



Высшая математика – просто и доступно!

**Интенсивный курс**  
**«Учимся решать пределы»**

***Настоящая методичка** предназначена для студентов-заочников с начальным уровнем подготовки и позволяет в кратчайшие сроки (буквально часы) **научиться решать** типовые пределы функций 1-й переменной и пределы числовых последовательностей. Обладая большим практическим опытом, я включил в курс именно те задания, которые реально встретятся в ваших контрольных работах – никакой «воды» и ничего лишнего!*

*С наилучшими пожеланиями, Александр Емелин*

## Оглавление

1. Понятие предела функции. Простейшие примеры .....	3
2. Некоторые свойства пределов .....	7
3. Типовые пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения .....	9
4. Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ .....	12
5. Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение .....	16
6. Первый замечательный предел .....	19
7. Метод замены переменной .....	24
8. Второй замечательный предел .....	25
9. Формула для устранения неопределённости $1^\infty$ .....	30
10. Порядок роста функции .....	33
11. Сравнение бесконечно больших функций .....	35
12. Если «икс» стремится к «минус бесконечности» .....	37
13. Устранение неопределённости вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty$ .....	39
14. Что является, а что не является неопределённостью? .....	41
15. Неопределённость $\infty - \infty$ .....	42
16. Понятие числовой последовательности и её предела .....	45
17. Методы нахождения пределов числовых последовательностей .....	48
18. Решения и ответы .....	55

## 1. Понятие предела функции. Простейшие примеры

Теория пределов – это один из ключевых разделов математического анализа. Помимо своеобразия самого понятия, данная тема характеризуется обширной и разнообразной практикой. Существуют десятки приёмов решений пределов различных видов, десятки нюансов и хитростей, позволяющих решить тот или иной предел. И сейчас, в самые короткие сроки мы постараемся разобраться в основных типах пределов, которые наиболее часто встречаются на практике.

Начнем с самого понятия **предела**. Но сначала краткая историческая справка. Жил-был в 19 веке француз Огюстен Луи Коши, который заложил основы математического анализа и дал строгие определения, определение предела, в частности. Надо сказать, этот самый Коши снился, снится и будет сниться в кошмарных снах многим студентам физико-математических факультетов, так как доказал огромное количество теорем математического анализа, причем одна теорема убойнее другой. В этой связи мы не будем рассматривать строгое определение предела, а попытаемся сделать две вещи:

**1. Понять, что такое предел.**

**2. Научиться решать основные типы пределов.**

Прошу прощения за некоторую ненаучность объяснений, важно чтобы материал был понятен даже «чайнику», что, собственно, и является задачей этой книги.

Итак, что же такое *предел*?

А сразу пример, чего бабушку лохматить....

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$$

**Любой предел состоит из трех частей:**

1) Всем известного значка предела  $\lim$ . Иногда пределы так и называют – *лимитами*. Запомните и постарайтесь не употреблять ⇒)

2) Записи под значком предела, в данном случае  $x \rightarrow 1$ . Запись читается «*икс стремится к единице*». Чаще всего – именно  $x$ , хотя вместо «икса» на практике встречаются и другие переменные. На месте единицы может находиться совершенно любое число, а также бесконечность ( $+\infty$  либо  $-\infty$ ; «*плюс бесконечность*» часто обозначают просто значком  $\infty$ ).

3) Функции под знаком предела, в данном случае  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$ .

Сама запись  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$  читается так: «предел функции  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$  при  $x$  стремящемся к единице».

Теперь разберем следующий ВАЖНЫЙ ВОПРОС – а что значит выражение «икс **стремится** к единице»? И что вообще такое **стремится**?

Понятие предела – это понятие, если так можно сказать, **динамическое**. Построим последовательность: сначала  $x = 1,1$ , затем  $x = 1,01$ ,  $x = 1,001$ , ...,  $x = 1,000000001$ , .... То есть выражение «икс **стремится** к единице» следует понимать так – «икс» принимает значения, **которые бесконечно близко приближаются к единице и практически с ней совпадают. Однако равняться** единице – «иксу» не судьба!

Как решить наш пример? Исходя из вышесказанного, напрашивается просто подставить единицу в функцию, стоящую под знаком предела:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 5}{1 + 1} = \frac{-6}{2} = -3, \text{ готово.}$$

Как понимать этот результат? Если  $x$  *стремится* к единице (*не достигая её!*), то функция  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$  *бесконечно близко* приближается к «минус» трём. Это и есть суть предела: под финалом  $= -3$  подразумевается **не равенство «минус» трём**, а тот факт, что функция *предельно близко* приближается к этому значению, опять же *не достигая* его.

Итак, **правило первое**: когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить предельное значение «икс» в функцию.

Мы рассмотрели простейший предел, но и такие встречаются на практике, причем, не так уж редко!

### Пример с бесконечностью:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - x)$$

Разбираемся, что такое  $x \rightarrow \infty$ . Это тот случай, когда  $x$  *неограниченно* возрастает, то есть: сначала  $x = 10$ , потом  $x = 100$ , потом  $x = 1000$ , затем  $x = 10000000$  и так далее до бесконечности.

А что в это время происходит с функцией  $f(x) = 1 - x$ ?

$$1 - 10 = -9;$$

$$1 - 100 = -99;$$

$$1 - 1000 = -999;$$

...

**! Примечание:** строго говоря, этот подход с построением последовательности из нескольких чисел некорректен, но для понимания простейших примеров вполне подойдет.

Итак, если  $x \rightarrow \infty$ , то функция  $f(x) = 1 - x$  **стремится к «минус бесконечности»:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - x) = -\infty$$

**Грубо говоря, согласно нашему первому правилу, мы вместо «икса» подставляем в функцию  $f(x) = 1 - x$  «плюс бесконечность» и получаем ответ.**

### Снова пример с бесконечностью:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2x - 3)$$

Опять начинаем увеличивать  $x$  до бесконечности, и смотрим на поведение функции:

$$\text{если } x = 10, \text{ то } 10^2 - 2 \cdot 10 - 3 = 77;$$

$$\text{если } x = 100, \text{ то } 100^2 - 2 \cdot 100 - 3 = 9797;$$

$$\text{если } x = 1000, \text{ то } 1000^2 - 2 \cdot 1000 - 3 = 997997;$$

...

**Вывод:** при  $x \rightarrow \infty$  функция  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  неограниченно возрастает:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2x - 3) = \infty$$

### Серия примеров для самостоятельного изучения:

Пожалуйста, попытайтесь мысленно проанализировать и запомнить следующие виды пределов:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - 99} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^4 + x - 9} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{4^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+7}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{\ln x} = 0.$$

Для начала хватит =)

Если где-нибудь есть сомнения, то можете взять в руки калькулятор и немного потренироваться. В том случае, если  $x \rightarrow \infty$ , попробуйте построить последовательность  $x = 10$ ,  $x = 100$ ,  $x = 1000$  и в облака. Если  $x \rightarrow 0$ , то  $x = 0,1$ ,  $x = 0,01$ ,  $x = 0,001$  и далее – предельно близко к нулю.

## Что нужно понять и запомнить из вышесказанного?

1) Когда дан **ЛЮБОЙ** предел, сначала просто пытаемся подставить предельное значение «икс» (число или бесконечность) в функцию.

2) Вы должны понимать и сразу решать простейшие пределы, такие как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 + 8x + 10) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty \text{ и т.д.}$$

Также обратите внимание на следующую вещь. Даже если дан предел с большим числом вверху, да хоть с миллионом:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000000}{x^2}$ , то всё равно  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000000}{x^2} = 0$  – так как рано или поздно «икс» начнёт принимать ТАКИЕ ГИГАНТСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ, что миллион по сравнению с ними станет самым настоящим микробом.

### И ещё один крайне важный момент!

В процессе оформления примеров ни в коем случае не допускайте неполной записи а-ля  $\lim \sqrt{x+4}$  – это одна из самых скверных оплошностей! Презумпция виновности студента утверждает, что он либо совсем не в теме, либо откуда-то впопыхах списал пример.

Здесь не указано, куда стремится «икс», и поэтому «а-ля» не имеет смысла:

~~$$\lim \sqrt{x+4}$$~~

**Иными словами, НЕТ такого понятия, как «просто предел»!** Предел функции может существовать (или не существовать) лишь в определённой точке (в частности, в точке  $x = -\infty$  или  $x = +\infty$ ).

Например:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x+4} = \sqrt{-3+4} = \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x+4} = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+4} = +\infty$$

А вот следующего предела не существует:

$$\lim_{x \rightarrow -5} \sqrt{x+4} \text{ – так как под корнем получается «минус»,}$$

равно как не существует и такого предела:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x+4} \text{ – тут «икс» стремится к «минус бесконечности», и под корнем}$$

нарисуется *бесконечно большое* отрицательное значение.

Обращаю ваше внимание, что последние две записи совершенно корректны, и если что-то подобное встретится на практике, то нужно дать краткий ответ:

*Данного предела не существует.*

## 2. Некоторые свойства пределов

В этом маленьком параграфе я разберу свойства, которые имеют большое значение для практики. Начнём со **свойства линейности**.

Не пугаемся, под термином «линейность» скрываются два очень простых правила. Пусть  $x \rightarrow a$  (значение «a» может быть любым, в том числе бесконечным). Тогда:

1)  $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  – константу-множитель  $k$  можно **вынести за знак предела**, при этом **значение предела не изменится** (если, конечно, предел вообще существует в точке «a»).

Проверим данный факт на конкретном примере:  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3}{2} x^2 \right) = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$ ,

и после выноса константы:  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3}{2} x^2 \right) = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2) = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$ .

**! Внимание! Никаких десятичных дробей!**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3}{2} x^2 \right) = \cancel{1,5 \lim_{x \rightarrow 2} (x^2)} = \cancel{1,5 \cdot 4} = 6$$

**Аксиома: в высшей математике все действия стремимся проводить в правильных и неправильных обыкновенных дробях**

И будет вам счастье!

2)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  – **предел суммы равен сумме пределов** (если они, разумеется, существуют). То же самое касается и разности, ибо разность можно представить в виде суммы:  $f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$ .

Например:  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x} + 2x - 3 \right) = \frac{1}{2} + 4 - 3 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ ,

и по правилу:  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x} + 2x - 3 \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 3) = \frac{1}{2} + 4 - 3 = \frac{3}{2}$ .

Данное правило справедливо и для бОльшего количества слагаемых. За примером далеко ходить не будем:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x} + 2x - 3 \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 2} (2x) - \lim_{x \rightarrow 2} 3 = \frac{1}{2} + 4 - 3 = \frac{3}{2}$$

Отдельно выделяю, что **предел константы равен этой же константе**:

$\lim_{x \rightarrow a} k = k$  – вещь элементарная, но вызывает регулярные вопросы.

С линейностью разобрались, далее:

### Предел произведения функций равен произведению пределов:

$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , аналогично для деления – ибо его всегда

можно представить в виде умножения:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left( f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right)$ . Разумеется, правило работает и для бОльшего количества множителей.

На практике это свойство используют, чтобы упростить предел, характерный пример:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)\cos x}{x^2 + 2x}$$

Здесь удобно «отщипнуть» косинус, который стремится к единице, это позволит немедленно избавиться от него. Распишу очень подробно:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)\cos x}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\rightarrow 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2 + 2x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2 + 2x} = \frac{0+1}{0+0} = \frac{1}{0} = \infty$$

**Пояснение:** под записью  $\frac{1}{0}$  понимается единица, делённая на бесконечно малое значение, в результате получается бесконечно большая величина (бесконечность).

При оформлении решения обычно сразу указывают, куда стремится множитель, подразумевая правило  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  «между строк». В формате рукописи пометки лучше выполнять карандашом:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)\cos x}{x^2 + 2x + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2 + 2x} = \frac{1}{0} = \infty$$

На самом деле вопрос здесь решается «одним махом»:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)\cos x}{x^2 + 2x} = \frac{(0+1) \cdot 1}{0+0} = \frac{1}{0} = \infty, \text{ но то был лишь демонстрационный пример.}$$

И, само собой, для применения рассмотренного правила пределы всех функций должны существовать. Вроде бы всё похоже:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^2 + 2x}$$

Но этого предела не существует. По той причине, что внутри есть гадкий утёнок. А именно, не существует предела  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos x)$  – если «икс» стремится к бесконечности, то косинус (вспОмните его график!) бесконечно «петляет» от «минус» до «плюс» единицы, не стремясь к какому-либо конкретному значению.

Следует отметить, что у пределов есть и другие свойства, и все они строго доказываются в курсе математического анализа.

Но нам хватит, на первых порах 😊.



