$M_1' = E[x] = \frac{a+b}{2}$ Д3 №5.1

№2

(ММ)

РО.

$M_2' = E[x^2] = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$

Сравниваем теоретические моменты с их выборочными аналогами, которые вычисляются с использованием выборки $x_1, \dots, x_n$.

1. $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

2. $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

Решим ур-я относительно параметров a и b.

1. $M_1' = \bar{x} \Longrightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

2. $M_2' = \bar{x}_2 \Longrightarrow \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

Из 1 найдем выражение для b:

$\frac{a+b}{2} = \bar{x} \Longrightarrow b = 2\bar{x} - a.$

$a^2 + 2a\bar{x} - a^2 + 4\bar{x}^2 - 4a\bar{x} + a^2 = 3\bar{x}^2$

$a^2 - 2a\bar{x} + \bar{x}^2 = 0$

$(a-\bar{x})^2 = 0$

$a = \bar{x}$

$b = 2\bar{x} - \bar{x} = \bar{x}$

$a = \bar{x}$ и $b = \bar{x}$

В нашем случае, оценкой параметра λ^{-2} является $\bar{X}^2$, где $\bar{X}$ – среднее зн-е выборки. $X = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

ДЗ N5.1
N3
(PO)

Для док-ва асимптотической нормальности оценки $\bar{X}^2$, нам необходимо показать, что $\bar{X}$ является асимптотически нормальной оценкой параметра λ^{-1} с асимптотической дисперсией $var(\bar{X})$.

Мат. ожидание $E(X_i) = \lambda^{-1}$ и дисперсия $var(X_i) = \lambda^{-2}$.

Среднее значение выборки $\bar{X}$ является асимптотически нормальной оценкой параметра λ^{-1} с асимптотической дисперсией $var(\bar{X}) = \frac{var(X_i)}{n} = \frac{\lambda^{-2}}{n}$, где n – размер выборки.

Используем лемму о наследовании асимптотической нормальности.

Ф-ция $g(\theta_n) = \theta_n^2$ является асимптотически непрерывной ф-ей с производной $g'(\theta) = 2\theta$

Тогда $var(\bar{X}^2) = (g'(\theta))^2 \cdot var(\hat{\theta}_n) = (2\bar{X})^2 \cdot \frac{\lambda^{-2}}{n} = 4 \cdot \bar{X}^2 \cdot \frac{\lambda^{-2}}{n}$

• Найдем ф-цию правдоподобия для данной выборки. Определяется, как произведение плотностей вероятности для каждого эл-та выборки:

ДЗ N 5.1
N 4
(PO)

$$L(X,\theta) = \theta^{2n} e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} x_i$$

• Найдем логарифмическую ф-ю правдоподобия:

$$\log L = I(\theta) = 2n \ln\theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)$$

Найдем зн-е параметра, при котором производная лог. ф-ии правдоподобия равна нулю $\frac{d(I(\theta))}{d\theta} = 0$.

Возьмем производную лог. ф-ии.

$$\frac{d(I(\theta))}{d\theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \longrightarrow \theta = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Согласно лемме о наследовании асимптотической нормальности, если есть оценка параметра θ, являющаяся асимптотически нормальной, то ф-ия $g(\theta)$, так же будет асимптотически нормальной с той же асимптотической дисперсией.

Применим лемму о наследовании асимптотической нормальности для нахождения асимптотической дисперсии этой оценки.

$Var(\theta) = \frac{1}{n \cdot I(\theta)}$, где $I'(\theta)$ информация Фишера о параметре θ.

$I'(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln(p(X;\theta))\right]$, где $p(X;\theta)$ – ф-ия плотности вероятности распределения

Для данного распределения, плотность вероятности $p(X) = \theta^2 x e^{-\theta x}$

Найдем информацию Фишера и $I(\theta)$:

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln(\theta^2 x e^{-\theta x})\right]$$

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} (2\ln(\theta) + \ln(x) - \theta x)\right]$$

$$I(\theta) = -E[\frac{-2}{\theta^2} + x - \theta]$$

$$I(\theta) = \frac{2}{\theta^2} - E(x) + \theta$$

Так как $E(x) = \frac{1}{\theta}$, то:

$$I(\theta) = \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta} + \theta$$

Найдем $I'(\theta)$:

$$I'(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta} + \theta\right)$$

$$I'(\theta) = \frac{-4}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^2} + 1$$

Используя полученное зн-е $I'(\theta)$, найдем асимптотическую дисп. θ:

$$\operatorname{var}(\theta) = \frac{1}{n \cdot I'(\theta)^2}$$

$$\operatorname{var}(\theta) = \frac{1}{n \cdot \left(\frac{-4}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^2} + 1\right)^2}$$