Элементарные функции

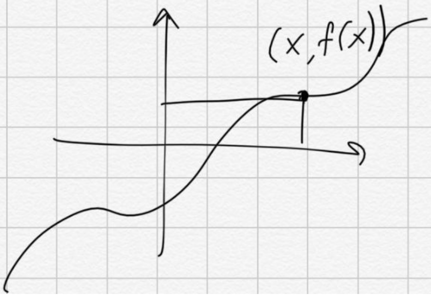
1 Многочлены, дробно-рациональные функции

Определение. *Многочленом* называется формальная запись вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Числа $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ называются *коэффициентами многочлена.* Многочлен естественным образом задаёт функцию $f(x)$.

$f: X \to Y$

обл. опр. обл. знач.

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{нас интересует.}$$



$P(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2$ – многочлен.

$P(3) = 5 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 = 110.$

$P(x)$ задает функцию $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Пример 1.

$P(x) = x - 1$ $\quad x_0 = 1$ – корень.

Пример 2.

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x-5)(x-1) = 0.$ $\quad x_0 = 5,\ x_1 = 1$ – корни.

Теорема 1. *Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет не более двух вещественных корней, которые вычисляются по формуле*

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Доказательство.

$$(x+b)^2 = x^2 + \underline{2xb} + \underline{b^2}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\underline{x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a}} + \frac{c}{a} = 0.$$

$$\underline{x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a}} + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + \underline{\frac{b^2}{4a^2}} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0.$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Теорема 2 (Виета). *Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c$. Тогда справедливы равенства*

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$;
- $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Теорема 3 (Безу). *Пусть $P(x)$ — некоторый многочлен. Тогда $P(x)$ можно представить в виде $(x - a)Q(x)$ тогда и только тогда, когда $P(a) = 0$.*

$$a(x - x_0)(x - x_1) = 0.$$

$$\|$$

$$ax^2 + bx + c$$

1. Решите уравнение

(a) $x^2 - 6x + 8 = 0$;

(b) $2x^2 + x - 6$;

(c) $x^2 - 3x + 6 = 0$;

(d) $x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0$.

Задача 1b. $2x^2 + x - 6 = 0$.

$x_0 + x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_0 \cdot x_1 = -3$.

$\frac{3}{2}$; -2.

$$\underbrace{2x^2 + x - 6 = 0}$$

$$\underbrace{(2x - 3) \cdot (x + 2) = 0}$$

$x^2 - 6x + 5$

$(x-1)(x-5) = 0$.

Задача 1d. Решите ур-е

$$\underbrace{x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0}.$$

$$\underbrace{(x - 1)(x^2 + 6x + 8)} = 0$$

$-x^2$ $-6x$

$6x^2$ $8x$

$x^2 + 6x + 8$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} =$$

$$= \frac{-6 \pm 2}{2}$$

$x_{1/2} = -2; -4$

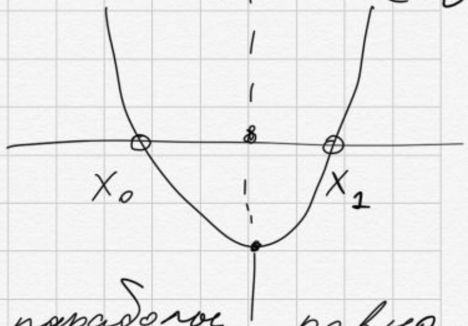
Ответ: $x_0 = 1$, $x_1 = -2$, $x_2 = -4$.

2. Постройте график функции $4x^2 - 4x + 4$.

Задача. Построить график ф-ции

$4x^2 - 4x + 4 = 0$.