До сих пор мы рассматривали пределы, которые решаются прямой подстановкой, однако «решение в лоб» зачастую приводит к так называемым **неопределенностям**, которые, как вы догадываетесь, нужно устранять. Поехали:

### 3. Типовые пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения

В данном параграфе мы рассмотрим группу пределов, когда  $x \rightarrow \infty$ , а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены.

#### Пример 1

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2}$

Согласно нашему правилу, попытаемся подставить бесконечность в функцию. Что у нас получается вверху? Бесконечность. А что получается внизу? Тоже бесконечность.

Таким образом, у нас имеется **неопределенность** вида  $\frac{\infty}{\infty}$ . Можно было бы подумать, что

$\frac{\infty}{\infty} = \infty$ , и ответ готов, но в общем случае это вовсе не так, и нужно применить специальный приём решения, который мы сейчас и рассмотрим.

#### Как же решать пределы данного типа?

Сначала мы смотрим на числитель и находим  $x$  в старшей степени:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2}$$

Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим  $x$  в старшей степени:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2}$$

Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, **метод решения следующий**: для того, чтобы раскрыть неопределенность  $\frac{\infty}{\infty}$  нужно разделить числитель и знаменатель на  $x$  в старшей степени.

Сначала чистовое оформление примера, затем комментарии:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Разделим числитель и знаменатель на  $x^2$ :

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{1 + x + 3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3} = \frac{2}{3} \text{ — вот оно что}$$

получилось, а вовсе не бесконечность!

### Что принципиально важно в оформлении решения?

Во-первых, указываем неопределенность, если она есть.

Во-вторых, желательно прервать решение для промежуточных объяснений. Я обычно использую знак (\*), он не несет никакого математического смысла, а обозначает, что решение прервано для промежуточного объяснения.

В-третьих, в пределе желательно пометать, что и куда стремится. Когда работа оформляется от руки, используем карандаш:

Конечно, можно ничего этого не делать, но тогда, возможно, преподаватель отметит недочеты в решении либо начнет задавать дополнительные вопросы по заданию. А оно вам надо?

### Пример 2

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4}$

Снова в числителе и знаменателе находим  $x$  в старшей степени:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4}$$

Максимальная степень в числителе: 3

Максимальная степень в знаменателе: 4

Выбираем **наибольшее** значение, в данном случае четверку.

Итак, согласно нашему алгоритму, для раскрытия неопределенности  $\frac{\infty}{\infty}$  числитель и знаменатель нужно разделить на  $x^4$ .

Полное оформление задания должно выглядеть примерно так:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Разделим числитель и знаменатель на  $x^4$

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{x^4}}{\frac{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{x} + \frac{15}{x^2} + \frac{9}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{5 + \frac{6}{x^2} - \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4}} = \\ &= \frac{0 + 0 + 0 + 0}{5 + 0 - 0 - 0} = \frac{0}{5} = 0 \end{aligned}$$

И третий случай:

### Пример 3

Вычислить предел функции  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$  при  $x \rightarrow \infty$

Встречается и такая формулировка.

Максимальная степень «икса» в числителе: 2

Максимальная степень «икса» в знаменателе: 1 ( $x$  можно записать как  $x^1$ )

Старшая степень равна двум, и поэтому для устранения неопределенности  $\frac{\infty}{\infty}$

числитель и знаменатель следует разделить на  $x^2$ . Чистовой вариант решения может выглядеть так:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Разделим числитель и знаменатель на  $x^2$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{x + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{0} = \infty$$

Под записью  $\frac{2}{0}$  подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на *бесконечно малое* число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида  $\frac{\infty}{\infty}$  у нас может получиться либо *конечное число, не равное нулю*, либо ноль, либо бесконечность.

Следующие пределы для самостоятельного решения:

#### Пример 4

Вычислить пределы функций

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 - 4x + 3}$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + 3x - 2x^2 - x^3}{2x}$

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(4 - 7x^2)}{4x^5 - 7x^3 + 13x + 28}$

Не ленимся и ОБЯЗАТЕЛЬНО прикладываемся ручкой-карандашом к бумаге – иначе толку будет мало! Краткие решения и ответы в **конце методички**.

### **4. Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$**

Группа следующих пределов чем-то похожа на только что рассмотренные пределы: в числителе и знаменателе находятся многочлены, но «икс» стремится уже не к бесконечности, а к *конечному числу*.

#### Пример 5

Решить предел  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$

Сначала попробуем подставить -1 в дробь:

$$\frac{2(-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 5}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$$

Таким образом, у нас выявилась *неопределенность* вида  $\frac{0}{0}$ .

***! Внимание:*** этот приём (подстановка) помог лишь выявить неопределённость. На самом деле «икс» **бесконечно близко** приближается к -1, но **вовсе не принимает** это значение! И поэтому здесь подразумевается не два нуля, а деление **бесконечно малого** числа на **бесконечно малое** число.

**Общее правило:** если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида  $\frac{0}{0}$ , то для её раскрытия нужно разложить числитель и знаменатель на множители.

Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение и (или) использовать формулы сокращенного умножения (см. Приложение **Горячие школьные формулы**).

Итак, решаем наш предел

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{0}{0} = (*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить соответствующее квадратное уравнение:

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

Сначала находим дискриминант:

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$$

и квадратный корень из него:  $\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$ .

Если дискриминант большой, например 361, то используем калькулятор. И если корень не извлекается нацело (получается дробное число с запятой), очень вероятно, что дискриминант вычислен неверно либо в задании опечатка.

Далее находим корни:

$$x_1 = \frac{-(-3) - 7}{2 \cdot 2} = \frac{3 - 7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + 7}{2 \cdot 2} = \frac{3 + 7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Таким образом:

$$2x^2 - 3x - 5 = 2(x - (-1)) \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) = 2(x + 1) \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) = (x + 1)(2x - 5)$$

Всё. Числитель на множители разложен.

Знаменатель  $x + 1$ . В знаменателе раскладывать нечего, и решение продолжается:

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(2x - 5)}{x + 1} = (*)$$

Сокращаем дробь на  $(x + 1)$ :

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 5) = (*)$$

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$(*) = 2 \cdot (-1) - 5 = -2 - 5 = -7$$

Естественно, в контрольной работе, на зачете, экзамене так подробно решение не расписывают. В чистовом варианте оформление должно выглядеть примерно так:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{0}{0} = (*)$$

Разложим числитель на множители:

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_1 = \frac{-(-3) - 7}{2 \cdot 2} = \frac{3 - 7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + 7}{2 \cdot 2} = \frac{3 + 7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\text{В результате: } 2x^2 - 3x - 5 = 2(x + 1) \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) = (x + 1)(2x - 5)$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(2x - 5)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 5) = -2 - 5 = -7$$

Развиваем тему:

### Пример 6

$$\text{Вычислить предел } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 2x^2}{x^2 + 4x - 12}$$

Сначала чистовой вариант решения:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 2x^2}{x^2 + 4x - 12} = \frac{0}{0} = (*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$\text{Числитель: } 8 - 2x^2 = 2(4 - x^2) = 2(2 - x)(2 + x)$$

Знаменатель:

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$D = 16 + 48 = 64$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{64} = 8$$

$$x_1 = \frac{-4 - 8}{2} = -6, \quad x_2 = \frac{-4 + 8}{2} = 2$$

Таким образом, квадратный трёхчлен трансформируется в произведение:

$$x^2 + 4x - 12 = (x + 6)(x - 2)$$

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(2 - x)(2 + x)}{(x + 6)(x - 2)} = 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - x)(2 + x)}{(x + 6)(x - 2)} = 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x - 2)(2 + x)}{(x + 6)(x - 2)} = \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 + x)}{(x + 6)} = -2 \cdot \frac{4}{8} = -1 \end{aligned}$$

И комментарии. **Что важно** в только что разобранном примере?

Во-первых, вы должны хорошо понимать, как раскрыт числитель: сначала мы вынесли за скобку 2, а затем использовали формулу разности квадратов  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  – уж эту-то формулу нужно знать и видеть!

Далее, согласно **свойству линейности**, «двойку» выносим за знак предела. Зачем? Да просто чтобы она не «мешалась под ногами». Главное, только потом не потерять её по ходу решения.

**Рекомендация: во многих случаях (но не всегда!) множитель-константу удобно вынести за знак предела. Это упрощает дальнейшие вычисления**

**! И ещё одно крайне важное пояснение для «чайников», факт элементарный, но на всякий пожарный:**

В практических заданиях фрагмент типа  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{x-2}$  встречается очень часто.

Сокращать такую дробь **НЕЛЬЗЯ**. Сначала нужно поменять знак у числителя (вынести -1 за скобки):  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{x-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (-1) = -1$

Как вариант, можно преобразовать знаменатель:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{x-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{-(2-x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(-1)} = -1$$

В результате здесь появляется знак «минус», который при вычислении предела учитывается, и терять его совсем не надо!

И снова ручку в руку:

### **Пример 7**

Вычислить следующие пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{5x^2 - 4x - 1}$

б)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x}$

Вообще, я заметил, что чаще всего при нахождении пределов данного типа приходится решать два квадратных уравнения, и поэтому избавил вас от таких примеров – чтобы не развилась аллергия =)

...Ну, может, пупурышки только будут, как от лёгкой щекотки ☺

## 5. Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение

Продолжаем рассматривать неопределенность вида  $\frac{0}{0}$

Следующий тип пределов похож на предыдущий тип. Единственное, помимо многочленов, у нас добавятся корни:

### Пример 8

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Начинаем решать.

Сначала пробуем подставить 3 в выражение под знаком предела

Еще раз повторяю – это первое, что нужно выполнять для ЛЮБОГО предела. Данное действие обычно проводится мысленно или на черновике:

$$\frac{\sqrt{3+6} - \sqrt{10 \cdot 3 - 21}}{5 \cdot 3 - 15} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{9}}{15 - 15} = \frac{0}{0}$$

Получена неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ , которую нужно устранять.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$$

Как Вы, наверное, заметили, у нас в числителе находится разность корней. А от корней в математике принято, по возможности, избавляться. ...Зачем избавляться? А без них жизнь проще.

**Правило:** когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности  $\frac{0}{0}$  используют **метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение**.

Вспоминаем нашу нетленную формулу разности квадратов:  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

И смотрим на наш предел:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Что можно сказать?  $(a-b)$  у нас в числителе уже есть. Теперь для применения формулы осталось организовать  $(a+b)$  (которое в данном случае и называется **сопряженным выражением**).



Умножаем числитель на сопряженное выражение:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{5x-15}$$

Обратите внимание, что под корнями при этой операции мы ничего не трогаем.

Хорошо,  $(a+b)$  мы организовали, но выражение-то под знаком предела изменилось! А для того, чтобы оно не менялось, его нужно разделить на  $(a+b)$ :

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*)$$

То есть, мы умножили числитель и знаменатель на сопряженное выражение. В известной степени это искусственный прием.

Умножили. Теперь самое время применить формулу  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ :

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6 - (10x-21)}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6-10x+21}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*) \end{aligned}$$

Неопределенность  $\frac{0}{0}$  не пропала (попробуйте подставить тройку), да и корни тоже не исчезли. Но с **суммой** корней всё значительно проще, ее можно превратить в постоянное число. Как это сделать? Да просто подставить тройку под корни:

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{3+6} + \sqrt{10 \cdot 3 - 21})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{9} + \sqrt{9})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (3+3)} = \\ &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{5x-15} = (*) \end{aligned}$$

Число, как уже отмечалось ранее, лучше вынести за значок предела.

Теперь осталось разложить числитель и знаменатель на множители. Собственно, это можно было сделать давным-давно:

$$(*) = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9}{5} = \frac{1}{6} \cdot \left( \frac{-9}{5} \right) = -\frac{3}{10}$$

Готово.

Как должно выглядеть решение данного примера в чистовом варианте?  
Примерно так:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{5(x-3) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = \\ &= \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6 - (10x-21)}{(x-3) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6-10x+21}{(x-3)} = \frac{1}{30} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(x-3)} = \\ &= \frac{1}{30} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9(x-3)}{(x-3)} = \frac{-9}{30} = -\frac{3}{10} \end{aligned}$$

Следующий пример попробуйте решить самостоятельно:

### Пример 9

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x+6} - 2}$

И наверняка найдётся немало желающих потягаться с более трудным пределом, где рассмотренный приём нужно использовать дважды – можно последовательно, а можно и «за один присест»:

### Пример 10

Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{1 - \sqrt{3-x}}$$

Есть? Отлично! Не забываем свериться с образцом.

Ну а теперь пришло время познакомиться с так называемыми **замечательными пределами**. Это специальные пределы, которые доказаны в теории, и замечательность их состоит в том, что нам не придётся мучиться со страшным нагромождением тригонометрических функций, логарифмов, степеней.

