

ma Σ prof \int .ru

Высшая математика – просто и доступно!

Вспомнить всё. Что нужно

Кратчайший курс школьной математики

***Настоящий курс** предназначен для тех, кто начал изучать высшую математику, но позабыл школьную. Вашему вниманию представлена уникальная выборка из всей школьной программы – именно то, что потребуется в высшей математике!*

Автор: Александр Емелин

Оглавление

1. Числа, буквы ноты и действия с ними.....	4
1.1. Числа	4
1.2. Буквы.....	8
1.3. Арифметические действия.....	8
1.4. Порядок действий	11
1.5. Действия с обыкновенными дробями.....	12
➤ Сокращение дробей.....	13
➤ Как перевести десятичную дробь в обыкновенную?	14
➤ Умножение дробей	14
➤ Деление дробей.....	15
➤ Сложение дробей.....	16
➤ Как приводить дроби к общему знаменателю?	17
1.6. Одночлены, многочлены и другие члены	19
➤ Приведение подобных слагаемых.....	19
➤ Как перемножать суммы?	21
➤ Формулы сокращенного умножения	22
➤ Как представить сумму в виде произведения?	23
1.7. Свойства степеней и корней	24
1.8. Прогрессии	28
➤ Арифметическая прогрессия	28
➤ Геометрическая прогрессия.....	28
2. Уравнения и неравенства	30
2.1. Понятие уравнения. Простейшие примеры.....	30
2.2. Преобразование уравнений.....	31
2.3. Квадратное уравнение	33
2.4. Неравенства	35
2.5. Действия с неравенствами	36
2.6. Метод интервалов	37
2.7. Уравнения и неравенства с модулем	39
2.8. Понятие системы	43
2.9. Уравнения и неравенства с несколькими переменными	44
3. Функции и графики	45
3.1. Понятие функции.....	45
3.2. График функции в декартовой системе координат	46
3.3. Линейная функция	47
3.4. Степенная функция	48
3.5. Графическое решение уравнений и неравенств.....	51
3.6. Показательная функция	52
3.7. Логарифмы и логарифмическая функция	53
➤ Понятие логарифма	53
➤ Свойства логарифмов.....	54
➤ Логарифмирование и потенцирование	55
➤ Логарифмическая функция и её график	56
➤ Уравнения и неравенства с логарифмами	57

4. Чуть-чуть геометрии.....	59
4.1. Элементарные геометрические фигуры	59
4.2. Треугольники	60
➤ Равнобедренный треугольник	61
➤ Равносторонний треугольник	61
➤ Прямоугольный треугольник и теорема Пифагора.....	61
➤ Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла	62
➤ Подобные треугольники	62
4.3. Четырехугольники	63
4.4. Окружность и круг	64
4.5. Основные пространственные фигуры	65
5. И немного тригонометрии	67
5.1. Об угле подробно.....	67
5.2. Определение синуса, косинуса, тангенса через единичную окружность	68
5.3. Тригонометрические функции	69
5.4. Периодичность и взаимосвязь функций. Формулы приведения.....	70
5.5. Распространённые тригонометрические формулы	71
5.6. Обратные тригонометрические функции	74
5.7. Простейшие тригонометрические уравнения	76
5.8. Тригонометрические неравенства.....	79
Решения и ответы	82

1. Числа, буквы ноты и действия с ними

Здравствуй, дети! Садитесь. Меня зовут Емелин Александр, я ваш новый учитель по высшей математике. На первом уроке мы повторим материал за все 11 классов:

1.1. Числа

Во-первых, не следует путать *числа* с *цифрами*.

Цифры – это *числовые символы*, с помощью которых записывают числа. Наиболее известны *арабские цифры*: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и *римские цифры*: I, V, X, L, C, D, M.

Ну а **числа** – это числа :)

Исторически первыми появились *натуральные числа*, предназначенные для подсчёта материальных объектов (людей, кур, овец, монет и т.д.):

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$, для краткости *множество натуральных чисел* обозначают утолщённой, стилизованной или жирной буквой **N**.

И полезно будет вспомнить римский вариант:

$$\mathbf{N} = \{I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, \dots\}$$

Иногда к множеству натуральных чисел относят ноль: $0 \in \mathbf{N}$.

Справка: элементы произвольного *множества* принято записывать в фигурных скобках $\{ \}$. Если множество не содержит элементов, то его называют *пустым* и обозначают символом \emptyset . Значок \in символизирует принадлежность множеству.

Если к множеству **N** присоединить те же числа с противоположным знаком и ноль, то получится *множество целых чисел*:

$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, оптимизаторы и лентяи записывают его элементы со значками «плюс минус»: $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

Совершенно понятно, что натуральные числа являются *подмножеством* множества целых чисел: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ (значок \subset называют *значком включения*). Название множества тоже «говорящее»: целые числа – это значит, никаких дробей.

И, коль скоро, целые, то сразу же вспомним важные признаки их делимости на 2, 3, 5 и 10, которые будут требоваться в практических вычислениях чуть ли не каждый день:

1) Целое число делится на 2 без остатка, если оно заканчивается на 0, 2, 4, 6 или 8. Например, числа 400, -1502, -24, 66996, 818 – делятся на 2 без остатка.

Если целое число делится на 2 без остатка, то его называют *чётным*, в противном случае оно *нечётное*. Ноль – это чётное число (т.к. делится на два без остатка).

2) С делимость на 3 чуть сложнее: целое число делится на 3 без остатка, если сумма входящих в него цифр делится на 3. Примеры:

Проверим, делится ли на 3 число 27901. Для этого просуммируем его цифры:

$$2 + 7 + 9 + 0 + 1 = 19 - \text{не делится на } 3$$

Вывод: 27901 не делится на 3.

Просуммируем цифры числа -825432:

$$8 + 2 + 5 + 4 + 3 + 2 = 24 - \text{делится на } 3$$

Вывод: число -825432 делится на 3

3) Целое число делится на 5, если оно заканчивается пятёркой либо нулём:

775, -2390 – делятся на 5

4) Целое число делится на 10, если оно заканчивается на ноль:

798400 – делится на 10 (и, очевидно, на 100). Ну и, наверное, все помнят – для того, чтобы разделить на 10, нужно просто убрать один ноль: 79840

Также существуют признаки делимости на 4, 6, 8, 9, 11 и т.д., но практического толка от них практически нет =)

Следующим числовым множеством идёт **множество рациональных чисел**:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\} - \text{то есть, любое рациональное число представимо в виде}$$

обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$ с целым **числителем** (верх) и натуральным **знаменателем** (низ).

Немедленно повторим понятие **положительной обыкновенной дроби**. Представьте торт, который можно разрезать на любое количество **равных** кусков. ...Почему торт? Потому что в нём мало букв ☺. Итак, торт – это единица. Интерпретируем дроби:

$\frac{2}{3}$ – торт разрезали на 3 равных куска, взяли 2 куска (*две третьих*);

$\frac{1}{5}$ – торт разрезали на 5 равных кусков, взяли 1 кусок (*одну пятую*);

$\frac{6}{7}$ – торт разрезали на 7 равных кусков, взяли 6 кусков (*шесть седьмых*).

Обратите внимание, что числитель любой из этих дробей **меньше** знаменателя. Такие дроби называют **правильными**. Правильная дробь обязательно меньше единицы. Если же мы берём **все** куски торта или больше, то дробь будет **неправильной**:

$\frac{10}{10} = 1$ – торт разрезали на 10 равных куска, взяли 10 кусков (один торт);

$\frac{7}{4}$ – торт разрезали на 4 равных куска, взяли 4 куска и от второго торта взяли ещё 3

таких же куска. Итого, семь четвёртых или: $\frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$ – одна целая три четверти.

Дроби с целой и дробной частью (например, $1\frac{3}{4}$) называют **смешанными**.

Характерным «опознавательным» признаком *рационального числа* является то обстоятельство, что при делении числителя на знаменатель получается:

либо $\frac{-3}{1} = -3$ – целое число, либо $\frac{3}{8} = 0,375$ – конечная **десятичная дробь**, либо

$\frac{7}{11} = 0,\underline{6}3\underline{6}3\underline{6}3\dots$ – бесконечная *периодическая* десятичная дробь (*повтор может начаться не сразу*).

Полюбуйтесь этим делением и постарайтесь так делать как можно реже! Это не мантра, и даже не золотое правило – это самая настоящая **практическая аксиома**, которую я не устану повторять в будущем:

В высшей математике все действия стремимся выполнять в обыкновенных (правильных и неправильных) дробях

Согласитесь, что иметь дело с дробью $\frac{3}{8}$ значительно удобнее, чем с десятичным числом 0,375 (*не говоря уже о бесконечных дробях*). О том, как перевести десятичную дробь в обыкновенную, поговорим чуть позже.

Помимо рациональных существует множество **I иррациональных чисел**, каждое из которых представимо в виде бесконечной *НЕпериодической* десятичной дроби. Иными словами, в бесконечных «хвостах» иррациональных чисел нет никакой закономерности:

$$\pi = 3,1415926535\dots$$

$$e = 2,7182818284\dots \text{ («год рождения Льва Толстого» дважды)}$$

$$\sqrt{2} = 1,414213562\dots \text{ и так далее.}$$

О знаменитых константах «пи» и «е» информации предостаточно, поэтому на них я не останавливаюсь. Из всей этой информации желательно помнить хотя бы 2-3 знака после запятой: $\pi \approx 3,14$, $e \approx 2,718$ (*значок \approx означает «приблизительно равно»*).

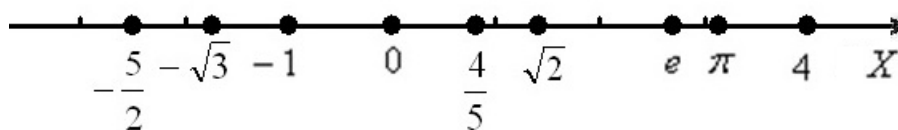
Повторим заодно **правило округления десятичных дробей**: при округлении дроби до некоторого знака после запятой, нужно посмотреть на следующий разряд: если там 0, 1, 2 или 4, то число округляется в меньшую сторону, если же там 5, 6, 7, 8 или 9, то число округляется в БОльшую сторону. Так, при округлении числа $\pi = 3,141592\dots$ до двух знаков после запятой смотрим на разряд *тысячных*: там 1, поэтому округляем в меньшую сторону: $\pi \approx 3,14$. Теперь округлим «пи» до трёх знаков после запятой – смотрим на следующий разряд: 5, поэтому округляем в БОльшую сторону: $\pi \approx 3,142$. При округлении до четырёх знаков после запятой опять округляем в БОльшую сторону: $\pi \approx 3,1416$ (поскольку в следящем разряде 9). Едем дальше:

Объединение рациональных и иррациональных чисел образует *множество действительных (вещественных) чисел*:

$$\mathbf{Q \cup I = R}$$

Справка: \cup – значок объединения множеств.

Геометрическая интерпретация множества \mathbf{R} вам хорошо знакома – это **числовая прямая** или **числовая ось**:



Каждому действительному числу соответствует определённая точка числовой прямой, и наоборот – каждой точке числовой прямой обязательно соответствует некоторое действительное число.

Числовую ось обозначают буквами OX , где буква O символически совмещается с нулём. Точка O называется **началом координат**. Числовую прямую также обозначают бесконечным **интервалом** $(-\infty; +\infty)$ (∞ – значок бесконечности).

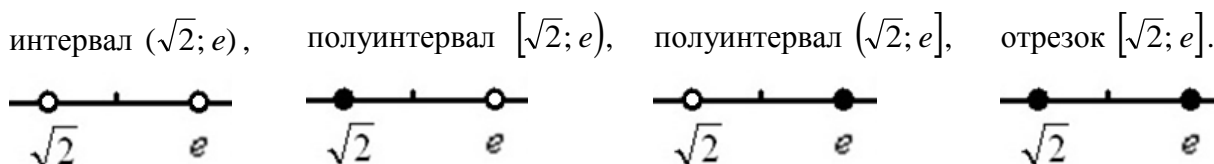
Запись $x \in (-\infty; +\infty)$ или эквивалентная ей запись $x \in \mathbf{R}$ символизирует тот факт, что x принадлежит множеству действительных чисел (или попросту, «икс» – действительное число). ...Ну вот мы и добрались до «иксов» ☺

В различных задачах часто рассматривают следующие **числовые промежутки**:

конечные интервалы, например, $(\sqrt{2}; e)$, **полуинтервалы**, а-ка $[\sqrt{2}; e)$ и $(\sqrt{2}; e]$, и **отрезки**, $[\sqrt{2}; e]$.

Справка: круглая скобка означает то, что крайнее значение не входит в промежуток, а квадратная то – что входит.

Значения, которые не входят в промежуток обозначают выколотыми точками:



И в заключение параграфа ещё одно важное понятие. Его недопонимают, его недолюбливают, но мы преодолеем эти комплексы ☺:

Модуль или **абсолютное значение** числа – это его расстояние от начала координат. Так как расстояние не может быть отрицательным, то модуль любого числа *больше либо равен нулю*. Грубо говоря, модуль «уничтожает» возможный знак «минус»:

$$|4| = 4, \quad |-4| = 4, \quad |0| = 0, \quad \left| \frac{10}{3} \right| = \frac{10}{3}, \quad |-2,5| = 2,5 \text{ и т.д.}$$

Числа, равные *по модулю* (например, 4 и -4), называют **противоположными**. Такие числа равноудалены от начала координат (*от нуля*).

Расстояние между двумя числами равно *модулю их разности*, например:
 $|5 - 3| = |2| = 2$, причём, вычитать можно в любом порядке: $|3 - 5| = |-2| = 2$.

Пожалуй, пока достаточно..., и к модулю мы ещё обязательно вернёмся!

1.2. Буквы

Буквы, как вы знаете, используются в словах ☺. А в математике у них особая роль. Недавно вот мы обозначили ими числовые множества: **N, Z, Q, I, R**. Константы ещё были: π и e . Но чаще всего буквами обозначают *переменные величины* – чтобы мы могли записывать формулы, функции, да и просто математические факты в *общем виде*.

Определим с помощью букв числовые промежутки:

Интервал – это промежуток $(a; b)$, где a и b – произвольные действительные числа, удовлетворяющие условию $a < b$. Для полуинтервалов $[a; b)$, $(a; b]$ должно выполняться то же условие. А для отрезка $[a; b]$ допустимо нестрогое неравенство $a \leq b$. Если $a = b$, то отрезок *вырождается* в точку и имеет нулевую длину.

Чётко, просто и лаконично.

С помощью букв записывают формулы. И мы начинаем повторять нашу аксиому, а именно вспомним, как перевести *смешанную* дробь в *неправильную*. Это осуществляется по формуле $A\frac{a}{b} = \frac{A \cdot b + a}{b}$ либо $-A\frac{a}{b} = -\frac{A \cdot b + a}{b}$ (если дробь отрицательна).

Например: $2\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{7}{3}$. Также здесь будет полезно провести неформальное рассуждение: *у нас есть два торта, каждый разрезали на три куса плюс взяли ещё одну треть от третьего торта, итого: $\frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ – семь третьих.*

Всегда стараемся понять СМЫСЛ формул и учимся выводить их самостоятельно!

Ну и, конечно же, *функции*. Пока в ознакомительном порядке. Рассмотрим функцию $y = x^2$. Здесь «икс» может принимать все действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$ (от минус до плюс бесконечности), а функция возводит эти значения в квадрат. Например, если $x = -3$, то $y = (-3)^2 = 9$, если $x = 5$, то $y = 5^2 = 25$ и так далее.

1.3. Арифметические действия

Несмотря на элементарность темы..., вы бы знали, как тут «плавают»!

Вычитание – это частный случай сложения, разность всегда можно представить в виде суммы положительного и отрицательного числа: $a - b = a + (-b)$.

На удивление этот факт помнят далеко не все. Чего не скажешь о следующем:)

От перестановки слагаемых сумма не меняется: $a + b = b + a$.

Это правило справедливо для любого количества слагаемых, так в трёхчлене $x^2 + 2x - 3$ слагаемые можно расположить в любом порядке, например, так: $x^2 - 3 + 2x$ или даже так: $-3 + 2x + x^2$. Однако **располагать их принято в порядке убывания степеней (1-й вариант)**.

У некоторых возникает недопонимание при сложении отрицательных чисел, в этом случае их удобно ассоциировать с температурой:

$$-15 + 20 = 5 \quad (\text{к } 15 \text{ градусам мороза прибавили } 20 \text{ градусов тепла})$$

$$-15 - 7 = -22 \quad (\text{к } 15 \text{ градусам мороза прибавили ;) } 7 \text{ градусов мороза})$$

Ну и конечно помним, что два минуса подряд дают плюс:

$$2 - (-5) = 2 + 5 = 7, \quad -(-2) - 5 = 2 - 5 = -3$$

Деление – это частный случай умножения, любое частное $a : b$, любую правильную или неправильную дробь можно представить в виде произведения:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}, \text{ где } b \neq 0 \quad (\text{ибо на ноль делить нельзя!})$$

Так, семь третьих тортов – это 7 кусочков по одной трети: $\frac{7}{3} = 7 \cdot \frac{1}{3}$. Кстати, все ли помнят смысл умножения?

$3 \cdot 2$ («трижды два») означает, что мы 3 раза взяли по 2 попугая (рисовать уж не буду). Итого: $2 + 2 + 2 = 6$ птиц..., и закапало с ресниц. Поэтому $3 \cdot 2 = 6$

$2 \cdot 4$ («дважды четыре») означает, что мы 2 раза взяли по 4 попугая.
Итого: $4 + 4 = 8$. Поэтому $2 \cdot 4 = 8$

Ну и вместо «дважды по сто» я предлагаю вам заполнить **интерактивную таблицу умножения** (см. Приложение **Таблицы**).

Далее. При умножении любого числа на ноль получается ноль: $a \cdot 0 = 0$. Наоборот, естественно, тоже ноль: $0 \cdot a = 0$. Умножать можно и отрицательные числа, при этом:

один минус даёт минус: $2 \cdot (-5) = -10$ либо $-2 \cdot 5 = -10$,

два минуса дают плюс: $-2 \cdot (-5) = 10$,

три минуса дают минус: $-(-2) \cdot (-5) = -10$, и так далее.

От перестановки множителей произведение не меняется $a \cdot b = b \cdot a$.

Данное правило справедливо и для бОльшего количество множителей, при этом множители чаще всего располагают так: **сначала** множитель-константа, **затем** переменные в алфавитном порядке, например: $5xy^3(z-1)^2$.

Степень – это свёрнутая запись произведения: $x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_k$, x называют **основанием** степени, а k – **показателем** степени или тоже **степенью**. Например:

$$2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ раза}}, \quad (-p)^{10} = \underbrace{(-p) \cdot (-p) \cdot \dots \cdot (-p)}_{10 \text{ раз}}, \quad (z-1)^2 = \underbrace{(z-1) \cdot (z-1)}_{2 \text{ раза}}$$

Так как два минуса дают плюс, то отрицательное число в **чётной** степени – положительно: $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$, $(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$, а отрицательное число в **нечётной** степени – отрицательно:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}, \quad (-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$$

НЕ ПУТАЙТЕ $(-1)^4$, $(-1)^5$ **с записями** -1^4 , -1^5 !!! В последнем случае знак «минус» к *основанию* степени **не относится**: $-1^4 = -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1$, $-1^5 = -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1$

Любое число (кроме нуля) в нулевой степени равно единице: $x^0 = 1$. **Помним этот факт в любом состоянии!** Ноль в нулевой степени 0^0 не определён. Хотя, на этот счёт существуют альтернативные гипотезы. Да, ещё один очевидный факт: $x^1 = x$

Теперь обратное действие – извлечение корней, чаще всего **арифметического квадратного корня** \sqrt{a} , который определён только для $a \geq 0$. Например:

$$\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3, \quad \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5, \quad \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$$

Реже встречаются корни более высоких степеней:

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2, \quad \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3,$$

Если корень **нечётный**: 3, 5, 7... то его можно извлекать и из отрицательных чисел!

$$\text{Например: } \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2, \quad \sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{(-1)^5} = -1$$

Хорошим тоном считается частичное извлечение корня (если это возможно):

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}, \quad \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}, \quad \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$$

Как быть, если под корнем большое число, например $\sqrt{5904}$? На калькуляторе проверяем, делится ли оно на 4: $\frac{5904}{4} = 1476$. Да, разделилось нацело, таким образом:

$5904 = 4 \cdot 1476$. А может быть, число 1476 ещё раз удастся разделить на 4? $\frac{1476}{4} = 369$.

Таким образом: $5904 = 4 \cdot 4 \cdot 369$. У числа 369 последняя цифра нечетная, поэтому разделить в третий раз на 4 явно не удастся. Пробуем поделить на девять: $\frac{369}{9} = 41$.

$$\text{В результате: } \sqrt{5904} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 41} = 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{41} = 12\sqrt{41}$$

Итак, наш рабочий алгоритм таков: если под корнем находится неизвлекаемое нацело число, то пытаемся выполнить частичное извлечение – на калькуляторе проверяем, делится ли число на: 4, 9, 25, 49, 100 и т.д.

Ну и, конечно, любой «плохой» корень можно вычислить приближённо, самые популярные значения: $\sqrt{2} \approx 1,41$, $\sqrt{3} \approx 1,73$.

Хорошим тоном также считается **устранение иррациональности в знаменателе**.

Попросту говоря, это когда в знаменателе есть корень: $\frac{2}{\sqrt{2}}$. В таких случаях нужно

использовать искусственный приём – **умножить числитель и знаменатель на корень, ТАКОЙ, чтобы в знаменателе корень извлёкся нацело**. Распишу очень подробно:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad (\text{на последнем шаге сократили дробь на 2})$$

Аналогичный пример: $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Иногда проскакивают корни более высоких степеней:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2 \cdot \sqrt[3]{3}}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2 \cdot 3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$$

1.4. Порядок действий

При вычислении **математических выражений** **сначала** выполняется возведение в степень / извлечение корня, **затем** умножение / деление и **в последнюю очередь** сложение / вычитание. Эпичный пример:

$$2 + 2 \cdot 2 = 2 + 4 = 6, \quad \text{и ещё пример: } \frac{4^2}{2} - 3 \cdot \sqrt{9} = \frac{16}{2} - 3 \cdot 3 = 8 - 9 = -1$$

Если в *показателе* степени или под корнем выполняются другие действия, то обычно (но не всегда) сначала выполняем их:

$5^{2+2} = 5^4 = 625$, $\sqrt{1+2 \cdot 4} = \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3$, $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$, и в этом примере как раз допустимо поменять порядок действий: $\sqrt{4 \cdot 9} = 2 \cdot 3 = 6$.

Если есть скобки, то в первую очередь выполняется то, что в скобках:

$$(2+2) \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8, \quad 2 \cdot (-5+3-7) = 2 \cdot (-9) = -18 \quad (5-7)^4 = (-2)^4 = 16$$

Если перед скобкой стоит множитель, то их можно **раскрыть**, умножив **каждое** слагаемое на этот множитель:

$$3(a-b) = 3a - 3b, \quad 2 \cdot (-5+3-7) = 2 \cdot (-5) + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-7) = -10 + 6 - 14 = -18$$

Если перед скобками стоит знак «+» (множитель +1), то их можно просто убрать:
 $+(-5+3-7) = -5+3-7$

Если перед скобками стоит знак «-» (множитель -1), то их можно убрать, сменив у **каждого** слагаемого знак:

$-(-5+3-7) = 5-3+7$, и, к слову, здесь **ошибочно** складывать $3+7$, помним, что $5-3+7 = 5+(-3)+7$ – и сложение можно выполнять в любом порядке.

Теперь самое время потренироваться:

Задание 1

а) Найти модули следующих чисел: 4 , -1 , $-\frac{10}{3}$, пояснить, что это значит. Найти расстояние между следующими числами: 3 и -2 , -7 и -13 .

б) Выполнить возведение в степень: 2^5 , 5^2 , 10^0 , $(-a)^3$, $(-b)^4$. Вычислить значение функции $y = -x^2 + 2x$ при $x = -1$ (замучили с этим примером на сайте :)).

в) Извлечь корни (полностью или частично), если это возможно:

$$\sqrt{12}, \sqrt{20}, \sqrt{43}, \sqrt{49}, \sqrt{72}, \sqrt{121}, \sqrt{1000}, \sqrt{1875}, \sqrt[3]{-81}, \sqrt[4]{-16}$$

г) Избавиться от иррациональности в знаменателе: $\frac{6}{\sqrt{3}}$, $-\frac{1}{\sqrt{7}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

д) Выполнить действия:

$$3 \cdot 2^2 + 1, \quad 3 \cdot (2^2 + 1), \quad \frac{6 \cdot 5}{3}, \quad \left(\frac{\sqrt[3]{-8}}{2} - 1 \right)^3, \quad \sqrt{13 - 2 \cdot 7}, \quad -2(x - \sqrt{9} - 3(1 - 2))$$

Решения и ответы для сверки в конце курса. Надеюсь, правильные ☺

1.5. Действия с обыкновенными дробями

Важнейший параграф.

Во-первых, следует заметить, что **дробь и число – это не одно и то же**. Дробь – это форма записи числа. **Одно и то же число можно записать разными дробями**, например:

$$1\frac{1}{2}, \quad 1,5, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{6}{4}, \quad \frac{15}{10}$$

Согласно практической аксиоме, **все действия в высшей математике мы стремимся проводить в правильных и неправильных дробях**, и, очевидно, из всех перечисленных вариантов нас устраивает *неправильная* дробь $\frac{3}{2}$. Возникает вопрос, как свести все остальные дроби к этому виду?

С первым случаем мы уже сталкивались – *смешанную* дробь можно перевести в неправильную по формуле $A\frac{a}{b} = \frac{A \cdot b + a}{b}$ либо $-A\frac{a}{b} = -\frac{A \cdot b + a}{b}$. В нашем примере:

$$1\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{3}{2}. \text{ Или рассуждаем устно и неформально: один торт режем пополам и}$$

$$\text{добавляем ещё половину: } 1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

ОК. Как быть с дробями $\frac{6}{4}$, $\frac{15}{10}$? Их нужно **сократить**.

➤ Сокращение дробей

Сокращение числовой дроби – это деление её числителя и знаменателя на **одно и то же** натуральное число, бОльшее единицы, **без остатков**. Если, конечно, такое деление возможно, ибо у дроби $\frac{3}{2}$ и сокращать-то нечего. Такие дроби называют **несократимыми**

Легко видеть, что и числитель и знаменатель дроби $\frac{6}{4}$ делится на 2 без остатка, поэтому такую дробь можно и нужно сократить: $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Числитель и знаменатель дроби $\frac{15}{10}$ делится на 5, и мы делим: $\frac{15}{10} = \frac{3}{2}$.

Зачастую сокращение проводится несколько раз, так, например, дробь $\frac{36}{84}$, очевидно, можно сразу сократить на два: $\frac{36}{84} = \frac{18}{42}$. И ещё раз на два: $\frac{18}{42} = \frac{9}{21}$. На два больше сократить нельзя, но зато можно на три: $\frac{9}{21} = \frac{3}{7}$. Больше сократить нельзя.

И для очистки совести можно выполнить «любительскую» проверку, а именно, разделить на калькуляторе 36 на 84, а затем 3 на 7, убедившись тем самым в справедливости равенства $\frac{36}{84} = \frac{3}{7}$.

Любую «подозрительную дробь» нужно пробовать сократить: для этого мысленно либо на черновике / калькуляторе проверяем, делится ли её числитель и знаменатель на 2, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 17, 19... – бОльшие делители встречаются редко.

Переменные величины тоже можно сокращать, например:

$$\frac{5x}{3x^2} = \frac{5}{3x}, \quad \frac{2ab^2}{6b^3} = \frac{a}{3b}, \quad \frac{p^2q}{pq^2} = \frac{p}{q}$$

И в последнем примере есть один момент: после сокращения в знаменателе пропала переменная p . Что это значит? Это значит, что исходная дробь **не** определена при $p = 0$, но сокращённая уже определена.

Особое внимание на этот момент следует обращать при сокращении *функций* и *уравнений*. Так, функция $y = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)}$ не определена при $x = -1$ и если мы сокращаем её на $(x+1)$: $y = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)} = x+3$ то **обязательно** следует указать, что $x \neq -1$.

Вот ещё один типичный пример: $(x-1)(x^2 + 2x - 3) = 0$ – здесь **ни в коем случае нельзя сокращать (делить)** на $(x-1)$, поскольку мы потеряем корень $x = 1$ этого уравнения.

➤ Как перевести десятичную дробь в обыкновенную?

Сначала её нужно прочесть человеческим языком: 1,5 – *одна целая, пять десятых*.
И теперь всё понятно: $1\frac{5}{10}$. Дробную часть сокращаем на пять, и вуаля: $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Другое число: 0,4 – читаем вслух: *ноль целых, четыре десятых*, то есть: $\frac{4}{10}$.
Сокращаем дробь на два $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, после чего делим на калькуляторе 2 на 5 и убеждаемся, что получилось 0,4.

И ещё пример: 0,52 – *ноль целых, пятьдесят две сотых*. Так и записываем: $\frac{52}{100}$.
Дробь можно сократить на два: $\frac{26}{50}$. И ещё раз на два: $\frac{13}{25}$. Больше ни на что сократить нельзя. Для проверки делим 13 на 25 на калькуляторе и убеждаемся, что получилось 0,52.

Возникает вопрос: а неужели смешанные и десятичные дроби вообще не в ходу?
Нет, почему же, варианты $1\frac{1}{2}$, 1,5 хороши, но только если это у вас окончательный ответ задачи, и с этим числом больше ничего не нужно делать. В некоторых случаях, например, в ряде задач теории вероятностей бывает удобнее провести вычисления в десятичных дробях. Кроме того, они уместны в задачах вычислительной математики. И ещё кое-где.
Но всё это исключения из правила. Рулят правильные и неправильные дроби!

В следующих пунктах по умолчанию речь пойдёт только о таких дробях, и действия с ними я разберу по нарастанию сложности:

➤ Умножение дробей

Число на дробь умножается просто: $A \cdot \frac{a}{b} = \frac{A \cdot a}{b}$, например: $5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{4} = \frac{15}{4}$.

Оставляем именно в таком виде! Больше ничего с этой дробью делать не нужно!

Если перед дробью есть знак «минус» (множитель -1), то его можно отнести к числителю либо знаменателю: $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$. Это бывает удобно или даже необходимо при решении некоторых задач. Так, у дроби $-\frac{1}{1-x}$ минус выгодно снести вниз, чтобы

раскрыть скобки и записать дробь более компактно: $-\frac{1}{1-x} = \frac{1}{-(1-x)} = \frac{1}{-1+x} = \frac{1}{x-1}$.

Дробь на дробь тоже умножается просто: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, например:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}, \quad \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}, \quad \frac{1}{3} \cdot x \cdot \frac{2y^2}{3} = \frac{1 \cdot x \cdot 2y^2}{3 \cdot 3} = \frac{2xy^2}{9}.$$

Перед тем, как перемножать числители / знаменатели, нужно посмотреть, а нельзя ли что-нибудь сразу сократить? Это более рациональный метод вычислений:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 8} = \dots \text{ — и здесь вместо перемножения } \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 8} = \frac{12}{40} \text{ удобно сразу же}$$

сократить числитель и знаменатель на четыре: $\dots = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10}$

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{15} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 7}{6 \cdot 9 \cdot 15} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 7}{3 \cdot 9 \cdot 3} = \frac{7}{81} \text{ — а здесь перед перемножением удалось сократить}$$

на 5 и на 2. Множители-единицы на чистовике можно не рисовать, это я для понимания.

Далее. Степень. Тоже очевидное правило, которое следует из **определения степени**: чтобы возвести дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}, \text{ например: } \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}, \quad \left(\frac{3x}{5}\right)^2 = \frac{3^2 x^2}{5^2} = \frac{9x^2}{25} \text{ и тому подобное.}$$

Если дробь отрицательна, а степень *чётная*, то минус «съедается»: $\left(-\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$,
если же k *нечётная*, то минус «выскакивает» из-под степени: $\left(-\frac{a}{b}\right)^k = -\frac{a^k}{b^k}$.

$$\text{Простейший пример: } \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

Обратно, для извлечения корня справедливо очевидное правило $\sqrt[k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}}$,
например: $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$. Если k *нечётное*, то дробь может быть и отрицательной:

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = -\frac{2}{3}. \text{ Но, как вариант: } \sqrt{\frac{16}{25}} = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}, \quad \sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{2}{3}\right)^3} = -\frac{2}{3}.$$

➤ Деление дробей

Здесь у нас БОльшее разнообразие.

Дробь $\frac{a}{b}$ **делится на число** c следующим образом: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$. Разделим, например,

$$\text{три четверти на пять: } \frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}.$$

Число a **делится на дробь** $\frac{b}{c}$ следующим образом: $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{b}$. Разделим, например,

$$\text{два на одну треть: } \frac{2}{\frac{1}{3}} = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6.$$

И, наконец, дробь $\frac{a}{b}$ делится на дробь $\frac{c}{d}$ по формуле: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$. Разделим две

третьих на четыре девятых: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 4} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2}$, опять полторашка случайно получилась, хотя пиво я уже давно не пью ☺.

Осуществимы и обратные действия, то есть, из целого числа или дроби можно искусственно сделать трёх- или четырёхэтажную дробь, например: $2 = \frac{1}{\frac{1}{2}}$ (один разделить на одну вторую), $\frac{5}{7} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{5}}$, и тому подобное.

➤ Сложение дробей

Технически это чуть более сложное действие. Впрочем, не всегда.

