Предел последовательности

Математический анализ — это раздел математики, который изучает поведение числовых функций на основании предельного перехода. А именно, оказывается интересно изучать, как ведёт себя функция в окрестности некоторой точки. Так мы приходим к понятию предела функции в точке.

Оказывается, что для изучения предельных свойств функций прежде всего необходимо построить теорию пределов числовых последовательностей.

Определение. Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots$ — последовательность действительных чисел (пишут $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$). Действительное число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если верно следующее. Какую бы малую окрестность числа a мы не брали, с какого-то момента в этой окрестности оказываются ВСЕ члены последовательности $\{x_n\}$. Формально,

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon.$$

В таком случае пишут $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Говорят, что предел равен $+\infty$, если

$$\forall B > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N : x_n > B.$$

Аналогично определяется предел $-\infty$.

1. Найдите предел последовательности x_n, где
(a) $x_n = \frac{n-1}{n}$; **(b)** $x_n = \frac{n}{2^n}$; **(c)** $x_n = \frac{(\ln n)^{10}}{\sqrt{n}}$; **(d)** $x_n = n^{1/n}$.

Теорема 1 (Арифметические операции под знаком предела)**.** *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — две последовательности, причём $x_n \to a$, $y_n \to b$. Тогда*

- $x_n \pm y_n \to a \pm b$;
- $x_n y_n \to ab$;
- *Если $y \neq 0$, то $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$.*

2. Найдите предел последовательности x_n, где
(a) $x_n = \frac{3n^2-1}{2n^2-n+2}$;
(b) $x_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, где P и Q — многочлены;
(c) $x_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}}$;

Определение. Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — две последовательности.

- Если $\frac{x_n}{y_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то говорят, что последовательность x_n есть *о-малое относительно* последовательности y_n, и пишут $x_n = o(y_n)$.
- Если $\frac{x_n}{y_n}$ ограничено сверху, то говорят, что последовательность x_n есть *О-большое относительно* последовательности y_n, и пишут $x_n = O(y_n)$
- Если $x_n = o(1)$, то x_n называют *бесконечно малой последовательностью.*
- Последовательности x_n и y_n называются *эквивалентными*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$.

3. Найдите предел последовательности x_n, где $x_n = \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

4. Докажите, что последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится.

Определение. Предел последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ называется числом Эйлера и обозначается как $e = 2.718281828459045\ldots$.

5. Найдите предел последовательности x_n, где

(a) $x_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$; **(b)** $x_n = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^n$; **(c)** $x_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$.