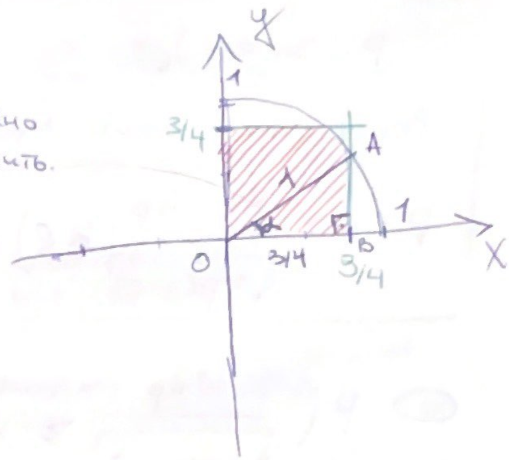
ДЗ 4.2
№4

1) Проверим, что часть квадрата находится за пределами четверти круга



2) По Т Пифагора найдем катет AB:

хотя это можно пропустить.

$$OA^2 = OB^2 + AB^2$$

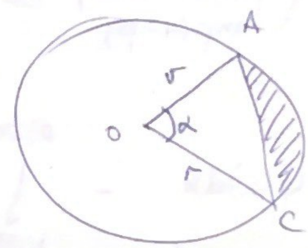
$$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}} \approx 0{,}66$$

3) Найдем $\angle \alpha$ через cos.

$$\cos\alpha = \frac{0{,}75}{1} = 0{,}75 \Longrightarrow \alpha = 41{,}4^\circ$$

4) По ф-ле нахождения площади сегмента круга:

$$S = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ} - \sin\alpha\right)$$



$$S = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \left(3{,}14 \cdot \frac{41{,}4 \times 2}{180} - \sin(41{,}4 \times 2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (3{,}14 \cdot 0{,}46 - 0{,}991) = 0{,}2267$$

5) Вычислим искомую площадь:

$$S = \frac{3{,}14 \cdot 1^2}{4} - 0{,}2267 = 0{,}5583$$

6) Искомая вероятность:

$$\frac{0{,}5583}{0{,}785} \approx 0{,}71$$

1.34.2
N2

$\xi \sim U[1,10] \cup [21,30]$; $F'(\xi$ FF(c)

$F(x) = c = \frac{1}{b-a}$; $x \in (a,b)$

$\frac{x-a}{b-a}$ при $a \le x \le b$;

0 при $x < a$;

1 при $x \ge b$

$$F(\xi) \begin{cases} 0, & \xi < 1 \\ \frac{1}{10-1}, & 1 \le \xi < 10 \\ 0, & 10 \le \xi < 21 \\ \frac{1}{21-10}, & 21 \le \xi < 30 \\ 0, & \xi \ge 3 \end{cases}$$

$$F(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 1 \\ \frac{\xi - 1}{9 \cdot 2}, & 1 \le \xi < 10 \\ \frac{1}{2}, & 10 \le \xi < 21 \\ \frac{\xi - 21}{9 \cdot 2}, & 21 \le \xi < 30 \\ 1, & \xi \ge 30 \end{cases}$$

Дз 4.2
N3

$\xi \sim Geom(p)$, $p_i = p(1-p)^i$

четные: $S = p + pq^2 + pq^4 + \dots$

нечетные: $qS = pq + pq^3 + pq^5 + \dots$

$$p(S + qS) = 1$$

$$(S + q) = 1$$

$$S - p = 1/(2-p) - p = \frac{(1-p)^2}{2-p}$$

Δ З 4.2
N1

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\theta}{\pi(\theta^2+x^2)} dx$$

разделим числитель и знаменатель на θ:

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{(1+(\frac{x}{\theta})^2)} dx$$

Пусть $\frac{x}{\theta} = u$: $dx = \theta du$

Пределы интегрирования так же изменятся.

$x = -\infty \to u = -\infty$

$x = x \to u = \frac{x}{\theta}$

Вычислим интеграл:

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\theta}} \frac{1}{(1+(u)^2)} \theta du$$

$$F(x) \ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\theta}} \frac{\theta}{(1+(u)^2)} du$$

$F(x) \ \frac{1}{\pi} \arctan(u)$ от $-\infty$ до $\frac{x}{\theta} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\pi}(\arctan(\frac{x}{\theta}) - \arctan(-\infty))$