Замечательных пределов существует несколько, но на практике у студентов-заочников в 95% случаев фигурируют два замечательных предела: **Первый замечательный предел** и **Второй замечательный предел**. Следует отметить, что это исторически сложившиеся названия, и, когда, например, говорят о «первом замечательном пределе», то подразумевают под этим вполне определенную вещь, а не какой-то случайный, взятый с потолка предел.

## 6. Первый замечательный предел

Для целей данного урока нам потребуется Приложение *Тригонометрические формулы* и воспоминания о следующих значениях:

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \operatorname{tg} 0 = 0$$

Рассмотрим предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)}$ , где  $\alpha(x)$  – некоторая функция, которая стремится к нулю:  $\alpha(x) \rightarrow 0$ . Совершенно понятно, что здесь *неопределённость*  $\frac{0}{0}$ . И к счастью, устранять её не нужно. В курсе математического анализа, доказано, что:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1, \text{ если } \alpha(x) \rightarrow 0. \text{ В частности: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Это и есть **первый замечательный предел**.

Нередко в практических заданиях он «перевернут»:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\sin \alpha(x)} = 1 \text{ – тот же самый замечательный предел.}$$

**! Но произвольно переставлять числитель и знаменатель нельзя!** Если предел дан в виде  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\sin \alpha(x)}$ , то и решать его нужно именно в таком же виде, ничего не переставляя.

И особенно вкусно то, что функция  $\alpha(x)$  может быть очень и даже очень сложной. Важно лишь, чтобы она стремилась к нулю.

Примеры:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5x}{3}}{\sin \frac{5x}{3}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{arctg} x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 5x^2 + x}{\sin(x^3 - 5x^2 + x)} = 1$$

Здесь  $3x \rightarrow 0$ ,  $\frac{5x}{3} \rightarrow 0$ ,  $\operatorname{arctg} x \rightarrow 0$ ,  $(x^3 - 5x^2 + x) \rightarrow 0$ , и всё гуд – первый замечательный предел применим.

А вот следующее равенство неверно:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 - 3x + 5)}{x^2 - 3x + 5} \neq 1$$

Почему? Потому что многочлен  $x^2 - 3x + 5$  не стремится к нулю.

Кстати, вопрос на засыпку, а чему равен предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 - 3x + 5)}{x^2 - 3x + 5}$ ?

Итак, **запомним наизусть**, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$  (если  $\alpha(x) \rightarrow 0$ ), и **запомним**

**«намертво»**, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . И здесь я вас не стращаю – элементарные математические определения и формулы лучше так помнить «намертво». Это может оказать неоценимую помощь на зачете, когда вопрос будет решаться между «двойкой» и «тройкой», и преподаватель решит задать студенту какой-нибудь простой вопрос или предложить решить простейший пример («А может он(а) все-таки что-то знает?!»).

Переходим к рассмотрению практических примеров:

### Пример 11

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x}$

Если мы замечаем в пределе синус, то это нас сразу должно наталкивать на мысль о возможности применения первого замечательного предела.

Сначала пробуем подставить 0 в выражение под знак предела (делаем это мысленно или на черновике):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \frac{0}{0}$$

Таким образом, у нас неопределенность  $\frac{0}{0}$ , что мы сразу и указываем в оформлении решения. Выражение под знаком предела похоже на первый замечательный предел, но это не совсем он: под синусом находится  $7x$ , а в знаменателе  $3x$ .

Что делать? В подобных случаях первый замечательный предел нужно организовать **искусственно**. Ход рассуждений может быть таким: «под синусом у нас  $7x$ , значит, в знаменателе нам тоже нужно получить  $7x$ ».

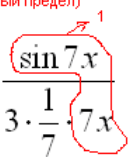
А делается это очень просто:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3 \cdot \frac{1}{7} \cdot 7x}$$

То есть, знаменатель искусственно умножается в данном случае на 7 и делится на ту же семерку. Теперь запись приняла знакомые очертания.

Когда задание оформляется от руки, то первый замечательный предел желательно пометить простым карандашом:

(1-й замечательный предел)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3 \cdot \frac{1}{7} \cdot 7x}$$


Что произошло? По сути, обведённое выражение превратилось в единицу и исчезло в произведении:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sin 7x}^{(1\text{-й замечательный предел})}}{3 \cdot \frac{1}{7} \cdot \underbrace{7x}_1} = \frac{1}{3}$$

Осталось избавиться от трехэтажности дроби (см. *Горячие школьные формулы*):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sin 7x}^{(1\text{-й замечательный предел})}}{3 \cdot \frac{1}{7} \cdot \underbrace{7x}_1} = \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Готово.

Если не хочется использовать карандаш, то решение можно оформить так:

«

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \frac{0}{0} = (*)$$

Используем первый замечательный предел:

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3 \cdot \frac{1}{7} \cdot 7x} = \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

«

### Пример 12

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin^2 \frac{x}{2}}$

Опять мы видим в пределе дробь и синус. Пробуем подставить в числитель и знаменатель ноль:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{0}{0}$$

Действительно, у нас неопределенность  $\frac{0}{0}$  и, значит, нужно попытаться организовать первый замечательный предел. В **пределах с многочленами** мы рассматривали правило, что когда у нас есть неопределенность  $\frac{0}{0}$ , то нужно разложить числитель и знаменатель на множители. Здесь – то же самое, степени мы представим в виде произведения (множителей):

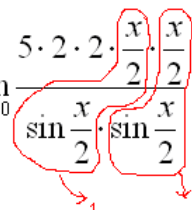
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot x}{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}$$

Далее, по уже знакомой схеме организовываем первые замечательные пределы.

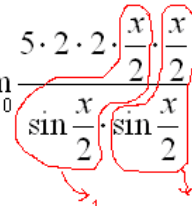
Под синусами у нас  $\frac{x}{2}$ , значит, в числителе тоже нужно получить  $\frac{x}{2}$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot x}{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}$$

Аналогично предыдущему примеру, обводим карандашом замечательные пределы и указываем, что они стремятся к единице. И, строго говоря, здесь мы везде пользуемся **свойством**  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot x}{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}$$


Собственно, ответ готов:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot x}{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}} = 5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$$


В следующих примерах, я не буду заниматься художествами в Пэйнте, думаю, как правильно оформлять решение в тетради – вам уже понятно.

### Пример 13

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x^2}$

Подставляем ноль в выражение под знаком предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x^2} = \frac{0}{0}$$

Получена неопределенность  $\frac{0}{0}$ , которую нужно раскрывать. Если в пределе есть тангенс, то почти всегда его превращают в синус и косинус по известной тригонометрической формуле  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

В данном случае:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x^2} &= \frac{0}{0} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x^2 \cdot (\cos 2x)^{-1}} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x^2} \stackrel{(3)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x \cdot x} \stackrel{(4)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty\end{aligned}$$

(1) Используем формулу  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

(2) При «икс» стремящемся к нулю – косинус стремится к единице, и от него легко избавиться. Согласно, **свойству**  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , превращаем косинус в единицу, которая исчезает в произведении. **Не забываем пометить, куда он стремится!**

(3) Далее по накатанной схеме организуем первый замечательный предел, тут даже обошлось безо всяких домножений и делений.

(4) Первый замечательный предел тоже превращается в единицу и исчезает в произведении.

В итоге получена бесконечность, бывает и такое.

### Пример 14

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{5x}$

Поскольку косинус нуля стремится к единице, то у нас опять два бублика:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{5x} &= \frac{0}{0} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{5x} \stackrel{(2)}{=} \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x} \stackrel{(3)}{=} \\ &= \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \sin 2x}{\frac{1}{2} \cdot 2x} \stackrel{(4)}{=} \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}} \stackrel{(5)}{=} \frac{2}{5} \cdot 2 \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x)^{\rightarrow 0} \stackrel{(6)}{=} \frac{4}{5} \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

(1) Используем тригонометрическую формулу  $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ . **Возьмите её на заметку!** Пределы с применением этой формулы почему-то встречается очень часто.

(2) Постоянные множители выносим за значок предела (**свойство линейности**).

(3) Организуем первый замечательный предел.

(4) Здесь у нас получился только один замечательный предел, который превратился в единицу и исчез в произведении.

(5) Избавляемся от трехэтажности и выносим константу за знак предела.

(6) Предел фактически решен, указываем, что оставшийся синус стремится к нулю.

Следующие примеры для самостоятельного решения:

### Пример 15

Найти пределы

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{4x}$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctgx} \cdot (1 - \cos^2 3x)}{(x^2 + 5x)}$

Если возникают трудности технического характера (*использование формул, преобразование дробей и т. д.*), пожалуйста, обратитесь к *Приложениям* данной методички или к [этой](#) веб-странице.

И давайте запомним **полезный ориентир**: если вам встретилась неопределённость  $\frac{0}{0}$  и вы не знаете, «с какой стороны подойти» к решению, то нужно попытаться разложить числитель и знаменатель на множители. После чего, как правило, что-нибудь сокращается / упрощается.

## 7. Метод замены переменной

Очень часто (*но не всегда*) этот метод используют для того, чтобы свести решение как раз к первому замечательному пределу, и сейчас мы разберём два канонических примера с обратными тригонометрическими функциями:

### Пример 16

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{7x}$

Решаем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{7x} = \frac{0}{0} = (*)$$

В пределе находится арктангенс, от которого хорошо бы избавиться. Логично и очень удобно превратить «арк» в одну единственную букву. Проведём замену:  
 $\operatorname{arctg} 3x = t$ .

Теперь в пределе нужно выразить всё остальное через «тэ».

Во-первых, выясним, куда будет стремиться новая переменная «тэ»:  
если  $x \rightarrow 0$ , то  $(\operatorname{arctg} 3x) \rightarrow 0$ , иными словами, новоиспеченная переменная тоже будет стремиться к нулю:  $t \rightarrow 0$



Осталось в знаменателе выразить «икс» через «тэ». Для этого на обе части равенства  $\arctg 3x = t$  «навешиваем» тангенсы:

$$\operatorname{tg}(\arctg 3x) = \operatorname{tg} t$$

Слева две взаимно обратные функции уничтожаются:

$$3x = \operatorname{tg} t, \text{ откуда: } x = \frac{\operatorname{tg} t}{3}$$

Взмахи волшебной палочки закончены, остальное просто:

$$(*) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{7 \cdot \frac{\operatorname{tg} t}{3}} = \frac{3}{7} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{tg} t} = \frac{3}{7} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{\sin t}{(\cos t)^{-1}}} = \frac{3}{7} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \frac{3}{7} \cdot 1 = \frac{3}{7}$$

Самостоятельно:

### Пример 17

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\arcsin \frac{x}{2}}$

Примерный образец чистового оформления примера, как обычно, в конце.

Перефразируя известную застольную присказку, спешу вас обрадовать, что «между первым и вторым перерывчик будет небольшим» =)

## 8. Второй замечательный предел

Пусть при  $x \rightarrow \infty$  функция  $\alpha(x)$  тоже стремится к бесконечности. Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\alpha(x)} \right)^{\alpha(x)} = e$$

в частности, если  $\alpha(x) = x$ , то:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

**Справка:**  $e = 2,718281828\dots$  – известное иррациональное число.

Данный факт носит название **второго замечательного предела**, который, разумеется, тоже доказан в курсе математического анализа. Легко видеть, что при  $\alpha(x) \rightarrow \infty$  обнаруживается **неопределённость**  $1^\infty$ , и второй замечательный предел как раз предназначен для её устранения.

Функция  $\alpha(x)$  может быть достаточно сложной функцией – **важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности.**

### Пример 18

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x}$

Когда выражение под знаком предела находится в степени – это первый признак того, что нужно попытаться применить второй замечательный предел.

Но сначала, как всегда, пробуем подставить бесконечно большое число в выражение  $\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x}$ . Нетрудно заметить, что при  $x \rightarrow \infty$  основание степени  $\left(1 + \frac{1}{3x}\right) \rightarrow 1$ , а показатель:  $4x \rightarrow \infty$ , то есть, у нас имеется *неопределенность* вида  $1^\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^\infty$$

Как это часто бывает, замечательный предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)} = e$  не лежит на блюде с голубой каёмочкой, и поэтому его нужно организовать искусственно. Рассуждать можно следующим образом: в данном примере  $\alpha(x) = 3x$ , значит, в показателе нам тоже нужно получить  $3x$ . Для этого возводим основание в степень  $3x$ , и, чтобы выражение не изменилось – возводим в обратную степень  $\frac{1}{3x}$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)^{\frac{1}{3x} \cdot 4x}$$

Когда задание оформляется от руки, карандашом помечаем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)^{\frac{1}{3x} \cdot 4x}$$

→ е (2-й замечательный предел)

Практически всё готово, страшная степень превратилась в симпатичную букву  $e$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)^{\frac{1}{3x} \cdot 4x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{3x}} = e^{\frac{4}{3}}$$

→ е (2-й замечательный предел)

Результат не возбраняется записать и красивее:  $e^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{e^4}$  (см. Приложение *Горячие школьные формулы* – действия со степенями).