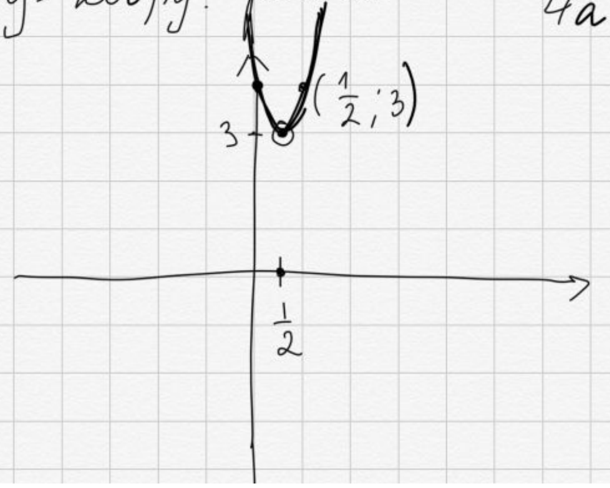
$ax^2 + bx + c = 0$



x-координата верш. параболы равна

$$\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{-b}{2a}.$$

y-коорд. равна $\frac{-D}{4a}$

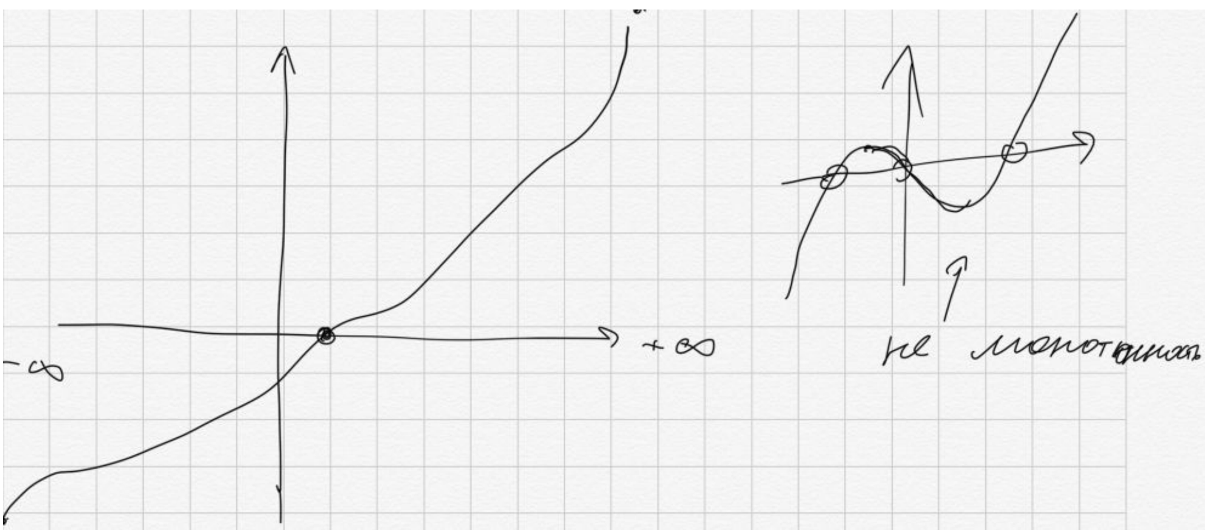


Опр. Ф-ция f называется монотонно возрастающей (убывающей) на $[a, b]$, если $\forall x, y \in [a, b]$ $x < y \Rightarrow f(x) < (>) f(y)$.

3. Докажите, что при $a \geqslant 0$ и любом $b \in \mathbb{R}$ уравнение

$$x^3 + ax + b = 0$$

имеет только один действительный корень.



1) $\geqslant 1$ корень есть, поск-у многочлен нечётной степени

2) x_0, x_1 – произв. точки, $(x_1 > x_0)$

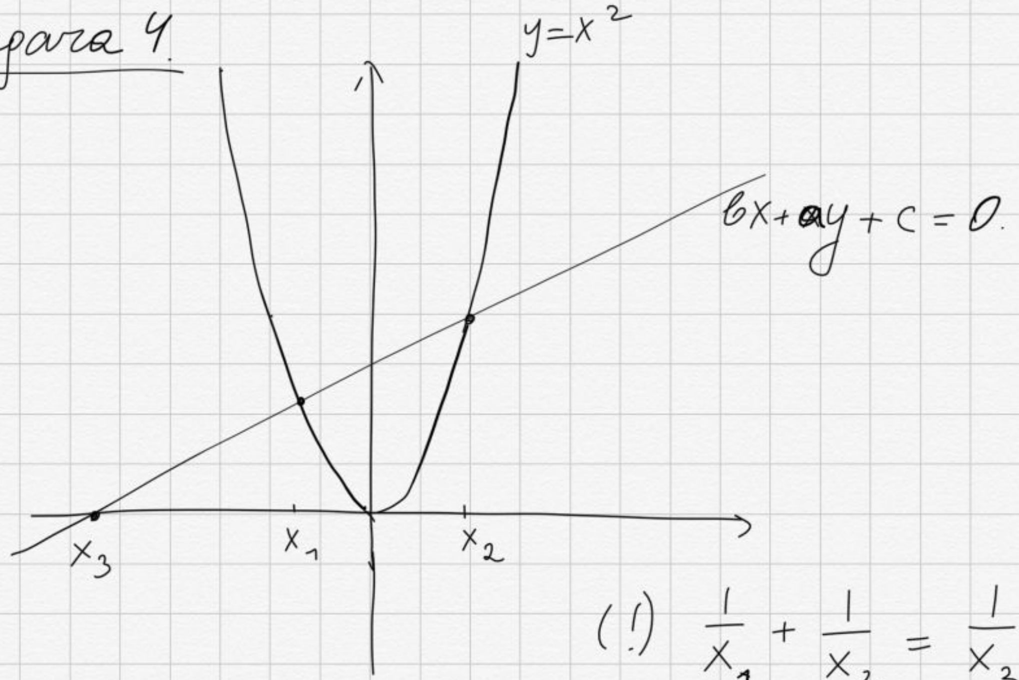
$$P(x_1) - P(x_0) = (x_1^3 + ax_1 + b) - (x_0^3 + ax_0 + b) =$$

$$= \underbrace{(x_1^3 - x_0^3)} + \underbrace{a(x_1 - x_0)} > 0.$$ След-но $P(x)$ – монотонна и >1 корня быть не может. ∎

4. Прямая пересекает график функции $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс — в точке с абсциссой x_3. Докажите, что

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}.$$

Задача 4.



$$(!)\quad \underbrace{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}}.$$

1). Находим x_1, x_2.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ bx + ay + c = 0 \end{cases}$$

$$bx + ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c}$$

2). Находим x_3.

$$bx + a \cdot 0 + c = 0.$$

$$x_3 = \frac{-c}{b}$$

■.