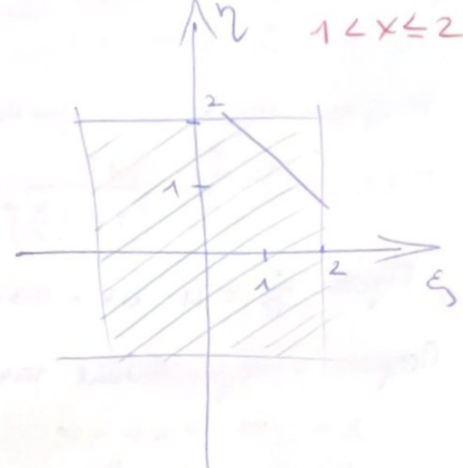
Т.к. $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$, то:

$F(x) = \frac{1}{\pi}(\arctan(\frac{x}{\theta}) + \frac{\pi}{2}) \to$ ф-ия распределение Коши с парам θ

Д 34.2
N 5

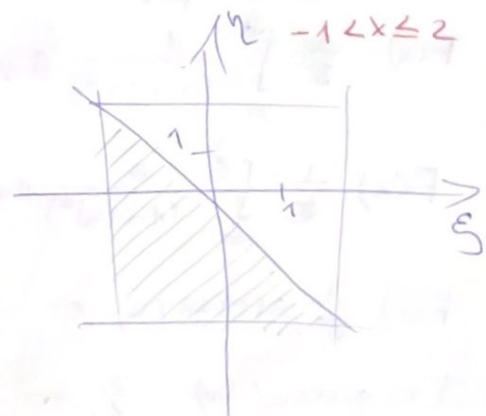
$\xi, \eta \sim U[-1;2]; \; \xi \perp\!\!\!\perp \eta$

$F_{\xi,\eta}(x) = P(\xi+\eta < x), \quad x_2 = x - x_1$



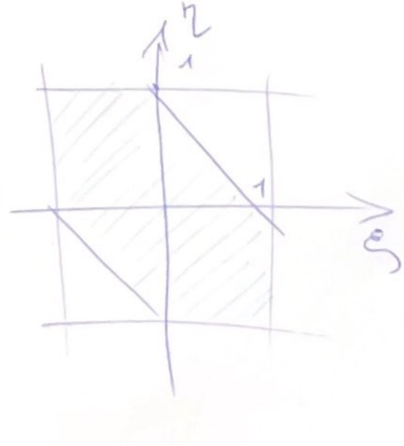
$$F_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \dfrac{(x+1)^2}{2}, & -1 < x \leq 1 \\ \dfrac{2(x+1)-(x+1)^2}{2-1}, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$F_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-1,2) \\ x+1, & -1 < x \leq 1 \\ 1-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



$$F_{\xi-\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \dfrac{(x+1)^2}{2} - \dfrac{1}{2}, & -1 < x \leq 0 \\ \dfrac{2(x+1)-(x+1)^2}{2-1-\frac{1}{2}}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$F_{\xi-\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-1;1) \\ x+1, & -1 < x \leq 0 \\ 1-x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$



ДЗ 4.2
№6

Пусть отрезок длиной L

Пусть x – расстояние от 0 до 1ой точки

y – расстояние между точками.

$x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq L$

третий отрезок – $L-(x+y)$

Треугольник можно составить тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$x+y > L-(x+y)$,

$x + L-(x+y) > y$, что равносильно: $x+y > \frac{L}{2}$

$y + L - (x+y) > x$

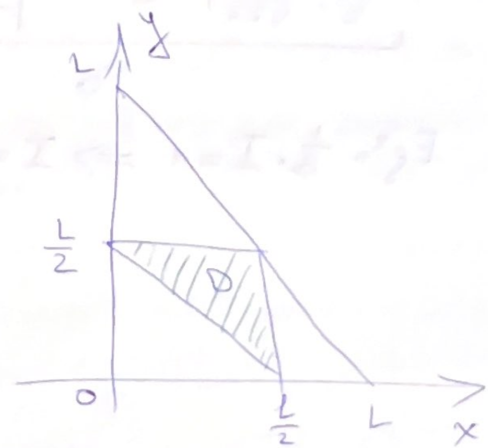
$x < \frac{L}{2}$

$y < \frac{L}{2}$

Обозначим через D область, задаваемую этими неравенствами.

D – равнобедренный треугольник с катетом: $\frac{L}{2} \Rightarrow D = \frac{L^2}{8}$.