Далее отметки карандашом я не делаю, принцип оформления, думаю, понятен:

### Пример 19

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+1} \right)^{2x+3}$

**Внимание!** Предел подобного типа встречается очень часто, пожалуйста, очень внимательно изучите данный пример!

Пробуем подставить *бесконечно большое* число в выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+1} \right)^{2x+3} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^{\infty}$$

В результате получена неопределенность  $\left( \frac{\infty}{\infty} \right)^{\infty}$ . Но второй замечательный предел применим к неопределенности вида  $1^{\infty}$ . Что делать? Нужно преобразовать основание степени. Рассуждаем так: в знаменателе у нас  $x+1$ , значит, в числителе тоже нужно организовать  $x+1$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+1} \right)^{2x+3} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1-3}{x+1} \right)^{2x+3}$$

Теперь можно почленно разделить числитель на знаменатель:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+1} \right)^{2x+3} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1-3}{x+1} \right)^{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{3}{x+1} \right)^{2x+3}$$

Вроде бы основание стало напоминать  $\left( 1 + \frac{1}{\alpha(x)} \right)$ , но у нас знак «минус» да и тройка вместо единицы. Поможет следующее ухищрение, делаем дробь трехэтажной:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+1} \right)^{2x+3} &= \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1-3}{x+1} \right)^{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{3}{x+1} \right)^{2x+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\left( \frac{x+1}{-3} \right)} \right)^{2x+3} = 1^{\infty} \end{aligned}$$

Таким образом, основание приняло вид  $\left( 1 + \frac{1}{\alpha(x)} \right)$ , и, более того, появилась нужная нам неопределенность  $1^{\infty}$ . Теперь организуем конструкцию  $\left( 1 + \frac{1}{\alpha(x)} \right)^{\alpha(x)}$ .

Для этого исполняем наш искусственный прием: возводим основание степени в  $\frac{x+1}{-3}$ , и, чтобы выражение не изменилось – возводим в обратную дробь  $\frac{-3}{x+1}$ :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+1} \right)^{2x+3} &= \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1-3}{x+1} \right)^{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{3}{x+1} \right)^{2x+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\left( \frac{x+1}{-3} \right)} \right)^{2x+3} = 1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{\left( \frac{x+1}{-3} \right)} \right)^{\frac{x+1}{-3} \cdot (2x+3)} \right)\end{aligned}$$

Наконец-то долгожданное  $\left( 1 + \frac{1}{\alpha(x)} \right)^{\alpha(x)}$  устроено, с чистой совестью превращаем его в букву  $e$ :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+1} \right)^{2x+3} &= \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1-3}{x+1} \right)^{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{3}{x+1} \right)^{2x+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\left( \frac{x+1}{-3} \right)} \right)^{2x+3} = 1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{\left( \frac{x+1}{-3} \right)} \right)^{\frac{x+1}{-3} \cdot (2x+3)} \right) = e^{-3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+1}} = e^{\frac{\infty}{\infty}}\end{aligned}$$

Но на этом приключения не закончены, в показателе у нас появилась неопределенность вида  $\frac{\infty}{\infty}$ . Благо, раскрывать её мы **давным-давно** научились.

Делим числитель и знаменатель на  $x$ :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+1} \right)^{2x+3} &= \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1-3}{x+1} \right)^{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{3}{x+1} \right)^{2x+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\left( \frac{x+1}{-3} \right)} \right)^{2x+3} = 1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{\left( \frac{x+1}{-3} \right)} \right)^{\frac{x+1}{-3} \cdot (2x+3)} \right) = e^{-3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+1}} = e^{\frac{\infty}{\infty}} = \\ &= e^{-3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{x+1}{x}}} = e^{-3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}}} = e^{-3 \cdot 2} = e^{-6}\end{aligned}$$

Готово. Эстеты могут сбросить экспоненту вниз:  $\frac{1}{e^6}$

А сейчас мы рассмотрим модификацию второго замечательного предела. Напомню, что он выглядит следующим образом:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)} = e$  (если  $\alpha(x) \rightarrow \infty$ ). Однако на практике время от времени можно встретить его «перевёртыш», который в общем виде записывается так:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e, \text{ если только } \alpha(x) \rightarrow 0.$$

### Пример 20

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + tgx)^{\frac{1}{2x}}$

Сначала (мысленно или на черновике) устремляем «икс» к нулю:

$$(1 + tg0)^{\frac{1}{2 \cdot 0}} = (1 + 0)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}$$

В результате выявлена знакомая неопределенность  $1^{\infty}$ . Очевидно, что в данном примере  $\alpha(x) = tgx$ . Все действия прокомментирую по шагам:

(1) С помощью знакомого искусственного приема организуем в показателе степени конструкцию  $\frac{1}{\alpha(x)}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + tgx)^{\frac{1}{2x}} &= 1^{\infty} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left( (1 + tgx)^{\frac{1}{tgx}} \right)^{tgx \cdot \frac{1}{2x}} \stackrel{(2)}{=} e^{\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tgx}{x}} = e^{\frac{0}{0}} \stackrel{(3)}{=} \\ &= e^{\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot (\cos x)^{-1}}} \stackrel{(4)}{=} e^{\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} \stackrel{(5)}{=} e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \end{aligned}$$

(2) Выражение  $(1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}$  со спокойной душой превращаем в букву  $e$ .

(3) В показателе появилась неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ . Раскладываем тангенс на синус и косинус (*ничего не напоминает?*).

(4) Косинус нуля стремится к единице (не забываем пометить карандашом), поэтому он просто пропадает в произведении.

(5) Тот самый  $=$

Как Вы видите, в практических заданиях на вычисление пределов нередко требуется применять сразу несколько правил и приемов.

Тренируемся:

### Пример 21

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 5}{x^2 - 5} \right)^{x-1}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x+2}{x+3} \right)^{3x+4}$$

...Ну что же, такое мучение должно быть вознаграждено! =)

## 9. Формула для устранения неопределённости $1^\infty$

Неопределённость  $1^\infty$  (*и только её!*) можно устранить по формуле:

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [(u(x)-1) \cdot v(x)]}, \text{ где } a - \text{произвольное значение.}$$

На самом деле данная формула является следствием второго замечательного предела, и её особое удобство состоит в том, что здесь *икс* может стремиться к **любому значению** (а не только к  $+\infty$  или нулю).

Вычислим, например, предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{3x} \right)^{4x}$  (*Пример 18*). Для него

$u(x) = 1 + \frac{1}{3x}$ ,  $v(x) = 4x$ , и по формуле  $\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [(u(x)-1) \cdot v(x)]}$  получаем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{3x} \right)^{4x} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{3x} - 1 \right) \cdot 4x \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{3x}} = e^{\frac{4}{3}}$$

Таким образом, **с помощью формулы очень удобно выполнять проверку** «классических» примеров на 2-й замечательный предел. Но вот на чистовике «размахивать дубиной» не советую, в традициях всё-таки применять «обычное» оформление решения, если его можно применить. Однако формула становится более чем актуальна, когда «икс» стремится к «минус бесконечности» или к конечному числу, отличному от нуля:

### Пример 22

$$\text{Вычислить предел } \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{19-4x}{5x-8} \right)^{\frac{16-3x}{2x-6}}$$

На первом шаге, не устану повторять, подставляем значение «икс» в выражение под знаком предела. А вдруг никакой неопределённости вообще нет? Так бывает! Но не в этот раз. Подставляя «тройку», приходим к выводу, что здесь неопределённость  $1^\infty$

Используем формулу  $\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [(u(x)-1) \cdot v(x)]}$

Чтобы не таскать за собой букву «е» и не мельчить, показатель  $\lim_{x \rightarrow a} ((u(x)-1) \cdot v(x))$  удобнее вычислить отдельно:

$$\text{В данном случае: } u(x) = \frac{19-4x}{5x-8}, \quad v(x) = \frac{16-3x}{2x-6}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} ((u(x)-1) \cdot v(x)) &= \lim_{x \rightarrow 3} \left( \left( \frac{19-4x}{5x-8} - 1 \right) \cdot \frac{16-3x}{2x-6} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left( \left( \frac{19-4x-5x+8}{5x-8} \right) \cdot \frac{16-3x}{2x-6} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(27-9x) \cdot (16-3x)}{(5x-8) \cdot (2x-6)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9(x-3) \cdot (16-3x)}{(5x-8) \cdot 2(x-3)} = -\frac{9}{2} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(16-3x)}{(5x-8)} = -\frac{9}{2} \cdot \frac{7}{7} = -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

С точки зрения техники вычислений всё рутинно: сначала приводим первое слагаемое к общему знаменателю, затем выносим константы и проводим сокращения, избавляясь от неопределённости  $\frac{0}{0}$ .

В результате:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{19-4x}{5x-8} \right)^{\frac{16-3x}{2x-6}} = e^{-\frac{9}{2}}$$

Готово.

Ещё один типовой предел, который встречался в моей практике десятки раз:

### Пример 23

Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (5-2x) \cdot [\ln(1-x) - \ln(2-x)]$$

Здесь у нас встретилась новая *неопределённость*:  $\infty \cdot (\infty - \infty)$  – суть  $\infty - \infty$ . Этой неопределённости и методам её устранения будет посвящён отдельный параграф, ну а пока сосредоточимся на конкретном примере. Сначала полное решение, потом комменты:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (5-2x) [\ln(1-x) - \ln(2-x)] &= \infty \cdot (\infty - \infty) \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (5-2x) \ln \left( \frac{1-x}{2-x} \right) \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left( \frac{1-x}{2-x} \right)^{5-2x} \stackrel{(3)}{=} \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1-x}{2-x} \right)^{5-2x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^{\infty} \stackrel{(4)}{=} \ln \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2-x-1}{2-x} \right)^{5-2x} \stackrel{(5)}{=} \ln \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 - \frac{1}{2-x} \right)^{5-2x} \stackrel{(6)}{=} 1^{\infty} = \\ &= \ln e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 - \frac{1}{2-x} \right) \cdot (5-2x)} \stackrel{(7)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-2x}{x-2} = \frac{\infty}{-\infty} \stackrel{(8)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5-2x}{x-2}}{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5-2x}{x-2}}{1 - \frac{2}{x}} \stackrel{(9)}{=} \frac{-2}{1} = -2 \end{aligned}$$

(1)-(2) На первых двух шагах используем формулы  $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ ,  $a \ln x = \ln x^a$  (см. Приложение **Горячие школьные формулы**).

(3) Значок предела перемещаем под логарифм. Это можно сделать, поскольку данный логарифм **непрерывен** на «минус бесконечности» (и на самом деле – это ещё одно свойство предела). Кроме того, предел же относится к «начинке» логарифма.

(4)-(5) Стандартным приёмом преобразуем неопределённость  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty$  к виду  $1^\infty$ .

(6) Используем формулу  $\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [(u(x)-1) \cdot v(x)]}$ .

(7) Экспоненциальная и логарифмическая функция – взаимно обратные функции, поэтому и «е» и логарифм можно убрать. Действительно, согласно свойству логарифма:

$$\ln e^n = n \ln e = n \cdot 1 = n. \text{ Минус перед дробью вносим в знаменатель: } -\frac{1}{2-x} = \frac{1}{-(2-x)} = \frac{1}{x-2}$$

(8) Без комментариев.

Следующий пример для самостоятельного решения:

### Пример 24

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 1} (5x-4)^{\frac{x}{10(x-1)}}$  двумя способами:

1) с помощью формулы;

2) путём **замены** и сведению ко второму замечательному пределу (который  $\rightarrow 0$ ).

К слову, с помощью замены – к «классическому» виду (когда переменная стремится к нулю либо плюс бесконечности) можно свести любой «нестандартный» предел.

В 95-99% случаев на зачете, экзамене вам встретится первый замечательный предел и / или второй замечательный предел, однако иногда проскакивают и более редкие кадры, в частности, если при  $x \rightarrow 0$  функция  $\alpha(x) \rightarrow 0$ , то справедливы следующие замечательные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \alpha(x))}{\alpha(x)} = 1$$

Как быть, если попался «экзотический» предел? Ничего страшного, для указанных выше пределов справедливы практически все выкладки, приёмы решения, что и для **первого замечательного предела**. Их нужно решать по аналогии.



Но расслабляться ещё рано:

## 10. Порядок роста функции

В данном параграфе мы вернёмся к **пределам с многочленами**, когда  $x \rightarrow +\infty$  или  $x \rightarrow -\infty$ . Материал уже частично знаком, и настала пора разобраться в нём как следует. Давайте научимся находить решение в считанные секунды!