1) Если знаменатели одинаковые, то никаких проблем – знаменатель остаётся таким же, а числители складываются: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, например:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{2}{7} + \frac{8}{7} = \frac{2+8}{7} = \frac{10}{7}, \quad \frac{5}{11} - \frac{8}{11} = \frac{5-8}{11} = -\frac{3}{11}$$

2) Если одно из чисел целое, то тоже никаких проблем: $\frac{a}{b} + c = \frac{a}{b} + \frac{c \cdot b}{b} = \frac{a + c \cdot b}{b}$, например:

$$\frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{4}{3}, \quad 2 + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}, \quad \frac{3}{10} - 3 = \frac{3}{10} - \frac{30}{10} = \frac{3-30}{10} = -\frac{27}{10}$$

3) Если знаменатели разные $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ ($b \neq d$), то сначала нужно **привести дроби к общему знаменателю**, проще всего, по формуле $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db}$, например:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3}{6} + \frac{2 \cdot 2}{6} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}, \quad \frac{3}{5} - \frac{6}{7} = \frac{3 \cdot 7}{35} - \frac{6 \cdot 5}{35} = \frac{21}{35} - \frac{30}{35} = \frac{21-30}{35} = -\frac{9}{35},$$

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 2}{12} + \frac{3 \cdot 6}{12} = \frac{10}{12} + \frac{18}{12} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$$

В ряде случаев решение можно упростить, как, например, в последнем случае:

$\frac{5}{6} + \frac{3}{2}$ – здесь вместо перемножения знаменателей выгодно преобразовать только вторую дробь, а именно домножить её знаменатель и числитель на три: $\frac{5}{6} + \frac{3}{2} = \frac{5}{6} + \frac{9}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$.

Вообще, это действие крайне важное, и поэтому выделим ему отдельный пункт:

➤ Как приводить дроби к общему знаменателю?

Выше я привёл «прямую» формулу приведения: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db}$, но она далеко не всегда рациональна. Так, при сложении $\frac{3}{10} + \frac{2}{15} = \frac{3 \cdot 15}{10 \cdot 15} + \frac{2 \cdot 10}{15 \cdot 10}$ внизу получается 150, что многовато. Нельзя ли уменьшить это значение? Смотрим на знаменатели дробей: 10, 15 и замечаем, что **оба они делятся на 5**. Делим на 5 нашего монстра: $\frac{150}{5} = 30$ – и полученное число должно подойти в качестве общего знаменателя. И в самом деле, 30 делится и на 10 и на 15. Делим $30:10=3$ – и домножаем на три числитель и знаменатель первой дроби: $\frac{3 \cdot 3}{10 \cdot 3}$. Теперь делим $30:15=2$ – и домножаем на два оба этажа второй дроби: $\frac{2}{15} = \frac{2 \cdot 2}{15 \cdot 2}$.

$$\text{Таким образом: } \frac{3}{10} + \frac{2}{15} = \frac{3 \cdot 3}{10 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{9}{30} + \frac{4}{30} = \frac{13}{30}$$

...много я тут наговорил, но на самом деле такой подбор выполняется устно, и не всё так сложно ☺. **Принцип прост:** общий знаменатель должен делиться на знаменатель каждой дроби (*само собой*) и **быть как можно меньше** (по возможности). Запишу **общую формулу** (не пугаемся):

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad_1}{bd_1} + \frac{cd_2}{dd_2} = \frac{ad_1 + cd_2}{Z}, \text{ где } d_1 = \frac{Z}{b}, d_2 = \frac{Z}{d} - \text{дополнительные множители};$$

общий знаменатель Z должен делиться на b и на d и **быть как можно меньше**.

Рассмотрим разность $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x(x-1)}$. Здесь можно снова использовать прямую формулу $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{db}$ с общим знаменателем $x^2 \cdot x(x-1) = x^3(x-1)$. Но есть более рациональная версия: $Z = x^2(x-1)$ – она делится **и на знаменатель первой дроби и на знаменатель второй**. Выполняем это деление – рассчитываем дополнительные множители: $d_1 = \frac{Z}{b} = \frac{x^2(x-1)}{x^2} = (x-1)$, $d_2 = \frac{Z}{d} = \frac{x^2(x-1)}{x(x-1)} = x$. Таким образом, по формуле:

$$\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{2 \cdot (x-1)}{x^2 \cdot (x-1)} - \frac{1 \cdot x}{x(x-1) \cdot x} = \frac{2(x-1)}{x^2(x-1)} - \frac{x}{x^2(x-1)} = \frac{2(x-1) - x}{x^2(x-1)}, \text{ вверху, как правило, раскрывают скобки и приводят подобные слагаемые: } \dots = \frac{2x - 2 - x}{x^2(x-1)} = \frac{x - 2}{x^2(x-1)}$$

В качестве **проверки** выполним обратное действие – оно называется **почленным делением** числителя на знаменатель:

$$\frac{2(x-1) - x}{x^2(x-1)} = \frac{2(x-1)}{x^2(x-1)} - \frac{x}{x^2(x-1)} = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x(x-1)} - \text{в результате получена исходная разность, что и требовалось проверить.}$$

Нередко приходится приводить несколько дробей, например: $\frac{1}{2} + \frac{2}{x} - \frac{3}{4(x^2+1)}$.

Здесь используются аналогичные формулы. Можно задействовать «прямой» вариант:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{a \cdot df}{bdf} + \frac{c \cdot bf}{bdf} + \frac{e \cdot bd}{bdf}$ с общим знаменателем $2 \cdot x \cdot 4(x^2+1) = 8x(x^2+1)$, но

нельзя ли его уменьшить? В данном случае можно: $Z = 4x(x^2+1)$ – легко видеть, что он делится на знаменатель **каждой** дроби **и является минимальным**. Вычислим

дополнительные множители $d_1 = \frac{Z}{b} = \frac{4x(x^2+1)}{2} = 2x(x^2+1)$, $d_2 = \frac{Z}{d} = \frac{4x(x^2+1)}{x} = 4(x^2+1)$,

$d_3 = \frac{Z}{f} = \frac{4x(x^2+1)}{4(x^2+1)} = x$ и по формуле $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{ad_1}{bd_1} + \frac{cd_2}{dd_2} + \frac{ed_3}{fd_3} = \frac{ad_1 + cd_2 + ed_3}{Z}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{2}{x} - \frac{3}{4(x^2+1)} &= \frac{1 \cdot 2x(x^2+1)}{2 \cdot 2x(x^2+1)} + \frac{2 \cdot 4(x^2+1)}{x \cdot 4(x^2+1)} - \frac{3 \cdot x}{4(x^2+1) \cdot x} = \\ &= \frac{2x(x^2+1)}{4x(x^2+1)} + \frac{8(x^2+1)}{4x(x^2+1)} - \frac{3x}{4x(x^2+1)} = \frac{2x(x^2+1) + 8(x^2+1) - 3x}{4x(x^2+1)}, \text{ допилим позже.} \end{aligned}$$

Проверка состоит в *почленном делении* числителя на знаменатель, многое тут

сократится: $\frac{2x(x^2+1) + 8(x^2+1) - 3x}{4x(x^2+1)} = \frac{2x(x^2+1)}{4x(x^2+1)} + \frac{8(x^2+1)}{4x(x^2+1)} - \frac{3x}{4x(x^2+1)} =$

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{x} - \frac{3}{4(x^2+1)}$ – и в результате мы получили исходную сумму.

Тренируемся самостоятельно:

Задание 2

а) Перевести десятичные дроби в обыкновенные и, если это возможно, сократить их: 0,2; -1,34; 2,625. Выполнить проверку делением числителя на знаменатель.

Выполнить следующие действия:

б) $\frac{\sqrt{8}}{3} \cdot \frac{9}{4}$, $\frac{6}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3$, $-3 \cdot \frac{2x}{7} \cdot \left(-\sqrt{\frac{25}{9}}\right)$, $\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \frac{10}{3xy} \cdot \frac{2y^2}{5}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2$

в) разделить минус три на три седьмых, шесть тринадцатых на два, одиннадцать пятых на две трети.

г) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $\frac{5}{6} - 2$, $-3 + 5 \cdot \frac{3}{4}$, $\frac{1}{6} + \frac{3}{8} - \frac{7}{12}$, $\frac{\frac{3}{14} + \frac{5}{21}}{3}$, $\frac{2}{1 + \frac{3}{5}}$

д) Привести к общему знаменателю: $\frac{2}{x+1} - 1$, $\frac{1}{2x} + \frac{1}{x^3}$, $\frac{2}{3x} - \frac{x}{x-2} + \frac{1}{2(x-2)^2}$.

е) Упростить дроби: $\frac{3x}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{2}{8}}}$, $\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3y}{x}$, $\frac{2ab}{\frac{a^2}{b} - 5a}$.

1.6. Одночлены, многочлены и другие члены

И с теми, и с другими, и с третьими мы уже имели дело, и теперь настало время немного разобраться в понятиях.

Одночлен – это произведение, состоящее из числовых множителей и переменных в *целых неотрицательных* степенях, например: 1 , $5k$, $2a^2b$, $-7x^2$, xy^2z^3 и так далее.

В ходе вычислений одночлен часто появляется в «разобранном» виде, и тогда его записывают компактно: $2x \cdot 3x = 6x^2$, $-\frac{1}{2}xy \cdot 3y = -\frac{3}{2}xy^2$, $-abc \cdot 2ab^3d = -2a^2b^4cd$.

Сумму степеней при различных переменных называют **степенью одночлена**, так $6x^2$ – одночлен 2-й степени, $-\frac{3}{2}xy^2$ – одночлен $1 + 2 = 3$ -й степени и $-2a^2b^4cd$ – одночлен $2 + 4 + 1 + 1 = 8$ -й степени.

Если в произведении есть что-то ещё (корни, нечисловые дроби, другие функции), или другие действия, то это уже не одночлен: $x\sqrt{x}$, $\frac{2}{a}$, $3(a+b)^2$. Это просто член ☺

Многочленом называют сумму одночленов, например: $ab + c$, $x^4 - 2x + 3$, причём первый также величают *двучленом*, а второй – *трёхчленом*. По количеству одночленов. **Степенью многочлена** является максимальная степень входящих в него одночленов. Так, первый многочлен имеет 2-ю степень ($1 + 1$), а второй – 4-ю степень.

На практике вам могут встретиться как многочлены, так и сумма произвольных членов, и нижеследующие выкладки справедливы для обоих случаев. Продолжаем повторять алгебраические действия.

И вопрос первый: **какие члены можно складывать?** Сложить можно только **подобные члены** (подобные слагаемые):

➤ Приведение подобных слагаемых

Подобные слагаемые – это слагаемые, имеющие одинаковую буквенную часть.

Так, слагаемые $2a^2b^2 + 3b^2a^2$ – *подобны* (несмотря на перестановку множителей), но вот слагаемые $2a^2b^2 + 3a^2b$ – уже нет, поскольку хоть чуть-чуть, но отличаются буквенными частями.

При сложении подобных слагаемых их **буквенную часть** удобно ассоциировать с помидором: $2a^2b^2 + 3a^2b^2 = 5a^2b^2$ – два помидора плюс три помидора = пять помидоров.

Иными словами:

При сложении подобных слагаемых нужно сложить их **числовые коэффициенты**, а буквенную часть оставить неизменной.

Дотошно можно записать так: $xyz - 3xyz = (1 - 3)xyz = -2xyz$

Если буквенной части нет, то речь идёт о **числах**, которые тоже считаются подобными слагаемыми, причём среди них можно выделить свои подгруппы, простейший пример: $1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3 = -2 + 3\sqrt{2}$ – тут в качестве «помидора» выступает $\sqrt{2}$.

В принципе, упрощение можно продолжить: $-2 + 3\sqrt{2} = -2 + 4,24264... = 2,24264...$, но зачем нам длинные «хвосты» и десятичные дроби? Поэтому **оставляем результат в виде** $-2 + 3\sqrt{2}$ или даже лучше запишем его так: $3\sqrt{2} - 2$, ибо «минус» спереди смотрится не айс.

Но на практике чаще встречаются «солянка»: $3x - 2 - 4x + 5$. Совершенно понятно, что здесь «иксы» нужно сложить с «иксами», а числа с числами: $3x - 2 - 4x + 5 = -x + 3$

Вот более трудный пример:

$$x^2 + 3x - 5 - x^3 + 2x - 3x^2 + 11 + x^3 + 7x + \sqrt{x} + 1$$

Здесь удобно выполнить пометки карандашом (или выделить слагаемые как-то по-другому). Подчёркиваем все квадраты, отмечаем волной – все «иксы», обводим в кружок все числа и помечаем галочками все встретившиеся кубы:

$$\underbrace{x^2 + 3x}_{\text{галочка}} \underbrace{-5}_{\text{галочка}} - \underbrace{x^3}_{\text{галочка}} + \underbrace{2x}_{\text{галочка}} - \underbrace{3x^2}_{\text{галочка}} \underbrace{+ 11}_{\text{галочка}} + \underbrace{x^3}_{\text{галочка}} + \underbrace{7x}_{\text{галочка}} + \underbrace{\sqrt{x}}_{\text{галочка}} \underbrace{+ 1}_{\text{галочка}} =$$

Теперь слагаемые можно **перегруппировать**, расположив их в порядке убывания степеней:

$$= -x^3 + x^3 + x^2 - 3x^2 + 3x + 2x + 7x + \sqrt{x} - 5 + 11 + 1 =$$

После чего складываем подобные слагаемые **в каждой группе**, при этом кубы у нас **взаимоуничтожаются**:

$= -2x^2 + 12x + \sqrt{x} + 7$, обращаю внимание, что эту сумму некорректно называть **многочленом**, поскольку одно из слагаемых не является одночленом.

Проделанные действия называют **приведением подобных слагаемых**, и зачастую их не расписывают так подробно. Доведём до ума дробь из предыдущего параграфа:

$$\frac{2x(x^2 + 1) + 8(x^2 + 1) - 3x}{4x(x^2 + 1)} = \frac{2x^3 + 2x + 8x^2 + 8 - 3x}{4x(x^2 + 1)} = \frac{2x^3 + 8x^2 - x + 8}{4x(x^2 + 1)}$$

Здесь подобных слагаемых почти нет, и я обошелся без пометок. Но в тяжелых случаях они строго рекомендованы, дабы ничего не потерять.

Иногда подобные не столь очевидны:

$$\frac{1}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x-1}$$

Тут в качестве «буквенной части» выступает дробь, и для лучшего понимания я распишу решение так:

$$\frac{1}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} - 3 \cdot \frac{1}{x-1} + 1 \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x-1}.$$

Вопрос второй:

➤ Как перемножать суммы?

С произведением одиночного члена на сумму никаких трудностей, по сути, это раскрытие скобок: $ab\left(\frac{a}{b} - c\right) = a^2 - abc$, $x(x^2 + 2x - 3) = x^3 + 2x^2 - 3x$, $\sqrt{x}(1+x) = \sqrt{x} + x\sqrt{x}$

Главное, **быть внимательным**. Заметьте также, что в 1-м примере после сокращения следует иметь в виду, что $b \neq 0$.

Но более занятное действие – это перемножение сумм. Следующее правило тоже справедливо как для многочленов, так и произвольных сумм, **читаем и осмысливаем**:

Чтобы умножить сумму на сумму нужно **каждое** слагаемое одной суммы умножить на **каждое** слагаемое другой суммы

В частности: $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$. Порядок перемножения можно поменять: $(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$. Либо начать умножение с любого слагаемого второй скобки. Кому как нравится, кому как удобнее. Например:

$$(2x+1)(3-x) = 2x \cdot 3 + 2x \cdot (-x) + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-x) = 6x - 2x^2 + 3 - x = -2x^2 + 5x + 3$$

Для более «навороченных» сумм формула аналогичная, в частности:

$$(a+b)(c+d+e) = ac + ad + ae + bc + bd + be, \text{ например:}$$

$$\begin{aligned}(x-y)(x^2+y-1) &= x \cdot x^2 + x \cdot y + x \cdot (-1) + (-y) \cdot x^2 + (-y) \cdot y + (-y) \cdot (-1) = \\ &= x^3 + xy - x - x^2y - y^2 + y, \text{ на практике так, конечно, подробно не расписывают,} \\ &\text{а выполняют умножение в уме:}\end{aligned}$$

$(x-y)(x^2+y-1) = x^3 + xy - x - x^2y - y^2 + y$, при этом помним, что **один минус даёт минус, а два минуса дают плюс**. Заметим заодно, что полученный результат не упростить, поскольку тут не оказалось **подобных слагаемых**.

Как перемножить три скобки? – самое простое $(a+b)(c+d)(e+f)$? Применяем правило умножения сумм два раза подряд:

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d)(e+f) &= (ac + ad + bc + bd)(e+f) = \text{и теперь } \mathbf{каждое} \text{ слагаемое первой} \\ &\text{скобки умножаем на } \mathbf{каждое} \text{ слагаемое второй скобки:} \\ &= ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf\end{aligned}$$

Как вариант, можно было сначала перемножить $(c+d)(e+f)$ и затем умножить $(a+b)$ на полученный результат.

$$\begin{aligned}\text{Давайте что-нибудь простенькое: } (x+1)(x-2)(x+3) &= (x^2 - 2x + x - 2)(x+3) = \\ \text{приводим подобные в 1-й скобке и допиливаем пример: } &= (x^2 - x - 2)(x+3) = \\ &= x^3 + 3x^2 - x^2 - 3x - 2x - 6 = x^3 + 2x^2 - 5x - 6\end{aligned}$$

Особый интерес представляет перемножение одинаковых или похожих сумм:

➤ Формулы сокращенного умножения

Эти формулы широко известны, эти формулы многие помнят, но, тем не менее.
Квадрат суммы:

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ или кратко: } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

аналогично для **квадрата разности:**

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Теперь перемножим сумму и разность:

$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$ – эту формулу называют **формулой разности квадратов**.

Примеры:

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 &= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1, \\(x-\sqrt{3})^2 &= x^2 - 2x \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3, \\(4+x)(4-x) &= 4^2 - x^2 = 16 - x^2\end{aligned}$$

Наряду с квадратами популярны и кубы, **куб суммы:**

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 2a^2b + b^2a + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \\&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Аналогично выводится **куб разности:** $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Примеры:

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3})^3 &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 1 \cdot (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = 1 + 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3} = 10 + 6\sqrt{3} \\(x-1)^3 &= x^3 - 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 - 1^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1\end{aligned}$$

Также в ходу формулы **суммы кубов** и **разности кубов:**

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 + b^3 \\(a-b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 - b^3\end{aligned}$$

Примеры:

$$\begin{aligned}(x+2)(x^2 - 2x + 4) &= x^3 + 2^3 = x^3 + 8 \\(2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2) &= (2x)^3 - y^3 = 8x^3 - y^3\end{aligned}$$

Первые три формулы этого параграфа (квадраты) желательно помнить наизусть и сразу видеть возможность их применения. Впрочем, если что-то позабылось, то все эти формулы легко вывести с помощью **правила перемножения сумм**.

➤ Как представить сумму в виде произведения?

Это обратное действие, и самый простой случай – вынесение **общего множителя** за скобки: $x^2 - 2x = x(x - 2)$, $ab + b = (a + 1)b$, $3xyz^2 + yz = yz(3xz + 1)$.

Общий множитель можно найти даже там, где это совсем не очевидно:

$$2x + 3y = 2\left(x + \frac{3}{2}y\right) \text{ либо } 2x + 3y = 3\left(\frac{2}{3}x + y\right), \text{ подобное вынесение широко}$$

используется в разных задачах высшей математики.

На практике часто приходится раскладывать **квадратный трёхчлен** $ax^2 + bx + c$, но об этом мы поговорим позже, когда будем решать **квадратные уравнения**. Что касается **многочленов** более высоких степеней, то здесь ситуация более грустная – многие из них не удастся разложить на множители, однако если вы заранее знаете или «подозреваете», что это возможно, то нужно использовать такую схему: $a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d)$.

$$\text{Например: } x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = x^2(x - 2) + 3(x - 2) = (x^2 + 3)(x - 2)$$

Ну и, конечно же, не «зееваем» **формулы сокращенного умножения**, таки обведу их:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$	$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$
	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Тренируемся:

Задание 3

а) Привести подобные слагаемые:

$$1 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 5 - 3\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 7, \quad a(1 + b) - ab^2 - (1 + ab), \quad 3\pi + 2\pi x - \pi(1 - x)$$

б) Раскрыть скобки: $\frac{1}{2}x(x - 2x^2)$, $(xy + 1)(1 - \sqrt[3]{x})$, $x(x + 1)(x - 2)$, $(x - 1)(x - \sqrt{x} + 2)$,

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2, \quad (\sqrt{2}x + 1)^2, \quad (x - 2)(x + 1)(2x + 4), \quad (2x + 3y)^3, \quad (x^2 + x + 1)(x - 1)$$

в) Доказать, что $(a - b)^2 = (b - a)^2$. Вывести формулу для $(a + b)^4$ и $(a - b)^4$.

г) Разложить на множители: $a^3 - 3a^2$, $x^2y + xy^2$, $x^2 - 2$, $x^2 + 4x + 4$, $9x^2 - 6x + 1$, $x^3 + x^2 - x - 1$, $x^3 + 8$, $x - x^4$, $8x^3 - 12x^2y - y^3 + 6xy^2$

д) Упростить дроби: $\frac{x^2 + 2x}{x\sqrt{x}}$, $\frac{2ab^2}{a^2 - 5ab}$, $\frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$, $\frac{2x + 4}{x^3 - 4x}$, $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

Ваши ответы могут отличаться от моих перестановкой слагаемых и множителей.

1.7. Свойства степеней и корней

Быстренько вспоминаем, что такое *степень* – это свёрнутая запись произведения:

$$x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{k \text{ раз}}, \text{ при этом } x \text{ называется } \textit{основанием} \text{ степени, а } k - \textit{показателем}$$

степени или тоже *степенью*. Особый случай: $x^0 = 1$, если $x \neq 0$.

Повторим важные свойства степеней. Некоторыми из них мы уже всюду пользовались, в частности:

Для того чтобы возвести в степень произведение, нужно возвести в эту степень **каждый** множитель: $(xy)^k = x^k y^k$. Правило работает для любого количества множителей.

$$\text{Например: } (2a)^2 = 2^2 a^2 = 4a^2, \quad (-3x)^3 = (-3)^3 x^3 = -27x^3, \quad \left(\frac{2y}{3}\right)^2 = \frac{2^2 y^2}{3^2} = \frac{4y^2}{9} \text{ и т.п.}$$

Следующее очевидное свойство следует из определения степени:

Чтобы умножить степени с одинаковыми основаниями, нужно основание оставить таким же, а показатели **сложить**: $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$.

! Не путать с «похожими» ситуациями! Для разных оснований $x^a \cdot y^b$ – правило **не работает!** Для суммы $x^a + x^b$ – тоже нет!

Например: $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$, $x^2 \cdot x^5 \cdot x^{10} = x^{17}$, $e^x \cdot e = e^x \cdot e^1 = e^{x+1}$, при этом степень может быть и «навороченной»: $(x+1)^2 (x+1)^3 = (x+1)^5$, $x^{x^2+1} \cdot x^{x+2} = x^{x^2+1+x+2} = x^{x^2+x+3}$ – важно только, чтобы у них были одинаковые основания.

Чтобы возвести степень в степень нужно перемножить показатели: $(x^a)^b = x^{b \cdot a}$

Примеры: $(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8$, $(x^3)^5 = x^{15}$, $((x^2+1)^2)^2 = (x^2+1)^4$ и более замысловатые, но такие же естественные: $(e^{3x})^2 = e^{2 \cdot 3x} = e^{6x}$, $\left(\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{x+1}\right)^3 = \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3 \cdot (x+1)} = \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x+3}$.

При переносе степени из знаменателя в числитель (или наоборот) у показателя следует сменить знак: $\frac{1}{x^k} = x^{-k}$

Да, показатель степени может быть и отрицательным! Например: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} = 2^{-1}$.

Числа a и a^{-1} ($a \neq 0$) называют *взаимно обратными*, их произведение равно: $a \cdot a^{-1} = 1$.

Другие примеры: $\frac{1}{10^3} = 10^{-3}$, $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $\frac{1}{(x+5)^{10}} = (x+5)^{-10}$, $\frac{1}{e^{x+1}} = e^{-(x+1)}$, ну и можно

ещё немножко поизвращаться: $5 = 5^1 = \frac{1}{5^{-1}}$, $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$, такое тоже встречается ☺.

Следующее свойство вытекает из предыдущих:

Деление степеней с одинаковыми основаниями: $\frac{x^a}{x^b} = x^a \cdot x^{-b} = x^{a+(-b)} = x^{a-b}$

Например: $\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$, $\frac{x^3}{x^4} = x^{3-4} = x^{-1}$ и если присмотреться, то это обычное сокращение дроби: $\frac{3^7}{3^5} = \frac{3^5 \cdot 3^2}{3^5} = 3^2$, $\frac{x^3}{x^4} = \frac{x^3}{x \cdot x^3} = \frac{1}{x}$.

Разумеется, **все правила работают и в обратном направлении**, только что вот я «расщепил» степень на множители: $3^7 = 3^{5+2} = 3^5 \cdot 3^2$. Довольно часто приходится выделять степень в степени: $x^6 = (x^3)^2$, $(x-1)^4 = ((x-1)^2)^2$, а также «сбрасывать» степень в знаменатель: $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, $(2x+1)^{-1} = \frac{1}{2x+1}$ и тому подобное.

Но и это ещё не все секреты! На самом деле **корень – это тоже степень**:

Радикал (корень) можно записать в виде $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n}$ – обыкновенная положительная дробь ($n \geq 2$). При $n = 2$ получается квадратный корень: $\sqrt{x^m} = x^{\frac{m}{2}}$. Если же дробь отрицательна, то речь идёт о корне, который находится в знаменателе: $x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$, таким образом: $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}}$.

Обращаю ваше внимание, что здесь не проводится никаких алгебраических действий: $\sqrt[n]{x^m}$ и $x^{\frac{m}{n}}$ – это две разные ЗАПИСИ одного и того же корня.

Например: $\sqrt{x} = \sqrt{x^1} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{(x-1)^5} = (x-1)^{\frac{5}{4}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}}$

и давайте что-нибудь страшненькое: $\frac{1}{\sqrt[7]{(x+\ln 3x)^4}} = \frac{1}{(x+\ln 3x)^{\frac{4}{7}}} = (x+\ln 3x)^{-\frac{4}{7}}$.

Корень $\sqrt[n]{x^m}$ часто записывают в виде $x^{\frac{m}{n}}$ для того, чтобы с комфортом взять от него производную или интеграл. И, кроме того, это **мощнейший инструмент для перемножения «разношёрстных» степеней и корней**, поскольку **рассмотренные выше свойства работают и для дробных показателей**:

$x\sqrt{x} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$, после чего результат обычно снова представляют в виде корня: $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$ (с помощью той же формулы $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$).

Главное, уметь **приводить дроби к общему знаменателю**:

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = x^{\frac{2}{4} + \frac{1}{4}} = x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt{x} = x^{-\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = x^{-\frac{2}{6} + \frac{3}{6}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x},$$

так же легко выполняется *почленное деление* числителя на знаменатель:

$$\frac{\sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} = x^{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}} = x^{\frac{8}{6} \cdot \frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4}} = x^{\frac{5}{6}} + 2x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[6]{x^5} + \frac{2}{\sqrt[4]{x}}$$

и **приведение к общему знаменателю**:

$$1 + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1 \cdot \sqrt{x} + 2 - 3 \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + 2 - 3\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} - \text{полученный результат как раз}$$

можно проверить с помощью почленного деления.

Теперь повторим факты, которые касаются именно корней:

Если n – *чётное* число, бОльшее нуля, то корень $\sqrt[n]{x}$ определён **только для неотрицательных значений** x ; если n – *нечётное* число, бОльшее единицы, то корень определён **для всех** x . Борода: \sqrt{x} , и ещё одна: $\sqrt[3]{x}$.

Корни вида $\sqrt[n]{x^m}$ ($m \geq 2$, $m \neq n$, m не делится на n), определены **только для неотрицательных значений** x (вне зависимости от того, чётное n или нечётное), например: $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt{x^3}$, $\sqrt[10]{x^6}$ и тому подобное.

Вы спрОсите, а что не так с корнем $\sqrt[10]{(-1)^6}$? Вроде всё хорошо: $\sqrt[10]{(-1)^6} = \sqrt[10]{1} = 1$. А дело вот в чём: показатель $\frac{6}{10}$ можно записать в виде *несократимой дроби* $\frac{3}{5}$, и тогда $\sqrt[5]{(-1)^3} = \sqrt[5]{-1} = -1$. Но дроби $\frac{6}{10}$ и $\frac{3}{5}$ задают одно и то же число! Во избежание этого парадокса и принято считать, что такие корни определены лишь для $x \geq 0$. Далее:

Если m делится на n , то корень $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x^{k \cdot n}}$ определён **для всех значений** x , при этом $\sqrt[n]{x^{k \cdot n}} = |x^k|$, если n *чётное* и k *нечётное*, и $\sqrt[n]{x^{k \cdot n}} = x^k$ – в других случаях.

В частности, при $m = n$: $\sqrt[n]{x^n} = |x|$, если n – *чётное* и $\sqrt[n]{x^n} = x$, если n – *нечётное*.

Самый популярный кадр: $\sqrt{x^2} = |x|$, например: $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$ – как мы помним, **модуль** уничтожает возможный знак «минус». А вот здесь модуль не нужен: $\sqrt{x^4} = x^2$ – поскольку «икс квадрат» и так неотрицателен. К слову, при *частичном вынесении* модуль тоже не нужен: $\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \cdot x} = x\sqrt{x}$, ибо отрицательным здесь «икс» быть не может.

Другие примеры: $\sqrt[3]{x^3} = x$, $\sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^2} = x\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt[5]{x^{13}} = \sqrt[5]{x^{10} \cdot x^3} = x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3}$ и т.п.

Следует добавить, что все перечисленные факты справедливы и в том случае, если корень расположен в знаменателе.

Среди «вычислительных» свойств наиболее важны следующие, и ими мы тоже пользовались:

$$\text{Если } x \geq 0, y \geq 0, \text{ то } \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}, \text{ и если } y \neq 0, \text{ то } \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Если множители отрицательны, то возможны варианты. Так, корень $\sqrt{(-1) \cdot (-2)}$ «расщеплять» **нельзя**. Но вот с корнем $\sqrt[3]{(-1) \cdot (-2)}$ это вполне себе «прокатывает».

Другие практически значимые свойства:

Для натуральных k, m, n и $x \geq 0$ справедливо следующее:

$$\sqrt[k \cdot n]{x^{k \cdot m}} = \sqrt[n]{x^m} \text{ (сокращение)}, \text{ а также: } \sqrt[n \cdot m]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} \text{ и } (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}.$$

Последние два факта элементарно выводятся из свойства $(x^a)^b = x^{b \cdot a}$.

Примеры: $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, $\sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[2]{\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5}$, $(\sqrt[4]{10})^3 = \sqrt[4]{10^3}$, впрочем, в высшей математике эти действия приходится выполнять не так часто.

И ещё одно свойство, даже не свойство, а некоторая **неожиданность**, с которой сталкиваются пионеры: если мы извлекаем корень из числа $0 < a < 1$, то результат будет **больше** этого числа, например: $\sqrt{0,25} = 0,5$, $\sqrt[3]{0,7} \approx 0,89$. И, наоборот, если число $a > 1$, то результат будет **меньше**, например: $\sqrt{1,1} \approx 1,05$, $\sqrt[3]{5} \approx 1,71$ (что более «естественно»).

Кроме того, есть и другие свойства, но они не особо актуальны в массовой практике, порешаем лучше примеры:

Задание 4

а) Упростить: $x^2 \cdot (x^3)^4$, $\frac{(2xy^2)^3}{4x^2}$, $3ab^2 \cdot (ab)^{-2}$, $\frac{e^{x^2} \cdot e^{-x}}{e^2}$, $(e^{x^2})^2$, $(2^x)^{\frac{1}{x}}$, x^{x^x}

б) Выполнить действия и записать результат в виде корня:

$$\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2}, \quad \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}}, \quad x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^5}, \quad \frac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x}}{x}.$$

в) Разделить почленно: $\frac{2x + \sqrt{x}}{x^2}$, $\frac{1 - x + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}$, $\frac{x\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3} - 2x}{x^3\sqrt{x}}$

г) Привести к общему знаменателю: $\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x(x+1)}$, $\frac{3}{2\sqrt[3]{x}} + \frac{5}{4\sqrt[4]{x}}$, $\frac{3}{x} + \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$

д) Преобразовать: $\sqrt[6]{36}$, $\frac{\sqrt{x^5}}{x}$, $\sqrt[4]{x^9}$, $\sqrt{8x^6}$, $\sqrt[3]{(-x)^3}$, $\sqrt{\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}}$, $(\sqrt[4]{(x^2+1)^3})^{\frac{4}{3}}$

Решения и ответы в конце книги.

1.8. Прогрессии

Под **прогрессией** понимают **упорядоченный список** (*последовательность*) чисел, в котором есть определённая закономерность. Этот список может быть конечным или бесконечным.

➤ Арифметическая прогрессия

Это последовательность с равными расстояниями между соседними числами, например:

$-8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, 27, \dots$ – каждый следующий член данной прогрессии на 5 больше предыдущего. Это расстояние называют **разностью** арифметической прогрессии.

Чтобы задать *арифметическую прогрессию* достаточно указать её первый член $a_1 = -8$ и разность $d = 5$. «Энный» член определяется формулой $a_n = a_1 + d(n-1)$. Найдём, скажем, двадцатое число в списке: $a_{20} = -8 + 5 \cdot (20-1) = -8 + 5 \cdot 19 = -8 + 95 = 87$.