искомая вероятность: $P = \dfrac{\frac{L^2}{8}}{\frac{L^2}{2}} = \frac{1}{4}$



ДЗ 4.2
N 7

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$E\xi^3 = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot p_\xi(x)dx = 0,$$ т.к $x^3 p_\xi(x)$ – нечетная, а промежуток интегрирования симметричный.

$$E|\xi|^3 = \int_{-\infty}^{\infty} |x^3| p_\xi(x)\,dx = 2\int_0^{\infty} x^3 p_\xi(x)\,dx = \int_0^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dy =$$

$$= \underbrace{-\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot y \cdot e^{-\frac{y}{2}}\Big|_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} dy = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}$$

$$E\xi^4 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx = I$$

$$E\xi^2 = \underbrace{\operatorname{var}\xi}_{=1} + \underbrace{|E\xi|^2}_{=0} = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \underbrace{\frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot (-x)dx$$

$$E\xi^2 = \frac{1}{3} \cdot I = 1 \Rightarrow I = 3.$$

ДЗ 4 2
№8

Пусть X_i – случайная величина, представляющая собой интервал времени между i-м и $(i+1)$-м запросами. Так как данные интервалы независимы, то сумму всех интервалов можно представить:

$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_9$

$E(X_i) = \frac{1}{\lambda}$, $D(X_i) = \frac{1}{\lambda^2}$

$E(S) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_9) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_9) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \ldots + \frac{1}{\lambda} = \frac{9}{\lambda}$

$D(S) = D(X_1 + X_2 + \ldots + X_9) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_9) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \ldots + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{9}{\lambda^2}$

Так как $\lambda = 1$, то $E(S) = 9$ и $D(S) = 9$

Д342
N9

Для каждой тройки вершин рассмотрим вероятность того, что она присутствует. Это значит, что три данных ребра из 10 попали в число пяти выбираемых. Вероятность этого события $\frac{C_7^2}{C_{10}^5} = \frac{1}{12}$

Вводя для каждой тройки индикаторную величину ее присутствия, имеем 10 одинаково распределенных случайных величин.

Сумма матожиданий равна $10/12 = 5/6$.

Найдем дисперсию $X = X_1 + \ldots + X_{10}$.

$$\mathrm{cov}(X, X) = \sum_{i=1}^{10} \mathrm{cov}(X_i, X_i) + \sum_{i=1}^{10} \sum_{j \neq i} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$$

$MX_i^2 = MX_i = \frac{1}{12}$ для любого i.

$$\mathrm{cov}(X_i, X_i) = \frac{1}{12} - \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$$

Фиксируем i, то есть одну из троек вершин. Из 9 остальных троек есть 6 троек, пересекающих данную по двум элементам и 3 тройки, пересекающие ее по одному эл-ту.

Пусть j - номер тройки первого типа, тогда в объединении получается 5 ребер. Вероятность того, что все они присутствуют, равна $\frac{1}{252}$.

Это MX_iX_j. $\Rightarrow \mathrm{cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{252} - \left(\frac{1}{12}\right)^2 = -\frac{1}{336}$. Таких слагаемых будет 6 для каждого i. Сумма: $-\frac{1}{56}$.

Если j - номер тройки второго типа, то в объединении будет 6 ребер, вероятность чего равна нулю. Поэтому ковариация $= -\frac{1}{144}$, что в сумме: $-\frac{1}{48}$

Итого для каждого i внутренняя сумма ковариаций равна $-\frac{1}{56} - \frac{1}{48} = -\frac{13}{336}$.

Итого $\mathrm{cov}(X, X) = \frac{55}{72} - \frac{65}{168} = \frac{95}{252}$.

13 4.2
N 11

Вероятность успеха равна $p = \frac{1}{3}$.

Случайная величина $\xi = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$ имеет асимптотически стандартное нормальное распределение, где $q = 1 - p$, $n = 1800$, S_n - число успехов в испытаниях. Неравенство $S_n < 620$ равносильно $\xi = \frac{S_n - 600}{20} < 1$.

Приближенное значение, находимое по таблицам, равно.

$$\Phi(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 0,841$$

ДЗ 4.2

N 10

$n = 1000$, $p = 1 - 0{,}995 = 0{,}005$

$P(S_n \geqslant 5) =$

Решаем по Теореме Муавра – Лапласа

$$P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) \approx \int_a^b \varphi(x)\,dx, \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$= P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \geqslant \frac{5 - 1000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}005(1-0{,}005)}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \geqslant \frac{4{,}995}{\sqrt{4{,}975}}\right) \approx \int_{2{,}24}^{\infty} \varphi(x)\,dx =$$

$$= \underbrace{\int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx}_{=0{,}5} - \underbrace{\int_0^{2{,}24} \varphi(x)\,dx}_{\approx 0{,}4821} = \underline{\underline{0{,}0179}}$$

По таблицам Ф-ии Лапласа