Вычислим следующий предел:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{100} - 200x^2 - 500x \right)$$

Проведём предварительный анализ. В самом начале я рекомендовал рассуждать не совсем корректным способом: сначала «икс» равно 10, потом, 100, затем 1000, миллион и т.д. до бесконечности. **В чём изъян такого подхода?** Построим данную последовательность:

$$x = 10 \Rightarrow f(x) = \frac{10^3}{100} - 200 \cdot 10^2 - 500 \cdot 10 = 10 - 20000 - 5000 = -24990$$

$$x = 100 \Rightarrow f(x) = \frac{100^3}{100} - 200 \cdot 100^2 - 500 \cdot 100 = 10000 - 2000000 - 50000 = -2040000$$

$$x = 1000 \Rightarrow f(x) = \frac{1000^3}{100} - 200 \cdot 1000^2 - 500 \cdot 1000 = 10000000 - 200000000 - 500000 = -190500000$$

...

Исходя из полученных результатов, складывается стойкое впечатление, что предел стремится к «минус бесконечности». Но на проверку **это впечатление кардинально ошибочно**:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{100} - 200x^2 - 500x \right) \neq -\infty$$

В этой связи необходимо знать теорию математического анализа, а именно, некоторые выкладки о **порядке роста функции**.

Применительно к нашему примеру можно сказать, что слагаемое  $\frac{x^3}{100}$  обладает **более высоким порядком роста**, чем сумма  $-200x^2 - 500x$ . Иными словами, при **достаточно больших** значениях «икс» слагаемое  $\frac{x^3}{100}$  «перетянет» на «плюс бесконечность» всё остальное:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{100} - 200x^2 - 500x \right) = +\infty$$

При небольших значениях «икс» – да, сладкая парочка  $-200x^2 - 500x$  перетягивает канат в сторону «минус бесконечности», что и привело нас к неверному первоначальному выводу. Но уже при  $x = 1000000$  получается гигантское положительное число  $f(x) = 979999950000000$ !

Если сильно уменьшить первое слагаемое, то от этого ничего не изменится:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{100000000} - 200x^2 - 500x \right) = +\infty$ , будет лишь отсрочен тот момент, когда бравая дробь  $\frac{x^3}{100000000}$  «вытянет» весь предел на «плюс бесконечность». Не поможет и «усиление противовеса»:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{100000000} - 200000000000x^2 - 500000000000x \right) = +\infty.$$

Нулей можете приписать, сколько хотите (без шуток). Вот такая вот удивительная наука математический анализ – способна низвести любого монстра до мелочи пузатой.

Таким образом, **кубическая функция имеет более высокий порядок роста, чем:**

- квадратичная функция;
- линейная функция;
- сумма квадратичной и линейной функции.

На простейшем примере поясню геометрический смысл вышесказанного.

Представьте **графики** линейной  $f(x) = x$ , квадратичной  $g(x) = x^2$  и кубической  $h(x) = x^3$  функций. Легко заметить, что при увеличении «икс», кубическая парабола  $h(x) = x^3$  взмывает вверх гораздо быстрее и круче, чем парабола и, тем более, прямая.

Аналогичное правило можно сформулировать для любой степени:

Степенная функция данной степени растёт быстрее, чем любая степенная функция более низкой степени. **И быстрее**, чем сумма любого количества степенных функций более низкой степени.

Найдём предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^7 + 300x^6 + 65x^5 - 30x^4 + 25x + 125)$

Значение данного предела зависит только от слагаемого  $-2x^7$ . Всё остальное **МЫСЛЕННО** отбрасываем:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^7)$ , и теперь ясно как день, что предел стремится к «минус бесконечности»:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^7 + 300x^6 + 65x^5 - 30x^4 + 25x + 125) = -\infty$$

То есть, слагаемое  $-2x^7$  **более высокого порядка роста**, чем всё остальное.

У «хвоста»  $300x^6 + 65x^5 - 30x^4 + 25x + 125$  могут быть сколь угодно большие константы, другие знаки, но результат от этого **НЕ ИЗМЕНИТСЯ**.

## 11. Сравнение бесконечно больших функций

В Параграфе 3 мы вычислили три предела с неопределённостью  $\frac{\infty}{\infty}$  с помощью стандартного деления числителя и знаменателя на «икс» в старшей степени:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2} &= \frac{2}{3} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} &= +\infty\end{aligned}$$

Понятно, что на практике всё нужно расписать подробно, **но почему бы не выяснить правильный ответ ещё до решения?** Тем более, это ОЧЕНЬ просто!

В первом примере  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2}$  в числителе и знаменателе МЫСЛЕННО отбрасываем все младшие слагаемые:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

В таких случаях говорят, что **функции числителя и знаменателя обладают одинаковым порядком роста**. Или короче – **числитель и знаменатель одного порядка роста**. Действительно, в данном пределе и вверху, и внизу находятся квадратичные функции. Мир, равенство, братство.

Во втором примере  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4}$  аналогично – в числителе и знаменателе МЫСЛЕННО уберём всех малышей:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3}{5x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{5x} = 0$$

Здесь **знаменатель более высокого порядка, чем числитель**. Многочлен 4-й степени растёт быстрее кубической функции и «перетягивает» предел на ноль.

И, наконец, в пределе  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$  карлики тоже идут лесом:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = +\infty$$

А в этом примере всё наоборот – **числитель более высокого порядка, чем знаменатель**. Квадратичная функция растёт быстрее линейной и «перетягивает» предел на «плюс бесконечность».

**Сделаем краткую теоретическую выжимку.** Рассмотрим две произвольные функции  $f(x), g(x)$ , которые определены на бесконечности.

1) Если  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ , где  $k$  – ненулевая константа, то функции имеют одинаковый порядок роста. Если  $k = 1$ , то функции называют **эквивалентными** на бесконечности.

2) Если  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ , то функция  $f(x)$  более высокого порядка роста, чем  $g(x)$ .

3) Если  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , то функция  $g(x)$  более высокого порядка роста, чем  $f(x)$ .

**! Примечание:** при  $x \rightarrow -\infty$  суть выкладок не меняется.

Подчеркиваю ещё раз, что данные факты относятся к произвольным функциям, определённым на бесконечности, а не только к многочленам. Но у нас ещё непаханое поле полиномов, поэтому, продолжаем работать с ними... да вы не грустите, для разнообразия я добавлю корней =)

### Пример 25

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{4x^4 + 1}}$

В наличии неопределённость  $\frac{\infty}{\infty}$  и приём решения уже знаком – нужно разделить числитель и знаменатель на «икс» в старшей степени.

Старшая степень числителя равна двум. Знаменатель... как определить старшую степень, если многочлен под корнем? **МЫСЛЕННО** отбрасываем все слагаемые, кроме самого старшего:  $\sqrt{4x^4}$ . Константу тоже отбрасываем и выясняем старшую степень знаменателя:  $\sqrt{x^4} = x^2$ . Она тоже равна двум. Таким образом, **числитель и знаменатель одного порядка роста, а значит, предел равен конечному числу, отличному от нуля.**

Почему бы сразу не узнать ответ? В числителе и знаменателе **МЫСЛЕННО** отбрасываем все младшие слагаемые:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{\sqrt{4x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{2x^2} = 1$ . Таким образом, наши функции не только одного порядка роста, но ещё и **эквивалентны** на бесконечности.

Оформляем решение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{4x^4 + 1}} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Разделим числитель и знаменатель на  $x^2$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 4}{x^2}}{\frac{\sqrt{4x^4 + 1}}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\frac{\sqrt{4x^4 + 1}}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{\frac{4x^4 + 1}{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^4}}} = \frac{2}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1$$

В действительности пару шагов можно пропустить, просто я подробно расписал, как в знаменателе под корень вносится  $x^2$ .

### Пример 26

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2 - x - x^6}}{2x^3 + x^2 - 5x + 3}$

Это пример для самостоятельного решения. Постарайтесь провести рассуждения по образцу первого примера. Также заметьте, что здесь неопределённость  $\frac{-\infty}{\infty}$ , что необходимо отразить в решении.

Во избежание недочётов, всегда анализируйте, какая неопределённость получается в пределах рассматриваемого вида. Помимо неопределённости  $\frac{\infty}{\infty}$  может встретиться неопределённость  $\frac{-\infty}{\infty}$ ,  $\frac{\infty}{-\infty}$  либо  $\frac{-\infty}{-\infty}$ . Во всех четырёх случаях числитель и знаменатель необходимо разделить на «икс» в старшей степени.

На уроке [Методы решения пределов](#) я рассмотрел более трудные примеры с корнями:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{7x^6 - 3x^2} + \sqrt{x^5 + 3x + 5}}{\sqrt[3]{x^7 + 1} - x^2 - 2x}$ ,  $\frac{\sqrt[5]{2x^4 + x} - 3x}{\sqrt{5 + 3x^2} + \sqrt[3]{x}}$ , но подобные пределы не столь актуальны для «чайников», и поэтому я не счёл нужным включить их в этот курс.

## 12. Если «икс» стремится к «минус бесконечности»

Призрак «минус бесконечности» уже давно витал в воздухе, и сейчас мы разберём пределы с многочленами, в которых  $x \rightarrow -\infty$ . Принципы и методы решения будут точно такими же за исключением ряда нюансов.

Рассмотрим 4 фишки, которые потребуются для решения практических заданий:

1) Вычислим предел  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^4 + x^3 + 1)$

Значение предела зависит только от слагаемого  $2x^4$ , поскольку оно обладает самым высоким порядком роста. Если  $x \rightarrow -\infty$ , то **бесконечно большое по модулю отрицательное число в ЧЁТНОЙ степени** (в данном случае в четвёртой), равно «плюс бесконечности»:  $(-\infty)^4 = +\infty$ . Константа («двойка») положительна, поэтому:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^4 + x^3 + 1) = +\infty$$

2) Вычислим предел  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5 - 3x - x^2)$

Здесь старшая степень опять **чётная**, поэтому:  $(-\infty)^2 = +\infty$ . Но перед  $x^2$  расположился «минус» (отрицательная константа  $-1$ ), следовательно:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (5 - 3x - x^2) = -\infty$$

3) Вычислим предел  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 + 2x^2 - x + 4)$

Значение предела зависит только от  $4x^3$ . Как вы помните из школы, «минус» «выскакивает» из-под нечётной степени, поэтому **бесконечно большое по модулю отрицательное число в НЕЧЁТНОЙ степени** равно «минус бесконечности», в данном случае:  $(-\infty)^3 = -\infty$ .

Константа («четвёрка») положительна, значит:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 + 2x^2 - x + 4) = -\infty$$

4) Вычислим предел  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5 + x^4 + 4x^3 + x^2 - x - 7)$

Первый парень на деревне  $-2x^5$  снова обладает **нечётной** степенью, кроме того, за пазухой отрицательная константа, а значит:  $-2 \cdot (-\infty)^5 = -2 \cdot (-\infty) = +\infty$  Таким образом:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5 + x^4 + 4x^3 + x^2 - x - 7) = +\infty.$$

Как ваше настроение? ;)

### Пример 27

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{3 - x + 5x^2 - 2x^3}$

Используя вышеизложенные пункты, приходим к выводу, что здесь неопределённость  $\frac{-\infty}{\infty}$ . Числитель и знаменатель одного порядка роста, значит, в пределе получится конечное число. Узнаем ответ, отбросив всех малышей:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{-2x^3} = -\frac{1}{2}$$

Решение тривиально:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{3 - x + 5x^2 - 2x^3} = \frac{-\infty}{\infty} = (*)$$

Разделим числитель и знаменатель на  $x^3$ :

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3}}{\frac{3 - x + 5x^2 - 2x^3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x} - 2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Для самостоятельного решения:

### Пример 28

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 3}{-2x^4 - x^3 + 7x^2 - 1}$

Вот и всё, а вы боялись =) На самом деле есть ещё один случай, но его я опять же оставлю за кадром. По той причине, что есть более актуальные вещи:

## 13. Устранение неопределённости вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty$

Под впечатлением недавно рассмотренного материала, можно прийти к ошибочному выводу о том, что неопределённость  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty$  непременно сводится к неопределённости  $1^\infty$  с последующим применением **второго замечательного предела** либо **формулы-следствия**. На самом деле такое преобразование возможно далеко не всегда. А именно – оно осуществимо **лишь в том** случае, если **числитель и знаменатель основания степени – эквивалентные бесконечно большие функции**.

Например:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+1} \right)^{2x+3}$  (Пример 19)

Отвлечёмся от показателя и вычислим предел основания:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x-2}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

В пределе получена **единица**, значит, числитель и знаменатель **не просто одного порядка роста, а ещё и эквивалентны**.