Чтобы найти сумму *первых «эн» членов* $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, их, конечно, не нужно складывать на калькуляторе ☺, для этого тоже есть формула: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. Найдём, например, сумму первых пятидесяти членов. Сначала по той же формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ определяем пятидесятый член: $a_{50} = -8 + 5 \cdot 49 = -8 + 245 = 237$, и с суммой никаких проблем: $S_{50} = \frac{-8 + 237}{2} \cdot 50 = 229 \cdot 25 = 5725$.

Кроме того, легко составить комбинированную формулу $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ и воспользоваться ей: $S_{50} = \frac{2 \cdot (-8) + 5 \cdot 49}{2} \cdot 50 = (-16 + 245) \cdot \frac{50}{2} = 229 \cdot 25 = 5725$

➤ Геометрическая прогрессия

Наверняка вы слышали выражение, что что-то растёт в геометрической прогрессии. Это означает очень быстрый рост – рост в разЫ. А если это что-то в геометрической прогрессии убывает, значит, оно со стремительным ускорением стремится к нулю.

Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность, первый член которой $b_1 \neq 0$, а каждый последующий получается умножением предыдущего на некоторое число $q \neq 0$. Это число называют **знаменателем** геометрической прогрессии.

Если $b_1 > 0$ и $q > 1$, то прогрессия является **растущей**. Например:

$2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, \dots$ – здесь каждый следующий член получен умножением предыдущего на 3. *Знаменатель* прогрессии определяется элементарно – делим любой член (кроме первого) на предыдущий: $q = \frac{18}{6} = 3$.

Если же $-1 < q < 1$, то прогрессия **убывает**: $6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$ – здесь каждый следующий член получен умножением предыдущего на $q = \frac{1}{2}$.

Если $q < 0$, то прогрессия будет **знакопередающей**, например:

$$1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}, -\frac{32}{243}, \dots \quad \left(q = -\frac{2}{3} \right)$$

$$-3, 6, -12, 24, -48, 96, \dots \quad (q = -2)$$

Любой член геометрической прогрессии легко определить по формуле $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.
Найдём, например, 10-й член последней прогрессии: $b_{10} = -3 \cdot (-2)^9 = -3 \cdot (-512) = 1536$.

Сумма *первых n членов* геометрической прогрессии рассчитывается по формуле:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}, \text{ обратите внимание, что для этого не нужно знать } b_n \text{ (« n -ый» член)}$$

В качестве примера вычислим сумму $2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486 + 1458$. У этой прогрессии $b_1 = 2$, $q = 3$, и подсчитываем мы сумму $n = 7$ членов:

$$S_7 = \frac{2 \cdot (1 - 3^7)}{1 - 3} = \frac{2(1 - 2187)}{-2} = -(-2186) = 2186$$

Однако особый интерес представляет **бесконечно убывающая** геометрическая прогрессия. Это прогрессия бесконечным количеством членов и основанием $-1 < q < 1$, пример уже был:

$$6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots - \text{члены такой прогрессии стремятся к нулю.}$$

Но главная «фишка» состоит в том, что сумма бесконечного количества членов... равна *конечному* числу! И особо приятно, что для расчёта этой суммы существует очень простая формула: $S = \frac{b_1}{1 - q}$. В нашем примере $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{2}$, и мы счастливы:

$$S = 6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \dots = \frac{6}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 6 \cdot 2 = 12 - \text{главное, правильно упростить}$$

трёхэтажную дробь.

Символические задачки для самостоятельного решения:

Задание 5

а) Вычислить сумму арифметической прогрессии (2 штуки):

$$8 + 15 + 22 + 29 + \dots + 302, \quad 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$$

б) Вычислить сумму геометрической прогрессии (3 штуки):

$$1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81} \quad 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{128}, \dots \quad \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \dots$$

Решения с комментариями в конце книги.

2. Уравнения и неравенства

Сначала одно, затем другое:

2.1. Понятие уравнения. Простейшие примеры

Уравнение – это **равенство**, которое содержит переменную. Исторически они появились в ходе решения реальных задач, например: *Петя дал Маше 3 яблока, после чего у него осталось 5 яблок. Сколько яблок было у Пети?* Пусть у Пети было x яблок, тогда:

$$x - 3 = 5$$

Любое уравнение состоит из **левой части**, **правой части** и знака «равно».

Корень уравнения – это ТАКОЕ значение переменной, которое обращает уравнение в **верное числовое равенство**. Очевидно, что корнем нашего уравнения является $x = 8$ (*яблоко было у Пети*) – при подстановке этого значения получается:

$$8 - 3 = 5$$

$$5 = 5 \text{ – верное числовое равенство.}$$

Также говорят, что значение $x = 8$ **удовлетворяет** данному уравнению. Все остальные значения «икс» корнями не являются – они, попросту говоря, «не подходят». Подставим, например, десять:

$$10 - 3 = 5$$

$7 = 5$ – в результате получено **неверное** числовое равенство, следовательно, значение $x = 10$ не является корнем уравнения $x - 3 = 5$.

Решить уравнение – это значит найти ВСЕ его корни или доказать, что их не существует.

Да, уравнение может иметь 2, 3, 4 и даже бесконечное количество корней. Или не иметь их вовсе.

Так, уравнение $x(x - 2) = 0$ имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ – каждое из этих значений обращает уравнение в верное равенство.

А вот это уравнение имеет бесконечно много корней:

$$(-1)^n = 1, \text{ а именно корнями являются все чётные числа: } n = \{ \dots - 4, -2, 0, 2, 4, \dots \}$$

Ещё одно особое уравнение:

$$0 \cdot x = 0 \text{ – ему удовлетворяет вообще любое значение «икс»}.$$

Теперь противоположные примеры:

$x^2 = -1$ – это уравнение не имеет действительных корней, так как любое действительное число в квадрате – неотрицательно.

$3^x = 0$ – здесь тоже нет корней – по той причине, что положительное число в любой действительной степени – положительно.

2.2. Преобразование уравнений

В этом параграфе мы поговорим о том, что можно делать с уравнениями, а чего делать нельзя. И что можно, но осторожно. Весьма содержательный пример встретился в Задании 5, где уравнение как раз возникло в ходе решения конкретной задачи:

$$302 = 8 + 7(n - 1)$$

В любой части уравнения (и слева, и справа) **можно выносить множители за скобки и скобки раскрывать**:

$$302 = 8 + 7n - 7$$

В любой части **можно приводить подобные слагаемые**:

$$302 = 1 + 7n$$

Части уравнения можно менять местами, они абсолютно равноценны:

$$1 + 7n = 302$$

Любое слагаемое можно перенести в другую часть, сменив у него знак:

$$7n = 302 - 1$$

$$7n = 301$$

Обе части можно умножать / делить на одно и то же число, отличное от нуля:

$$\frac{7n}{7} = \frac{301}{7}$$

$$n = 43$$

Выполненные преобразования являются **равносильными** – они никак не влияют на переменную и корни уравнения. Но мы могли допустить ошибку в вычислениях, и поэтому **обязательно выполняем проверку**: подставим найденное значение $n = 43$ в исходное уравнение $302 = 8 + 7(n - 1)$:

$$302 = 8 + 7(43 - 1)$$

$$302 = 8 + 7 \cdot 42$$

$$302 = 8 + 294$$

$302 = 302$ – в результате получено верное равенство, значит, $n = 43$ действительно является корнем данного уравнения. И здесь я хочу сформулировать **вторую практическую аксиому**:

Если что-то можно проверить, то стараемся это проверить

...прямо таки жизненный и даже философский принцип получился ☺. В важных задачах лучше проверять даже устные вычисления – например, с помощью калькуляторов, которые приложены к этому курсу. Ибо никто не застрахован от ошибок по «глюку».

Кроме того, есть многочисленные онлайн сервисы для решения различных задач. Но тут я должен **предостеречь**: 1) они могут работать с ошибками (*а кто их создал?*), 2) машинное решение некоторых задач выглядит вычурно и неуклюже – так не станет решать ни один вменяемый человек, 3) и поэтому ответы могут быть представлены в другом, «нечеловеческом» виде :) Однако для проверки такие сервисы (качественные) во многих случаях годятся.

Следующий момент касается уравнений вида $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (пусть a, b, c и d не равны 0).

Для краткости я буду называть это правило **правилом пропорции**, сформулирую его в вольном стиле: **множители, которые находятся вверху, можно «сбрасывать» на нижний этаж противоположной части. И обратно: множители, которые находятся внизу, можно «поднимать» в числитель противоположной части.**

Крутим-вертим:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a = \frac{bc}{d}, ad = bc, d = \frac{bc}{a}, \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \frac{ad}{b} = c$ и так далее – смотря что вам нужно выразить в той или иной задаче.

Справка: \Rightarrow – значок следствия («из этого следует это»)

На практике часто выполняют «поднятие» множителей – для того, чтобы избавиться от дробей, при этом **особое внимание следует проявить, если «поднимаемый» множитель может обращаться в ноль**. Рассмотрим уравнение:

$$\frac{2x+7}{1+x} = 3$$

Первое действие очевидно – поднимаем сумму на верхний этаж правой части:

$2x+7 = 3(1+x)$, но здесь мы совершили **неравносильное** преобразование. Далее следует иметь в виду, что значение $x = -1$ не может являться корнем уравнения, ибо сумма-то $1+x$ была в знаменателе.

Берём это на заметку и продолжаем. Раскрываем скобки в правой части:

$$2x+7 = 3+3x,$$

после чего собираем все «иксы» в левой части, а константы – в правой, не забывая при переносе слагаемых сменить у них знаки:

$$2x-3x = 3-7,$$

приводим подобные слагаемые:

$$-x = -4$$

и умножаем обе части на -1:

$$x = 4$$

Проверка: подставим найденное значение в исходное уравнение:

$$\frac{2 \cdot 4 + 7}{1 + 4} = 3$$

$$\frac{15}{5} = 3$$

$3 = 3$ – в результате получено верное равенство, значит, $x = 4$ действительно является корнем уравнения $\frac{2x+7}{1+x} = 3$.

Теперь о том, чего делать **нельзя**: нельзя сокращать на множитель, который содержит переменную. Это ведёт к потере корней. **Запишите, запомните, зазубрите!** Так, если мы сократим уравнение $x(x-1) = x(x+2)$ на «икс», то потеряем корень $x=0$ (который обращает уравнение в верное равенство $0=0$).

И даже здесь: $(x^2+1)(\dots) = (x^2+1)(\dots)$ – сокращать на x^2+1 НЕ НАДО – поскольку уравнение $x^2+1=0$ имеет два **комплексных корня**, которые мы потеряем. Хотя это и не принципиально для решения школьных задач, но все равно является дурным тоном.

Итак, множители с переменными не сокращаем!

Обе части уравнения **можно** возвести в степень, но при этом могут появиться **посторонние корни**. Так, чтобы решить уравнение $\sqrt{x+2} = x$ нужно возвести обе его части в квадрат: $x+2 = x^2$, и полученное уравнение $x^2 - x - 2 = 0$ будет иметь два корня: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Однако исходному уравнению удовлетворяет лишь значение $x_2 = 2$, что выясняется прямой подстановкой. Корень же $x_1 = -1$ является *посторонним*, ибо:

$$\sqrt{-1+2} = -1$$

$\sqrt{1} = -1$ – неверное равенство. Этот корень также можно отфильтровать из тех соображений, что *арифметический квадратный корень* неотрицателен: $\sqrt{x+2} = x \geq 0$.

Следует отметить, что посторонних корней может и не оказаться, всё зависит от того или иного примера. Но заморачиваться тут не нужно – подставляем и выясняем!

Кстати, что это за уравнение $x^2 - x - 2 = 0$ и как отыскать его корни? ...Многие вспомнили, что это мегапопулярное:

2.3. Квадратное уравнение

Данное уравнение имеет вид $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – числа, при этом $a \neq 0$.

Начнём с частных случаев. Если коэффициенты «бэ» и «цэ» равны нулю, то уравнение $ax^2 = 0$ можно сократить на «а» и записать его виде $x \cdot x = 0$. Это уравнение имеет два *совпавших* или, как говорят математики, **кратных** корни: $x_1 = x_2 = 0$.

Если нулю равен коэффициент «бэ», то квадратное уравнение принимает вид $ax^2 + c = 0$ и тут две ветки. Если **оба** коэффициента положительны или оба отрицательны, то уравнение имеет два комплексных корня, типичный пример уже был выше: $x^2 + 1 = 0$.

Если же коэффициенты **разных** знаков, то дело сводится к уравнению $x^2 = \frac{c}{a}$, которое

имеет два корня: $x_1 = -\sqrt{\frac{c}{a}}$ и $x_2 = \sqrt{\frac{c}{a}}$. Так, уравнение $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3$ имеет корни $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$, в чём легко убедиться прямой подстановкой.

И, наконец, сладкий случай, когда $c = 0$: $ax^2 + bx = 0$ – выносим «икс» за скобки: $x(ax + b) = 0$ и корни выкатываются на блюдечко с голубой каёмочкой: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$, даже пример приводить неловко :)

Теперь **общий случай** $ax^2 + bx + c = 0$, где все коэффициенты отличны от нуля.
И сразу то самое уравнение: $x^2 - x - 2 = 0$.

Чтобы решить такое уравнение, нужно вычислить **дискриминант** – по **формуле**:

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

На втором шаге извлекаем квадратный корень из дискриминанта:

$$\sqrt{D} = \sqrt{9} = 3$$

Если корень получился «плохим», например $\sqrt{17}$, то без паники. Перепроверьте дискриминант. Если квадратное уравнение появилось в ходе решения задачи, то, возможно, вы допустили ошибку где-то ранее. Но бывает и так, что в условии опечатка либо... так и было задумано! **Потому что в любом случае квадратное уравнение разрешимо и имеет ровно два корня:**

1) Если $D < 0$, то уравнение имеет два *сопряжённых комплексных корня*. Это выходит за рамки школьной программы, но для страждущих я ещё раз поставил ссылку ☺

2) Если $D = 0$, то уравнение имеет два *совпавших* (кратных) действительных корня, которые определяются по формуле $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

3) И, наконец, $D > 0$. Здесь уравнение имеет два действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ – обычно их располагают в порядке возрастания.}$$

В нашем примере:

$$x_1 = \frac{-(-1) - 3}{2 \cdot 1} = \frac{1 - 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ и } x_2 = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Не забываем о проверке! Самостоятельно подставьте найденные значения в уравнение $x^2 - x - 2 = 0$ и убедитесь, что получаются верные равенства.

Следует отметить, что рассмотренный алгоритм формально применим и для любого частного случая, которые мы разобрали в начале параграфа. А в его заключение – **ОЧЕНЬ** важная и обещанная вещь:

В практических задачах часто требуется разложить **квадратный трёхчлен** $ax^2 + bx + c$ **на множители**. Для этого нужно решить уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ и воспользоваться **формулой**:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ где } x_1, x_2 \text{ – корни данного уравнения.}$$

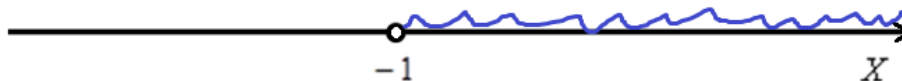
Так, уравнение $x^2 - x - 2 = 0$ имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, и по формуле:

$x^2 - x - 2 = 1 \cdot (x - (-1))(x - 2) = (x + 1)(x - 2)$ – самостоятельно **перемножьте суммы** и убедитесь, что получается исходный трёхчлен. Это, кстати, легко сделать устно.

2.4. Неравенства

Неравенство, как и **уравнение**, содержит две части, но разделены они не знаком $=$ (равно), а одним из следующих знаков: $>$ (больше), или $<$ (меньше), или \geq (больше либо равно), или \leq (меньше либо равно). Первые два неравенства называют **строгими**, а последние два – **нестрогими**.

Решением неравенства обычно являются не отдельные изолированные значения переменной, а целые промежутки значений. Так, неравенству $x > -1$ («икс» больше минус одного) соответствует интервал $(-1; +\infty)$:



Легко проверить, что любое «икс» из этого промежутка удовлетворяет данному неравенству, подставим, например $x = 0$:

$0 > -1$ – в результате получено **верное числовое неравенство**, значит, значение $x = 0$ является одним из решений неравенства $x > -1$.

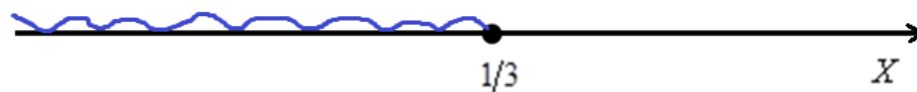
Обратите внимание, что значение $x = -1$ не является решением, поскольку при его подстановке получается «неправда»:

$-1 > -1$ – **неверное числовое неравенство**.

И, естественно, **неверное неравенство** получится при подстановке любого «икс» из незаштрихованного промежутка.

Пример **нестромого** неравенства: $x \leq \frac{1}{3}$ («икс» меньше либо равно одной трети).

Решением этого неравенства является полуинтервал $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$:



Самостоятельно подставьте в неравенство несколько значений «икс» и посмотрите, что будет получаться.

Но то были простейшие случаи – по сути, готовые решения. На практике неравенства приходится решать.

Решить неравенство – это значит найти **ВСЕ** значения переменной, которые обращают его в **ВЕРНОЕ числовое неравенство**.

Чаще всего решением является один или несколько промежутков. Иногда бесконечное количество промежутков. Встречаются и точечные решения, так, решением неравенства $(x+1)^2 \leq 0$ является единственное значение: $x = -1$. А иногда решений может не быть вовсе, например:

$x^2 + 1 < 0$ – это неравенство не имеет решений, да и неравенство $x^2 < 0$ – тоже.

2.5. Действия с неравенствами

С неравенствами можно делать всё то же самое, что и с **уравнениями**, но есть пара отличий. В качестве примера решим неравенство $2 - 3x < 4(2 - x)$.

В любой части неравенства можно выносить за скобки и раскрывать скобки:

$$2 - 3x < 8 - 4x$$

Части неравенства можно менять местами, но тогда у неравенства нужно «развернуть» и значок:

$$8 - 4x > 2 - 3x \text{ — что логично, осмыслите это действие!}$$

Слагаемые можно переносить из части в часть, меняя у них знаки:

$$-4x + 3x > 2 - 8$$

В обеих частях можно приводить подобные слагаемые:

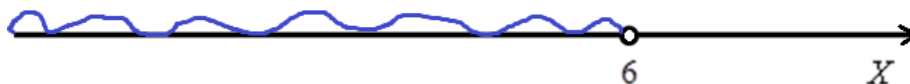
$$-x > -6$$

Обе части неравенства можно умножить на одно и то же число, отличное от нуля, но если это число отрицательное, то значок неравенства следует сменить на противоположный (например, если было $<$, то станет $>$; если было \geq , то станет \leq). В нашем случае обе части неравенства умножаются на -1 :

$$-1 \cdot (-x) < -1 \cdot (-6) \text{ и по итогу получается:}$$

$$x < 6$$

Изобразим решение графически (что часто требуется):



и выполним **проверку**. Подставим в **исходное** неравенство $2 - 3x < 4(2 - x)$ какое-нибудь значение из области решения, проще всего взять $x = 0$:

$$2 - 3 \cdot 0 < 4(2 - 0)$$

$2 < 8$ — в результате получено **верное неравенство**, но на самом деле это ещё ни о чём не говорит. Ибо мы могли решить неравенство неправильно (получить, скажем, $x < 4$) и тогда значение $x = 0$ тоже бы «подошло».

Поэтому для пущей уверенности в неравенство $2 - 3x < 4(2 - x)$ следует подставить «пограничное» значение (см. *чертёж*), а именно $x = 6$:

$$2 - 3 \cdot 6 < 4(2 - 6)$$

$$2 - 18 < 4 \cdot (-4)$$

$-16 < -16$ — обратите внимание, что и слева и справа получилось **одинаковое число**, и это верный признак того, что мы правильно выполнили все преобразования. Итак, в результате получено неверное числовое неравенство, значит, значение $x = 6$ не является решением, как оно и есть на самом деле.

Как решать более сложные неравенства? Например, $x^2 + 2x - 3 > 0$, $\frac{x^2(x+2)}{x-1} \leq 0$?

Для этого существует:

2.6. Метод интервалов

Объяснять буду сразу на конкретном примере: $x^2 + 2x - 3 > 0$. Кстати, все ли до конца понимают то, что нам предстоит сделать? Здесь нужно определить при каких «икс» **квадратный трёхчлен** будет больше нуля. Итак, как решить это неравенство?

На первом шаге нужно решить соответствующее уравнение, а также определить все недопустимые значения «икс». Что касается недопустимых значений, то их здесь нет, поскольку квадратный трёхчлен $x^2 + 2x - 3$ определён для всех «икс». А вот с розыском корней придётся потрудиться – решаем **квадратное уравнение** $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Используя стандартный алгоритм, рассчитываем дискриминант:

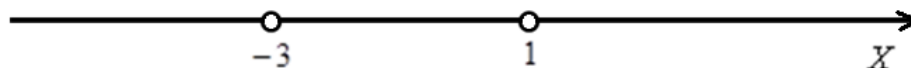
$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 \text{ – отлично, извлекаем корень:}$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{16} = 4 \text{ и находим сами корни:}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 - 4}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Не забываем о проверке! – мысленно подставляем значения $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ в уравнение $x^2 + 2x - 3 = 0$ и убеждаемся, что получаются верные равенства.

На втором шаге отмечаем на числовой прямой все «нелегальные» точки и все корни. Поскольку наше неравенство *строгое*, то корни «выкалываем»:



Теперь нужно определить знаки, в нашем случае трёхчлена $x^2 + 2x - 3$, на полученных интервалах. Как это сделать? Если квадратный трёхчлен больше (либо меньше) нуля в какой-либо точке интервала, то он больше (либо меньше) нуля **и во всех** точках этого интервала. В этом и состоит суть метода интервалов:

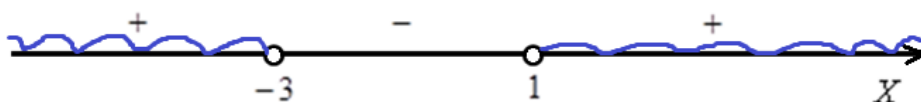
1) Рассмотрим интервал $(-\infty, -3)$. Выберем **любое** значение, принадлежащее этому интервалу, выгодно взять $x = -4$, и подставим его в трёхчлен:

$(-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 3 = 16 - 8 - 3 = 5 > 0$, значит трёхчлен больше нуля **и во всех** точках этого интервала.

2) Рассмотрим интервал $(-3, 1)$ и подставим в трёхчлен наиболее удобное значение $x = 0$: $0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$, значит, трёхчлен меньше нуля **и во всех** точках интервала.

3) И, наконец, интервал $(1, +\infty)$ с подопытной точкой $x = 2$: $2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 5 > 0$, значит, трёхчлен положителен **и во всех** точках этого интервала.

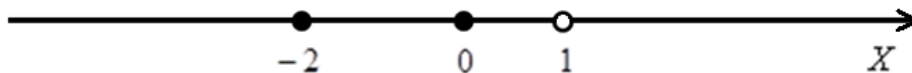
Перечисленные подстановки выполняются устно, а результаты (полученные знаки) отмечают на чертеже. При этом нужные интервалы удобно заштриховать:



Таким образом, решением неравенства являются два интервала, и **ответ** часто записывают в виде *объединения* промежутков: $x^2 + 2x - 3 > 0$, если $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

Используя *метод интервалов*, решим неравенство $\frac{x^2(x+2)}{x-1} \leq 0$ – здесь нужно найти все значения «икс», при которых дробь будет *меньше либо равна* нулю.

Сначала определим недопустимые значения «икс» и корни соответствующего уравнения: $\frac{x^2(x+2)}{x-1} = 0$. И те и другие точки видны невооружённым глазом: у нас есть нелегальное значение $x = 1$, которое обращает знаменатель в ноль, и корни $x_1 = -2$, $x_2 = 0$. Первую точку следует «выколоть», а вот корни «затушевать» – по той причине, что неравенство *нестрогое*:



Теперь определим знаки дроби $\frac{x^2(x+2)}{x-1}$ на полученных интервалах:

1) Подставим значение $x = -3$ из интервала $(-\infty, -2)$:

$$\frac{(-3)^2(-3+2)}{-3-1} = \frac{(-3)^2(-3+2)}{-3-1} = \frac{9 \cdot (-1)}{-4} = \frac{9}{4} > 0, \text{ значит, дробь больше нуля и во всех}$$

точках этого интервала

2) Из интервала $(-2, 0)$ удобно выбрать значение $x = -1$:

$$\frac{(-1)^2(-1+2)}{-1-1} = \frac{1 \cdot 1}{-2} < 0, \text{ значит, дробь меньше нуля и на всём интервале.}$$

3) Из интервала $(0, 1)$ я выберу точку $x = 0,5$:

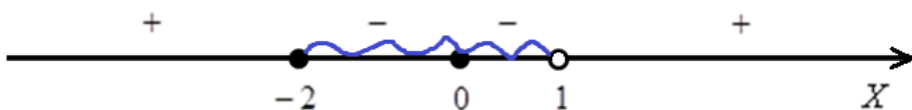
$$\frac{(0,5)^2(0,5+2)}{0,5-1} = \frac{(0,5)^2 \cdot 2,5}{-0,5} < 0, \text{ значит, дробь отрицательна и на этом интервале.}$$

4) И, наконец, из интервала $(1, +\infty)$ возьмём значение поменьше, а именно $x = 2$:

$$\frac{2^2(2+2)}{2-1} > 0 - \text{заметьте, что для определения знака зачастую не обязательно}$$

проводить вычисления или доводить их до конца.

Отмечаем на чертеже знаки и штрихуем нужные нам интервалы:



Ответ: $\frac{x^2(x+2)}{x-1} \leq 0$, если $x \in [-2, 1)$

Что делать, если справа не ноль, а что-то другое? С помощью **преобразований** получить справа ноль ☺. Возможно, потребуется ещё «причесать» левую часть: **привести дроби к общему знаменателю, привести подобные слагаемые** и т.п.

А что делать, если нет ни «выколотых» значений, ни корней? Всё просто – у нас один интервал (вся числовая прямая) и мы подставляем в неравенство **любое** значение «икс». Если получено верное числовое неравенство, то решением является вся числовая прямая. Если же получено неверное неравенство, то неравенство не имеет решений.

Решим, например, неравенство $x^2 + x + 1 < 0$. У соответствующего уравнения $x^2 + x + 1 = 0$ нет корней, поскольку **дискриминант** отрицателен: $D < 0$. И мы просто подставляем в неравенство любое «икс», проще всего взять ноль:

$$0^2 + 0 + 1 < 0$$

$1 < 0$ – в результате получено неверное числовое неравенство, следовательно, неравенство $x^2 + x + 1 < 0$ не имеет решений.

Ну и легко понять, что решением неравенства $x^2 + x + 1 > 0$ будет любое «икс».

Иногда из области рассмотрения следует исключить целые промежутки. Забегая вперёд, приведу неравенство с натуральным логарифмом: $\ln(2x + 3) < 0$. «Начинка» любого логарифма строго положительна: $2x + 3 > 0$, а значит, нам нужно рассмотреть не всю числовую прямую, а лишь участок, где: $2x > -3 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$. Дорешаем **позже!**

2.7. Уравнения и неравенства с модулем

Напоминаю, что **модуль** или *абсолютное значение* числа – это его расстояние от начала координат, и технически всё выглядит так, что модуль «уничтожает» возможный знак «минус»: $|4| = 4$, $|-4| = 4$, $|0| = 0$, $\left|\frac{10}{3}\right| = \frac{10}{3}$, $|-2,5| = 2,5$. Из этого следует, что **уравнение $|x| = a$ имеет два корня: $x_1 = -a$, $x_2 = a$** . Если $a = 0$, то корень один.

Зачем нужен модуль? Он используется в умных фразах ☺. Например: *абсолютное значение критической температуры составляет 50 градусов по Цельсию*. По сути, это высказывание представляет собой уравнение $|t_{крит.}| = 50^\circ$ с решениями $t_1 = -50^\circ$, $t_2 = 50^\circ$. И если эти значения будут превышены *по модулю*, то, видимо, настанет кирдык.

Если «начинка» модуля более сложная, например, $|2x - 1| = 3$, то уравнение разруливается по той же схеме, а именно, нужно решить два уравнения:

$$1) 2x - 1 = -3 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$2) 2x - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x_2 = 2$$

Мысленно подставьте $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ в модуль и убедитесь в том, что это корни.

Если «начинка» модуля *неотрицательна*, то модуль становится ненужным и его можно убрать: $|x^2| = x^2$. Также модуль исчезает при возведении его в квадрат: $|x|^2 = x^2$. Разумеется, ВМЕСТО «икс» здесь тоже может быть сложное выражение.

Кроме того, уравнение может оказаться ещё более сложным и тогда от модуля избавляются прямо по ходу решения. В этом случае оно распадается опять же на две ветки

по формуле: $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$.

ВМЕСТО «икс» может быть сложное выражение, так уравнение $x \cdot |2 - x| = 2x + 5$ раскладывается на следующие части:

$$\begin{cases} x \cdot (2 - x) = 2x + 5, & \text{если } 2 - x \geq 0 \\ x \cdot (-(2 - x)) = 2x + 5, & \text{если } 2 - x < 0 \end{cases}$$

1) Решим первое уравнение, при этом нас устроят **только те корни** (если они вообще есть), которые удовлетворяют условию $2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$ (все поняли *переход?*):

$$2x - x^2 = 2x + 5$$

$x^2 = -5$ – полученное уравнение не имеет действительных корней.

2) Решим второе уравнение: $x \cdot (x - 2) = 2x + 5$, возможные корни которого должны соответствовать условию $2 - x < 0 \Rightarrow x > 2$:

$$x \cdot (x - 2) = 2x + 5$$

$$x^2 - 2x = 2x + 5$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

Вычислим **дискриминант**:

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36$, корень из него $\sqrt{D} = \sqrt{36} = 6$ и найдём корни:

$$x_1 = \frac{4 - 6}{2} = -1, \quad x_2 = \frac{4 + 6}{2} = 5$$

Условию $x > 2$ удовлетворяет только второй корень – самостоятельно подставьте оба значения в исходное уравнение и убедитесь в том, что это действительно так.

Таким образом, уравнение $x \cdot |2 - x| = 2x + 5$ полностью решено, и имеет оно единственный корень $x_2 = 5$.

Бывает, модуль возникает в ходе решения других уравнений. Типичный пример:

$$(x - 2)^2 = 3$$

Да, здесь можно возвести в квадрат, привести подобные слагаемые и решить квадратное уравнение. Но зачем? Есть путь короче! Извлекаем квадратный корень из обеих частей (ещё одно, кстати, **действие** с уравнениями):

$\sqrt{(x - 2)^2} = \sqrt{3}$ и вспоминаем, что **в этом случае** необходимо поставить модуль:

$$|x - 2| = \sqrt{3}$$

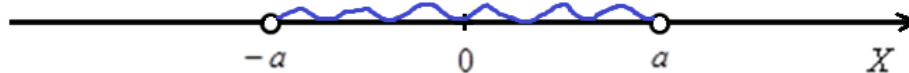
после чего решение входит в знакомую колею:

$$1) x - 2 = \sqrt{3} \Rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{3},$$

$$2) x - 2 = -\sqrt{3} \Rightarrow x_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

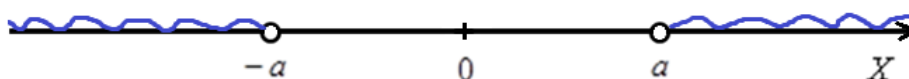
Мысленно подставьте полученные значения в исходное уравнение и убедитесь в том, что они действительно являются корнями.

На очереди **неравенства**. Давайте **прочитаем вслух и вдумаемся в смысл неравенства** $|x| < a$ – «икс» по модулю меньше, чем a . Это означает, что «икс» принимает значения из интервала $-a < x < a$:



Так, высказыванию **нормальная температура по модулю меньше пятидесяти**: $|t| < 50^\circ$, очевидно, соответствует температурный диапазон $-50^\circ < t < 50^\circ$.

Теперь **вдумываемся в неравенство** $|x| > a$: «икс» по модулю больше, чем a . Это означает, что **или** $x < -a$, **или** $x > a$:



И высказывание **температура по модулю больше пятидесяти**: $|t| > 50$ – это и есть тот самый «кирдык», когда она либо $t < -50^\circ$, либо $t > 50^\circ$.

Аналогичные выкладки справедливы для **нестрогих** неравенств: неравенство $|x| \leq a$ раскрывается через двойное неравенство $-a \leq x \leq a$, а неравенство $|x| \geq a$ раскрывается через **совокупность** неравенств $\begin{cases} x \leq -a \\ x \geq a \end{cases}$, то есть «икс» **или** меньше либо равен $-a$, **или** больше либо равен a . ВМЕСТО «икс» может быть сложное выражение.

Типовой пример встречается при измерении физических величин. Представьте, что вы измеряете линейкой некий объект. Очевидно, что при выполнении этого физического опыта будет допущена **абсолютная погрешность** Δx («дельта икс»), но тут есть варианты: вы либо чуть-чуть недомеряете, либо допустите небольшой перебор. Таким образом, погрешность может оказаться как положительной, так и отрицательной. И здесь будет разумным выдвинуть следующее требование: **абсолютная погрешность измерений** Δx **не должна превышать по модулю одного миллиметра**. Эта фраза означает, что $|\Delta x| \leq 1$ или, что то же самое, погрешность должна находиться в пределах $-1 \leq \Delta x \leq 1$.

Справка: абсолютная погрешность – это разность между опытным (измеренным) и истинным значением величины: $\Delta x = x_{\text{опыт}} - x_{\text{ист.}}$.

