

1. \* Задана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из распределения  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Рассмотрим статистики  $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ ,  $Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^4$  и  $T = \sqrt{Z/3Y}$ . Найдите предел сходимости по распределению выражения

$$\sqrt{n}(T - \sigma).$$

2. Пусть  $X_1, \dots, X_n$  – выборка из биномиального распределения с параметрами  $n \in \mathbb{N}$  и  $p \in (0, 1)$ . Найти оценки методом моментов параметров  $n, p$  и методом максимального правдоподобия параметра  $p$ .
3. Пусть  $X_1, \dots, X_n$  – выборка из экспоненциального распределения со сдвигом с плотностью  $p(x) = a \exp(-a(x - b))I(x > b)$ . Найти оценки методом моментов и методом максимального правдоподобия для параметров  $a$  и  $b$ .
4. Пусть  $X_1, \dots, X_n$  – выборка из нормального распределения  $N(a, \sigma^2)$ . Доказать, что  $\ln \bar{X}$  является асимптотически нормальной оценкой параметра  $\ln a$ , и найти асимптотическую дисперсию этой оценки.
5. Пусть  $X_1, \dots, X_n$  – выборка из распределения Рэлея с функцией распределения  $F(x) = (1 - \exp(-x^2/\sigma^2))I(x > 0)$ . Найти асимптотически нормальную оценку параметра  $\sigma$  и ее асимптотическую дисперсию.
6. Пусть  $X_1, \dots, X_n$  – выборка из гамма-распределения  $\Gamma(k, \lambda)$ , где  $k$  известно. Постройте асимптотический доверительный интервал уровня доверия  $1 - \alpha$  для параметра  $\lambda$ .
7. Пусть  $X_1, \dots, X_n$  – выборка из геометрического распределения с параметром  $p \in (0, 1)$ . Постройте критерий Вальда уровня значимости  $\alpha$  для проверки гипотезы  $H_0 : p = 1/2$ .  
Пусть  $(0, 1, 3, 1, 2, 5, 3, 2, 1, 1, 0, 4, 1, 7, 1, 0)$  – выборка из геометрического распределения с параметром  $p > 0$ . Проверьте с помощью полученного критерия гипотезу  $H_0$ .