Аналогичных пределов можно придумать очень много:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x-1} \right)^x, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-1}{3x+2} \right)^{4x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+5}{x^2-2x+3} \right)^{4x-1} \text{ и т.п.}$$

Дроби данных примеров объединяет вышеуказанная особенность:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

В других случаях неопределённость  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty$  свести к неопределённости  $1^\infty$

**невозможно, и второй замечательный предел не применим!**

### Пример 29

Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{x+3} \right)^x$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{3x+4} \right)^{3x-1}$$

Как ни старайся, как ни крути, как ни верти, а неопределённость  $\left( \frac{\infty}{\infty} \right)^\infty$  не удастся преобразовать в неопределённость  $1^\infty$ .

Здесь числители и знаменатели оснований хоть и одного порядка роста, однако **не эквиваленты**:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x+3} = 2 \neq 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{3x+4} = \frac{1}{3} \neq 1$

Таким образом, 2-й замечательный предел и тем более формулу – **ПРИМЕНЯТЬ НЕЛЬЗЯ**.

**! Примечание:** не путайте рассматриваемые примеры с пределом  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{19-4x}{5x-8} \right)^{\frac{16-3x}{2x-6}}$  (Пример 22), в котором числитель и знаменатель основания тоже не эквивалентны. Там готовая неопределённость  $1^\infty$ , здесь же речь идёт о неопределённости  $\left( \frac{\infty}{\infty} \right)^\infty$ .

Метод решения пределов-«обманок» прост и знаОм: нужно числитель и знаменатель **основания** разделить на «икс» в старшей степени (невзирая на показатель):

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{x+3} \right)^x = \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{x+3}{x}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2 + \frac{1}{x} \rightarrow 0}{1 + \frac{3}{x} \rightarrow 0} \right)^x = 2^{+\infty} = +\infty$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{3x+4} \right)^{3x-1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{x-2}{x}}{\frac{3x+4}{x}} \right)^{3x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - \frac{2}{x} \rightarrow 0}{3 + \frac{4}{x} \rightarrow 0} \right)^{3x-1} = \left( \frac{1}{3} \right)^{+\infty} = 0$$

Если числитель и знаменатель основания разного порядка роста, то приём решения точно такой же:



### Пример 30

Найти следующие пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x^2+3x+5} \right)^{4x}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{2x-3} \right)^{5x+1}$$

Это короткие примеры для самостоятельного решения.

И да, не забываем, неопределённости может не быть вообще! И сейчас наступил удачный момент, чтобы закрыть следующий вопрос:

## **14. Что является, а что не является неопределённостью?**

Сначала перечислим неопределённости, которые нам уже встречались:

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^{\infty}, \quad \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^{\infty}, \quad 0 \cdot \infty$$

Что ещё? Один раз «проскочила» неопределённость  $\infty - \infty$ , и очень скоро мы разберём её подробно. Ну и совсем редко встречаются неопределённости  $\infty^0$ ,  $0^0$ .

Для того чтобы устранить неопределённость, как вы знаете, необходимо использовать некоторые правила и методы решения пределов.

Теперь о том, что НЕ является неопределённостью.

### **Неопределённостью не является:**

– Любая определённость =)

– *Бесконечно малое* число, делённое на ненулевую константу:  $\frac{0}{-3} = 0$ . Сюда же можно отнести *бесконечно малое* число, делённое на *бесконечно большое* число:  $\frac{0}{\infty} = 0$

– Ненулевая константа, делённая на *бесконечно малое* число, например:  $\frac{5}{0} = \infty$ .

– Начинаящие изучать математический анализ, часто пытаются устранить мифическую неопределённость  $\frac{\infty}{0}$ . Но все попытки тщетны, поскольку это определённость:

и в самом деле – представим «бесконечность делить на ноль» в виде произведения:  
 $\frac{\infty}{0} = \infty \cdot \frac{1}{0}$ . Согласно предыдущему пункту:  $\frac{\infty}{0} = \infty \cdot \frac{1}{0} = \infty \cdot \infty = \infty$ . Приведу живой пример:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{e^{-x}} \right) = \frac{+\infty}{0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x) = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$$

– Число, не равное единице, в *бесконечно большой* степени не является неопределённостью. Например:  $3^{+\infty} = +\infty$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$  – только что, кстати, подобные штуки были. В частности:  $0^{+\infty} = 0$ .

– Разность двух функций, каждая из которых стремится к нулю, например:  
 $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x) = 0 - 0 = 0$ . Таким образом, неопределённости «ноль минус ноль» тоже не существует – это определённость.

Многие из перечисленных неопределённостей и определённостей уже встречались и ещё неоднократно встретятся на практике. Причём, прямо сейчас =)

## 15. Неопределённость $\infty - \infty$

Популярная неопределённость  $\infty - \infty$  устраняется следующими способами:

- приведением выражения под знаком предела к общему знаменателю;
- умножением / делением на сопряжённое выражение;
- преобразованием логарифмов (см. *Пример 23*).

Начнём с первого случая, о котором я ещё не рассказывал:

### Пример 31

Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x^2 - x} - \frac{3}{x^3 - 1} \right)$$

В данном пределе имеет место неопределённость  $\infty - \infty$ , и общий алгоритм решения незамысловат: необходимо привести выражение к общему знаменателю, а затем попытаться что-нибудь сократить:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x^2 - x} - \frac{3}{x^3 - 1} \right) &= (\infty - \infty) \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x(x-1)} - \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1-3x}{x(x-1)(x^2+x+1)} \stackrel{(3)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{0}{0} \stackrel{(4)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x^2+x+1)} \stackrel{(5)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x(x^2+x+1)} = \frac{0}{1 \cdot (1+1+1)} = \frac{0}{3} = 0 \end{aligned}$$

(1) Раскладываем знаменатели на множители; во втором знаменателе используем формулу разности кубов  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ . Данный шаг можно было пропустить, но этим пришлось бы заниматься потом, и, на мой взгляд, разложение на множители удобнее провести сразу же.

(2) Приводим выражение к общему знаменателю.

(3) Приводим подобные слагаемые в числителе. Неопределённость  $\infty - \infty$  трансформировалась в неопределённость  $\frac{0}{0}$ , которая стандартно раскрывается разложением числителя и знаменателя на множители.

(4) Знаменатель уже разложен на множители. Раскладываем на множители числитель, в данном случае использована формула  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ .

(5) Сокращаем числитель и знаменатель на  $(x - 1)$ , устраняя неопределённость.

Как видите, новизны-то особой и нет.

Аналогичное задание для самостоятельного решения:

### Пример 32

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{8}{x^2 - 16} - \frac{1}{x - 4} \right)$

Не ленимся, не ленимся! – все задания здесь не просто так ;-)

Второй вид пределов с неопределённостью  $\infty - \infty$  представляет собой разность, в которой присутствуют один или два корня:

### Пример 33

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 1})$

Каноничный образец. И новизны здесь тоже нет – нужно умножить и разделить на **сопряжённое выражение**, чтобы потом воспользоваться формулой  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 1}) = (\infty - \infty) = (*)$$

Умножим и разделим на сопряжённое выражение:

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 1})(\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 1})}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 3 - (x^2 - 3x + 1)}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 3 - x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 1}} = \frac{\infty}{\infty} = (*) \end{aligned}$$

Неопределённость  $\infty - \infty$  превратилась в неопределённость  $\frac{\infty}{\infty}$ . Узнаёте? Такие орешки мы щёлкали в *Примерах 25, 26*.

Обращаем внимание, что числитель и знаменатель **одного порядка роста**, а значит, в пределе должно получиться конечное число. Разделим числитель и знаменатель на  $x$ :

$$\begin{aligned}
 (*) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x+2}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x+3} + \sqrt{x^2-3x+1}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x+2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x+3}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2-3x+1}{x^2}}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{2}{x} \rightarrow 0}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} \rightarrow 0} + \frac{3}{x^2} \rightarrow 0} + \sqrt{1 - \frac{3}{x} \rightarrow 0} + \frac{1}{x^2} \rightarrow 0} = \frac{4}{1+1} = \frac{4}{2} = 2
 \end{aligned}$$

Не редкость, когда в разности всего один корень, но это не меняет алгоритма решения:

### Пример 34

Вычислить пределы

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{x^3 + 4x^2})$

Это пара коротких примеров для самостоятельного решения.

Следует отметить, что пределы рассмотренного типа не обязаны равняться конечному числу, вполне может получиться и бесконечность, причём, как «плюс», так и «минус». Кстати, в пункте «б») можно проанализировать порядок роста членов, чтобы сразу выяснить ответ ;-)

Иногда на практике встречаются пределы-«обманки», в которых неопределённости «бесконечность минус бесконечность» нет вообще, вот простейший пример:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$$

Таким образом, **будьте предельно внимательны: перед решением предела необходимо убедиться, что неопределённость действительно есть!** Собственно, это касается вообще любого предела.

В заключительной части нашего интенсивного курса мы рассмотрим пределы числовых последовательностей, которые тоже достаточно часто встречаются на практике:

## 16. Понятие числовой последовательности и её предела

Пусть **каждому** натуральному номеру  $n$  **по некоторому правилу** поставлено в соответствие действительное число  $x_n$ . Тогда говорят, что задана **числовая последовательность**  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_n, \dots$ . При этом:

$x_1$  называют *первым членом* последовательности;  
 $x_2$  – *вторым членом* последовательности;  
 $x_3$  – *третьим членом* последовательности;  
...  
 $x_n$  – *энным* или **общим членом** последовательности;  
...

На практике последовательность обычно задаётся формулой общего члена, например:  $x_n = 2n$  – последовательность положительных чётных чисел:

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 \cdot 1 = 2 \\x_2 &= 2 \cdot 2 = 4 \\x_3 &= 2 \cdot 3 = 6 \\x_4 &= 2 \cdot 4 = 8 \\x_5 &= 2 \cdot 5 = 10 \\&\dots \\x_{n-1} &= 2 \cdot (n-1) = 2n-2 \\x_n &= 2n \\x_{n+1} &= 2 \cdot (n+1) = 2n+2 \\&\dots\end{aligned}$$

Таким образом, запись  $x_n = 2n$  однозначно определяет все члены последовательности – это и есть то правило (формула), по которому натуральным значениям  $1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots$  в соответствие ставятся числа  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_n, \dots$ . Поэтому последовательность часто коротко обозначают общим членом, причём вместо «икс» могут использоваться другие латинские буквы, например:

Последовательность положительных нечётных чисел  $y_n = 2n - 1$ :

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = 5, \quad y_4 = 7, \quad y_5 = 9, \quad \dots \quad y_{n-1} = 2n-3, \quad y_n = 2n-1, \quad y_{n+1} = 2n+1, \quad \dots$$

Ещё одна распространённая последовательность  $u_n = \frac{1}{n}$ :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$$

Как, наверное, многие подметили, переменная «эн» играет роль своеобразного счётчика.

В рамках данного курса мы ограничимся интуитивным пониманием предела последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n) = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 1) = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

В чём состоит **принципиальное отличие** предела последовательности от предела функции? Давайте запишем два «родственных» предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

В пределе последовательности «динамическая» переменная «эн» может стремиться **только к «плюс бесконечности»** – в сторону увеличения натуральных номеров 1, 2, 3, 4, 5, ...  $n$ , ... В пределе функции «икс» можно направить куда угодно – к «минус бесконечности» либо к произвольному действительному числу.

Последовательность *дискретна* (прерывна), то есть состоит из отдельных изолированных членов. Раз, два, три, четыре, пять, вышел зайчик погулять. У «традиционных» функций с «иксами» ничего подобного не наблюдается, для них характерна *непрерывность*.

По причине *дискретности* в пределах последовательностей встречаются свои «фирменные представители», такие как, «мигалки», факториалы и прогрессии.

«**Мигалкой**» на математическом жаргоне называют последовательность  $x_n = (-1)^n$ :  
 $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

**Надеюсь, все помнят**, что  $-1$  в нечётной степени равно  $-1$ , а в чётной – единице.

Таким образом, **члены последовательности могут повторяться**. Так, в рассмотренном примере последовательность состоит из двух бесконечно чередующихся чисел.

А бывает ли так, что последовательность состоит из одинаковых чисел? Конечно. Например,  $x_n = 3$  задаёт бесконечное количество «троек». Для любителей есть случай, когда в формуле всё же формально фигурирует «эн»:  $x_n = 1^n$

Следует отметить, что предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$  **не существует** (т.к. члены не стремятся к какому-то **одному** числу), но вот с последними двумя примерами полный порядок:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$$

Тем не менее, само по себе присутствие «мигалки» ещё ничего не значит. Так, например, у последовательности  $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  предел преспокойно себе существует – члены  $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$  «скачут» вокруг нуля и *бесконечно близко* к нему приближаются:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$$

Другой «фирменный представитель» – это **факториал**:  $x_n = n!$

Всего лишь свёрнутая запись произведения:

$$x_1 = 1! = 1$$

$$x_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$x_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$x_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$x_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$x_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

...

$$x_{n-2} = (n-2)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-2)$$

$$x_{n-1} = (n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)$$

$$x_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)n$$

$$x_{n+1} = (n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)n(n+1)$$

$$x_{n+2} = (n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$$

...