Другая распространённая задача: **нормативная масса пачки чая составляет 300 гр. Упаковка проходит контроль, если масса отличается от норматива на более чем на 2 гр.**

Подобную формулировку часто записывают с помощью модуля. Обозначим через x массу **произвольной** пачки чая. Очевидно, что разность $x - 300$ может оказаться как положительной, так и отрицательной, и **по модулю** это отклонение не должно превышать двух грамм: $|x - 300| \leq 2$. Или:

$-2 \leq x - 300 \leq 2$, и теперь нам нужно разрешить это неравенство относительно x .

К каждой части двойного неравенства можно прибавить одно и то же число:

$$-2 + 300 \leq x - 300 + 300 \leq 2 + 300$$

$298 \leq x \leq 302$ – допустимые границы массы пачки чая.

Пользуясь случаем, сформулирую ещё одно правило: **все три части двойного неравенства можно умножить на одно и то же число, и если это число отрицательно, то «значки» неравенств следует «развернуть» в противоположную сторону.**

Так, для того чтобы решить неравенство $-4 < -2x \leq 1$, нужно все его части умножить на $-\frac{1}{2}$, и поскольку это число отрицательное, то «значки» неравенств следует «развернуть» в противоположном направлении:

$2 > x \geq -\frac{1}{2}$, после чего переписать результат «справа налево»:

$$-\frac{1}{2} \leq x < 2 \text{ – в привычном порядке, или ещё можно записать: } x \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right).$$

Следует отметить, что правила преобразования двойных неравенств не являются какими-то самостоятельными правилами, они следуют из **действий с «обычным» неравенством**. Но **об этом** позже.

А сейчас долгожданные задания для самостоятельного решения:

Задание 6

а) Решить уравнения (9 штук):

$$x - 2(1 + 2x) = 3 - \frac{1}{2}x, \quad \frac{x + (3x - 2(1 - x))}{4x + 3} = \frac{2}{5}, \quad x^2 = 2(4x + 3) + 3x^2, \quad 2x^2 + 9x - 5 = 0, \\ x^2 - 6x + 9 = 0, \quad x^3 + x^2 = 0, \quad (x - 1)^3 = 8, \quad |5 - 3x| = 1, \quad |x + 1| = x + 2$$

б) Решить неравенства (7 штук):

$$1 - \frac{x}{3} < x + 2, \quad x^2 + 4x + 4 > 0, \quad x^3 - 2x \leq 0, \quad \frac{x}{x^3 + 1} \geq 0, \quad \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 5} < 0, \\ |\sqrt{2}x + 1| \leq 1, \quad |1 - 2x| > \frac{1}{3}, \text{ ответы записать с помощью промежутков } (x \in \dots).$$

С помощью модуля:

в) дать определение правильной и неправильной дроби $\frac{m}{n}$.

г) записать фразу и пояснить её смысл: *деталь признаётся бракованной, если её длина отличается от 20 сантиметров больше, чем на полмиллиметра.*

д) записать фразу и пояснить её смысл: *максимально допустимая относительная погрешность прибора составляет $\pm 0,2\%$.*

Справка: относительная погрешность («дельта малая»): $\delta = \frac{x_{\text{измер.}} - x_{\text{ист.}}}{x_{\text{ист.}}} = \frac{\Delta x}{x_{\text{ист.}}}$ –

это отношение абсолютной погрешности к истинному значению величины. Если δ умножить на 100, то относительная погрешность будет выражена в процентах.

Напоминаю, что эти задачи обязательны для выполнения – они являются неотъемлемой частью курса, поскольку в образцах решения я рассказываю дополнительные и очень важные вещи по теме.

2.8. Понятие системы

Не так давно нам встретилась фигурная скобка $\left\{ \right.$ и в математике, да и в жизни у неё особый смысл – это значок **системы**.

Система – это множество условий, которые должны выполняться **вместе**.
Решение системы (если оно существует) удовлетворяет **ВСЕМ** условиям системы.

Решим, например, *систему уравнений* $\begin{cases} x^2 = 4 \\ (x+2)(x-3) = 0 \end{cases}$. Это означает, что нам нужно найти ТАКИЕ значения «икс», которые удовлетворяют **каждому** уравнению системы, или доказать, что их не существует. Очевидно, что $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ – корни 1-го уравнения, а $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ – корни 2-го уравнения. **Но решением системы является лишь значение $x = -2$** – поскольку оно удовлетворяет **и первому и второму** уравнению.

Если у системы нет решений, то её называют **несовместной**. Так, несовместной является следующая *система неравенств*: $\begin{cases} x < 2 \\ x > 3 \end{cases}$ – совершенно понятно, что «икс» не может быть меньше двух **и в то же самое время** больше трёх.

Система может состоять из разнородных условий: $\begin{cases} x^2 = 4 \\ x > 0 \end{cases}$ – решением этой системы является значение $x = 2$ – только оно удовлетворяет **каждому** условию системы.

Более того в качестве условий могут выступать не только уравнения и неравенства:

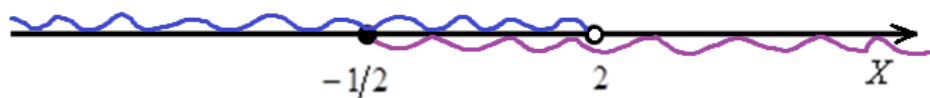
$$\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \text{ делится на } 3 \\ n < 15 \end{cases} \quad \text{– решением этой системы являются числа } \{3, 6, 9, 12\}$$

Ну и, конечно, не забываем о системе физических упражнений, чтобы не «закостенеть» перед монитором ☺. Тридцать отжиманий, двадцать приседаний и пару километров трусцой. А если что-то не выполните, то, увы, это уже будет не система ☹.

Таким образом, с помощью системы можно решить разные задачи! Например, двойное неравенство $-4 < -2x \leq 1$ предыдущего параграфа. По сути, здесь записано два неравенства: $-2x > -4$ и $-2x \leq 1$, причём, они должны выполняться **одновременно**:

$$\begin{cases} -2x > -4 \\ -2x \leq 1 \end{cases} \quad \text{и, решая каждое неравенство, получаем: } \begin{cases} x < 2 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Решение первого неравенства изобразим сверху, а второго – снизу:



Решением системы является **общий** промежуток: $x \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right)$, или, как говорят математики, **пересечение** решений: $(-\infty; 2) \cap \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right) = \left[-\frac{1}{2}; 2\right)$ (\cap – значок пересечения).

Сколько может быть условий в системе? Да сколько угодно.

Сколько может быть решений у системы? Ни одного, одно, несколько, много или бесконечно много ☺. И **решить систему** – это значит найти ВСЕ решения либо доказать, что их нет. Впрочем, иногда нужно найти хоть какое-то решение системы.

Возможно, у вас ещё возник вопрос: а где же те ужасные школьные уравнения и неравенства с корнями и всякими синусами? **Забудьте!** В высшей математике они практически не потребуются. Достаточно повторить лишь самые простые.

2.9. Уравнения и неравенства с несколькими переменными

До сих пор мы рассматривали только одну переменную – «икс». Но совершенно понятно, что уравнение или неравенство может содержать и несколько различных переменных. Например, две. Добавим вторую сакральную букву – «игрек»:

$$y - x = 3$$

Данное уравнение имеет *бесконечно много решений*, например: $x = 0, y = 3$ или $x = 2, y = 5$. Каждая пара значений обращает уравнение в *верное числовое равенство*, а значит, действительно является решением. Возникает вопрос: как отыскать ВСЕ решения? Очень просто. Оставим в левой части **только игрек**, для этого перенесём «икс» направо, сменив у него знак. Да, с уравнением *нескольких переменных* можно делать практически **всё то же самое**:

$$y = x + 3$$

И теперь хорошо видно, что «игрек» на три больше, чем «икс». Таким образом, мы получили **закон**, по которому каждому значению x ставится в соответствие строго определённое значение y . И, пользуясь этим законом, легко найти любую пару решений.

Как и младший брат, уравнение с двумя переменными может иметь единственное решение, например: $x^2 + y^2 = 0$ или не иметь действительных решений вовсе: $x^2 + y^2 = -1$

Популярная система, а-ля $\begin{cases} x + y = 5 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$, может иметь единственное решение,

бесконечно много решений или же не иметь их совсем. Давайте вспомним этот школьный метод решения: из 1-го уравнения выразим «игрек» (*можно «икс»*): $y = 5 - x$, и подставим во 2-е уравнение: $-2x + 5 - x = -1$. Приводим подобные слагаемые:

$$-3x = -6 \Rightarrow x = 2 \text{ – подставим в 1-е уравнение: } y = 5 - x = 5 - 2 = 3.$$

Таким образом, пара $x = 2, y = 3$ является единственным решением системы. Мысленно подставьте эти значения в **каждое** уравнение системы и убедитесь в том, что они «подходят» и там и там.

В курсе высшей математики мы изучим **эти системы** досконально, а также познакомимся **со смыслом и методом решения соответствующих неравенств**: $y - x \leq 3$

и их систем: $\begin{cases} x - y > -5 \\ 2x + y < -7 \end{cases}$, в которых работают **те же «фишки»**. Ну а пока есть дела

понасущнее – возвращаемся к тому самому **закону**, который чудесным образом возник в ходе решения уравнения $y - x = 3$:

3. Функции и графики

Поехали:

3.1. Понятие функции

Функция одной независимой переменной – это **правило** f (зависимость, закон) по которому **каждому допустимому значению** x ставится в соответствие **одно и только одно** значение y . **Стандартная запись**: $y = f(x)$

Переменная x называется **независимой переменной** или **аргументом**.

Переменная y называется **зависимой переменной** и, кроме того, под «игреком» также подразумевают **функцию**.

Таким образом, функцию можно записать так: $f(x) = x + 3$, либо так: $y(x) = x + 3$, либо так: $y = x + 3$, для краткости чаще будем использовать последний вариант. Данное правило увеличивает каждое значение «икс» на три. Например: $f(-1) = -1 + 3 = 2$.

Следующий закон удваивает каждое значение «икс»: $y = 2x$. А вот эта функция возводит «иксы» в квадрат: $y = x^2$. И так далее, различных функций – просто тьма.

Функцию также записывают в виде **уравнения** $F(x; y) = 0$ (стандартный вид). Возьмём ту же функцию $y = x + 3$ и перебросим все члены налево: $y - x - 3 = 0$. В таких случаях говорят, что функция задана **неявно** или **в неявном виде**. Потому что сразу не понятно, что делает эта функция :)

Множество допустимых значений «икс» называют **областью определения** функции – это те значения, для которых определены «игреки». Область определения **обозначают** следующим образом: $D(f)$ или $D(y)$.

Областью определения всех перечисленных выше функций является любое «икс», т.е. все действительные значения: $D(y) = \mathbf{R}$. Но этим может похвастаться далеко не каждая функция. Так, функция $y = \frac{1}{x}$ определена для всех «икс» кроме нуля:

$D(y) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, вместо **значка исключения** (\setminus) здесь также можно использовать **объединение** двух интервалов: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

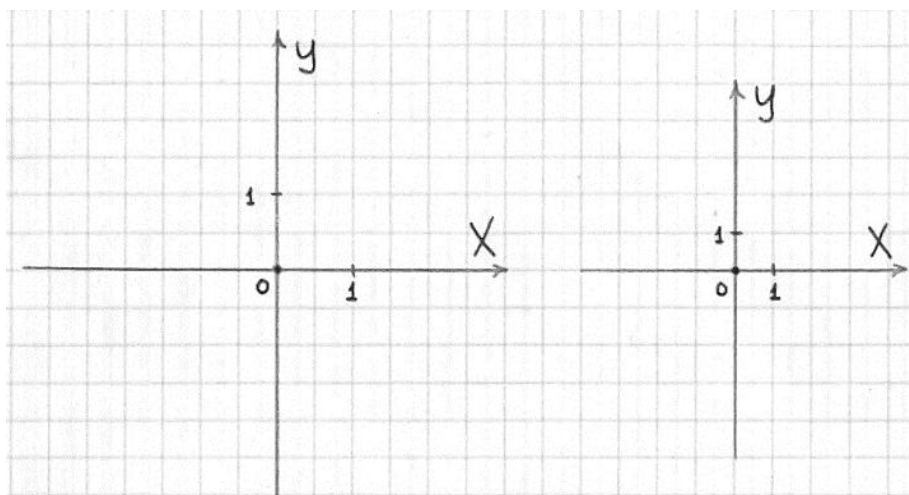
Функция $y = \sqrt{x}$ определена лишь для неотрицательных «икс»: $D(y) = [0; +\infty)$

И в заключение параграфа кратко об **обратной функции**: $x = f^{-1}(y)$ – эта функция выполняет **противоположное** действие. Например, для $y = 2x$ обратной является: $x = \frac{y}{2}$. Так как переменные поменялись ролями (теперь «игрек» независимая переменная), то буквы часто меняют местами: $y = \frac{x}{2}$ и эту функцию также называют обратной для $y = 2x$. Для $y = x^2$ определены две обратные функции: $x = \sqrt{y}$ (если $x \geq 0$) и $x = -\sqrt{y}$ при $x < 0$, переобозначим: $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$. И в **тяжёлых случаях** поступают проще.

3.2. График функции в декартовой системе координат

Это графическое изображение функциональной зависимости. График функции $y = f(x)$ обычно строят в **прямоугольной (декартовой) системе координат**. И посему сначала нужно построить саму систему. Для этого выбираем **начало координат** O и чертим **координатные оси**. Ось OX называется **осью абсцисс**, а ось OY – **осью ординат**. Угол между осями равен 90° (прямой угол), отсюда и название – **прямоугольная система**.

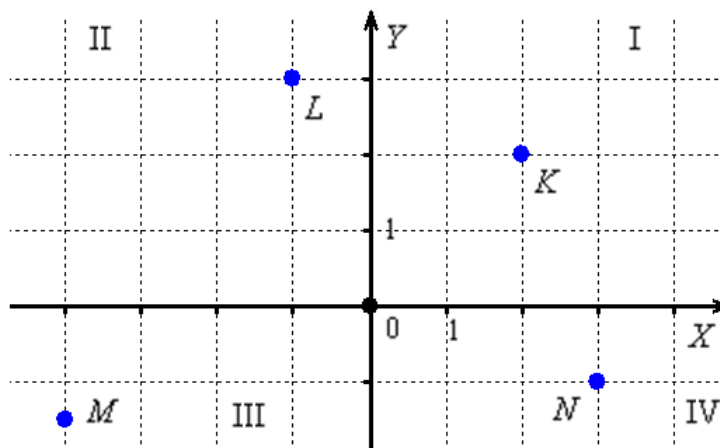
Итак, подписываем оси и задаём размерность по ним. При оформлении чертежа в тетради наиболее популярны следующие масштабы:



Для того чтобы задать масштаб, достаточно нарисовать ноль и две единицы. НЕ НУЖНО «строчить из пулемёта»: ~~... -4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...~~. Ибо **координатная плоскость** – не памятник Декарту, а студент – не голубь ☺.

По возможности старайтесь использовать масштаб: *1 единица = 2 клетки* (чертеж слева). Однако время от времени случается так, что чертеж не вмещается на тетрадный лист – и тогда масштаб уменьшаем: *1 единица = 1 клетка* (чертеж справа). Редко, но бывает, что масштаб чертежа приходится уменьшать (или увеличивать) ещё больше.

И на всякий пожарный повторим, как отмечать точки. **Любая точка плоскости однозначно определяется двумя координатами**, при этом 1-я координата – это **строго «иксовая» координата** (по *оси OX*), а 2-я координата – это **строго «игрековая» координата** (по *оси OY*). В качестве примера отмечу точки $K(2; 2)$, $L(-1; 3)$, $M(-4; -3/2)$, $N(3; -1)$:

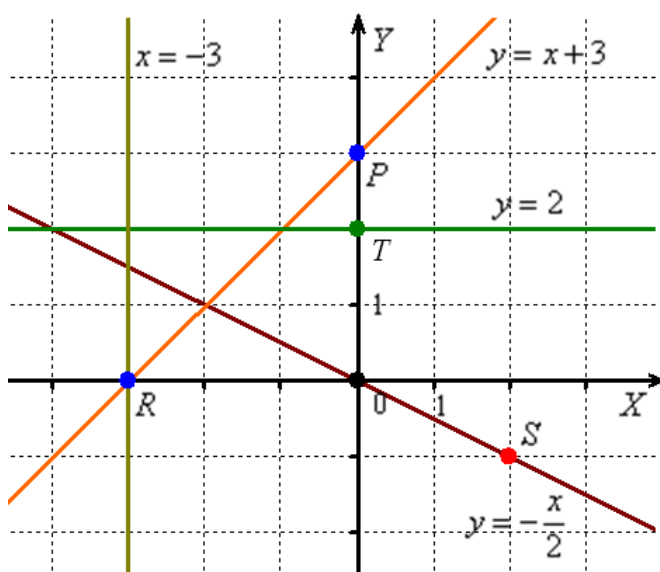


И да, **координатные оси** делят **координатную плоскость** на четыре **координатных четверти**, их я занумеровал **римскими числами** (общепринятый порядок номеров).

На *координатной плоскости* можно построить много чего интересного, но сейчас нас интересуют графики функций. Чтобы построить график $y = f(x)$ обычно требуется найти несколько (или чуть больше) точек, координаты которых удовлетворяют данному закону, отметить эти точки на чертеже и аккуратно соединить линией. При этом **важно знать принципиальный вид графика той или иной функции**. Все функции можно разделить на несколько больших групп, и сейчас мы вспомним основные семейства:

3.3. Линейная функция

Имеет вид $y = kx + b$, где k и b – константы (числа). Графиком *линейной функции* является *прямая*. Для её построения достаточно знать две точки. Так, для функции $y = x + 3$ удобно выбрать значение $x = 0$ и найти $y = 0 + 3 = 3$, и, например, для $x = -3$ вычислить $y = -3 + 3 = 0$. Отмечаем найденные точки $P(0; 3)$, $R(-3; 0)$ на чертеже и аккуратно, по линейке проводим прямую:



Прямая вида $y = kx$ проходит через начало координат и называется *прямой пропорциональностью*. Для её построения нужно найти одну точку.

Так, для прямой $y = -\frac{x}{2}$ удобно выбрать $x = 2 \Rightarrow y = -1$. Отмечаем на чертеже точку $S(2; -1)$ и порядок!

Коэффициент k называется *угловым коэффициентом* прямой. Если $k > 0$, то график идёт «снизу вверх», например, график $y = x + 3$. Если $k < 0$, то график идёт «сверху вниз», например, $y = -\frac{x}{2}$.

Чем больше k *по модулю*, тем круче идёт график, и наоборот, чем k *по модулю* меньше – тем график более пологий. Так, график $y = x + 3$ ($k_1 = 1$) имеет более крутой наклон, нежели график $y = -\frac{x}{2}$ ($k_2 = -\frac{1}{2}$), ибо $|k_1| > |k_2|$.

Если $k = 0$, то получаем *функцию-константу*: $y = b$. Как её понять неформально? «Игрек» ВСЕГДА (при любом «икс») равен одному и тому же числу. Данная прямая параллельна оси OX и проходит через точку $(0; b)$, так, прямая $y = 2$ проходит через точку $T(0; 2)$. **Функция $y = 0$ задаёт ось OX – запомните этот важный факт!**

И остались у нас прямые, параллельные оси OY . Увы, их нельзя задать с помощью функции $y = kx + b$, но зато можно с помощью *общего уравнения прямой*: $Ax + By + C = 0$

Если $B = 0$, то получается уравнение вида $x = a$. Оно задаёт прямую, которая параллельна оси OY и проходит через точку $(a; 0)$. Так, прямая $x = -3$ проходит через точку $R(-3; 0)$. И, в частности, **уравнение $x = 0$ задаёт саму ось OY** .

Если же $B \neq 0$, то из *общего уравнения* $Ax + By + C = 0$ легко выразить функцию:

$$By = -Ax - C \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}, \text{ которая описывает все остальные случаи.}$$

3.4. Степенная функция

На самом деле эту функцию мы начали разбирать в предыдущем параграфе, где «икс» находился в первой степени. Но степень может быть и больше, и меньше или вообще быть дробной. Рассмотрим наиболее распространенные случаи:

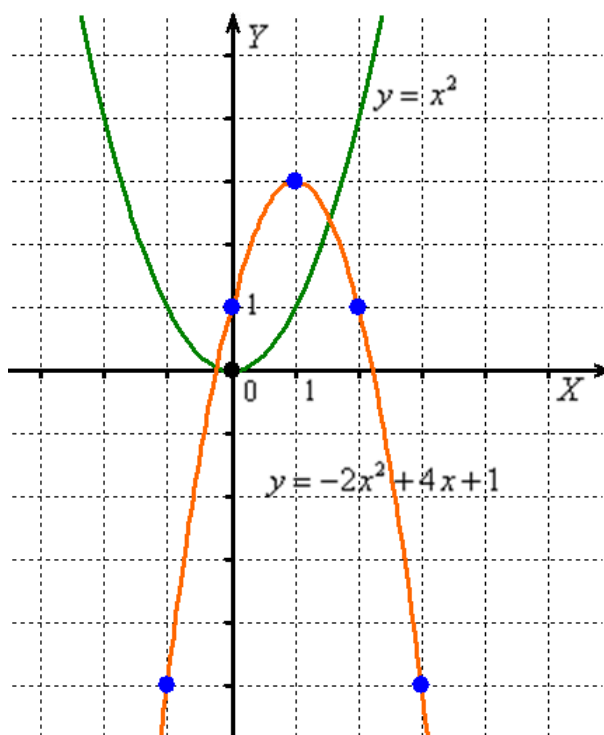
Функция вида $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) называется **квадратичной функцией**, а её график – **параболой**. Если $a > 0$, то ветви параболы «смотрят» вверх, если $a < 0$, то вниз.

Простейшая парабола вам хорошо известна: $y = x^2$ (см. ниже). Обратите внимание, что график этой функции **симметричен относительно оси OY**. Такие функции называют **чётными**. Аналитически чётность выражается условием $f(-x) = f(x)$. Проверим на чётность нашу функцию, для этого ВМЕСТО x подставим $-x$:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x), \text{ значит, функция } f(x) = x^2 - \text{чётная.}$$

В общем случае **квадратичная функция** чётной не является, но симметрию самой параболы никто не отменял и этим удобно пользоваться на практике.

Как быстро построить любую параболу? Очевидно, сначала выгодно найти её вершину, а затем – несколько пар симметричных точек. Посмотрим, как это происходит на примере функции $y = -2x^2 + 4x + 1$:



Сначала находим вершину, для этого **берём производную** и приравняем её к нулю: $y' = (-2x^2 + 4x + 1)' = -4x + 4 = 0$
Найдём корень уравнения: $x = 1$ – тут и находится вершина, её «игрек»:
 $y = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 = -2 + 4 + 1 = 3$

Теперь найдём опорные точки (обычно хватает четырёх), при этом используем симметрию параболы и принцип «влево-вправо»:

$$x = 0 \Rightarrow y = -0 + 0 + 1 = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow y = -2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 = -8 + 8 + 1 = 1$$

Внимание! Для проверки рассчитываем и то, и то значение, они должны совпасть! Не ленимся!

$$x = -1 \Rightarrow y = -2(-1)^2 + 4(-1) + 1 = -2 - 4 + 1 = -5$$

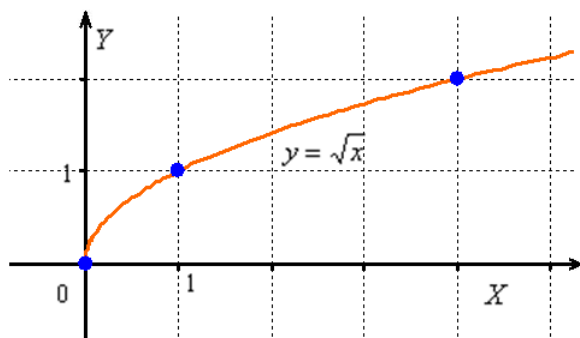
$$x = 3 \Rightarrow y = -2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1 = -18 + 12 + 1 = -5$$

Перечисленные действия обычно выполняются устно или на черновике, а результаты заносятся в табличку:

x	1	0	2	-1	3
y	3	1	1	-5	-5

Осталось отметить найденные точки на чертеже и **АККУРАТНО** соединить их линиями. Рассмотренный алгоритм не является обязательным и в простых случаях вершину параболы можно обнаружить методом «практического тыка», просто перебирая точки. Особенно, если у вас нелады с производными (их рассмотрим в курсе вышмата).

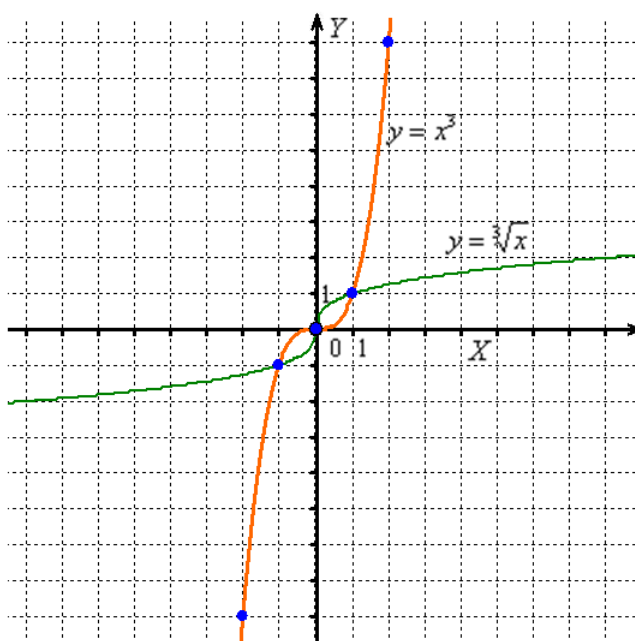
График функции $y = \sqrt{x}$ представляет собой ветвь параболы, которая «лежит на боку»:



Как уже отмечалось, эта функция определена лишь для неотрицательных «икс»: $D(y) = [0; +\infty)$, и для построения графика удобно использовать следующие опорные точки:

x	0	1	4
y	0	1	2

График функции $f(x) = x^3$ называется **кубической параболой**. Данная функция **симметрична относительно начала координат**, и такие функции называют **нечётными**. Аналитически нечётность выражается условием $f(-x) = -f(x)$. Проверим нашу функцию на нечётность, для этого ВМЕСТО x подставим $-x$: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, ч.т.п.



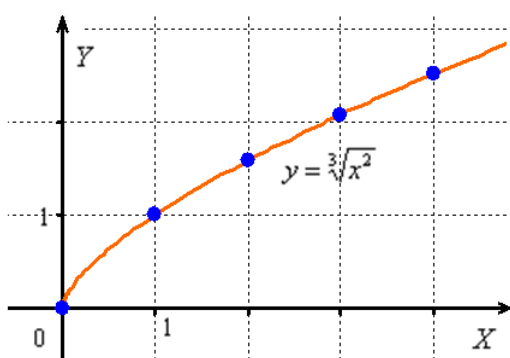
Для построения кубической параболы достаточно отметить точки:

x	0	1	2
y	0	1	8

после чего воспользоваться симметрией или как раз **нечётностью** функции: $f(-1) = -1$, $f(-2) = -8$.

График функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ представляет собой кубическую параболу, «лежащую на боку». В отличие от $y = \sqrt{x}$, эта функция определена для всех «икс»: $D(f) = \mathbf{R}$ и тоже является нечётной, ибо «минус» преспокойно выносится вперёд: $f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$

График произвольного корня $f(x) = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ с *дробным показателем* следует строить, имея в виду **область определения того или иного корня**. Так, функция $y = \sqrt[3]{x^2}$, как и $y = \sqrt{x}$, определена только для неотрицательных «икс»: $D(y) = [0; +\infty)$ и для построения её графика придётся найти несколько значений приближенно:



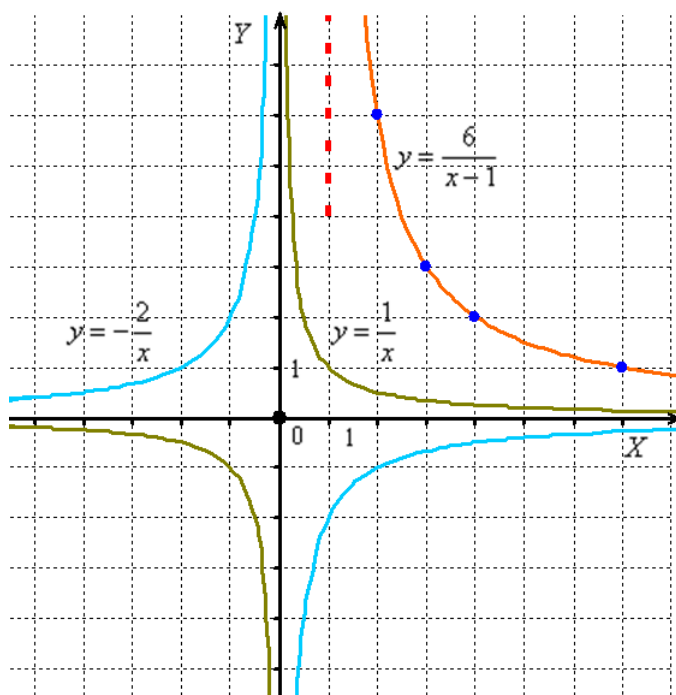
x	0	1	2	3	4
y	0	1	$\sqrt[3]{4} \approx 1,59$	$\sqrt[3]{9} \approx 2,08$	$\sqrt[3]{16} \approx 2,52$

Такие значения на математическом жаргоне называют «плохими», но что поделать....

Данная функция не является чётной или нечётной, поскольку она не определена для отрицательных «икс», а значит, условие $f(-x) = f(x)$ либо $f(-x) = -f(x)$ просто не может выполняться.

График функции $f(x) = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) представляет собой **гиперболу**. Да, это тоже степенная функция! Ибо $\frac{1}{x} = x^{-1}$. Если $a > 0$, то ветви гиперболы лежат в 1-й и 3-й **координатных четвертях**, если $a < 0$, то во 2-й и 4-й (см. примеры на чертеже ниже). Очевидно, что перед нами **нечётная** функция, поскольку: $f(-x) = \frac{a}{-x} = -\frac{a}{x} = -f(x)$.

Данная функция не определена в точке $x = 0$, а координатные оси являются **асимптотами** графика – «залезать на них» **нельзя!** Асимптота, если «на пальцах» – это прямая, к которой график приближается **бесконечно близко**, но не пересекает её.



Как быстро построить график гиперболы? (да и не только её)

Во многих случаях удобно поточечное построение, построим, например, правую ветвь $y = \frac{6}{x-1}$.

Эта функция не определена в точке $x = 1$, и поэтому **вертикальная асимптота** будет именно здесь.

Найдём несколько опорных точек (подбирая удобные значения «икс»):

x	2	3	4	7
y	6	3	2	1

Отмечаем эти точки на чертеже и аккуратно соединяем их линией

Принципиально такую же форму имеют графики $y = \frac{a}{\sqrt{x}}$, $y = \frac{a}{x^2}$, $y = \frac{a}{x^3}$ – только в первом случае гипербола будет иметь одну ветвь, во втором – две ветви, расположенные в 1-й и 2-й координатных четвертях, и третья гипербола будет похожа на $y = \frac{a}{x}$.

Ну и, конечно, **творческие задания**, которые нас ждали!

Задание 7

а) Решить графически **систему уравнений** $\begin{cases} x + y = 5 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$. Догадайтесь сами ;)

б) Построить график $y = |x|$. Вспоминаем, **как раскрывать модуль**.

в) Проверить функции на чётность / нечётность и построить их графики:

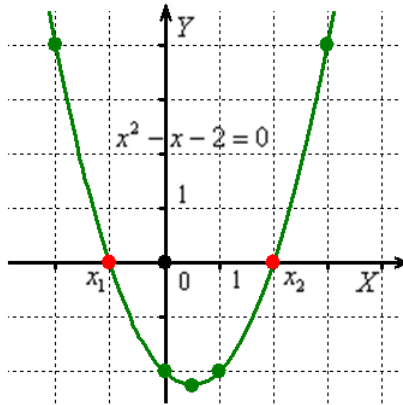
$$f(x) = x^2 - x + 1, \quad f(x) = -\frac{x^2}{2} - 1, \quad f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}, \quad f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x}}, \text{ пожалуй, достаточно.}$$

г) Дано $x^2 + y^2 = r^2$ – уравнение окружности с центром в начале координат радиуса r . Выразить функции, определяющие верхнюю и нижнюю полуокружность, указать их области определения.

3.5. Графическое решение уравнений и неравенств

В [предыдущей главе](#) мы решали уравнения и неравенства *аналитически*, и сейчас вдохнём в эти задачи геометрический смысл. И это вас вдохновит! – это будет просто, это будет круто и это будет красиво! А, главное, чрезвычайно полезно.

Сначала частный случай. Чтобы решить уравнение вида $f(x) = 0$, нужно построить график функции $y = f(x)$ и посмотреть, где он пересекает *ось абсцисс*. Там и находятся корни. Если точек пересечения нет, то уравнение не имеет действительных решений.



Так, при решении [квадратного уравнения](#) $x^2 - x - 2 = 0$ через дискриминант мы получили корни $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, но здесь можно просто построить параболу, и всё понятно без комментариев.

Решением неравенства $f(x) > 0$ являются те промежутки, на которых график $f(x)$ **выше** оси OX , и, наоборот, $f(x) < 0$ – там, где график $f(x)$ **ниже** оси.

