Функции нескольких переменных и градиент

Мы переходим к рассмотрению функций многих переменных. Вся теория, построенная для одномерных функций, довольно естественно обобщается на случай функций многих переменных. Давайте увидим, как это делать.

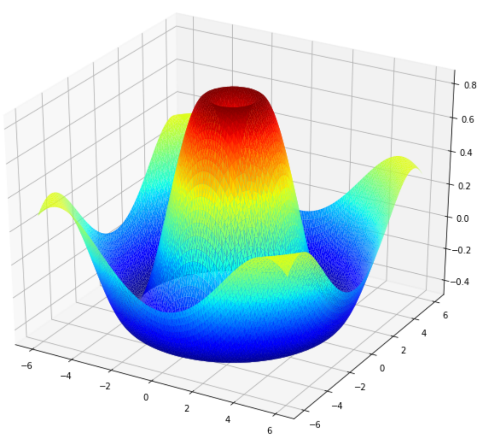
Нас будут интересовать числовые функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Примеры таких функций:

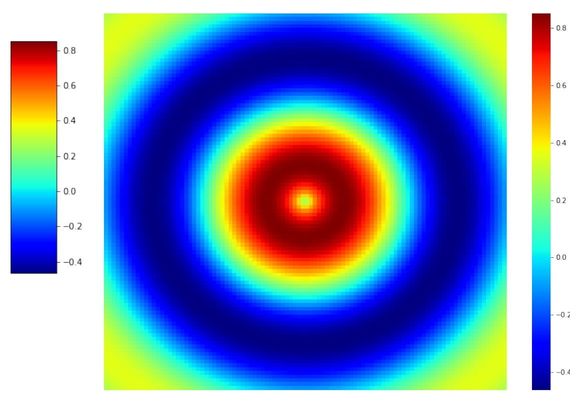
- $f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2}$,
- $f(x, y, z) = \sin(xy) + \ln\cos(xz)$,
- $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$ и т.д.

С графиком многомерной функции дела обстоят сложнее, на листе его нарисовать не выйдет. Зато можно построить график функции двух переменных в пространстве.

Можно визуализировать функцию двух переменных и по-другому. А именно, каждую точку плоскости покрасить в цвет тем более яркий, чем больше значение функции.

Получаются две вот такие картинки.





Напоминание: производная функции одной переменной

Напомним, что в одномерном случае производная функции f в точке x_0 определяется как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

В числителе определения записано отклонение функции Δf, а в знаменателе — отклонение аргумента Δx. Поэтому часто производную записывают как

$$f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

Кстати, в этом случае правило производной композиции для функции $y(x)$, где $x = x(t)$, записывается в виде простого мнемонического правила

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

В качестве свойства мы указывали, что в случае наличия производной в точке x_0 мы имеем представление

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Производная функции многих переменных

Рассмотрим многомерный случай. Мы хотим ввести некоторый аналог производной. Что мы можем делать уже сейчас — это вычислять производные функции многих переменных по отдельным аргументам.

Определение. *Частной производной* функции нескольких переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *по аргументу* x_i в точке $\overline{x^0} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ называется производная функции f по x_i в точке x_i^0 как функции одного аргумента при фиксированных значениях x_1^0, $x_2^0, \ldots$, x_{i-1}^0, $x_{i+1}^0, \ldots$, x_n^0.

Обозначение:

$$f'_{x_i}(\overline{x^0}); \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x^0}).$$

Определение. Функция $f : \mathbb{R}^n \to R$ называется *дифференцируемой* в точке $\overline{x^0} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если имеет место представление

$$f(\overline{x^0} + \overline{\Delta x}) = f(\overline{x^0}) + \langle \overline{a}, \overline{\Delta x} \rangle + o(|\overline{\Delta x}|),$$

где $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$ — некоторый n-мерный вектор, который называется *градиентом* функции f в точке $\overline{x^0}$.

Обозначения для градиента:

$$\mathrm{grad} f(\overline{x^0}) = \nabla f(\overline{x^0}) = f'(\overline{x^0}).$$

Упражнение. Разберитесь, как определение градиента записывается в двумерном случае.

Как можно заметить, определение выше, во-первых, полностью аналогично свойству производной функции одной переменной. Во-вторых, это определение довольно бесполезно. Оказывается, во всех “хороших” случаях справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функция f имеет в точке $\overline{x^0}$ непрерывные частные производные по каждой компоненте x_i. Тогда f дифференцируема в точке $\overline{x^0}$, причём её градиент равен вектору из частных производных, то есть*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x^0}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{x^0}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x^0})\right).$$

Суть этой теоремы заключается в том, что во всех "хороших" случаях градиент существует и его очень просто вычислить — нужно просто посчитать частные производные по всем переменным.

Замечание. Градиент указывает на направление наискорейшего роста значения функции. Иными словами, при движении точки, стартующей в $\overline{x^0}$, по вектору $\mathrm{grad} f(\overline{x^0})$, значение функции увеличивается.

1. Вычислите градиент функции f, где

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

(b) $f(x, y, z) = xy + yz + xz$;

(c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Вычисление градиента сложной функции

Пусть даны функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, дифференцируемые в точке (x_0, y_0), а также функция $f(u, v)$, дифференцируемая в точке $(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$. Мы хотим научиться вычислять градиент $(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$.

Теорема 2. *При выполнении условий выше функция $f(u(x, y), v(x, y))$ является дифференцируемой в точке (x_0, y_0), причём выполняются соотношения*

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x};$$
$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Иными словами,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ называется *матрицей частных производных* или *матрицей Якоби* замены $\{u(x, y), v(x, y)\}$ и обозначается

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}.$$

В этих терминах

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right)^\top \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Полная аналогия с равенством

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

2. Для функции $f(u,v)$ найти f'_x, f'_y, где

(a) $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$;

(b) $u = x\cos y$, $v = x\sin y$.