Отнюдь не графомания – пригодится для задач ;- ) Рекомендую осмыслить-запомнить и даже переписать в тетрадь.

Очевидно, что:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n! = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$$

На самом деле с числовыми последовательностями мы имели дело ещё в средних классах школы. Речь идёт об **арифметической** и **геометрической** прогрессиях. В курсе высшей математики особо важна **геометрическая прогрессия**, энный член которой задаётся формулой  $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ , где  $b_1$  – первый член ( $b_1 \neq 0$ ), а  $q$  – *знаменатель* прогрессии ( $q \neq 0$ ). В заданиях по матану первый член частенько равен единице.

### Примеры:

прогрессия  $b_n = 2^{n-1}$  задаёт последовательность 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... ;

прогрессия  $b_n = (-7)^n = (-1)^n \cdot 7^n$  задаёт последовательность  
 $-7, 49, -343, 7^4, -7^5, \dots$  ;

прогрессия  $b_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{5^{n-1}}$  задаёт последовательность  
 $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \frac{1}{3125}, \dots$  ;

прогрессия  $b_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{-1}{3}\right)^n = \frac{(-1)^n}{3^n}$  задаёт последовательность  
 $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \dots$  .

Прогрессию называют **бесконечно убывающей**, если  $-1 < q < 1$  (последние два случая). Как ясно уже из названия, предел любой бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен нулю, в частности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5^{n-1}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = 0$$

Если знаменатель геометрической прогрессии  $q > 1$ , то она наоборот – стремится к бесконечности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n-1} = \infty$$

Если же  $q < -1$ , то предела не существует. Так, члены последовательности  $(-7)^n$  без устали прыгают то к «плюс бесконечности», то к «минус бесконечности». А здравый смысл и теоремы матана подсказывают, что если что-то куда-то и стремится, то это заветное место единственно.

## 17. Методы нахождения пределов числовых последовательностей

В теории математического анализа последовательность считается частным случаем функции, и поэтому многое будет похоже на пределы функций. В этой связи я постараюсь разобрать примеры, которые характерны именно для последовательностей. Продолжим тему с прогрессиями:

### Пример 35

Найти предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} \right)$$



**Решение:** перед нами нечто похожее на бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, но она ли это? Для ясности распишем несколько первых членов:

$$x_1 = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}$$

$$x_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3}$$

...

$$x_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}$$

...

Так как  $n \rightarrow \infty$ , то речь идёт о **сумме** членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, которая рассчитывается по формуле  $S = \frac{b_1}{1-q}$ .

Оформляем решение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} \right) = (*)$$

Используем формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:  $S = \frac{b_1}{1-q}$ . В данном случае:  $b_1 = \frac{1}{4}$  – первый член,  $q = \frac{1}{4}$  – знаменатель прогрессии.

Главное, совладать с четырёхэтажностью дроби (см. **Горячие школьные формулы**):

$$(*) = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

Готово.

### **Пример 36**

Записать первые четыре члена последовательности и найти её предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + \dots + (2n-1)}{3n^2}$$

Это пример для самостоятельного решения. Для устранения неопределённости  $\frac{\infty}{\infty}$  в числителе потребуется применить формулу суммы  $n$  первых членов арифметической прогрессии:  $S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ , где  $a_1$  – первый, а  $a_n$  –  $n$ -ый член прогрессии.

Рассмотрим ещё пару «чисто последовательных» пределов:

### Пример 37

Найти предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}$$

**Решение:** чтобы избавиться от неопределённости  $\frac{\infty}{\infty}$  нужно расписать факториалы в виде произведений. Но прежде, чем приступить к математическому граффити, рассмотрим конкретный пример, например:  $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ .

Последним множителем в произведении идёт шестёрка. Что нужно сделать, чтобы получить предыдущий множитель? Вычесть единицу:  $6 - 1 = 5$ . Чтобы получить множитель, который располагается ещё дальше, нужно из пятёрки ещё раз вычесть единичку:  $5 - 1 = 4$ . И так далее.

Не беспокойтесь, это не урок в первом классе коррекционной школы, на самом деле **мы знакомимся с важным и универсальным алгоритмом** под названием «**как разложить любой факториал**». Давайте разделаемся с самым злостным «флудером»:

$$(2n+3)!$$

Очевидно, что последним множителем в произведении будет  $(2n+3)$ .

Как получить предыдущий множитель? Вычесть единицу:  $2n+3-1=2n+2$

Как достать прадедушку? Ещё раз вычесть единицу:  $2n+2-1=2n+1$ .

Ну и ещё на один шаг продвинемся вглубь:  $2n+1-1=2n$

Таким образом, наше чудовище распишется следующим образом:

$$(2n+3)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)$$

С факториалами числителя всё проще, так, мелкие хулиганы.

Оформляем решение:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!} &\stackrel{(1)}{=} \frac{\infty}{\infty} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n(2n+1) + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n(2n+1)(2n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \stackrel{(2)}{=} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n(2n+1) \cdot [1 + (2n+2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \stackrel{(3)}{=} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (2n+2)}{(2n+2)(2n+3)} \stackrel{(4)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{(2n+2)(2n+3)} \stackrel{(5)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+2} = 0 \end{aligned}$$

(1) Расписываем факториалы

(2) В числителе ДВА слагаемых. Выносим за скобки всё, что можно вынести, в данном случае это произведение  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n(2n+1)$ .

(3) Сокращаем числитель и знаменатель на  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n(2n+1)$ . ...да уж, флуда тут и впрямь много.

(4) Упрощаем числитель

(5) Сокращаем числитель и знаменатель на  $2n+3$ . Надо сказать, повезло. В общем случае вверху и внизу получаются заурядные многочлены, после чего приходится выполнять стандартное действие – делить числитель и знаменатель на «эн» в старшей степени.

Более подготовленные читатели, которые легко раскладывают факториалы в уме, могут решить пример значительно быстрее. На первом шаге делим почленно числитель на знаменатель и мысленно выполняем сокращения:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!(2n+2)!}{(2n+3)!} &= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} + \frac{(2n+2)!}{(2n+3)!} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} + \frac{1}{(2n+3)} \right) = 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

Но способ с разложением всё-таки более основателен и надёжен.

### **Пример 38**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}$$

Это пример для самостоятельного решения.

Поскольку в пределах последовательностей «эн» всегда стремится к «плюс бесконечности», то неудивительно, что неопределённость  $\frac{\infty}{\infty}$  – одна из самых популярных. **И многие примеры решаются точно так же, как пределы функций.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n - 5}{1 + n + 3n^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 15n^2 + 9n + 1}{5n^4 + 6n^2 - 3n - 4}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n - 5}{n + 1}$$

Как вычислить эти пределы? Смотрите *Примеры 1, 2, 3*. А может быть что-нибудь посложнее наподобие  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2-n-n^6}}{2n^3 + n^2 - 5n + 3}$ ? Ознакомьтесь с *Примером 26*.

**С формальной точки зрения разница будет лишь в одной букве** – там «икс», а здесь «эн». Приём тот же самый – числитель и знаменатель надо разделить на «эн» в старшей степени.

Чтобы разобраться с пределом  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-2}{n+1} \right)^{2n+3}$ , обратитесь к *Примеру 19*. Решение снова будет как под копирку с различием в единственной букве.

Также в пределах последовательностей достаточно распространена неопределённость  $\infty - \infty$ . Как решать пределы вроде  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 3} - \sqrt{n^2 - 3n + 1})$  можно узнать из *Примеров 33, 34*.

Оставшиеся примеры тоже «двулики», но на практике почему-то больше характерны для пределов последовательностей, чем для пределов функций:

### Пример 39

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^3 + (1-3n)^3}{8n^3 - 2n}$$

Сначала полное **решение**, потом пошаговые комментарии:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^3 + (1-3n)^3}{8n^3 - 2n} &= \frac{\infty}{\infty} \stackrel{(1)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 12n^2 + 6n - 1 + 1 - 9n + 27n^2 - 27n^3}{8n^3 - 2n} \stackrel{(2)}{=} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-19n^3 + 15n^2 - 3n}{8n^3 - 2n} = \frac{-\infty}{\infty} \stackrel{(3)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-19n^3 + 15n^2 - 3n}{n^3}}{\frac{8n^3 - 2n}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-19 + \frac{15}{n} - \frac{3}{n^2}}{8 - \frac{2}{n^2}} = -\frac{19}{8} \end{aligned}$$

(1) В числителе дважды используем формулу  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ .

(2) Приводим подобные слагаемые в числителе.

(3) Для устранения неопределённости делим числитель и знаменатель на  $n^3$  («Эн» в старшей степени).

Как видите, ничего сложного.

### Пример 40

Найти предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - (1+2n)^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}$$

Это пример для самостоятельного решения – формулы сокращенного умножения в помощь.

В пределах с *показательными* последовательностями применяется похожий метод деления числителя и знаменателя:

### Пример 41

Найти предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 2 \cdot 4^n}{4^{n+1} - 5}$$

**Решение** оформим по той же схеме:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 2 \cdot 4^n}{4^{n+1} - 5} \stackrel{(1)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3^n + 2 \cdot 4^n}{4 \cdot 4^n - 5} \stackrel{(2)}{=} \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3^n + 2 \cdot 4^n}{4 \cdot 4^n - 5} \stackrel{(3)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2}{4 - \frac{5}{4^n}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(1) Используя свойства степеней (см. Приложение *Горячие школьные формулы*), вынесем из показателей всё лишнее, оставив там только «Эн».

(2) Смотрим, какие показательные последовательности есть в пределе:  $3^n, 4^n$  и выбираем последовательность с **наибольшим** основанием:  $4^n$ . В целях устранения неопределённости делим числитель и знаменатель на  $4^n$ .

(3) В числителе и знаменателе проводим почленное деление. Поскольку  $\left(\frac{3}{4}\right)^n$  является бесконечно убывающей геометрической прогрессией ( $-1 < q < 1, q \neq 0$ ), то она стремится к нулю. И тем более к нулю стремится константа, делённая на растущую прогрессию:  $\frac{5}{4^n} \rightarrow 0$ . Делаем соответствующие пометки и записываем ответ.

### Пример 42

Найти предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n + 10 \cdot 9^{n+1}}{5 \cdot 10^{n-1} + 7^{n+2}}$$

Это пример для самостоятельного решения.

Как и в любом обществе, среди числовых последовательностей попадаются экстравагантные личности.

**Теорема:** если одна последовательность стремится к нулю, а другая ограничена, то их произведение стремится к нулю.

Аналогичный факт справедлив и для «обычных» функций с «иксами».

### Пример 43

Найти предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n!)}{n^2}$$

**Решение:** последовательность  $\sin(n!)$  – ограничена:  $-1 \leq \sin(n!) \leq 1$ , а последовательность  $\frac{1}{n^2}$  стремится к нулю, значит, по соответствующей теореме:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n!)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} \cdot \sin(n!) \right) = 0$$

Просто и со вкусом. Да-да, так и оформляем.

А почему бы и нет?

### Пример 44

Найти предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2e^{-n} \cos^2 \left( \frac{3n-5}{1+n^3} \right) \right)$$

Это пример для самостоятельного решения. Решение и ответ уже близко.

Ещё две распространённые ограниченные функции – арктангенс и арккотангенс:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &< \operatorname{arctg} \alpha < \frac{\pi}{2} \\ 0 &< \operatorname{arcctg} \alpha < \pi \end{aligned}$$

Аргументы всех перечисленных тригонометрических функций могут быть заполнены знатной абракадаброй, но это не должно приводить в панику – существенно то, что последовательности ограничены!

**Поздравляю Вас с прохождением интенсивного курса!**  
**Надеюсь, он оказался познавательным, интересным и, главное – полезным!**

Более подробную информацию и дополнительные примеры можно найти в [соответствующем разделе](#) портала [mathprofi.ru](http://mathprofi.ru) (*ссылка на аннотацию к разделу*).

Из учебной литературы рекомендую К.А. Бохана (*попроще*), Г.М. Фихтенгольца (*посложнее*), Н.С. Пискунова (*для ВТУЗов*).