Таким образом, вместо того, чтобы вымучивать неравенство $x^2 - x - 2 > 0$ [методом интервалов](#), просто смотрим на график и ответ готов: $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

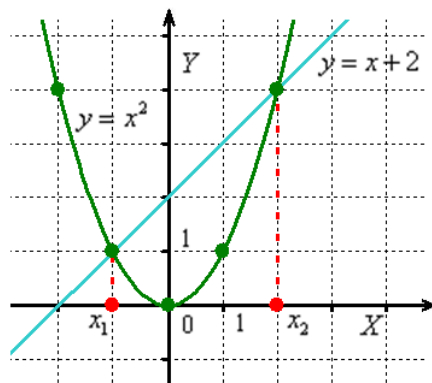
Соответственно, решением неравенства $x^2 - x - 2 < 0$ является интервал $x \in (-1; 2)$.

В случае *нестрогих неравенств* $x^2 - x - 2 \geq 0$, $x^2 - x - 2 \leq 0$ к решениям нужно добавить пограничные точки: $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ и $x \in [-1; 2]$ соответственно.

А если вам не хочется возиться с нахождением опорных точек, «тыкая в них наугад» (ведь параболы бывают большие, размашистые), то есть:

общий случай. Чтобы решить уравнение $f(x) = g(x)$, нужно построить графики $y = f(x)$, $y = g(x)$ и найти их точки пересечения. «Иксовые» координаты этих точек и будут решениями. Если графики не пересекаются, то действительных решений нет.

Таким образом, вместо решения уравнения $x^2 - x - 2 = 0$ с вычерчиванием параболы, представим его в виде $x^2 = x + 2$ и изобразим элементарные графики:



Подчёркиваю ещё раз, что решением являются «иксовые» координаты точек пересечения.

Решением неравенства $f(x) > g(x)$ являются те промежутки, на которых график $f(x)$ **выше** графика $g(x)$, и, наоборот: $f(x) < g(x)$ – там, где график $f(x)$ **ниже** графика $g(x)$.

Так, решением неравенства $x^2 > x + 2$ являются промежутки $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ – поскольку на них парабола расположена **выше** прямой. И, наоборот, решением неравенства $x^2 < x + 2$ является промежуток $x \in (-1; 2)$, так как здесь парабола расположена **ниже** прямой. Аналогично для *нестрогих* неравенств.

Кстати, всем ли понятно, как из общих правил $f(x) = g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$ получаются частные правила для $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$? Элементарно. Это тот случай, когда $y = g(x) = 0$, а *эта функция* задаёт ось OX .

Когда удобно использовать графический метод? Прежде всего, в простых случаях. Так, при решении неравенства $\frac{1}{x} > 0$ проще мысленно представить гиперболу, нежели использовать **метод интервалов**. Где гипербола **выше** оси OX ? На интервале $x \in (0; +\infty)$. Неравенству $\frac{1}{x} < 0$ соответствует левая ветвь, которая лежит **под** осью, на интервале $x \in (-\infty; 0)$. И ещё этот метод хорош для лучшего понимания математики.

Графический способ спасёт в экстремальных ситуациях, например, когда вы позабыли, как решать **квадратное уравнение**, а помощи ждать неоткуда. Используйте приём, описанный выше – вместо уравнения $x^2 - x - 2 = 0$ рассмотрите $x^2 = x + 2$ с двумя простыми графиками, не построить которые – это нужно постараться :)

Иногда графика эффективна в уравнениях «разнородными» функциями. Так, для решения уравнения $x - \sin x = 0$ не существует стандартных аналитических методов, но это не беда. Мысленно представляем график $y = x$ и **график синуса** $y = \sin x$ (о котором позже), после чего сразу понятно, что уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

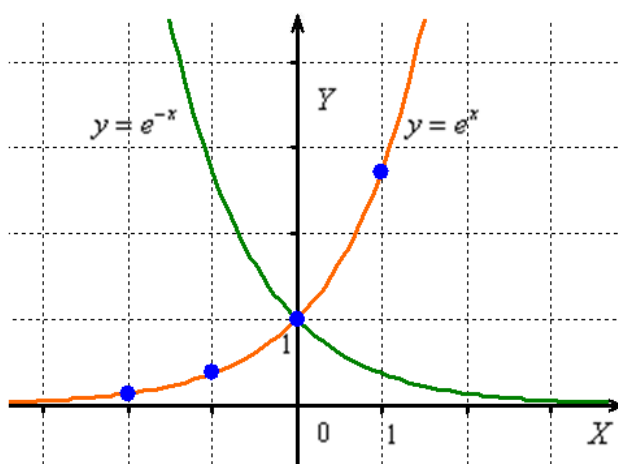
Кстати, в некоторых задачах нужно просто определить количество корней и / или их приблизительное расположение, и на этот вопрос зачастую легко ответит чертёж!

Разумеется, **графики должны быть простыми** – это важнейшее условие применения графического метода. Ибо строить $y = \frac{x^2(x+2)}{x-1}$ для решения $\frac{x^2(x+2)}{x-1} \leq 0$ – затея как-то не очень :) Уж лучше **метод интервалов**.

И после этого невероятно полезного параграфа возвращается к нашим функциям:

3.6. Показательная функция

Данная функция имеет вид $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$, при этом различают два случая – когда *основание* находится в пределах $0 < a < 1$ и когда $a > 1$. Начнём со второго случая и в качестве примера рассмотрим мегапопулярную **экспоненциальную функцию** $y = e^x$.



Напоминаю, что $e \approx 2,7 > 1$ и для построения графика удобно выбрать следующие опорные точки:

x	-2	-1	0	1
y	$e^{-2} \approx 0,14$	$e^{-1} \approx 0,37$	1	$e \approx 2,72$

Наверняка вы слышали выражение «экспоненциальный рост». Это синоним роста в **геометрической прогрессии** – он означает не просто быстрый, а «взрывной» рост. Уже при пяти получаем: $e^5 \approx 148,4$. Таким образом, при увеличении «икс» график **экспоненциальной функции** круто

взмывает вверх, а при уменьшении – *бесконечно близко* приближается к своей *асимптоте* – оси OX . Данная функция **определена** для всех «икс»: $D(y) = \mathbf{R}$ и строго положительна: $y = e^x > 0$, **то есть** полностью лежит **над осью абсцисс**.

Принципиально так же выглядят графики других показательных функций $y = a^x$ с основанием $a > 1$, например, $y = 2^x$, $y = 3^x$ и др. Отличаться они будут крутизной.

График функции $y = e^{-x}$ симметричен графику $y = e^x$ относительно оси OY .

И принципиально так же выглядит график любой показательной функции $y = a^x$ с основанием $0 < a < 1$.

На всякий случай: $y = e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$, т.е. основание функции равно $a = \frac{1}{e} \approx 0,37$.

Выражение «экспоненциальное убывание» означает убывание со стремительным ускорением. И в самом деле, возьмём ту же пятёрку: $e^{-5} \approx 0,0067$ – почти уж у нуля.

Показательная функция не является чётной или нечётной (в обоих случаях), так как для неё не выполнено условие $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$.

И я Вас поздравляю с «экватором»!

Где-то половина школьной программы пройдена! Может даже чуть больше. И теперь они самые:

3.7. Логарифмы и логарифмическая функция

Вам понравится:

➤ Понятие логарифма

Рассмотрим **уравнение** $2^p = 8$, которое задаёт нам вопрос: *в какую степень нужно возвести 2, чтобы получить 8?* На этот вопрос отвечает **логарифм** $\log_2 8$, который равен трём: $p = \log_2 8 = 3$замысловато? Ну не зря же это проходят в старших классах ☺.

$e^p = 1$ – *в какую степень нужно возвести «е», чтобы получить 1?* $p = \log_e 1 = 0$

$10^p = \frac{1}{100}$ – *в какую степень нужно возвести 10, чтобы получить 1/100?*

$\log_{10} \frac{1}{100} = -2$

И вообще, $a^p = b$ – *в какую степень нужно возвести «а», чтобы получить «бэ»?*

Логарифмом числа b по **основанию** a ($a > 0, a \neq 1$):

$\log_a b$ – называется **степень «пэ»** $\log_a b = p$, в которую нужно возвести «а», чтобы получить «бэ».

Из чего следует **основное логарифмическое тождество**: $a^{\log_a b} = b$.

...тождество – это такое железобетонное равенство ☺.

Сама запись $\log_a b$ **читается** как «логарифм «бэ» по основанию «а»», и очевидно, что логарифм определён лишь для положительных «бэ»: $b > 0$ – по той причине, что любое положительное «а» в **любой** действительной степени «пэ»: $a^p = b$ – положительно.

Логарифм по основанию 10 называют **десятичным логарифмом**, и для краткости **обозначают** значком \lg , например: $\lg_{10} 100 = \lg 100$.

Логарифм по основанию «е» называют **натуральным логарифмом** и **обозначают** значком \ln , например: $\log_e 1 = \ln 1$. В высшей математике в ходу именно натуральные логарифмы, и в дальнейшем мы уделим им самое пристальное внимание.

➤ Свойства логарифмов

Как и в случае со **степенями / корнями**, я не буду разбирать все свойства, а остановлюсь лишь на тех, которые имеют большое значение для практики.

Переход к новому основанию: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, причём новое основание «цэ» вы можете выбрать по своему желанию (из доступных вариантов: $c > 0, c \neq 1$), например:

$$\log_3 5 = \frac{\ln 5}{\ln 3}. \text{ Но гораздо чаще встречается частный случай формулы: } \log_a b = \frac{1}{\log_b a},$$

например: $\log_3 5 = \frac{1}{\log_5 3}$. Разумеется, формула работает и в обратном направлении, что

бывает удобным, когда нужно избавиться от знаменателя: $\frac{1}{\lg e} = \ln 10$.

Если $b_1 > 0, b_2 > 0$ то справедливо следующее (и слева направо и справа налево):

$$\log_a b_1 + \log_a b_2 = \log_a (b_1 \cdot b_2)$$

$$\log_a b_1 - \log_a b_2 = \log_a \frac{b_1}{b_2}$$

$$\text{Например: } \log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 (3 \cdot 5) = \log_2 15, \quad \ln 8 - \ln 2 = \ln \frac{8}{2} = \ln 4.$$

Обращаю внимание, что эти действия выполнимы только для логарифмов с одинаковыми основаниями, **не путайте** с «похожими» ситуациями: $\log_2 7 + \log_3 7$,

$\ln 5 \cdot \ln 7$ или $\frac{\lg 2}{\lg 3}$. Однако в последнем случае можно сделать так: $\frac{\lg 2}{\lg 3} = \log_3 2$.

Далее. Для $b > 0$ и любого действительного числа k :

$$\log_a b^k = k \log_a b \quad \textbf{! Не путайте с } \log_a^k b \text{ (логарифмом в степени).}$$

Например: $\ln 2^{50} = 50 \ln 2$ – и это просто волшебство! Ведь это здорово избавиться от 50-й степени! Популярно и обратное действие, особенно, когда нужно выполнить другие упрощения: $3 \lg 2 + \lg 5 = \lg 2^3 + \lg 5 = \lg 8 + \lg 5 = \lg (8 \cdot 5) = \lg 40$

Перечисленные правила можно распространить на отрицательные значения «бэ», но тогда нужно добавить **модули**:

$$\log_a |b_1| + \log_a |b_2| = \log_a |b_1 \cdot b_2|$$

$$\log_a |b_1| - \log_a |b_2| = \log_a \left| \frac{b_1}{b_2} \right|$$

$\log_a b^k = k \log_a |b|$, если k чётное. Например: $\ln x^2 = 2 \ln |x|$ – и равносильность соблюдена, поскольку полученный логарифм тоже определён для отрицательных «икс».

А вот такое преобразование **неравносильно**: $2 \ln x = \ln x^2$, и поэтому здесь следует обязательно указать, что $x > 0$.

В случае иных значений k модуль не нужен: $\ln x^3 = 3 \ln x$, $\ln \sqrt[3]{x^2} = \ln x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \ln x$ – по той причине, что и исходные и полученные логарифмы определены только для положительных значений «икс».

➤ Логарифмирование и потенцирование

Логарифмирование – это перевод чисел или уравнений в *логарифмический масштаб* или, попросту говоря, «навешивание» логарифмов.

Данное действие удобно использовать при работе с астрономическими или микроскопическими числами, особенно, если они находятся в произведении. Так, число $2^{25} \cdot 10^{-100}$ целесообразно упростить, «навесив» на него логарифм, выгодно взять десятичный логарифм: $\lg(2^{25} \cdot 10^{-100}) = \lg 2^{25} + \lg 10^{-100} = 25\lg 2 - 100\lg 10 = 25\lg 2 - 100$ – далее переводим другие числа в тот же масштаб (логарифмируем по основанию десять) и работаем (выполняем действия) с гораздо более удобными значениями.

Логарифмирование незаменимо при решении некоторых *уравнений*, например:

$$5^x = 80$$

Для разрешения этого уравнения относительно «икс» «навесим» на обе его части логарифмы, обычно используют натуральные логарифмы:

$$\ln 5^x = \ln 80$$

в левой части *«сносим» степень*, и порядок:

$$x \ln 5 = \ln 80 \Rightarrow x = \frac{\ln 80}{\ln 5} \approx 2,72$$

и «любительская» проверочка: $5^{2,72} \approx 79,65$, около 80, что и требовалось проверить.

При логарифмировании нужно следить за знаками, так, обе части уравнения (функции) $y = x^2 + 1$ определены и положительны при любом значении «икс», поэтому здесь можно смело логарифмировать: $\ln y = \ln(x^2 + 1)$, получая *равносильное* уравнение.

А вот у функции $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x}$ обе части могут быть меньше нуля, и поэтому здесь нужно

добавить модули: $\ln|y| = \ln\left|\frac{\sqrt{x+3}}{x}\right|$, квадратному корню модуль не нужен: $\ln|y| = \ln\frac{\sqrt{x+3}}{|x|}$.

Однако это действие всё равно *неравносильно* т.к. мы потеряли значение $x = -3$ (почему?). Но это не помеха для решения некоторых задач, например, для нахождения производной, где можно пренебречь даже модулями. Да, а зачем логарифмировать? Чтобы упростить

правую часть: $\ln\frac{\sqrt{x+3}}{|x|} = \ln\sqrt{x+3} - \ln|x| = \frac{1}{2}\ln(x+3) - \ln|x|$.

Потенцирование – это обратная операция, «избавление» от логарифмов.

Предположим юные физики вдоволь нарезвились с вычислениями в *десятичном логарифмическом масштабе*, и хотят перевести результат $3\lg 2 + 12$ обратно. Без проблем:

$10^{3\lg 2 + 12}$, используем *свойства степеней, логарифмов* и *основное логарифмическое тождество*: $10^{3\lg 2 + 12} = 10^{\lg 2^3} \cdot 10^{12} = 10^{\lg 8} \cdot 10^{12} = 8 \cdot 10^{12}$.

Потенцирование используют для того, чтобы выразить функцию *в явном виде*, например: $\ln|y| = \ln 5 + 3\ln|x|$ – «упаковываем» логарифмы в правой части:

$$\ln|y| = \ln 5 + \ln|x|^3$$

$$\ln|y| = \ln 5|x|^3, \text{ после чего просто убираем логарифмы и модули заодно:}$$

$$y = 5x^3$$

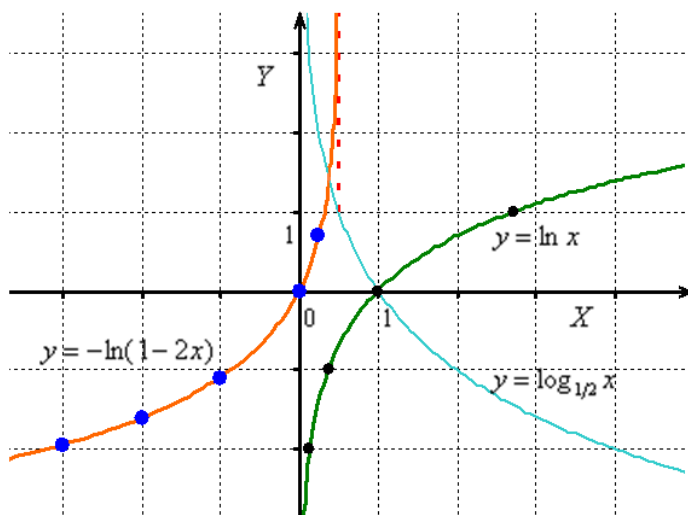
Такие действия выполняют при решении некоторых дифференциальных уравнений

➤ Логарифмическая функция и её график

В логарифмической функции фиксируется основание «а», а значение «бэ» является независимой переменной:

$y = \log_a x$ – данная функция каждому положительному значению «икс» ставит в соответствие **степень «игрек»**, такую, что: $a^y = x$

Таким образом, логарифмическая и **показательная** функция – это две **взаимно обратные функции**, и график логарифма тоже представляет собой показательную кривую, только расположена она по-другому. Так, график *натурального логарифма* $y = \ln x$ имеет следующий вид (**запомните его!**):



Удобные опорные точки:

x	e^{-2}	e^{-1}	1	e
y	-2	-1	0	1

Принципиально так же выглядит график любого логарифма $y = \log_a x$ с основанием $a > 1$, в частности, **десятичный логарифм** $y = \lg x$ ($a = 10$)

Если $0 < a < 1$, то графики оказываются «развёрнутыми наоборот» относительно оси OX , например, $y = \log_{1/2} x$. Но такие логарифмы в высшей математике встречаются довольно редко.

Однако и в том и в другом случае логарифмическая функция $y = \log_a x$ проходит через точку $(1; 0)$, а ось OY является **вертикальной асимптотой** графика.

Если «начинка» логарифма более сложная, то, естественно, график будет видоизменяться и мигрировать вместе с асимптотой. Построим, например, график функции $y = -\ln(1-2x)$. Это удобно сделать по следующей схеме: сначала из уравнения $1-2x=0$ находим **вертикальную асимптоту** $x=1/2$ (оранжевый пунктир на чертеже). Теперь нужно выяснить **область определения функции**. Логарифм определён только в том случае, если его «начинка» **строго больше** нуля: $1-2x > 0$, и **преобразуя** это простое неравенство, получаем, что: $x < \frac{1}{2}$. Найдём затем несколько опорных точек:

x	-3	-2	-1	0	0,25
y	$-\ln 7 \approx -1,95$	$-\ln 5 \approx -1,61$	$-\ln 3 \approx -1,10$	0	$y = -\ln 0,5 \approx 0,69$

и аккуратно соединим их линией. Для вычисления «игреков» удобно использовать калькулятор, например, **Калькулятор**, приложенный к этой книге.

Ещё пример (на чертеже отсутствует): $y = \ln(x^2)$ – график этого логарифма имеет две симметричные относительно оси OY ветви (т.к. функция **чётная**), и эта функция не определена лишь в точке $x=0$. А вот этот логарифм: $y = \ln(x^2 + 1)$ – определён всюду, поскольку $x^2 + 1 > 0$ при любом значении «икс».

Только что рассмотренные функции называют **сложными** или **композиционными** – это функции, в которые «вложены» другие функции: $y = f(g(x))$. В наших трёх примерах под логарифмом оказались **линейная** и **квадратичные** функции.

➤ Уравнения и неравенства с логарифмами

В параграфе о **логарифмировании и потенцировании** мы искусственно «навешивали» логарифмы на обе части уравнения либо избавлялись от них. А сейчас речь пойдёт об уравнениях и неравенствах, где логарифм присутствует **изначально**.

Начнем с простых случаев... и закончим ими:)

Уравнение вида $\log_a h(x) = p$ (p – константа) **очевидным образом** приводится к уравнению $h(x) = a^p$. Например:

$$\log_3 x = 2 \Rightarrow x = 3^2 = 9$$

$$\lg x^2 = -2 \Rightarrow x^2 = 10^{-2} = \frac{1}{100} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{10}, x_2 = \frac{1}{10}$$

ну и давайте что-нибудь посодержательнее:

$$\ln(2x-1) = 0 \Rightarrow 2x-1 = e^0 \Rightarrow 2x-1 = 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

С **геометрической точки зрения** это означает, что график функции $y = \ln(2x-1)$ пересекает график $y = 0$ (ось OX) в точке $x = 1$.

И, конечно, **проверка** – подставим $x = 1$ в левую часть исходного уравнения:

$$\ln(2 \cdot 1 - 1) = \ln 1 = 0 \text{ – в результате получена правая часть, ОК.}$$

Уравнение вида $\log_a h(x) = \log_a e(x)$ тоже разрешимо из естественных соображений: логарифмы с одинаковыми основаниями равны, если $h(x) = e(x)$, при этом корни должны быть ТАКИМИ, чтобы для них выполнялись условия $h(x) > 0, e(x) > 0$. Так, для решения уравнения $\log_3(x+1) = \log_3(3x-1)$ **потенцируем** обе части:

$x+1 = 3x-1$, откуда получаем корень $x = 1$, после чего **обязательно** подставляем его в исходное уравнение: $\log_3(1+1) = \log_3(3 \cdot 1 - 1) \Rightarrow \log_3 2 = \log_3 2$ – верное равенство.

А теперь рассмотрим такое уравнение: $\lg(x^2-1) = \lg(x-1)$, где после избавления от логарифмов всё вроде бы хорошо: $x^2-1 = x-1 \Rightarrow x^2-x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$, однако **корнями эти значения не являются**, т.к. не входят в область определения логарифмов.

Неравенства. Простейшие из них удобно решать **графически**, причём мысленно. Рассмотрим неравенство $\ln x > 0$. Оно предлагает нам определить участок оси OX , где **график натурального логарифма выше** этой оси. ...Вспомнили, взглянули? $x \in (1; +\infty)$. Аналогично, неравенству $\ln x < 0$ соответствует интервал $x \in (0; 1)$, где график логарифма **ниже** оси абсцисс. В случае *нестрогих* неравенств к решениям следует добавить единицу.

И рассмотрим **общий случай** $\log_a h(x) > p$, где «пэ» – произвольная константа. Во-первых, «начинка» логарифма должны быть **строго больше** нуля: $h(x) > 0$. **Это незыблемое условие**, о котором **ни в коем случае** забывать нельзя! Теперь разбираемся с основным неравенством: сначала в правой части искусственно добавляем множитель: $\log_a h(x) > p \log_a a$. Обратите внимание, что $\log_a a = 1$ и статус-кво соблюден. В правой части **поднимаем «пэ» в показатель**: $\log_a h(x) > \log_a a^p$ и дальше следует развилка:

$$\text{если } 0 < a < 1, \text{ то решаем систему } \begin{cases} h(x) > 0 \\ h(x) < a^p \end{cases}, \text{ если } a > 1 \text{ – то систему: } \begin{cases} h(x) > 0 \\ h(x) > a^p \end{cases}.$$

Как видите, в 1-м случае после **потенцирования** знак неравенства следует **сменить на противоположный**.

Неравенство $\log_a h(x) < p$ решается аналогично с финальными системами:

$$\begin{cases} h(x) > 0 \\ h(x) > a^p \end{cases}, \text{ если } 0 < a < 1 \text{ и } \begin{cases} h(x) > 0 \\ h(x) < a^p \end{cases} \text{ (без смены знака неравенства), если } a > 1.$$

Если изначальные неравенства *нестрогие*, то нижние неравенства в системах тоже будут *нестрогими*. **И ещё раз – условие $h(x) > 0$ незыблемо при любых раскладах!**

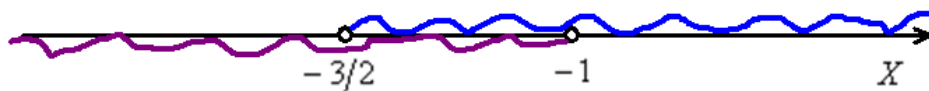
Как я уже отмечал, на практике почти всегда встречается второй случай, когда $a > 1$, ему и уделим внимание. Дорешаем неравенство $\ln(2x+3) < 0$, которое мы начали в параграфе [Метод интервалов](#). Там была найдена область определения логарифма $h(x) > 0$:

$$2x+3 > 0 \Rightarrow x > -\frac{3}{2} \text{ и сейчас нужно решить вторую часть задания. Согласно}$$

формальному алгоритму, домножаем правую часть неравенства: $\ln(2x+3) < 0 \cdot \ln e$, поднимаем ноль наверх: $\ln(2x+3) < \ln e^0$ и получаем: $\ln(2x+3) < \ln 1$. Так как основание логарифма $a > 1$, то при потенцировании знак неравенства менять не нужно: $2x+3 < 1$.

[Преобразуя](#) это простенькое неравенство, получаем: $x < -1$. Таким образом, имеем

$$\text{систему } \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x < -1 \end{cases}. \text{ Решение 1-го неравенства я отмечу сверху, а 2-го – снизу:}$$



Решением системы и исходного неравенства $\ln(2x+3) < 0$ является *пересечение* (общая часть) промежутков: $x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right)$ – да, вот такой вот совсем небольшой интервал.

Как вариант, неравенство $\ln(2x+3) < 0$ нетрудно решать графически – с графиком этого логарифма никаких проблем. И я предлагаю вам это задание в числе других для самостоятельного выполнения. Если что-то не запомнилось или не уложилось в голове, вернитесь к предыдущим параграфам:

Задание 8

а) Решить графически: $2^{x+1} - 3x - 2 = 0$, $\sqrt[3]{x} - x > 0$, $e^x - \ln x - 1 \leq 0$, $\ln(2x+3) < 0$

б) Определить количество действительных корней уравнения $x^3 + 2x - 2 = 0$

в) Почему уравнение $2x^2 - 4x = 0$ мы можем сократить на два, но на два **нельзя** сокращать правую часть $y = 2x^2 - 4x$? Пояснить аналитически и геометрически

г) Вычислить или упростить: $\log_{1/2} 2$, $\log_3 81$, $\log_5(-3)$, $3 \lg 10$, $\ln e^2$, $e^{2 \ln 5}$,

$2 \log_2 3 + 3 \log_2 2$, $\frac{2}{\lg 5} - \log_5 4$, пожалуй, хватит, а то уже извращение какое-то пошло :)

д) Решить аналитически: $2^x = 4^x$, $\lg 3x = -1$, $\ln(x^2 + 3) = 1$, $\log_2(1 - 2x) \geq 3$,

$\ln(x^2 + 2x + 2) < 0$ и для особых любителей пример посложнее: $\ln \frac{1-x}{x-3} > 0$.

Желаю успехов! И до очень скорой встречи.

4. Чуть-чуть геометрии

Что и говорить, «любимый» многими школьный предмет.... Но сейчас вас ждёт просто сказка! Эротическая Добрая, конечно ☺. **Всё, что нам нужно от школьной геометрии** – это повторить основные геометрические фигуры, их основные свойства, одну теорему (единственную в книге), синусы, косинусы и иже с ними, после чего наш разговор плавно перетечёт в завершающий раздел – **тригонометрию**.

Но начнём мы с орудий труда. Для решения геометрических задач (да и вообще математических) нам потребуются:

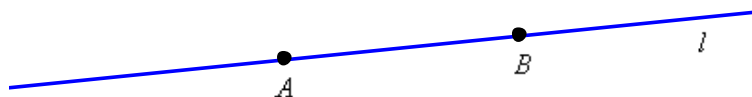
- ручка (лучше гелевая);
- простой карандаш (лучше средней жирности), можно несколько, даже цветные;
- линейка;
- тетради в клетку;
- и другие желательные инструменты:
- циркуль – для построения окружностей;
- транспортир – для измерения углов.

Резинкой ещё можно запастись, но с ней как-то не очень, портит чертежи.... Как вариант, есть бритва или белый «штрих» для замазывания огрехов. Но лучше всего подготовить прямые руки и светлую голову. Вроде всё... если что-то забыл, добавлю.

4.1. Элементарные геометрические фигуры

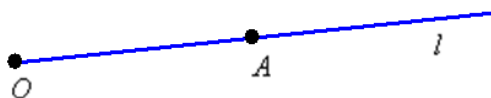
Точка. Она не имеет длины, ширины, площади, объёма или другой размерности (хотя на чертеже, конечно, занимает некоторое место). В геометрии под точкой понимают уникальное местоположение в пространстве. Это одно из базовых понятий математики.

Прямая. Она бесконечна:



Прямую **обозначают** маленькими латинскими буквами $\dots k, l, m, n, \dots$ или любыми двумя точками, которые ей принадлежат, например, прямая AB . Слово «прямая» **обязательно**, поскольку этими буквами можно обозначить много чего :)

Луч – это множество точек прямой, которые лежат **по одну сторону** от некоторой фиксированной точки O этой прямой:



Точка O называется **началом** луча. Луч тоже **обозначают** маленькими латинскими буквами, например, луч l или двумя точками – началом и ещё одной, например, луч OA .

Отрезок. В представлении не нуждается:



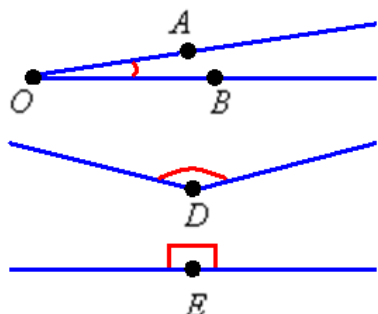
Точки A, B называются **концами** отрезка, и **обозначается** он естественным образом: отрезок AB .

Есть ещё **векторы**, но они нас подождут в курсе **аналитической геометрии**.

Угол – это геометрическая фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки. Точка O называется **вершиной** угла, а лучи – **сторонами** угла.

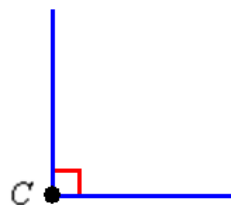
Угол **обозначается** значком \angle и вершиной: $\angle O$, либо тремя точками: $\angle BOA$ (см. рис. ниже), либо маленькими греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \phi, \varphi$ и др.

Угол **измеряется** в **градусах** и **радианах**. Что такое *градусы*, всем понятно, а вот что такое *радианы* мы повторим позже.



Угол от 0 до 90° называют **острым** (например, $\angle O$), угол равный 90° – **прямым** ($\angle C$), угол от 90 до 180° – **тупым** ($\angle D$).

Угол в 180° называется **развёрнутым** ($\angle E$), а угол, равный 360° – **полным** (так как совершается полный оборот).

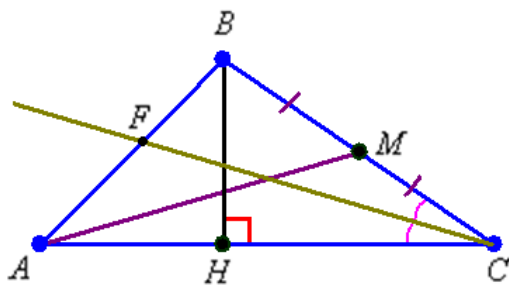


На чертежах углы помечают дугами (красный цвет), в случае прямого или кратного ему угла дуга тоже прямоугольная.

**Не нужно что-то специально запоминать!
– просто ВДУМЧИВО и не спеша, читайте этот конспект!**

4.2. Треугольники

Треугольник – это геометрическая фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх **отрезков**, соединяющих эти точки. Треугольник стандартно **обозначают** значком Δ и тремя вершинами: ΔABC . Сумма **углов** любого треугольника $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ или π радиан. Повторим его основные элементы:



Высота – это **перпендикуляр**, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону (или её продолжение). Например, BH . У треугольника 3 высоты, и они пересекаются в одной точке.

Медиана – это **отрезок**, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Например, AM – она делит сторону BC на 2 равные части: $|BM| = |MC|$

Точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины.

Справка: отрезки равной длины обозначают одинаковыми засечками, а равные углы – одинаковыми дугами. Длину отрезка обозначают знаком модуля.

Биссектриса – это **луч**, исходящий из вершины угла и делящий этот угол на два равных угла. Например, CF – она делит $\angle C$ на два равных угла ($\angle BCF = \angle FCA$). Биссектрисы тоже пересекаются в одной точке.

В общем случае точки пересечения высот, медиан и биссектрис не совпадают.

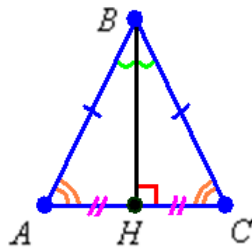
И, наверное, вам не нужно объяснять понятие **площади** (вспоминаем, квадратные метры, дачные «сотки» и т.д.). **Площадь треугольника** равна половине произведения длины стороны (любой) на длину опущенной к ней высоты, в частности: $S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BH|$.

Существуют и другие формулы.

Повторим частные случаи треугольников и их основные свойства:

➤ Равнобедренный треугольник

Треугольник, у которого две стороны равны, называется **равнобедренным**.

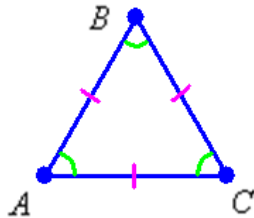


Равные стороны (AB и BC) называют **боковыми сторонами**, а третью сторону (AC) – **основанием**.

Высота, проведённая к *основанию* (BH), одновременно является **медианой** ($|AH| = |HC|$) и **биссектрисой** ($\angle ABH = \angle HBC$). Углы при основании равнобедренного треугольника равны ($\angle A = \angle C$)

➤ Равносторонний треугольник

Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним**.



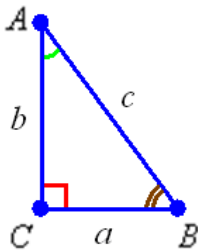
Все углы этого треугольника тоже равны и каждый из них равен 60° ($\frac{\pi}{3}$ радиан).

Равносторонний треугольник также называют **правильным** треугольником.

➤ Прямоугольный треугольник и теорема Пифагора

Треугольник с **прямым** углом называется **прямоугольным**.

Нетрудно догадаться, что два других угла – **острые**.



