a^x)' = a^x \ln a \\
(e^x)' = e^x \\
(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \\
(\ln x)' = \frac{1}{x}
\end{gathered}
$$

Свойства производной

Теорема 2. *Справедливы следующие формулы.*

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;
- $(cf(x))' = cf'(x)$;
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$;
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$;
- $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$;
- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Эти утверждения дают нам алгоритм вычисления любой производной.

Практика

3. Вычислите производную следующих функций:

(a) $x^3 + x^2 + x + 1$; **(b)** $7x^{13} + 13x^{-17}$;

(c) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+7}$; **(d)** $5x \cos x$;

(e) $\frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}$; **(f)** $\frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$;

(g) $(x^2 - 7x + 8)e^x$; **(h)** $\ln \cos x$;

(i) $\sin^2 x + \sin x^2$; **(j)** $\frac{x}{2}(\sin \ln x + \cos \ln x)$.