**Желаю успехов!**

## 18. Решения и ответы

**Пример 4. Решение:**

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 - 4x + 3} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Разделим числитель и знаменатель на  $x^3$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^3}}{\frac{x^3 - 4x + 3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

б) Почленно делим числитель на знаменатель:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + 3x - 2x^2 - x^3}{2x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{2x} + \frac{3}{2} - x^{\rightarrow \infty} - \frac{x^2}{2} \right) = 0 + \frac{3}{2} - \infty - \infty = -\infty$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(4 - 7x^2)}{4x^5 - 7x^3 + 13x + 28} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

В числителе раскрываем скобки, делим числитель и знаменатель на  $x^5$

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 7x^5}{4x^5 - 7x^3 + 13x + 28} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^3 - 7x^5}{x^5}}{\frac{4x^5 - 7x^3 + 13x + 28}{x^5}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x^2} - 7}{4 - \frac{7}{x^2} + \frac{13}{x^4} + \frac{28}{x^5}} = -\frac{7}{4} \end{aligned}$$

**Пример 7. Решение:**

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{5x^2 - 4x - 1} = \frac{0}{0} = (*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \quad (\text{формула разности кубов})$$

$$5x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$D = 16 + 20 = 36$$

$$\sqrt{D} = 6$$

$$x_1 = \frac{4 - 6}{10} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{4 + 6}{10} = 1$$

$$5x^2 - 4x - 1 = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)(x - 1) = (5x + 1)(x - 1)$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(5x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{5x + 1} = \frac{1 + 1 + 1}{5 + 1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x} = \frac{0}{0} = (*)$$

В числителе используем формулу квадрата суммы:  $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ ,  
в знаменателе выносим  $x$  за скобки:

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)^2}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x} = \frac{-3+3}{-3} = \frac{0}{-3} = 0$$

**Пример 9. Решение:**

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x+6} - 2} = \frac{0}{0} = (*)$$

Разложим числитель на множители:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{D} = 3$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$

А также умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение:

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{x+6-4} = 4 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} = \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow -2} (x-1) = 4 \cdot (-3) = -12 \end{aligned}$$

**Пример 10. Решение:**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{1-\sqrt{3-x}} = \frac{0}{0} = (*)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженные выражения:

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)(1+\sqrt{3-x})}{(\sqrt{x+7}+3)(1-\sqrt{3-x})(1+\sqrt{3-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+7-3^2) \cdot 2}{6 \cdot (1^2 - (3-x))} = \frac{2}{6} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+7-9}{1-3+x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



**Пример 15. Решение:**

а) После преобразования тангенса искусственно домножаем числитель и знаменатель на  $2x$  (можно на  $3x$ ):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\frac{\sin 3x}{\cos 3x} \rightarrow 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin 2x}{2x \cdot \sin 3x} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{3 \sin 3x} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

б) Используем триг. формулу  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{4x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \left( \frac{5x + x}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{5x - x}{2} \right)}{4x} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 2x}{2x} = -\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 3x) = 0\end{aligned}$$

**! Примечание:** пределы с разностью/суммой косинусов или синусов также часто встречаются на практике.

в) Используем тригонометрические формулы:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctgx} \cdot (1 - \cos^2 3x)}{(x^2 + 5x)} &= \frac{\infty \cdot 0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot (1 - \cos^2 3x)}{\sin x \cdot (x^2 + 5x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^{\rightarrow 1} \cdot (1 - \cos^2 3x)}{\sin x \cdot (x^2 + 5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{\sin x \cdot (x^2 + 5x)} = \frac{0}{0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin x \cdot x \cdot (x + 5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin x \cdot x \cdot (x^{\rightarrow 0} + 5)} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin x \cdot x} = \\ &= \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 3x}{\sin x \cdot x} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 3x \cdot \sin 3x}{\sin x \cdot 3x \cdot 3x \cdot \frac{1}{9}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{5}\end{aligned}$$

**Пример 17. Решение:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\arcsin \frac{x}{2}} = \frac{0}{0} = (*)$$

Проведём замену:  $\arcsin \frac{x}{2} = t$

Если  $x \rightarrow 0$ , то  $t \rightarrow 0$ .

$$\arcsin \frac{x}{2} = t$$

$$\sin \left( \arcsin \frac{x}{2} \right) = \sin t$$

$$\frac{x}{2} = \sin t \Rightarrow x = 2 \sin t$$

$$(*) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5 \cdot 2 \sin t}{t} = 10$$

**Пример 21. Решение:**

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 5}{x^2 - 5} \right)^{x-1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 5 + 10}{x^2 - 5} \right)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{10}{x^2 - 5} \right)^{x-1} = 1^{\infty} = (*)$$

Используем второй замечательный предел:

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{\frac{x^2 - 5}{10}} \right)^{\frac{10(x-1)}{(x^2 - 5)}} \right) = e^{10 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2 - 5}} = e^{\frac{\infty}{\infty}} = e^{10 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x-1}{x^2}}{\frac{x^2 - 5}{x^2}}} = e^{10 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{5}{x^2}}} = e^{10 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{5}{x^2}}} = e^0 = 1$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x+2}{x+3} \right)^{3x+4} = \left( \frac{0+2}{0+3} \right)^{0+4} = \left( \frac{2}{3} \right)^4 = \frac{16}{81}$$

**Пример 24. Решение:**

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} (5x - 4)^{\frac{x}{10(x-1)}} = 1^{\infty} = (*)$$

Используем формулу  $\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [(u(x)-1) \cdot v(x)]}$

$$(*) = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left[ (5x - 4 - 1) \cdot \frac{x}{10(x-1)} \right]} = e^{\frac{1}{10} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(5x-5)}{(x-1)}} = e^{\frac{1}{10} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x(x-1)}{(x-1)}} = e^{\frac{5}{10} \lim_{x \rightarrow 1} (x)} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} (5x - 4)^{\frac{x}{10(x-1)}} = 1^{\infty} = (*)$$

Проведём замену  $t = x - 1$

Если  $x \rightarrow 1$ , то  $t \rightarrow 0$

Из  $t = x - 1$  выразим  $x = t + 1$

Используем второй замечательный предел  $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$ :

$$(*) = \lim_{t \rightarrow 0} (5(t+1) - 4)^{\frac{t+1}{10(t+1-1)}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + 5t)^{\frac{t+1}{10t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( (1 + 5t)^{\frac{1}{5t}} \right)^{\frac{t+1}{2}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \rightarrow 0 + 1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

**Пример 26. Решение:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2-x-x^6}}{2x^3+x^2-5x+3} = \frac{-\infty}{\infty} = (*)$$

Старшая степень числителя: 2; старшая степень знаменателя: 3.

Разделим числитель и знаменатель на  $x^3$ :

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{2-x-x^6}}{x^3}}{\frac{2x^3+x^2-5x+3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{2-x-x^6}}{\sqrt[3]{x^9}}}{\frac{2x^3+x^2-5x+3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{2 \rightarrow 0}{x^9} - \frac{1 \rightarrow 0}{x^8} - \frac{1 \rightarrow 0}{x^3}}}{2 + \frac{1 \rightarrow 0}{x} - \frac{5 \rightarrow 0}{x^2} + \frac{3 \rightarrow 0}{x^3}} = \frac{0}{2} = 0$$

**Пример 28. Решение:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 3}{-2x^4 - x^3 + 7x^2 - 1} = \frac{\infty}{-\infty} = (*)$$

Разделим числитель и знаменатель на  $x^4$ :

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 - x + 3}{x^4}}{\frac{-2x^4 - x^3 + 7x^2 - 1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1 \rightarrow 0}{x^2} - \frac{1 \rightarrow 0}{x^3} + \frac{3 \rightarrow 0}{x^4}}{-2 - \frac{1 \rightarrow 0}{x} + \frac{7 \rightarrow 0}{x^2} - \frac{1 \rightarrow 0}{x^4}} = \frac{0}{-2} = 0$$

**Пример 30. Решение:**

а) Разделим числитель и знаменатель на  $x^2$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x^2+3x+5} \right)^{4x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{x+2}{x^2}}{\frac{x^2+3x+5}{x^2}} \right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{1 \rightarrow 0}{x} + \frac{2 \rightarrow 0}{x^2}}{1 + \frac{3 \rightarrow 0}{x} + \frac{5 \rightarrow 0}{x^2}} \right)^{4x} = \left( \frac{0}{1} \right)^{+\infty} = 0^{+\infty} = 0$$

б) Разделим числитель и знаменатель на  $x^2$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{2x-3} \right)^{5x+1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{2x-3}{x^2}} \right)^{5x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \frac{1 \rightarrow 0}{x^2}}{\frac{2 \rightarrow +0}{x} - \frac{3 \rightarrow +0}{x^2}} \right)^{5x+1} = \left( \frac{1}{+0} \right)^{+\infty} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$$

**Пример 32. Решение:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{8}{x^2-16} - \frac{1}{x-4} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{8}{(x-4)(x+4)} - \frac{1}{x-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{8-(x+4)}{(x-4)(x+4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{8-x-4}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x-4)}{(x-4)(x+4)} = -\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x+4)} = -\frac{1}{(4+4)} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

**Пример 34. Решение:**

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \infty - \infty = (*)$$

Умножим и разделим на сопряженное выражение:

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{x^3 + 4x^2}) = \infty - \infty = (*)$$

Умножим и разделим на сопряженное выражение:

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - \sqrt{x^3 + 4x^2})(2x + \sqrt{x^3 + 4x^2})}{2x + \sqrt{x^3 + 4x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)^2 - (x^3 + 4x^2)}{2x + \sqrt{x^3 + 4x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x^3 - 4x^2}{2x + \sqrt{x^3 + 4x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{2x + \sqrt{x^3 + 4x^2}} = \frac{-\infty}{\infty} = (*) \end{aligned}$$

Разделим числитель и знаменатель на  $x^3$ :

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-x^3}{x^3}}{\frac{2x}{x^3} + \sqrt{\frac{x^3 + 4x^2}{x^6}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\frac{2}{x^2} + \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\frac{2}{x^2} \rightarrow +0 + \sqrt{\frac{1}{x^3} \rightarrow +0 + \frac{4}{x^4} \rightarrow +0}} = \frac{-1}{+0} = -\infty$$

**Пример 36. Решение:** запишем первые четыре члена:

$$x_1 = \frac{1}{3 \cdot 1^2}$$

$$x_2 = \frac{1+3}{3 \cdot 2^2}$$

$$x_3 = \frac{1+3+5}{3 \cdot 3^2}$$

$$x_4 = \frac{1+3+5+7}{3 \cdot 4^2}$$

Найдём предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{3n^2} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Используем формулу суммы  $n$  первых членов арифметической прогрессии  $S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ . В данном случае  $a_1 = 1$ ,  $a_n = 2n - 1$ :

$$(*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(1+2n-1) \cdot n}{2}}{3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n \cdot n}{2}}{3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}$$

**Пример 38. Решение:**

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!} &= \frac{\infty - \infty}{\infty} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1)(n+2)(n+3)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1)(n+2) \cdot [(n+3)(n+4) - 1]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1)(n+2)(n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)(n+4) - 1}{n+3} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 7n + 11}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 + 7n + 11}{n^2}}{\frac{n+3}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{7}{n} + \frac{11}{n^2}}{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{1}{0} = \infty
 \end{aligned}$$

**Пример 40. Решение:**

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - (1+2n)^3}{(1+2n)^2 + 4n^2} &= \frac{\infty - \infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - (1+12n^2+6n+8n^3)}{1+4n+4n^2+4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 1 - 12n^2 - 6n - 8n^3}{1+4n+8n^2} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-12n^2 - 6n - 1}{1+4n+8n^2} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-12n^2 - 6n - 1}{n^2}}{\frac{1+4n+8n^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-12 - \frac{6}{n} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n} + 8} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

**Пример 42. Решение:**

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n + 10 \cdot 9^{n+1}}{5 \cdot 10^{n-1} + 7^{n+2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n + 10 \cdot 9 \cdot 9^n}{5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^n + 49 \cdot 7^n} = \frac{\infty}{\infty} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{7^n + 90 \cdot 9^n}{10^n}}{\frac{5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^n + 49 \cdot 7^n}{10^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{7^n}{10^n} + \frac{90 \cdot 9^n}{10^n}}{\frac{5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^n}{10 \cdot 10^n} + \frac{49 \cdot 7^n}{10^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{7}{10}\right)^n + 90 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n}{\frac{1}{2} + 49 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^n} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0
 \end{aligned}$$

**Пример 44. Решение:** последовательность  $\cos^2\left(\frac{3n-5}{1+n^3}\right)$  – ограничена:

$0 \leq \cos^2\left(\frac{3n-5}{1+n^3}\right) \leq 1$ , а последовательность  $e^{-n} = \frac{1}{e^n} \rightarrow 0$ , значит, по соответствующей теореме:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2e^{-n} \cos^2\left(\frac{3n-5}{1+n^3}\right) \right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{e^n} \cdot \cos^2\left(\frac{3n-5}{1+n^3}\right) \right) = 2 \cdot 0 = 0$$