Сторона, лежащая напротив прямого угла, является самой длинной и называется **гипотенузой** (AB), две другие стороны называются **катетами** (AC и BC). Обозначим **длины** этих сторон буквами $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$. И теперь знаменитая теорема, известная уже более 2500 лет и доказанная более, чем 400 способами:

Теорема Пифагора: сумма квадратов длин катетов равна квадрату длины гипотенузы: $a^2 + b^2 = c^2$.

Так, если известны *катеты* $a = 3$, $b = 4$ ед., то с помощью теоремы легко найти *гипотенузу*: $a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = c^2$ и, извлекая квадратный корень, получаем:

$$c = \sqrt{25} = 5 \text{ ед.}$$

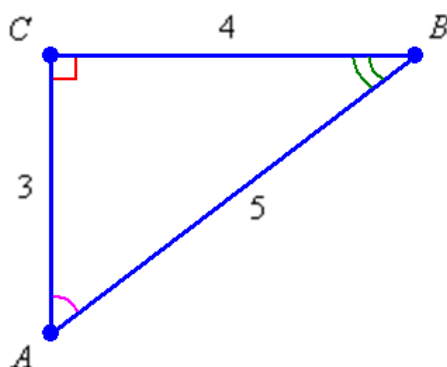
Справка: если в метрических (вычислительных) задачах не задана размерность (сантиметры, метры, литры, бараны и т.д.), то хорошим тоном считается указывать единицы, сокращённо: ед.

И наоборот, если известна гипотенуза $c = 20$ ед. и один из катетов, например, $b = 12$ ед., то из формулы $a^2 + b^2 = c^2$ легко выразить и найти другой катет:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16 \text{ ед.}, \text{ да, и не забываем о проверках: } a^2 + b^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{400} = 20 \text{ ед.}, \text{ ч.т.п.}$$

➤ Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла

Говоря простым языком, это **пропорции** (соотношения) между сторонами прямоугольного треугольника, зависящие от его **острых** углов. Нагляднее сразу рассмотрим конкретный треугольник, например, *египетский* – со сторонами 3, 4 и 5 ед.:



Далее для простоты изложения под стороной я буду подразумевать её длину.

Синусом острого угла называется отношение *противоположного* катета к гипотенузе:

$$\sin \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}, \quad \sin \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$$

Косинусом острого угла называется отношение *прилежащего* катета к гипотенузе:

$$\cos \angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}, \quad \cos \angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$$

Тангенсом острого угла называется отношение *противоположного* катета к *прилежащему*: $\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}, \quad \operatorname{tg} \angle B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$.

И **котангенсом** называется отношение *прилежащего* катета к *противоположному*:

$$\operatorname{ctg} \angle A = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{ctg} \angle B = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3} \quad (\text{предыдущие отношения наоборот}).$$

А теперь мякотка: синус, косинус тангенс и котангенс не зависят от размеров треугольника. **Они зависят только от значения острого угла.** Так, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ – вне зависимости от того, какой треугольник нам дан – микроскопический или гигантский. Если в прямоугольном треугольнике есть угол 30° , то *катет*, лежащий напротив этого угла, будет в два раза меньше *гипотенузы*. Каких бы размеров ни был треугольник.

Значения синусов, косинусов, тангенсов / котангенсов находят с помощью специальной таблицы (см. Приложение **Тригонометрические таблицы**) либо с помощью калькулятора. Следует отметить, что в **тригонометрии** перечисленные отношения определяются **функциями** – для произвольного угла, не только острого.

➤ Подобные треугольники

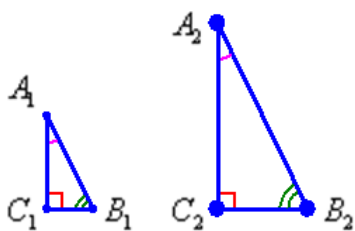
К этому понятию мы только что подошли. Треугольники являются **подобными**, если их соответствующие углы (а значит, и их **тригонометрические отношения**) **равны**:

$$\angle A_1 = \angle A_2, \quad \angle B_1 = \angle B_2, \quad \angle C_1 = \angle C_2$$

Соответствующие стороны подобных треугольников

пропорциональны: $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = k$. Коэффициент

$k > 0$ называют **коэффициентом подобия**, в данном примере $k = 1/2$. Пропорцию можно составить и наоборот, тогда $k = 2$.



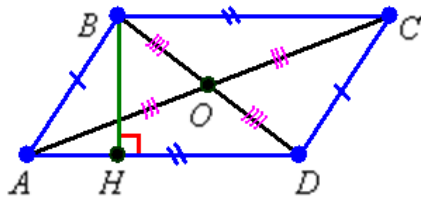
Разумеется, **подобными** могут быть не только прямоугольные, и не только треугольники, а вообще произвольные геометрические фигуры. Например, матрёшки с одинаковой росписью. Если мы возьмём самую маленькую матрёшку, то её пропорции будут точно такими же, как и у всех остальных матрёшек, как и у самой большой.

4.3. Четырёхугольники

Логичное продолжение темы :). И теперь настало время размяться вам: возьмите в руки карандаш и отметьте на листке 4 точки, при этом **никакие три из них не должны лежать на одной прямой**. Соедините соседние точки **отрезками**. Четырёхугольник построен! У каждого свой. Психологи бы тут ещё о вашем характере что-нибудь сказали ☺

Но у нас суровая математика, которая категорически перемалывает психологию, и сейчас мы с увлечением повторим частные случаи четырёхугольников:

Параллелограмм – это четырёхугольник с попарно *параллельными* сторонами:



$AB \parallel DC$ и $BC \parallel AD$, и, кроме того, эти стороны равны: $AB = DC$, $BC = AD$.

Углы при противоположных вершинах параллелограмма равны: $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$.

Диагонали параллелограмма своей точкой пересечения делятся пополам: $AO = OC$, $BO = OD$.

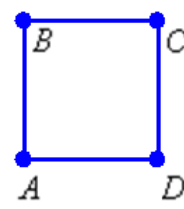
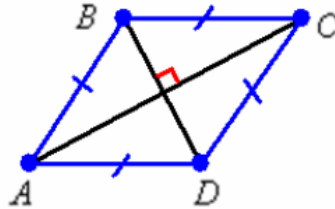
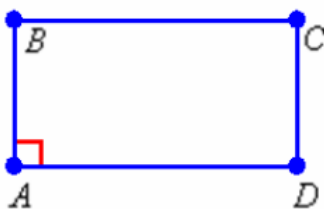
Площадь параллелограмма равна произведению длины стороны (любой) на длину, опущенной к ней высоты, например: $S = |AD| \cdot |BH|$.

Параллелограмм в свою очередь включает в себя следующие частные случаи:

Прямоугольник – это параллелограмм с равными углами: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$.

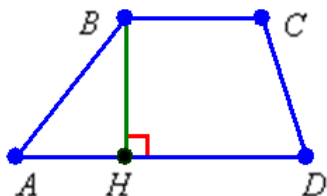
Ромб – это параллелограмм с равными сторонами: $AB = BC = CD = AD$ (рисунок посередине). **Диагонали ромба** взаимно перпендикулярны: $AC \perp BD$.

Квадрат – это параллелограмм с равными углами и сторонами (рисунок справа). Квадрат также называют **правильным** четырёхугольником.

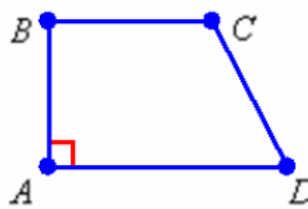
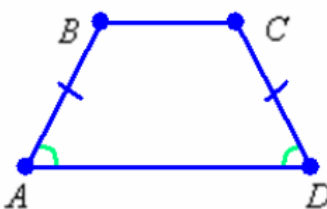


С площадями этих фигур, полагаю, ни у кого проблем не возникнет ;) Для ромба, помимо общей, есть специальная формула: $S = (1/2) \cdot |AC| \cdot |BD|$.

И ещё одна важная фигура. **Трапеция** – это четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие – нет:



Параллельные стороны (AD и BC) называют **основаниями**, а непараллельные (AB и CD) – **боковыми сторонами**. **Площадь трапеции** равна полусумме оснований на высоту между ними: $S = \frac{1}{2} (|AD| + |BC|) \cdot |BH|$.



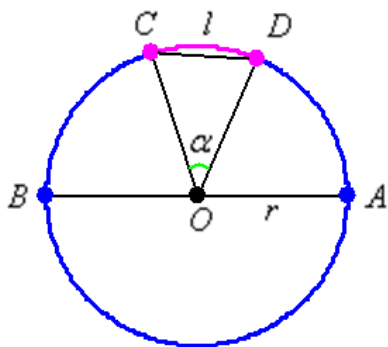
Трапецию с равными боковыми сторонами называют **равнобокой** или **равнобочной** (слева). Трапецию с прямыми углами при боковой стороне называют **прямоугольной**.

Наверное, вам понятны термины **параллельность** и **перпендикулярность**, которые встретились выше, но всё же: прямые являются *параллельными*, если они не пересекаются. Отрезки параллельны – если они лежат на параллельных прямых. Прямые являются *перпендикулярными*, если они пересекаются под углом 90 градусов. **Обозначения:** \parallel и \perp .

Теперь моя совесть чиста, и мы едем дальше, причём на колёсах:

4.4. Окружность и круг

Окружность – это множество точек, равноудалённых от фиксированной точки O . Эта точка называется **центром окружности**, и **окружности она не принадлежит!** Сюда мы ставим ногу циркуля при выполнении чертежа, и, кстати, **важный технический приём: пока вы не прочертили окружность или нужную её часть, остриё циркуля отрывать от бумаги нельзя!** Отрезок, соединяющий центр с любой точкой окружности (OA, OB, OC, OD) называется **радиусом** окружности, его длину стандартно **обозначают** буквой r («эр»).



Длина окружности равна: $L = 2\pi \cdot r$. Кусок окружности между двумя её точками называется **дугой**, например \widehat{CD} . Угол α («альфа») называется **центральный**. Длину дуги можно вычислить по **формуле** $l = \alpha \cdot r$, где угол α выражен в **радианах**.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой** (например, CD). Хорда, проходящая через центр, делит окружность на две **полуокружности** и называется **диаметром** (например, AB). Длина диаметра обозначается буквой d , и помнят все ребяташки, что $d = 2r$.

Окружность не следует путать с кругом. **Круг** – это множество точек лежащих внутри окружности + сама окружность. **Формула площади круга:** $S = \pi \cdot r^2$.

И для закрепления материала ОБЯЗАТЕЛЬНО прорешиваем следующие задачи:

Задание 9

- а) Найти высоту $|BH|$ **равнобедренного треугольника**, если известно его основание $|AC| = 10$ и боковая сторона $|BC| = 7$.

Задачи по геометрии (да и не только) удобно снабжать схематическими чертежами

Это облегчает решение. Поэтому если задача не самая простая, то не стесняйтесь:

- б) Известен угол $\angle A = 30^\circ$ и гипотенуза $|AB| = 8$ **прямоугольного** $\triangle ABC$. Найти катеты и площадь этого треугольника.

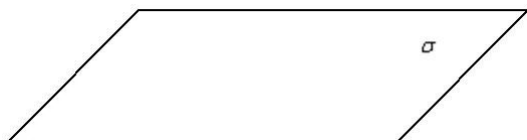
Тригонометрическая таблица (Приложение) в помощь, но не пользуйтесь ей тут:

- в) Что можно сказать о $\triangle ABC$ с гипотенузой AB , у которого $\operatorname{tg} \angle A = 1$?
- г) Найти площадь **параллелограмма** $ABCD$, если $|AB| = 5$, $|AD| = 12$, $\angle A = 60^\circ$.
- д) Найти диагональ, площадь и **периметр** p (сумму длин сторон) прямоугольника со сторонами $a = 3\sqrt{2}$, $b = 9$ см.
- е) Найти площадь круга, если известна длина $L = 5\pi$ соответствующей окружности

Как вы помните, весь курс школьной геометрии делится на два больших раздела: геометрия плоскости (**планиметрия**) и геометрия пространства (**стереометрия**). Перечисленные выше фигуры можно рассматривать как на плоскости, так и в трёхмерном пространстве, ну а сейчас пришло время кратко повторить именно 3D-объекты:

4.5. Основные пространственные фигуры

Во-первых, **плоскость**, которая сама по себе является одной из **элементарных геометрических фигур**. На чертеже плоскость чаще всего изображают параллелограммом, что создаёт впечатление пространства:

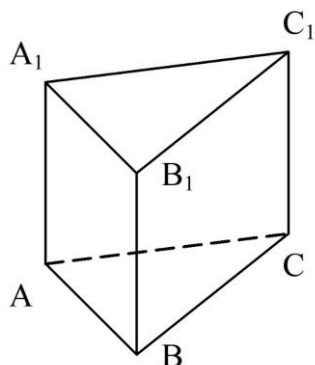


Плоскость бесконечна, и у нас есть возможность изобразить лишь её кусочек. На практике помимо параллелограмма также прорисовывают овал или даже облачко.

Реальные плоскости, которые встречаются в практических задачах, могут располагаться как угодно – мысленно возьмите чертёж в руки и покрутите его в пространстве, придав плоскости любой наклон, любой угол

Обозначения: плоскости принято обозначать маленькими греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. На чертеже плоскость отмечена буквой σ («сигма»).

Призма – это фигура, состоящая из двух **одинаковых** многоугольников (**оснований**), лежащих в **параллельных** плоскостях, и **боковых сторон**, которые представляют собой **параллелограммы**. На чертеже ниже изображена **треугольная призма**:

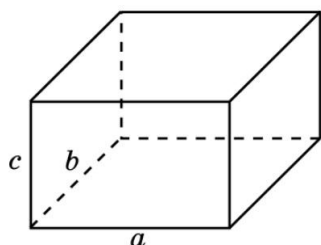


Основаниями данной призмы являются равные **треугольники** $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, а **боковыми сторонами** – **прямоугольники** ABB_1A_1 , BCC_1B_1 , ACC_1A_1 . Любую сторону призмы также называют **гранью**, а любой отрезок – **ребром**.

Линии, которые мы не видим, принято проводить пунктиром! В данном случае от нас спряталось ребро AC .

Разумеется, треугольники не обязаны располагаться строго друг над другом, поэтому в общем случае у нас получится «косая» призма. Здесь же боковые рёбра **перпендикулярны** основаниями, и, очевидно, **объём** этой призмы равен: $V = S_{\triangle ABC} \cdot |AA_1|$.

Если **основаниями** призмы являются не треугольники, а параллелограммы, то получится (не сломать бы язык) **параллелепипед**. В качестве примера приведу популярнейший частный случай – **прямоугольный параллелепипед**:

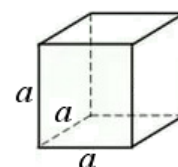


Все **грани** этого «пипеда» – прямоугольники, причём противоположные грани параллельны и равны, а углы между смежными рёбрами составляют 90° .

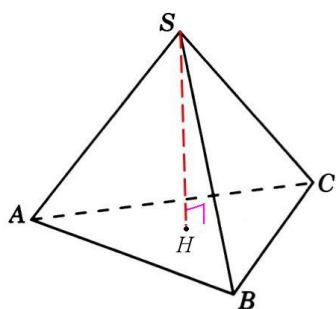
Эта форма встречается повсеместно (спичечный коробок, чемодан, комната и т.д.). Очевидно, что объём «пипеда» равен произведению длин трёх смежных сторон: $V = abc$.

Если все рёбра равны, то получается **куб** объёма $V = a^3$, объём, кстати, и измеряют «кубиками». Но литры, конечно, удобнее.

И на всякий пожарный: не путайте объём с массой! Литровая банка ртути намного тяжелее литровой банки воды (хотя объём одинаков). Впрочем, это уже из кратчайшего курса физики ☺.



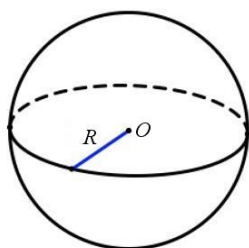
Пирамида – это многогранник, одна грань которого (**основание**) произвольный многоугольник, а остальные грани (**боковые стороны**) – треугольники с общей вершиной. Так, в основании египетских пирамид лежат прямоугольники..., представили? Отлично!



Пирамида с основанием-треугольником называется **треугольной пирамидой** или **тетраэдром**. На рисунке слева точка S является **вершиной**, а $\triangle ABC$ – **основанием** пирамиды.

Объём пирамиды (любой) можно вычислить по формуле $V = \frac{1}{3} S_o h$, где S_o – площадь основания, h – длина проведённой к нему высоты, для нашего тетраэдра: $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot |SH|$.

Сфера – это множество точек пространства, равноудалённых от заданной точки O :

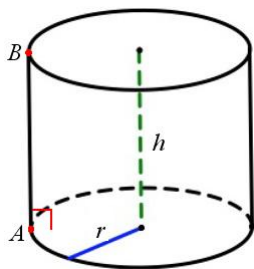


Точка O называется **центром** сферы, а значение R – **радиусом**. Площадь поверхности сферы равна: $S = 4\pi R^2$.

Тело, ограниченное сферой (+ сама сфера), называется **шаром**. **Не путайте эти понятия!** Сфера – поверхность, шар – тело.

Объём шара (!) можно вычислить по формуле $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

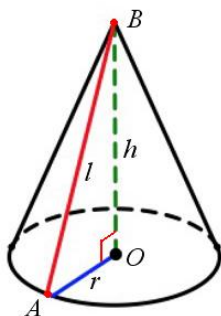
Следующие тела и поверхности я приведу в описательном порядке (без строгих определений). Всем знакомый **прямой круговой цилиндр**:



Данное тело ограничено равными параллельными кругами сверху и снизу (**основания** цилиндра), а **боковая поверхность** порождена **образующими** (в частности, AB) – **перпендикулярами**, которые соединяют окружности. Площадь боковой поверхности: $S_o = 2\pi r h$, где h – высота цилиндра, а r – радиус основания. Чтобы найти площадь поверхности всего цилиндра нужно приплюсовать площадь двух кругов: $S = 2\pi r h + 2\pi r^2$. Объём цилиндра: $V = \pi r^2 h$.

Существует великое множество других цилиндров, но во избежание путаницы мы ограничимся лишь этим частным случаем, равно, как и одним частным случаем **конуса**:

Прямой круговой конус – это тело, ограниченное кругом (**основание конуса**) и **образующими** – отрезками равной длины l , которые соединяют окружность с **вершиной** B конуса, которая расположена строго над (или под) центром O круга:



Если известен радиус основания r и высота конуса h , то длину образующей можно найти с помощью **теоремы Пифагора** по формуле $r^2 + h^2 = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{r^2 + h^2}$. Площадь **боковой поверхности** конуса равна: $S_o = \pi r l$, а чтобы вычислить площадь поверхности всего конуса нужно добавить площадь круга: $S = \pi r l + \pi r^2$.

И объём конуса: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. Есть ещё усечённый конус, но...

Информации этой главы должно хватить в 90-95% случаев! Ну а для случаев других есть учебники / справочники, где можно отыскать более редкие фигуры и формулы.

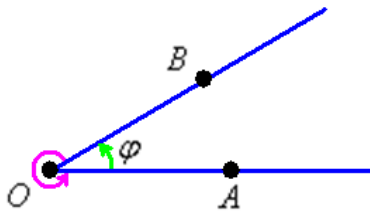
...никогда не думал, что прикладную геометрию можно изложить на 9,5 страницах... ☺

5. И немного тригонометрии

Тригонометрия изучает углы, тригонометрические функции (*синус и косинус*), формулы, уравнения, неравенства и их с ними. Начнём с базового понятия:

5.1. Об угле подробно

Во-первых, повторим определение, которое уже встретилось в [курсе:](#) геометрии: **угол** – это геометрическая фигура, образованная двумя **лучами**, исходящими из одной точки. Заметьте, что эта конструкция задаёт два угла (зелёная и малиновая стрелки), но из контекста задач обычно понятно, о каком угле идёт речь:

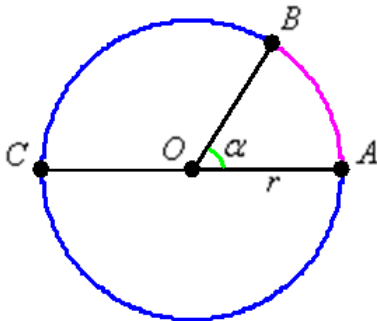


Обозначения: $\angle O$, $\angle AOB$, маленькие греческие буквы α , β , γ , ϕ , φ и др. Существуют и другие способы.

Угол чаще отсчитывают **против часовой стрелки**, такой порядок называют **положительным направлением отсчёта** или **положительной ориентацией** угла.

«Открутку» угла можно провести и в противоположном направлении – от луча OB к лучу OA , в результате получится **отрицательно ориентированный** угол. К такому углу добавляется знак «минус», так, если $\varphi = 30^\circ$ («фи»), то $-\varphi = -30^\circ$. Во многих задачах ориентация угла не имеет значения, и его принимают положительным.

Углы измеряют в **градусах**, **радианах** и более редких единицах. И если градусы представляет любой обыватель, то радианы не помнят даже некоторые «технари». Изобразим на чертеже окружность произвольного радиуса $r \neq 0$ с центром в точке O :



Радян – это **центральный угол** α , такой, что длина соответствующей **дуги** \widehat{AB} (малиновый цвет), **равна радиусу** r окружности. **Радян не зависит от конкретного значения** r и примерно равен $\alpha \approx 57^\circ$.

Радянная мера угла – это **отношение** длины дуги \widehat{l} между сторонами угла к радиусу окружности: $\alpha_{\text{рад}} = \frac{|\widehat{l}|}{r}$.

Выясним, сколько радиан содержит, например, **развёрнутый** угол $\angle AOC = 180^\circ$. Из известной формулы **длины окружности** $L = 2\pi \cdot r$ следует, что длина верхней **полуокружности** равна $|\widehat{AC}| = \pi \cdot r$, таким образом, **в 180 градусах**

содержится: $\alpha_{\text{рад}} = \frac{|\widehat{AC}|}{r} = \frac{\pi \cdot r}{r} = \pi \approx 3,14$ радиан. Полный оборот (360°) включает в себя $2\pi \approx 6,28$ радиан (примерно 6,28 углов α). **Да, углы мы измеряем... в углах!** (радианах)

Для перевода градусов в радианы удобно использовать **формулу** $\alpha_{\text{рад}} = \frac{\alpha_{\text{град}} \cdot \pi}{180}$.

Переведём в радианы, например, угол $\alpha_{\text{град}} = 30^\circ$: $\alpha_{\text{рад}} = \frac{30 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ радиан.

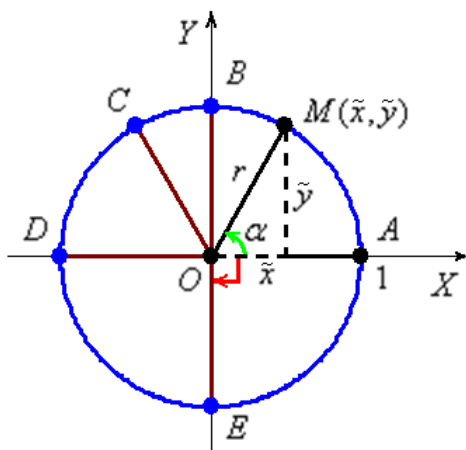
Обратно, **радианы переводятся в градусы по формуле:** $\alpha_{\text{град}} = \alpha_{\text{рад}} \cdot \frac{180}{\pi}$.

Например, переведём в градусы $\alpha_{\text{рад}} = \frac{\pi}{3}$: $\alpha_{\text{град}} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 60^\circ$.

Это, можно сказать, тригонометрическая практическая аксиома :) И поэтому если вам предложены градусы, то для дальнейших преобразований их почти всегда придётся перевести в радианы (*формула выше*). Теперь возвращаемся к знакомой теме:

5.2. Определение синуса, косинуса, тангенса через единичную окружность

Котангенс не влез в строчку ☹. Не так давно мы определили эти отношения для острого угла, и сейчас распространим на произвольный угол. Для этого используют так называемую **единичную окружность** (радиуса $r = 1$). Изобразим её в **декартовой системе** с центром в начале координат:



Рассмотрим **произвольную** точку $M(\tilde{x}, \tilde{y})$, принадлежащую окружности, и **положительно ориентированный** угол $\alpha = \angle AOM$ (зелёная стрелка).

Синусом угла α называют отношение ординаты точки M к радиусу окружности: $\sin \alpha = \frac{\tilde{y}}{r}$.

Косинусом угла α называют отношение абсциссы точки M к радиусу окружности: $\cos \alpha = \frac{\tilde{x}}{r}$.

Тангенс угла α – есть отношение $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$ (если $\tilde{x} \neq 0$), и **котангенс**: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}$ (если $\tilde{y} \neq 0$).

Так, углам $0^\circ, 360^\circ, 720^\circ, \dots$ (да-да, угол можно «накручивать» и дальше!) соответствуют точка $A(1, 0)$, и поэтому: $\sin 0 = \frac{0}{1} = 0$, $\cos 0 = \frac{1}{1} = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{0}{1} = 0$, а котангенса не существует, ибо ордината этой точки равна нулю.

Углу $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ (90°) соответствует точка $B(0, 1)$, следовательно:

$$\sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0, \quad \text{тангенса не существует,} \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0.$$

Углу $\angle AOC = \frac{2\pi}{3}$ (120°) соответствует точка $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, следовательно:

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Угол $\angle AOD = \pi$ (180°) – **самостоятельно** (сверьтесь по Тригоном. таблице).

Аналогично для **отрицательно ориентированных углов**. В частности, углу $\angle AOE = -\frac{\pi}{2}$ (-90°) (красная стрелка на чертеже), соответствует точка $E(0, -1)$, следовательно: $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{1} = -1$, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{1} = 0$, тангенс аминь, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{1} = 0$.

На практике бывает удобно как «прикрутить» оборот к углу, так и «скрутить лишние». Так, угла $-\frac{\pi}{2}$ нет в **Тригонометрической таблице**, но к нему можно мысленно прибавить 2π (один оборот), в результате чего получится угол в $\frac{3\pi}{2}$ радиан с теми же самыми значениями синуса, косинуса и котангенса. И, наоборот, в некоторых задачах появляются углы с «лишними» оборотами. Рассмотрим, например, угол 5π – здесь целесообразно «скрутить» два оборота: $5\pi - 4\pi = \pi$, получая эквивалентный угол.

И, как вы правильно догадались, угол можно «накручивать» до бесконечности в любом направлении. Представьте, что по единичной окружности «ездит» точка. По мере того, как мы будем проходить оборот за оборотом (в любую сторону) значения синусов и косинусов будут периодически повторяться. Таким образом, возникают:

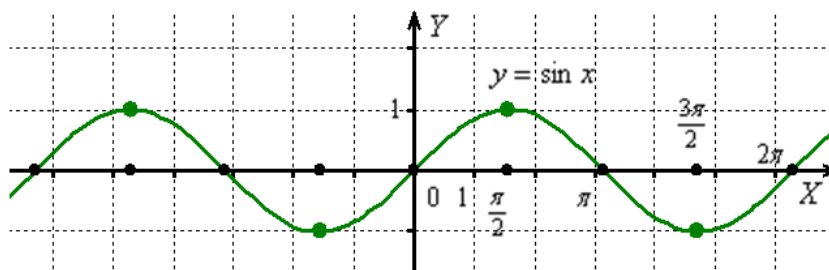
5.3. Тригонометрические функции

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, где угол x выражен в радианах (!).

Данные функции каждому действительному углу x ставят в соответствие его синус, косинус, тангенс и котангенс (если они существуют).

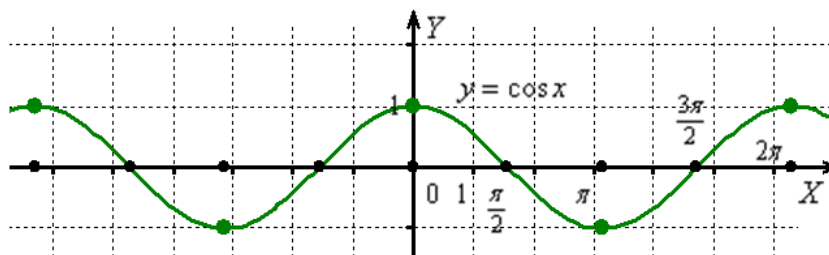
По указанной выше причине тригонометрические функции **периодичны**. Геометрически это выражается тем, что у графика бесконечно повторяется один и тот же кусок. Рассмотрим наших пациентов по порядку:

График функции $y = \sin x$ называется **синусоидой**:



Данная функция является **периодической** с **периодом** 2π . Выберем **любой промежуток** длиной «два пи», проще всего посмотреть на отрезок $[0; 2\pi]$Взглянули? Легко понять, что этот кусок графика бесконечно «тиражируется» влево и вправо. Кроме того, синус **нечётен**: $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$ и синусоида симметрична относительно начала координат.

График $y = \cos x$ представляет собой **синусоиду**, сдвинутую на $\frac{\pi}{2}$ влево:

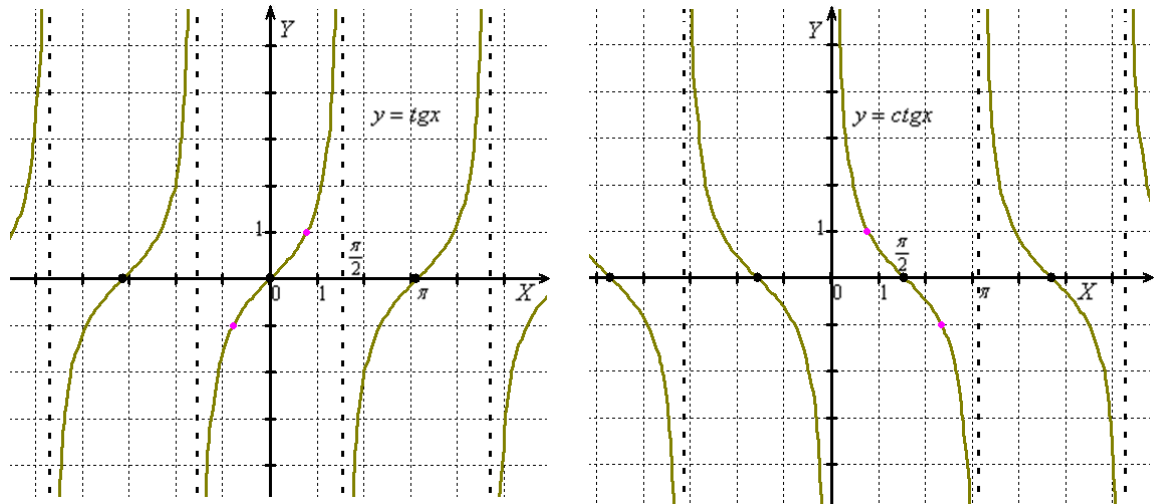


Данная функция тоже **периодическая** (с тем же периодом), однако является **чётной**: $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$, и её график симметричен относительно оси OY .

Синус и косинус **ограничены** и могут принимать значения лишь из отрезка $[-1; 1]$:

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

Тангенс $y = \operatorname{tg} x$ (слева) и котангенс $y = \operatorname{ctg} x$ тоже как братья:



И если синус с косинусом **непрерывны** на всей **числовой прямой**, то здесь графики терпят **разрывы**. А именно, тангенс **не определён** в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k принимает все **целые** значения, а котангенс не существует в точках $x = \pi k$. Через эти точки проходят **вертикальные асимптоты** графиков (пунктирные линии).

Легко видеть, что обе функции **периодичны**, но **период** у них меньше, чем у синуса с косинусом, и составляет π радиан (т.е. через каждые π график повторяется). Данные функции **нечётны**: $f(-x) = \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x = -f(x)$, $f(-x) = \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x = -f(x)$ и их графики симметричны относительно начала координат.

При ручном построении графиков следует проявить аккуратность, так как $\pi \approx 3,14$. **Крайне не рекомендую** «округлять» масштаб по оси OX («пи» = 3 клетки), это весьма дурной тон. Помимо очевидных, желательно использовать дополнительные опорные точки, в частности, значения $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, а для тангенсов и котангенсов точки:

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1, \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1, \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = -1 \text{ (см. чертежи выше).}$$

5.4. Периодичность и взаимосвязь функций. Формулы приведения

На это уже все обратили внимание. Если к ЛЮБОМУ углу α прибавить или вычесть 2π , то получится **то же самое** значение синуса и косинуса:

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha \quad \text{— по причине периодичности этих функций}$$

И, кроме того, синус и косинус можно взаимно превращать друг в друга, «сдвигая» аргумент на $\frac{\pi}{2}$, например: $\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$. Желющие могут построить график функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ и убедиться в том, что это не что иное, как график $y = \cos x$.

Кстати, почему для общих объяснений я использую букву «альфа»? А дело в том, что «альфа» **может быть не только переменной «икс»**, но и сложной функцией, например: $\alpha = 2x$, $\alpha = 1 - 3x$, $\alpha = x^2$ или ещё более сложной.

Аналогично, в силу периодичности тангенса и котангенса:

$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg} \alpha$ и, кроме того, эти функции тоже могут превращаться друг в друга, в частности: $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$.

Таким образом, если к углу прибавлены (или вычтены) значения $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, то мы можем избавиться от этих «добавок». Для этого используют так называемые **формулы приведения**, которые вы можете найти в Приложении **Тригонометрические таблицы**, и некоторые из которых я только что привёл выше. Существуют формальные правила, по которым осуществляются превращения, и желающие могут отыскать этот материал в школьном курсе математики.

Иногда формулы приведения используют не для упрощения, а для того, чтобы наоборот – усложнить запись, например, записать $y = \operatorname{ctg} x$ в виде $y = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ с целью дальнейших преобразований или анализа этой функции.

Разумеется, эти принципы справедливы и для большего количества периодов, например: $\sin(\alpha - 4\pi) = \sin \alpha$, $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi\right) = \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$ и т.д.

Продолжаем изучать преобразования, позволяющие упростить жизнь:

5.5. Распространённые тригонометрические формулы

Следующие несколько фактов и формул нужно просто запомнить наизусть!

Без них ваша учёба может закончиться самым скверным образом.

Во-первых, на практике очень часто используют **нечётность синуса** и **чётность косинуса**, а именно, выносят «минус» из-под синуса: $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, например, $\sin(-2x) = -\sin 2x$, и **уничтожают** минус под косинусом: $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, например, $\cos(-2x) = \cos 2x$. Минус, кстати, выносится и у тангенса / котангенса: $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$, например: $\operatorname{tg}(-x^2) = -\operatorname{tg} x^2$, $\operatorname{ctg}(-x-1) = \operatorname{ctg}(-(x+1)) = -\operatorname{ctg}(x+1)$.

Осуществимы и обратные действия – «минус» можно «затолкнуть» под синус: $-\sin(1-3x) = \sin(-(1-3x)) = \sin(3x-1)$ или поставить его под косинусом: $\cos x = \cos(-x)$.

Особо подчёркиваю, что здесь мы не получаем каких-то новых функций! Эти преобразования *равносильны* или, как говорят математики, **тождественны**. В частности, $y = -\sin(1-3x)$ и $y = \sin(3x-1)$ – это две совершенно одинаковые функции, просто запись разная. Одна запись удобна в одних задачах, другая – в других.

Ещё одна ходовая вещь, которую нужно запомнить «намертво» – это **основное тригонометрическое тождество**:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Аргумент α может быть любым: $\sin^2 5x + \cos^2 5x = 1$, $\sin^2(1-x^2) + \cos^2(1-x^2) = 1$ и т.д. И обратно, единицу можно превратить в нужную сумму, например: $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

Чуть позже мы выведем из этого тождества ещё несколько полезных формул.

Внимательные читатели ещё в прошлой главе подметили, что тангенс и котангенс – это два **взаимно обратных отношения**: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$ (для допустимых углов) и, наоборот:

$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$. По **правилу пропорции** обе функции можно расположить на одном этаже, и тогда мы получаем формулу $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$.

Тангенс можно выразить через синус и косинус: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, и, соответственно, котангенс равен обратному отношению: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Теперь немного расслабьтесь, поскольку критически важные формулы позади, и вы спасены :) **Особая прелесть математики состоит в том, что знать нужно немного**, и из этого «немного» иногда можно вывести даже маленькую Вселенную. Получим несколько полезных формул из *основного тригонометрического тождества*. Прежде всего, здесь напрашивается выразить синус через косинус и наоборот:

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha &\Rightarrow \sqrt{\sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha &\Rightarrow \sqrt{\cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}\end{aligned}$$

Когда ставить «плюс», а когда «минус» мы узнаем под занавес курса, в ходе изучения **тригонометрических неравенств**.

Если тождество *разделить почленно* на $\cos^2 \alpha$ или $\sin^2 \alpha$, то получим ещё две полезные формулы, которые используются в некоторых задачах высшей математики:

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} &\Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} &\Rightarrow 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}\end{aligned}$$

Думал не говорить, но всё-таки скажу: **не путайте** записи $\sin^2 \alpha$ и $\sin \alpha^2$. В первом случае в квадрате находится синус: $\sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2 = \sin \alpha \cdot \sin \alpha$, а во втором – его аргумент: $\sin \alpha^2 = \sin(\alpha \cdot \alpha)$ и, конечно, **это не одно и то же**: $\sin(\alpha \cdot \alpha) \neq \sin \alpha \cdot \sin \alpha$.

И ещё раз заостряю внимание, что параметр «альфа» может быть не только буквой «икс», но и сложной функцией! Все формулы работают:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}, \quad \sin(2x+1) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(2x+1)}, \quad \operatorname{tg}^2(\ln x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\ln x)} \text{ и так далее.}$$

Следующая группа – это **формулы двойного угла**:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\text{и более редкий тангенс: } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Примеры использования:

$$\sin x = \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}, \quad \cos 6x = \cos(2 \cdot 3x) = \cos^2 3x - \sin^2 3x$$

Мегапопулярные **формулы понижения степени**:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Запоминать их не нужно, сами запомнятся ☺. Наткаться будете на каждом шагу.

$$\text{Примеры: } \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

Разумеется, все рассматриваемые формулы работают и в обратном направлении, так, степень иногда требуется и повысить:

$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha, \quad 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha$$

Ну и еще куча похожих друг на друга формул. Сразу скажу, что них есть одно замечательное свойство – упорно не запоминаться. Я сотни раз искал их в справочнике, так и не запомнилась ни одна. Итак, для произвольных углов «альфа» и «бета» справедливо следующее. Раз:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

Два:

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2} \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}\end{aligned}$$

Три:

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\end{aligned}$$

Есть еще аналогичные формулы для тангенсов и котангенсов, но о них не будем, в 99,9% случаях – не встретите. Да и перечисленные формулы встречаются довольно редко. Но встречаются. Поэтому примеры употребления (*1-я формула из каждой группы*):

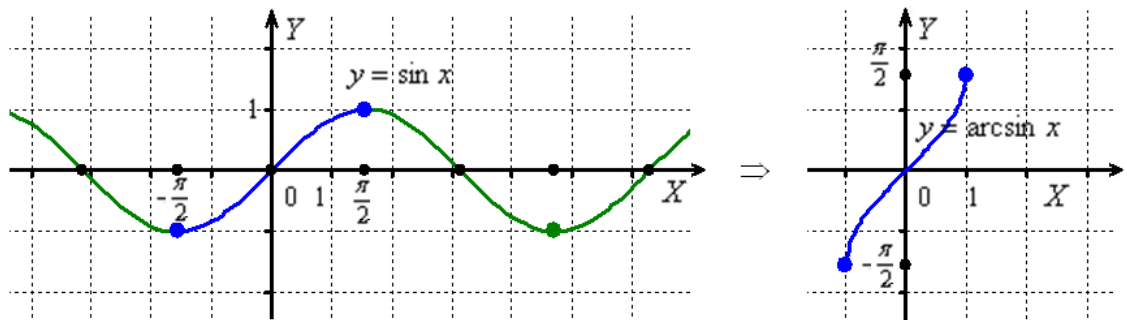
$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \\ \sin x \cos 2x &= \frac{\sin(x + 2x) + \sin(x - 2x)}{2} = \frac{\sin 3x + \sin(-x)}{2} = \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin x \\ \sin x + \sin 2x &= 2 \sin\left(\frac{x + 2x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x - 2x}{2}\right) = 2 \sin \frac{3x}{2} \cdot \cos\left(\frac{-x}{2}\right) = 2 \sin \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}\end{aligned}$$

5.6. Обратные тригонометрические функции

Оглашаю весь список: **арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс**. Они предназначены для того, чтобы по известному синусу, косинусу, тангенсу или котангенсу угла, определить сам угол. Например, если $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, то $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Если $\cos \pi = -1$, то $\arccos(-1) = \pi$. Если $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, то $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ и $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$.

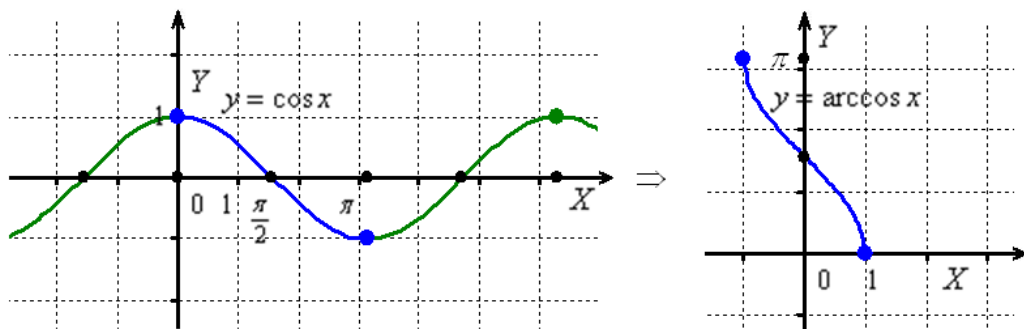
Но здесь есть одна проблемка: дело в том, что значению $\sin x = \frac{1}{2}$ (например) соответствует бесконечно много углов, а обратная функция (как и любая функция) должна быть определена **однозначно**. И эта проблемка решена так, ... объясню на конкретном примере, а то у меня тут правило кошмарное получилось, которое я сразу удалил ☺.

Синус принимает **все свои возможные значения** (от -1 до 1) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, и во избежание разночтений арксинус возвращает углы **только из этого отрезка**:



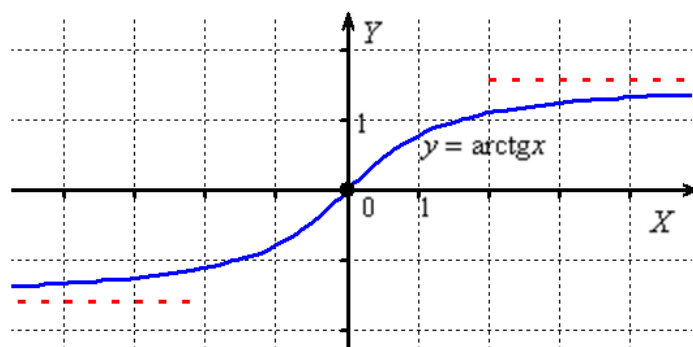
Вообще, по тексту здесь можно записать $x = \arcsin y$, но по логике переменные *поменялись ролями*, и посему $y = \arcsin x$. Так, если $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, то обратная функция все равно вернёт угол $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ и уже к этому результату нужно «прикрутить» нужное количество радиан $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, чтобы получить $\frac{5\pi}{6}$. Таким образом, функция $y = \arcsin x$ **определена** лишь на отрезке $D(y) = [-1; 1]$ и, очевидно, **нечётна**: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

Аналогично, косинус принимает **все свои возможные значения** (от 1 до -1) на отрезке $[0; \pi]$, и **арккосинус** возвращает углы только из этого промежутка:



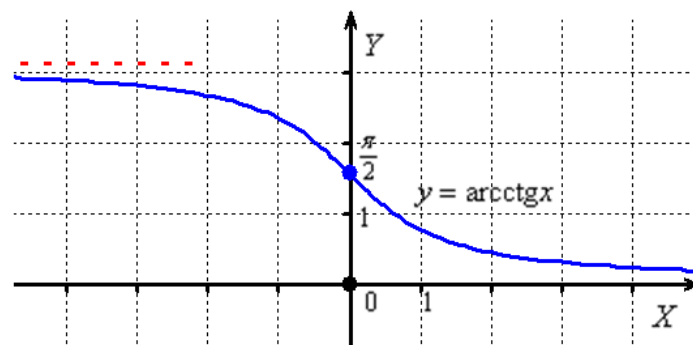
Функция $y = \arccos x$ определена на том же промежутке $D(y) = [-1; 1]$, однако не является чётной или нечётной.

С арктангенсом и арккотангенсом всё проще. График $y = \operatorname{arctg} x$ представляет собой ветку **тангенса**, которая «лежит на боку»:



Данная функция определена на всей **числовой прямой** $D(y) = \mathbf{R}$ и возвращает углы из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Арктангенс *нечётен*: $f(-x) = \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x = -f(x)$. График функции ограничен *горизонтальными асимптотами* $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$ (красный пунктир).

График *арккотангенса* $y = \operatorname{arccotg} x$ ограничен асимптотами $y = \pi$ и $y = 0$:



Арккотангенс тоже определён на всей числовой прямой $D(y) = \mathbf{R}$, но возвращает углы из интервала $(0; \pi)$. Данная функция не является чётной или нечётной.

Внимание! Функцию $y = \operatorname{arccotg} x$ часто машинально «принимают» за арктангенс, и чтобы не «обознаться», внимательно всматривайтесь, какая функция вам дана!

Следует отметить, что две **взаимно обратные функции** *взаимоуничтожают* друг друга. Вспомним **экспоненту** и **натуральный логарифм**: $\ln e^x = x$ и наоборот, $e^{\ln x} = x$ (основное логарифмическое тождество).

С тригонометрическими функциями и «арками» то же самое, в частности:

$\sin(\arcsin x) = x$ и $\arcsin(\sin x) = x$ (для допустимых значений «икс») и аналогично для трёх других пар.

Кроме того, у «арков» существуют свои формулы и взаимосвязи, но они не столь актуальны в массовой практике. Кстати, здесь к месту такой совет:

**Если ваша задача «зашла в тупик»,
то есть смысл заглянуть в математический справочник или учебник**

Потому что различных фактов, правил и формул просто тьма, и это особенно характерно для **геометрии** и **тригонометрии**. Тех же **тригонометрических формул** – многие и многие десятки.

5.7. Простейшие тригонометрические уравнения

Нам будет достаточно повторить **уравнения** $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, где a – константа. Ну и чуть более сложные, когда аргумент равен $2x$, $3x$ и т.п. В силу **периодичности тригонометрических функций** эти уравнения имеют **бесконечно много решений**, а синус с косинусом могут не иметь их вовсе. И в самом деле, уравнению $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\operatorname{tg} x = 1$ соответствует бесконечно много углов, а вот с $\sin x = 2$ – печаль.

С синуса и начнём: $\sin x = a$. Поскольку синус **ограничен**, то это уравнение имеет корни только в том случае, если $-1 \leq a \leq 1$.

И эти корни таковы, **общая формула:** $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, где k принимает все **целые** значения, сокращённо будем писать: $k \in \mathbf{Z}$.

Так решением уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ являются углы:

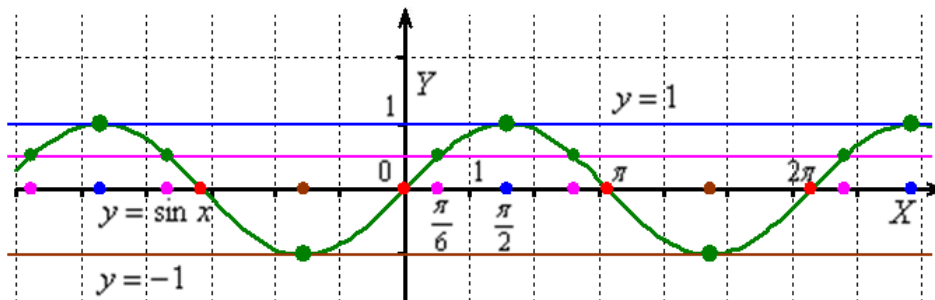
$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Распишем несколько штук для $k = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$: $-\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$

Довольно часто в задачах требуется найти какой-то конкретный угол (или углы), так, если по условию угол должен быть **тупым**, то следует выбрать корень $\frac{5\pi}{6}$.

А теперь **важный вопрос:** откуда взялась **общая формула**? В школьном курсе формулы выводятся с помощью **единичной окружности**, но сейчас нам гораздо полезнее вспомнить **графический метод решения уравнений**. Строим **синусоиду** $y = \sin x$ и **прямую**

$y = a$, например, $y = \frac{1}{2}$ (**малиновый цвет**). После чего определяем **«иксовые» координаты** их точек пересечения (**малиновые отметки на оси OX**):



Это и есть корни. Осталось уловить периодичность расположения корней и сконструировать формулу. Отработаем этот принцип на **важных частных случаях**:

Решим графически уравнение $\sin x = 1$. Из чертежа следует, что прямая $y = 1$ пересекает синусоиду $y = \sin x$ через каждые 2π радиан, начиная от значения $x = \frac{\pi}{2}$ (**выбираем самое маленькое**). Таким образом, уравнение имеет корни (**синие точки**):

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Легко видеть, что решением уравнения $\sin x = 0$ является множество

углов $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ (**красные точки**), а решением $\sin x = -1$ – углы $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

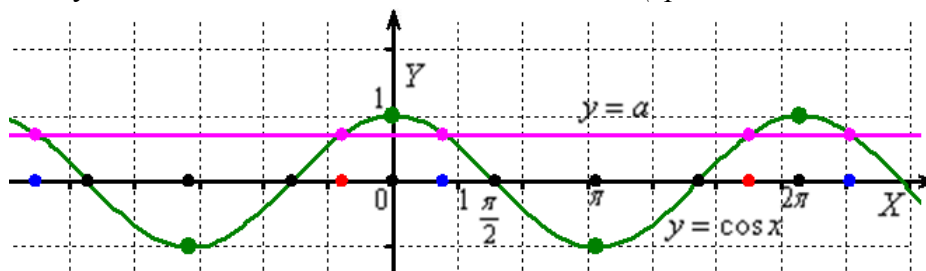
Все формулы справедливы не только для переменной x , но и для сложного аргумента, например, $2x$, $3x$, $4x$ (самые популярные) и других.

Решим, например, уравнение $\sin 2x = -1$. Используем только что выведенную частную формулу, только ВМЕСТО «икс» у нас «два икс»: $2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Но это

ещё не всё, ведь нам нужно выразить «икс»: $x = \frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Готово.

Разумеется, встречаются и «плохие» решения, рассмотрим уравнение $4\sin x - 3 = 0$. Приведём его к виду $\sin x = \frac{3}{4}$, и по общей формуле: $x = (-1)^k \arcsin \frac{3}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Этот арксинус можно вычислить лишь приближенно: $\arcsin \frac{3}{4} \approx 0,85 \text{ рад.} \approx 48,5^\circ$ и поэтому ответ лучше оставить с арксинусом.

Решим уравнение $\cos x = a$. Как и в случае с синусом, оно имеет корни, только если $-1 \leq a \leq 1$. Изобразим на чертеже графики функций $y = \cos x$, $y = a$ и определим «иксовые» координаты их точек пересечения. Во-первых, обращаем внимание на самые близкие к нулю значения: $x = -\arccos a$, $x = \arccos a$ (красная и синяя точки вблизи нуля):



И анализируя точки пересечения графиков, легко понять, что «красные» корни повторяются через каждые 2π радиан: $x = -\arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ и «синие» корни тоже повторяются через этот же период: $x = \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Обе ветки решения можно объединить в **общую формулу**: $x = \pm \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$

Решим, например, уравнение $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Уловка здесь детская: **избавляемся от иррациональности в знаменателе**: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, после чего записываем «хороший» ответ:

$x = \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Именно это случай я изобразил на схематическом чертеже выше и желающие могут ещё раз осмыслить общую формулу, используя конкретные значения углов.

И в качестве задания я предложу вам вывести **три частных формулы** для уравнений $\cos x = -1$, $\cos x = 0$, $\cos x = 1$. Уже скоро на экранах ваших мониторов! ☺

Разумеется, аргумент может быть сложным: $\cos 3x = -\frac{1}{2}$. **Формула та же самая:**

$3x = \pm \arccos \left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Единственное, не забываем выразить «икс»,

разделив всё семейство углов на три: $x = \frac{\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{3} = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Осталось два более простых уравнения.

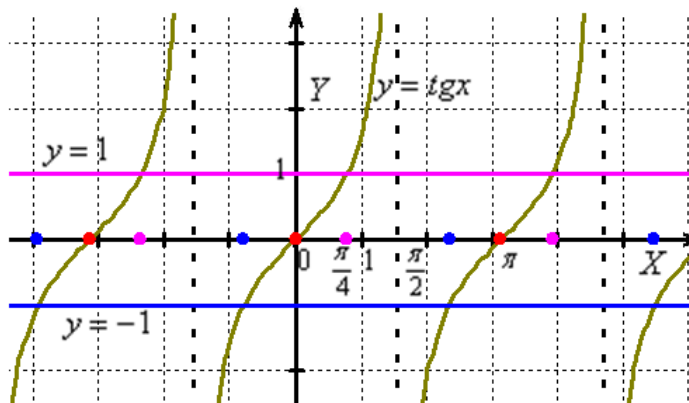
Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решения при любом значении a , и ситуация здесь прозрачна, даже чертежа особо не нужно: «главная» ветка **тангенса** расположена на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, берём отсюда угол: $x = \operatorname{arctg} a$ и добавляем *периоды* тангенса:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \text{ — общая формула.}$$

В качестве примера решим приятное уравнение $\operatorname{tg} x = 1$:

$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi k = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \quad \text{Готово!}$$

И всё же приведу чертёж для этого и двух других частных случаев:



Решением уравнения $\operatorname{tg} x = 0$ является множество углов $x = \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$.

Решением уравнения $\operatorname{tg} x = -1$ — множество:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Эти формулы легко получить как аналитически (по общей формуле), так и графически.

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ предлагаю для самостоятельного изучения, в числе других заданий, которые уже нет сил — не могу не предложить ☺

Задание 10

а) Перевести **из градусов в радианы** или наоборот: $60^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 150^\circ, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \pi$.

б) Вычислить, не пользуясь калькулятором: $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right), \cos \frac{8\pi}{3}, \operatorname{tg} 3\pi, \operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

в) Упростить: $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x, \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x, \frac{\cos^3 2x}{\sin^3 2x}, (\sin x + \cos x)^2,$

$(\operatorname{tg}^2 x + 1)\cos x, 1 - 2\sin^2 x + 2\cos 2x, \sin x - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$; понизить степень до первой:

$\sin^2 x \cos^2 x, \sin^4 x$.

г) Графическим методом решить уравнения $\cos x = -1, \cos x = 0, \cos x = 1$.

д) Вывести (*аналитически или графически*) общую формулу для решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ и получить частные формулы для $\operatorname{ctg} x = -1, \operatorname{ctg} x = 0, \operatorname{ctg} x = 1$.

е) Решить аналитически: $\sin \frac{x}{2} = 1, 3\cos 2x - 1 = 0, \operatorname{tg} 3x = \sqrt{3}, \sin x \cos \frac{x}{4} = 0$.

И ещё будет пункт ж) (в хорошем смысле ☺), который я предложу вам после изучения следующего параграфа:

5.8. Тригонометрические неравенства

Только что мы разобрали **уравнения** $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ и **сейчас очередь за соответствующими неравенствами** – *строгими* ($<$, $>$) и *нестрогими* (\leq , \geq). Эти неравенства тоже можно решить разными способами, но я по-прежнему ратую за **графический метод решения**, он полезнее и нагляднее. Вспоминаем **общий принцип**:

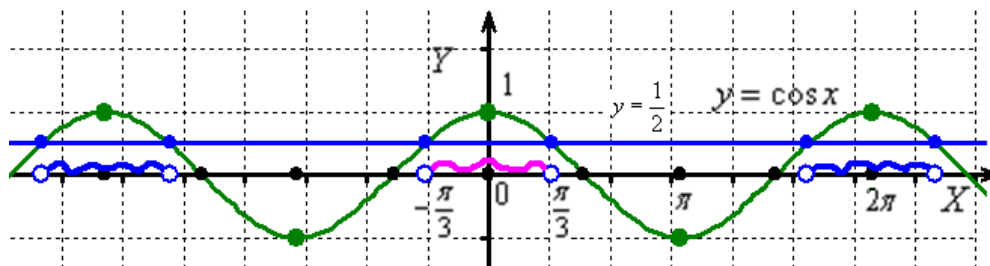
Решением неравенства $f(x) > a$ являются те интервалы *числовой прямой (оси OX)*, на которых график функции $y = f(x)$ расположен **выше** графика **прямой** $y = a$. И, наоборот, неравенству $f(x) < a$ соответствуют интервалы, где график $y = f(x)$ **ниже** графика $y = a$. Если неравенства *нестрогие*, то к решению нужно добавить допустимые граничные точки, то есть вместо **интервалов** получатся **отрезки** либо **полуинтервалы**.

И из этих соображений сразу «щёлкаются» некоторые примеры:

$\sin x < 2$ – решением этого неравенства являются все значения «икс», поскольку **синусоида** $y = \sin x$ полностью лежит **под** графиком прямой $y = 2$. Соответственно, неравенство $\sin x > 2$ решений не имеет, т.к. выше прямой синусоиды нет.

$\cos x \geq -1$ – решением этого неравенства тоже является любое «икс»: $x \in \mathbb{R}$, ибо график $y = \cos x$ расположен **не ниже** прямой $y = -1$.

Теперь переходим к **общему случаю**. В предыдущем параграфе я начал с синуса, и сейчас для разнообразия «запилим» с косинуса. **Алгоритм решения** рассмотрим на конкретном примере: $\cos x > \frac{1}{2}$. Решением данного неравенства являются те участки оси OX , на которых график $y = \cos x$ **выше** графика $y = 1/2$:



На картинке всё тип-топ, но как получить это красивое решение аналитически?

Сначала **нужно решить соответствующее уравнение**: $\cos x = \frac{1}{2}$, по **общей формуле**:

$x = \pm \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, при этом **нас будут интересовать два корня, которые расположены близко к началу координат**. Очевидно, это корни $x = \pm \arccos \frac{1}{2} = \pm \frac{\pi}{3}$.

Таким образом, неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$ выполнено на интервале $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$ (*малиновая штриховка*) и из чертежа следует, что эта ситуация повторяется через каждые 2π радиан, то есть **решением данного неравенства является множество интервалов**:

$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, где $k \in \mathbb{Z} \dots$. Громоздко, но довольно просто ☺. Так, при

$k = -1$ получаем интервал, который левее: $\left(-\frac{\pi}{3} - 2\pi; \frac{\pi}{3} - 2\pi\right) = \left(-\frac{7\pi}{3}; -\frac{5\pi}{3}\right)$, а при $k = 1$

– интервал, который правее: $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi; \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \left(\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right)$ (*синие штриховки*).

Противоположному неравенству $\cos x < \frac{1}{2}$ соответствуют те участки оси OX , на которых график косинуса **ниже** прямой. Нетрудно выяснить, что это интервал $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$ и его «клоны», повторяющиеся через каждые 2π радиан: $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Если аргумент тригонометрической функции более сложный, например, $\cos 2x > \frac{1}{2}$ то неравенство удобно решить аналитически, используя некоторые геометрические факты и тот же алгоритм. График функции $y = \cos 2x$ имеет такой же вид, как и $y = \cos x$, только он сжат по горизонтали (как «гармошка») в два раза. Сначала решим соответствующее уравнение: $\cos 2x = \frac{1}{2}$. По **общей формуле**: $2x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, откуда

выражаем $x = \frac{\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2} = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$. Нас по-прежнему интересует два ближайших к нулю

угла, и это углы $x = \pm \frac{\pi}{6}$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$ график $y = \cos 2x$ расположен **выше** прямой $y = 1/2$ и эта ситуация повторяется через каждые (внимание!) π радиан (так как период сократился в 2 раза), таким образом, решение: $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

И обещанный вывод **формулы, выражающей косинус через синус** на примере простого аргумента («икс»). Из **основного тригонометрического тождества** выражаем $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, после чего извлекли корень из обеих частей: $\sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Теперь вспоминаем, **как извлекается этот корень**: $|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ и как **раскрывается**

модуль: $|\cos x| = \begin{cases} \cos x, & \text{если } \cos x \geq 0 \\ -\cos x, & \text{если } \cos x < 0 \end{cases}$

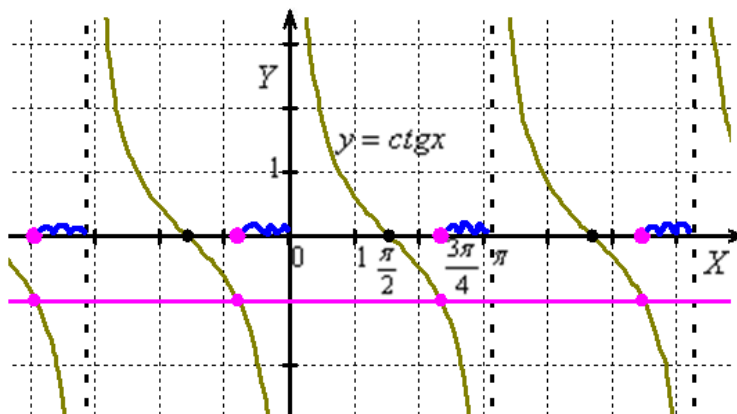
Решим неравенство $\cos x \geq 0$. График косинуса **не ниже** прямой $y = 0$ (оси OX) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и аналогичная ситуация повторяется через каждые 2π радиан. Таким образом, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$, то $|\cos x| = \cos x$, и мы получаем формулу со знаком «плюс»: $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Неравенство $\cos x < 0$, очевидно, выполнено на интервалах $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$ (анализируем чертёж выше), в этом случае мы получаем $|\cos x| = -\cos x$ и формулу со знаком «минус»: $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x}$

Аналогично с «зеркальной» формулой: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sqrt{\sin^2 x} = \sqrt{1 - \cos^2 x} \Rightarrow |\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x}$. **Синусоида** (представили в уме!) **не ниже** оси OX на отрезках $[0; \pi]$ и иже с ним, поэтому при этих значениях угла: $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$. Синусоида **ниже** оси OX на интервалах $(\pi; 2\pi)$ и иже с ним – при этих углах синус отрицателен, и в формуле следует поставить знак «минус»: $\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$

Таким образом, **простые неравенства можно решать устно!** – это доступно даже «чайнику», главное, помнить, как выглядят графики функций, и где они пересекают ось абсцисс. Следует также заметить, что во многих задачах высшей математики неравенство нужно решить только для одного (обычно первого) периода. Так, для неравенства $\sin x \geq 0$ берут лишь отрезок $[0; \pi]$, а для $\sin x < 0$ – лишь $(\pi; 2\pi)$.

И синусы (с тангенсами заодно) я очень скоро предложу вам для самостоятельного решения, после того, как мы разберём котангенс на примере неравенства $\operatorname{ctg} x \leq -1$.

Изобразим на чертеже график $y = \operatorname{ctg} x$ и прямой $y = -1$:



Нашему неравенству соответствуют те участки оси OX , где график котангенса **не выше** прямой. Рассмотрим «главный» период котангенса (от 0 до «пи») и найдём «иксовую» координату точки пересечения графиков:

$$x = \operatorname{arccctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}.$$

Таким образом, получаем полуинтервал $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$ и, очевидно, эта ситуация

повторяется через каждые π радиан: $x \in \left[\frac{3\pi}{4} + \pi k; \pi + \pi k\right), \quad k \in \mathbf{Z}$

Легко понять, что противоположному неравенству $\operatorname{ctg} x > -1$ соответствует интервал $\left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$ (где котангенс **выше** прямой) и его «клоны»: $x \in \left(\pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$

Ну а неравенства $\operatorname{ctg} x > 0$, $\operatorname{ctg} x < 0$ вообще решаются устно: $\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right)$

Если аргумент с множителем, например, $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} > 0$, то можно использовать тот же шаблон:

$\frac{x}{3} \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ и для того, чтобы выразить «икс», нужно умножить на три каждую

границу: $x \in \left(3\pi k; 3\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)\right) = \left(3\pi k; \frac{3\pi}{2} + 3\pi k\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$ График $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$ имеет такую же форму, как и $y = \operatorname{ctg} x$, но растянут по горизонтали в 3 раза (т.е. период был π , а стал 3π).

И в заключение обещанный пункт для самостоятельного решения:

ж) Решить неравенства: $\sin x < 1$, $-2\cos x - 3 \geq 0$, $\sqrt{2}\sin x - 1 > 0$ если $0 \leq x \leq 2\pi$ (найти решение на первом периоде), $\sin \frac{x}{2} < 0$, $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} 3x \leq \sqrt{3}.$

И я Вас поздравляю с успешным (надеюсь) завершением курса!

Должен сказать, в нём есть что-то сакральное. Дело в том, что я получил советское образование и окончил 10 классов, и сейчас у меня получилось ровно 100 страниц (по 10 на класс) и ровно 10 заданий для самостоятельного решения! Причём и то и другое вышло совершенно непреднамеренно – я ничего не сокращал и ничего не «подгонял», разве что междустрочные интервалы. **До скорых встреч в курсе высшей математики!**

Решения и ответы

Задание 1. Решение:

а) $|4| = 4$, $|-1| = 1$, $\left|-\frac{10}{3}\right| = \frac{10}{3}$. Это удалённость этих чисел до начала координат.

Вычислим расстояния между числами: $|3 - (-2)| = |3 + 2| = |5| = 5$ либо $|-2 - 3| = |-5| = 5$;
 $|-7 - (-13)| = |-7 + 13| = |6| = 6$ либо $|-13 - (-7)| = |-13 + 7| = |-6| = 6$.

б) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$, $10^0 = 1$, $(-a)^3 = (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) = -a^3$,
 $(-b)^4 = (-b) \cdot (-b) \cdot (-b) \cdot (-b) = b^4$, при $x = -1$ значение функции равно:
 $y = -(-1)^2 + 2 \cdot (-1) = -(-1) \cdot (-1) - 2 = -1 - 2 = -3$

в) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$, корень $\sqrt{43}$ нацело или частично не извлекается, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{72} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$, $\sqrt{121} = 11$, $\sqrt{1000} = \sqrt{100 \cdot 10} = 10\sqrt{10}$,
 $\sqrt{1875} = \sqrt{25 \cdot 25 \cdot 3} = 5 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{-81} = \sqrt[3]{(-3)^3 \cdot 3} = -3\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{-16}$ – из отрицательных чисел чётные корни извлекать нельзя. Но если хочется, то **можно** ☺

$$\text{г) } \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}, \quad -\frac{1}{\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{7},$$
$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2 \cdot 2^3}} = \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{2^3}}{2}$$

д) $3 \cdot 2^2 + 1 = 3 \cdot 4 + 1 = 12 + 1 = 13$, $3 \cdot (2^2 + 1) = 3 \cdot (4 + 1) = 3 \cdot 5 = 15$, «одноранговые» действия можно выполнять в любом порядке: $\frac{6 \cdot 5}{3} = \frac{30}{3} = 10$ либо так: $\frac{6}{3} \cdot 5 = 2 \cdot 5 = 10$.

$$\left(\frac{\sqrt[3]{-8}}{2} - 1\right)^3 = \left(\frac{-2}{2} - 1\right)^3 = (-1 - 1)^3 = (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

$\sqrt{13 - 2 \cdot 7} = \sqrt{13 - 14} = \sqrt{-1}$ – действительного решения не существует.

$$-2(x - \sqrt{9} - 3(1 - 2)) = -2(x - 3 - 3 \cdot (-1)) = -2(x - 3 + 3) = -2x$$

Задание 2. Решение:

а) 0,2 – «ноль целых, две десятых»: $0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

$-1,34$ – «минус одна целая, тридцать четыре сотых»: $-1\frac{34}{100}$, сокращаем дробную

часть на два: $-1\frac{17}{50}$ и поскольку число отрицательное, то используем формулу

$$-A\frac{a}{b} = -\frac{A \cdot b + a}{b}: \quad -1\frac{17}{50} = -\frac{1 \cdot 50 + 17}{50} = -\frac{67}{50}.$$

2,625 – «две целых, шестьсот двадцать пять тысячных»: $2\frac{625}{1000}$, сокращаем

дробную часть на 125: $2\frac{5}{8}$. По формуле $A\frac{a}{b} = \frac{A \cdot b + a}{b}$: $2\frac{5}{8} = \frac{2 \cdot 8 + 5}{8} = \frac{21}{8}$.

$$\begin{aligned} б) \frac{\sqrt{8}}{3} \cdot \frac{9}{4} &= \frac{2\sqrt{2} \cdot 9}{3 \cdot 4} = \frac{1 \cdot \sqrt{2} \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, & \frac{6}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 &= \frac{6}{5} \cdot \left(-\frac{2^3}{3^3}\right) = -\frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 27} = -\frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 9} = -\frac{16}{45}, \\ -3 \cdot \frac{2x}{7} \cdot \left(-\sqrt{\frac{25}{9}}\right) &= 3 \cdot \frac{2x}{7} \cdot \frac{5}{3} = \frac{3 \cdot 2x \cdot 5}{7 \cdot 3} = \frac{10x}{7}, & \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \frac{10}{3xy} \cdot \frac{2y^2}{5} &= \frac{x^2 \cdot 10 \cdot 2y^2}{4 \cdot 3xy \cdot 5} = \frac{x \cdot 2 \cdot y}{2 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{xy}{3} \\ \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 &= \frac{1}{16} \cdot \frac{5}{25} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{80} \end{aligned}$$

$$в) \frac{-3}{\frac{3}{7}} = -\frac{3 \cdot 7}{3} = -7, \quad \frac{\frac{6}{13}}{\frac{2}{13 \cdot 2}} = \frac{6}{13 \cdot 2} = \frac{3}{13}, \quad \frac{\frac{11}{5}}{\frac{2}{5 \cdot 2}} = \frac{11 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{33}{10}$$

$$з) \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}, \quad \frac{5}{6} - 2 = \frac{5}{6} - \frac{12}{6} = -\frac{7}{6}, \quad -3 + 5 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{12}{4} + \frac{15}{4} = \frac{-12 + 15}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{8} - \frac{7}{12} = \frac{4}{24} + \frac{3 \cdot 3}{24} - \frac{7 \cdot 2}{24} = \frac{4 + 9 - 14}{24} = -\frac{1}{24}, \quad \frac{\frac{3}{14} + \frac{5}{21}}{\frac{21}{3}} - \text{здесь можно выполнить}$$

почленное деление: $\frac{\frac{3}{14} + \frac{5}{21}}{\frac{21}{3}} = \frac{3}{14 \cdot 3} + \frac{5}{21 \cdot 3} = \frac{1}{14} + \frac{5}{63} = \frac{9}{126} + \frac{5 \cdot 2}{126} = \frac{19}{126}$, но рациональнее

сначала сложить: $\frac{\frac{3}{14} + \frac{5}{21}}{\frac{21}{3}} = \frac{\frac{3 \cdot 3}{42} + \frac{5 \cdot 2}{42}}{\frac{21}{3}} = \frac{\frac{19}{42}}{\frac{21}{3}} = \frac{19}{42 \cdot 3} = \frac{19}{126}$, а в следующем примере без

вариантов, сначала складываем в знаменателе, затем делим: $\frac{\frac{2}{1 + \frac{3}{5}}}{\frac{2}{\frac{5}{5} + \frac{3}{5}}} = \frac{2}{\frac{8}{5}} = \frac{2 \cdot 5}{8} = \frac{5}{4}$

$$д) \frac{2}{x+1} - 1 = \frac{2}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = \frac{2 - (x+1)}{x+1} = \frac{2 - x - 1}{x+1} = \frac{1 - x}{x+1}$$

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{x^3} - \text{в качестве общего знаменателя выбираем } Z = 2x^3. \text{ Вычислим}$$

дополнительные множители: $d_1 = \frac{2x^3}{2x} = x^2$, $d_2 = \frac{2x^3}{x^3} = 2$, таким образом:

$$\frac{1 \cdot x^2}{2x \cdot x^2} + \frac{1 \cdot 2}{x^3 \cdot 2} = \frac{x^2 + 2}{2x^3}$$

$$\frac{2}{3x} - \frac{x}{x-2} + \frac{1}{2(x-2)^2} - \text{в качестве общего знаменателя выбираем } Z = 6x(x-2)^2.$$

Вычислим доп. множители: $d_1 = \frac{6x(x-2)^2}{3x} = 2(x-2)^2$, $d_2 = \frac{6x(x-2)^2}{x-2} = 6x(x-2)$,

$d_3 = \frac{6x(x-2)^2}{2(x-2)^2} = 3x$. Таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3x} - \frac{x}{x-2} + \frac{1}{2(x-2)^2} &= \frac{2 \cdot 2(x-2)^2}{3x \cdot 2(x-2)^2} - \frac{x \cdot 6x(x-2)}{(x-2) \cdot 6x(x-2)} + \frac{3x}{2(x-2)^2 \cdot 3x} = \\ &= \frac{4(x-2)^2}{6x(x-2)^2} - \frac{6x^2(x-2)}{6x(x-2)^2} + \frac{3x}{6x(x-2)^2} = \frac{4(x-2)^2 - 6x^2(x-2) + 3x}{6x(x-2)^2} \end{aligned}$$

$$e) \frac{3x}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}}} = \frac{3x}{\sqrt{\frac{4}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} = \frac{3x}{\sqrt{\frac{6}{4}}} = \frac{3x \cdot 2}{\sqrt{6}} = \frac{6x}{\sqrt{6}} = \frac{6x \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{6}x}{6} = \sqrt{6}x,$$

в следующем примере можно сначала выполнить почленное деление, а затем привести к

общему знаменателю: $\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3y}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{3y}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{3y \cdot 2\sqrt{x}}{x \cdot 2\sqrt{x}} = \frac{1+6\sqrt{x}y}{2x\sqrt{x}}$, а можно

сначала привести, а затем разделить: $\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3y}{x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3y \cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1+6\sqrt{x}y}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{1+6\sqrt{x}y}{2x\sqrt{x}}.$

$$\frac{\frac{2ab}{a^2-5a}}{b} = \frac{\frac{2ab}{a^2-5ab}}{\frac{b}{b}} = \frac{2ab^2}{a^2-5ab}$$

Задание 3. Решение:

а) Среди чисел выделяем три подгруппы подобных слагаемых:

$$1+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-5-3\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+7 = \\ = (1-5+7) + (2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\sqrt{3}) + (3\sqrt{2}+\sqrt{2}) = 3+0+4\sqrt{2} = 3+4\sqrt{2}$$

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

$$a(1+b)-ab^2-(1+ab)=a+ab-ab^2-1-ab=-ab^2+a-1$$

$$3\pi+2\pi x-\pi(1-x)=3\pi+2\pi x-\pi+\pi x=2\pi+3\pi x$$

$$б) \frac{1}{2}x(x-2x^2)=\frac{x^2}{2}-x^3, \quad (xy+1)(1-\sqrt[3]{x})=xy-x\sqrt[3]{x}y+1-\sqrt[3]{x},$$

$$(x-1)(x-\sqrt{x}+2)=x^2-x\sqrt{x}+2x-x+\sqrt{x}-2=x^2-x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}-2,$$

$$x(x+1)(x-2)=(x^2+x)(x-2)=x^3-2x^2+x^2-2x=x^3-x^2-2x,$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x^2-2x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=x^2-x+\frac{1}{4},$$

$$(\sqrt{2}x+1)^2=(\sqrt{2}x)^2+2\sqrt{2}x\cdot 1+1^2=2x^2+2\sqrt{2}x+1,$$

$$(x-2)(x+1)(2x+4)=(x-2)(x+1)\cdot 2(x+2)=2(x-2)(x+2)(x+1)=2(x^2-4)(x+1)= \\ =2(x^3+x^2-4x-4)=2x^3+2x^2-8x-8$$

$$(2x+3y)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot 3y+3\cdot 2x\cdot(3y)^2+(3y)^3=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$$

$$(x^2+x+1)(x-1)=x^3+x^2+x-x^2-x-1=x^3-1, \text{ также здесь можно использовать}$$

формулу $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$, если, конечно, её увидели ☺

в) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, $(b-a)^2=b^2-2ba+a^2$ – в результате мы получили то же самое (с точностью до перестановки слагаемых и множителей), таким образом:

$$(a-b)^2=(b-a)^2$$

Второй способ: $(a-b)^2=(-(-a+b))^2=(-1)^2\cdot(b-a)^2=(b-a)^2$

Формулу $(a+b)^4$ можно вывести несколькими способами, например, так:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)^2 \cdot (a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2) = \\ &= a^4 + 2a^3b + b^2a^2 + 2a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3 + b^2a^2 + 2ab^3 + b^4 = \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

Вторую формулу легче всего получить из уже выведенной формулы:

$$\begin{aligned}(a-b)^4 &= (a+(-b))^4 = a^4 + 4a^3(-b) + 6a^2(-b)^2 + 4a(-b)^3 + (-b)^4 = \\ &= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) \quad a^3 - 3a^2 &= a^2(a-3), \quad x^2y + xy^2 = xy(x+y), \quad x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}), \\ x^2 + 4x + 4 &= x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 = (x+2)^2, \quad 9x^2 - 6x + 1 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x + 1^2 = (3x-1)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^3 + x^2 - x - 1 &= x^2(x+1) - 1 \cdot (x+1) = (x^2-1)(x+1), \\ x^3 + 8 &= x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4) \quad (\text{по формуле } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)), \\ x - x^4 &= x(1 - x^3) = x(1-x)(1+x+x^2) \quad (\text{по формуле } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)), \\ 8x^3 - 12x^2y - y^3 + 6xy^2 &= (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2y + 3 \cdot 2xy^2 - y^3 = (2x-y)^3.\end{aligned}$$

$$д) \quad \frac{x^2+2x}{x\sqrt{x}} = \frac{x(x+2)}{x\sqrt{x}} = \frac{x+2}{\sqrt{x}}, \quad \frac{2ab^2}{a^2-5ab} = \frac{2ab^2}{a(a-5b)} = \frac{2b^2}{a-5b}, \text{ и после сокращения}$$

$$\text{следует иметь в виду, что } a \neq 0. \quad \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} \quad (x \neq 1),$$

$$\frac{2x+4}{x^3-4x} = \frac{2(x+2)}{x(x^2-4)} = \frac{2(x+2)}{x(x+2)(x-2)} = \frac{2}{x(x-2)} \quad (x \neq -2), \quad \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2} = \frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{x-y}{x+y}$$

Задание 4. Решение:

$$а) \quad x^2 \cdot (x^3)^4 = x^2 \cdot x^{12} = x^{14}, \quad \frac{(2xy^2)^3}{4x^2} = \frac{8x^3y^6}{4x^2} = 2xy^6, \quad 3ab^2 \cdot (ab)^{-2} = \frac{3ab^2}{a^2b^2} = \frac{3}{a},$$

$$\frac{e^{x^2} \cdot e^{-x}}{e^2} = e^{x^2-x} \cdot e^{-2} = e^{x^2-x-2}, \quad (e^{x^2})^2 = e^{2x^2}, \quad (2^x)^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{x} \cdot x} = 2^1 = 2, \quad x^{x^x} - a \text{ тут}$$

действий выполнить нельзя, так как это x в степени x^x , не путайте с $(x^x)^x = x^{x \cdot x} = x^{x^2}$

$$б) \quad \sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{9}{6} + \frac{4}{6}} = x^{\frac{13}{6}} = \sqrt[6]{x^{13}}, \quad \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = x^{\frac{9}{6} - \frac{4}{6}} = x^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{x^5},$$

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}} = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = x^{\frac{4}{6} - \frac{9}{6}} = x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}, \quad x^2 \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^5} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{4}} = x^{2 + \frac{2}{4} + \frac{5}{4}} = x^{\frac{15}{4}} = \sqrt[4]{x^{15}},$$

$$\frac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x}}{x} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{-1} = x^{\frac{2}{6} + \frac{1}{6} - \frac{6}{6}} = x^{-\frac{3}{6}} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$в) \quad \frac{2x + \sqrt{x}}{x^2} = \frac{2x}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}, \quad \frac{1-x+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

$$\frac{x\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3} - 2x}{x^3\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{x^3\sqrt{x}} + \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{4}{3}}\sqrt{x}} - \frac{2x}{x^3\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{-\frac{4}{3}} - \frac{2}{x^{\frac{5}{2}}} = x^{\frac{1}{6}} + x^{-\frac{7}{12}} - \frac{2}{x^{\frac{5}{2}}} = \sqrt[6]{x} + \frac{1}{\sqrt[12]{x^7}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

з) $\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x(x+1)}$ – в качестве общего знаменателя выбираем $Z = x(x+1)$, вычислим

дополнительные множители: $d_1 = \frac{x(x+1)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}(x+1)$, $d_2 = \frac{x(x+1)}{x(x+1)} = 1$, таким образом:

$$\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{2 \cdot \sqrt{x}(x+1)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}(x+1)} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{2\sqrt{x}(x+1) - 1}{x(x+1)}.$$

$\frac{3}{2\sqrt[3]{x}} + \frac{5}{4\sqrt[4]{x}}$ – в качестве общего знаменателя выбираем $Z = 4\sqrt[3]{x}$, вычислим

дополнительные множители: $d_1 = \frac{4\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}} = 2$, $d_2 = \frac{4\sqrt[3]{x}}{4\sqrt[4]{x}} = x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}$, таким образом:

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{x}} + \frac{5}{4\sqrt[4]{x}} = \frac{3 \cdot 2}{2\sqrt[3]{x} \cdot 2} + \frac{5 \cdot \sqrt[12]{x}}{4\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[12]{x}} = \frac{6 + 5\sqrt[12]{x}}{4\sqrt[3]{x}}$$

$$\text{Аналогично: } \frac{3}{x} + \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[6]{x}} = \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot \sqrt{x} - 3\sqrt[6]{x^5}}{3x} = \frac{9 + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[6]{x^5}}{3x}$$

$$\text{д) } \sqrt[6]{36} = \sqrt[6]{6^2} = \sqrt[3]{6}, \quad \frac{\sqrt{x^5}}{x} = \frac{\sqrt{x^4 \cdot x}}{x} = \frac{x^2 \sqrt{x}}{x} = x\sqrt{x}, \quad \sqrt[4]{x^9} = \sqrt[4]{x^8 \cdot x} = x^2 \cdot \sqrt[4]{x},$$

$$\sqrt{8x^6} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{x^{3 \cdot 2}} = 2\sqrt{2}|x^3|, \quad \sqrt[3]{(-x)^3} = \sqrt[3]{(-1)^3 \cdot x^3} = -\sqrt[3]{x^3} = -x,$$

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt[4]{x-1}}} \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt[4]{\sqrt[4]{x-1}}}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt[4]{x-1}} = \frac{1}{\sqrt[8]{x-1}}, \quad (\sqrt[4]{(x^2+1)^3})^{\frac{4}{3}} = \sqrt[4]{(x^2+1)^{\frac{4 \cdot 3}{3}}} = \sqrt[4]{(x^2+1)^4} = x^2 + 1 -$$

знак модуля тут не нужен, поскольку $x^2 + 1 > 0$.

Задание 5. Решение:

а) Сначала определим количество членов прогрессии. Используем формулу

$a_n = a_1 + d(n-1)$, в данном случае $a_1 = 8$, $a_n = 302$, $d = 7$:

$$302 = 8 + 7(n-1), \text{ решаем уравнение:}$$

$$302 = 8 + 7n - 7$$

$$302 = 1 + 7n$$

$$7n = 302 - 1 = 301, \text{ откуда следует, что } n = \frac{301}{7} = 43$$

Сумму вычислим по формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$:

$$S_{43} = \frac{8 + 302}{2} \cdot 43 = \frac{310}{2} \cdot 43 = 155 \cdot 43 = 6665$$

$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)$ – используем ту же формулу, в данном случае

$a_1 = 1$, $a_n = 2n-1$, а количество членов является переменной величиной n , таким образом:

$$S_n = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = \frac{2n}{2} \cdot n = n \cdot n = n^2$$

б) Данная прогрессия содержит только пять членов и поэтому её сумму нетрудно вычислить напрямую:

$$1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \frac{16}{81} = \frac{81}{81} - \frac{2 \cdot 27}{81} + \frac{4 \cdot 9}{81} - \frac{8 \cdot 3}{81} + \frac{16}{81} = \frac{81 - 54 + 36 - 24 + 16}{81} = \frac{55}{81}, \text{ либо}$$

используем формулу $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, в данном случае $b_1 = 1$, $q = -\frac{2}{3}$:

$$S_5 = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^5\right)}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1 + \frac{32}{243}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{243}{243} + \frac{32}{243}}{\frac{3}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{275}{243}}{\frac{5}{3}} = \frac{275 \cdot 3}{243 \cdot 5} = \frac{55 \cdot 1}{81 \cdot 1} = \frac{55}{81}$$

Вторая прогрессия является бесконечно убывающей, поэтому $S = \frac{b_1}{1-q}$. В данном

случае $b_1 = 2$, а основание выясним, разделив второй член на первый: $q = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$, таким

образом: $S = \frac{2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{3}{4}} = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

Для последней прогрессии используем ту же формулу для $b_1 = \frac{1}{5}$, $q = \frac{1}{5}$:

$$S = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{4}, \text{ вот такие вот дела.}$$

Задание 6. Решения: а)

Раскроем слева скобки:

$$x - 2 - 4x = 3 - \frac{1}{2}x, \text{ перенесем все «иксы»}$$

налево, а числа направо:

$$-3x + \frac{1}{2}x = 3 + 2$$

Приведём подобные слагаемые:

$$-\frac{6}{2}x + \frac{1}{2}x = 5$$

$$-\frac{5}{2}x = 5$$

Умножим обе части на $-\frac{2}{5}$:

$$-\frac{5}{2}x \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = 5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)$$

Ответ: $x = -2$

Не забываем о проверках!

Преобразуем числитель левой части:

$$x + (3x - 2(1 - x)) = x + (3x - 2 + 2x) =$$

$$= x + 3x - 2 + 2x = 6x - 2$$

Таким образом, получаем уравнение:

$$\frac{6x - 2}{4x + 3} = \frac{2}{5}$$

По правилу пропорции:

$$5(6x - 2) = 2(4x + 3)$$

$$30x - 10 = 8x + 6$$

$$30x - 8x = 6 + 10$$

$$22x = 16$$

$$x = \frac{16}{22}$$

Ответ: $x = \frac{8}{11}$

<p>Перенесём квадрат направо: $0 = 2(4x + 3) + 3x^2 - x^2$ и поменяем части местами: $2x^2 + 2(4x + 3) = 0$ разделим обе части на 2: $x^2 + 4x + 3 = 0$ Вычислим дискриминант: $D = 16 - 12 = 4 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{4} = 2$ Таким образом, корни: $x_1 = \frac{-4-2}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{-4+2}{2} = -1$ Ответ: $x_1 = -3, \quad x_2 = -1$</p>	<p>$2x^2 + 9x - 5 = 0$ Вычислим дискриминант: $D = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 81 + 40 = 121$ $\sqrt{D} = \sqrt{121} = 11$ Таким образом: $x_1 = \frac{-9-11}{2 \cdot 2} = \frac{-20}{4} = -5,$ $x_2 = \frac{-9+11}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ Ответ: $x_1 = -5, \quad x_2 = \frac{1}{2}$</p>
<p>$x^2 - 6x + 9 = 0$ Вычислим дискриминант: $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$, таким образом, уравнение имеет кратные корни: $x_{1,2} = \frac{-(-6)}{2}$, ответ: $x_{1,2} = 3$ Примечание: когда дискриминант равен нулю, можно использовать <i>формулы сокращенного умножения</i>: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ либо $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, в нашем примере: $x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 = 0$ $(x - 3)^2 = 0$, после чего корни понятны сразу, но такую возможность ещё нужно «углядеть».</p>	<p>$x^3 + x^2 = 0$ – вынесем x^2 за скобки: $x^2(x + 1) = 0$ Данное уравнение имеет три корня: $x_1 = -1, \quad x_{2,3} = 0$ (кратные корни). Примечание: корни стараемся располагать в порядке их возрастания.</p> <hr/> <p>$(x - 1)^3 = 8$ – для разрешения этого уравнения относительно «икс» нужно извлечь корень из обеих частей, в данном случае модуль не нужен: $\sqrt[3]{(x - 1)^3} = \sqrt[3]{8}$ $x - 1 = 2$, ответ: $x = 3$</p>
<p>$5 - 3x = 1$ 1) Решим уравнение $5 - 3x = 1$: $-3x = 1 - 5$ $-3x = -4$ «Сбросим» -3 в знаменатель правой части: $x_1 = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$ 2) Решим уравнение $5 - 3x = -1$: $-3x = -1 - 5$ $-3x = -6$ $x_2 = \frac{-6}{-3} = 2$ Ответ: $x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = 2$</p>	<p>Представим уравнение $x + 1 = x + 2$ в виде системы: $\begin{cases} x + 1 = x + 2, & \text{если } x + 1 \geq 0 \\ -(x + 1) = x + 2, & \text{если } x + 1 < 0 \end{cases}$ Первое уравнение не имеет решений, т.к. получается неверное числовое равенство. У второго уравнения корень должен удовлетворять условию $x < -1$: $-x - 1 = x + 2$ $-2x = 3$ Ответ: $x = -\frac{3}{2}$ (подходящий корень) Справочно: если в ходе решения получено верное числовое равенство, то корнями являются все значения «икс»; пример такого уравнения: $2x + 4 = 2(x + 2)$</p>

$1 - \frac{x}{3} < x + 2$ $-\frac{x}{3} - x < 2 - 1$ $-\frac{4x}{3} < 1, \text{ умножим обе части на } -\frac{3}{4}:$ $x > -\frac{3}{4}$ <p>Ответ: $x \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$</p>	<p>Неравенство $x^2 + 4x + 4 > 0$ можно решить методом интервалов, но есть путь короче, используем формулу $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$</p> <p>$(x + 2)^2 > 0$ – данному неравенству удовлетворяет любое значение «икс», кроме того, которое обращает основание степени в ноль: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$</p> <p>Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$</p>
---	--

Неравенство $x^3 - 2x \leq 0$ **решим методом интервалов**. Двучлен $x^3 - 2x$ определён для всех значений x . Решим соответствующее уравнение:

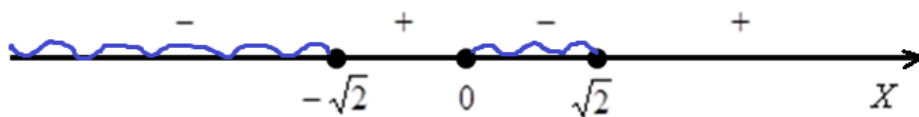
$$x^3 - 2x = 0$$

$$x(x^2 - 2) = 0, \text{ используем формулу } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b):$$

$$x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\text{Таким образом, корни: } x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{2}.$$

Отметим корни на числовой прямой и определим знаки двучлена $x^3 - 2x$ на полученных интервалах; пометим интервалы, удовлетворяющие неравенству $x^3 - 2x \leq 0$:



$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [0; \sqrt{2}]$$

Решим неравенство $\frac{x}{x^3 + 1} \geq 0$. Определим недопустимые значения переменной, в данном примере это те значения, которые обращают знаменатель в ноль:

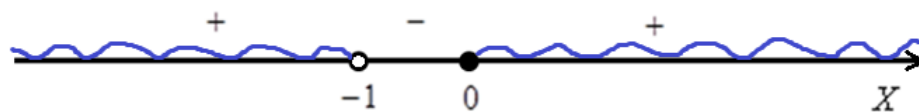
$$x^3 + 1 = 0, \text{ используем формулу } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2):$$

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

Данное уравнение имеет единственный действительный корень $x = -1$, поскольку **дискриминант** уравнения $x^2 - x + 1 = 0$ меньше нуля.

$$\text{И, очевидно, уравнению } \frac{x}{x^3 + 1} = 0 \text{ удовлетворяет единственный корень } x = 0.$$

Отметим на чертеже найденные точки и определим знаки дроби на полученных интервалах:



$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$$

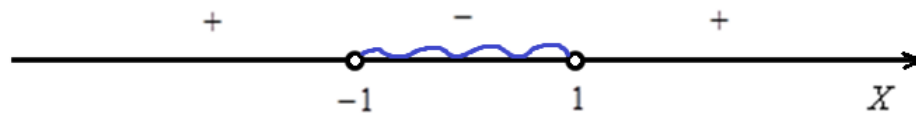
Решим неравенство $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 5} < 0$. Найдём недопустимые значения переменной:

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

Вычислим дискриминант:

$D = 4 - 20 = -16 < 0$, значит, действительных корней нет, и дробь определена при любом значении «икс».

Уравнение $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 5} = 0$ имеет два корня: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, которые следует «выколоть», поскольку неравенство у нас строгое. Определим знаки дроби на полученных интервалах, при этом удобно иметь в виду, что знаменатель $x^2 + 2x + 5 > 0$ при всех «икс»:



Ответ: $x \in (-1; 1)$

Неравенство $|\sqrt{2}x + 1| \leq 1$ **решим** через двойное неравенство:

$$-1 \leq \sqrt{2}x + 1 \leq 1$$

дабы избавиться от слагаемого-числа посредине, из всех частей вычтем оно:

$$-1 - 1 \leq \sqrt{2}x + 1 - 1 \leq 1 - 1$$

$$-2 \leq \sqrt{2}x \leq 0$$

чтобы избавиться от множителя в средней части, умножим все части на $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{2}x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\sqrt{2} \leq x \leq 0$$

Ответ: $x \in [-\sqrt{2}; 0]$

Неравенство $|1 - 2x| > \frac{1}{3}$ **решим** через совокупность неравенств:

$$\begin{cases} 1 - 2x < -\frac{1}{3} \\ 1 - 2x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

1) Решим неравенство $1 - 2x < -\frac{1}{3}$.

Перенесём единицу в правую часть со сменой знака:

$$-2x < -\frac{1}{3} - 1$$

$$-2x < -\frac{4}{3}$$

Чтобы получить слева «икс», умножим обе части на $-\frac{1}{2}$, и коль скоро это число отрицательное, то значок неравенства надо сменить на противоположный:

$$-2x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) > -\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x > \frac{2}{3} \text{ или } x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

2) Аналогично решим неравенство $1-2x > \frac{1}{3}$:

$$-2x > \frac{1}{3} - 1$$

$-2x > -\frac{2}{3}$, умножаем обе части на $-\frac{1}{2}$ со сменой значка неравенства:

$$x < \frac{1}{3} \text{ или } x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$$

Ответ – есть объединение найденных интервалов: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

в) Обыкновенную дробь $\frac{m}{n}$ называют правильной, если её числитель по модулю меньше знаменателя: $|m| < n$. Это означает, что он находится в пределах $-n < m < n$. Таким образом, любая правильная дробь по модулю меньше единицы (все поняли смысл?).

Обыкновенную дробь $\frac{m}{n}$ называют неправильной, если её числитель по модулю больше либо равен знаменателю: $|m| \geq n$. Это означает, что **или** $m \leq -n$, **или** $m \geq n$. Таким образом, любая неправильная дробь по модулю больше единицы.

Просто, кратко и удобно!

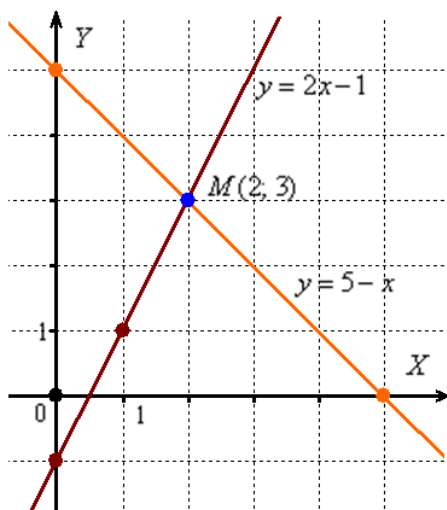
г) Обозначим через x длину детали и составим разность $x-200$ (в 1 сантиметре 10 миллиметров). Деталь признаётся бракованной, если эта разность по модулю больше половины миллиметра: $|x-200| > 0,5$ (в данном случае 0,5 удобнее, чем $1/2$). Это означает, что:

$$\begin{array}{ll} x-200 < -0,5 & x-200 > 0,5 \\ x < -0,5 + 200 & \text{или: } x-200 > 0,5 + 200 \\ x < -199,5 & x > 200,5 \end{array}$$

То есть, длина бракованной детали **или** меньше 19,95 см **или** больше 20,05 см.

д) Это означает, что максимальная относительная погрешность исправного прибора по модулю равна $|\delta_{\max}| = 0,2\%$, и при измерении будет допущена ошибка, которая попадёт в диапазон от $-0,2\%$ до $+0,2\%$ относительно истинного значения измеряемой величины.

Задание 7. Решение: а) Здесь нужно построить две прямые и определить точку их пересечения. Её координаты и будут решением системы.



Из первого уравнения выразим:

$$x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - x, \text{ выберем следующие}$$

опорные точки:

x	0	5
y	5	0

Для построения графика

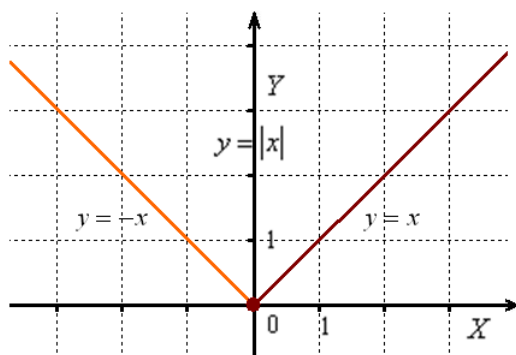
$$-2x + y = -1 \Rightarrow y = 2x - 1 \text{ удобно выбрать точки:}$$

x	0	1
y	-1	1

Из чертежа следует, что прямые пересекаются в точке $M(2; 3)$

Ответ: $x = 2, y = 3$.

б) Раскрываем модуль: $y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$



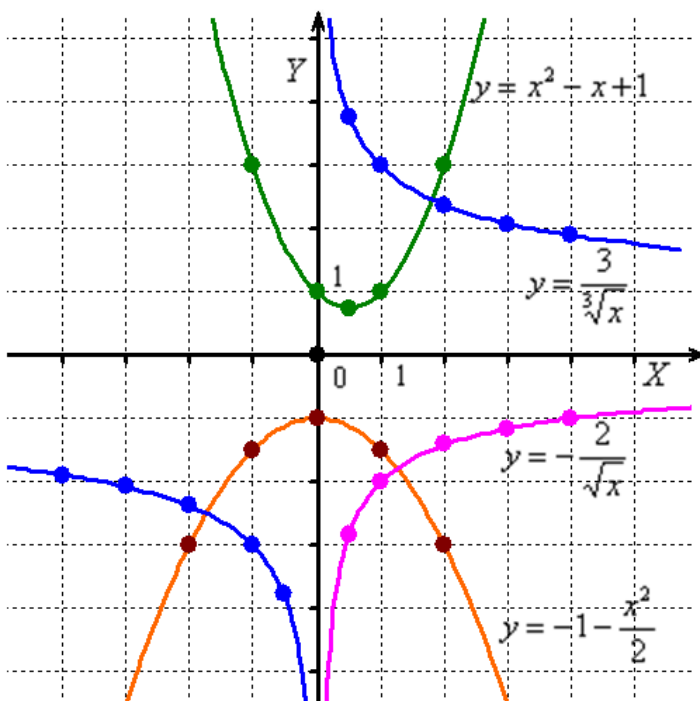
Такие функции называют **кусочными**.

Строим графики функций $y = -x$, $y = x$ на соответствующих промежутках.

Функция «модуль икс» – чётная, поскольку:

$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$, её график симметричен относительно оси OY .

в) Проверим на чётность / нечётность функцию $f(x) = x^2 - x + 1$:



$$f(-x) = (-x)^2 - (-x) + 1 = x^2 + x + 1.$$

$$f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x),$$

значит, данная функция не является чётной или нечётной.

При нахождении опорных точек нам сразу попадают симметричные, откуда понятно, где вершина:

x	0	1	-1	2	1/2
y	1	1	3	3	3/4

Проверим функцию $f(x) = -1 - \frac{x^2}{2}$:

$$f(-x) = -1 - \frac{(-x)^2}{2} = -1 - \frac{x^2}{2} = f(x),$$

значит, она чётная и с вершиной и опорными точками нет проблем.

Функция $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ определена лишь для $x > 0$ и поэтому не может быть чётной или нечётной. Найдём несколько опорных точек и изобразим ветвь гиперболы:

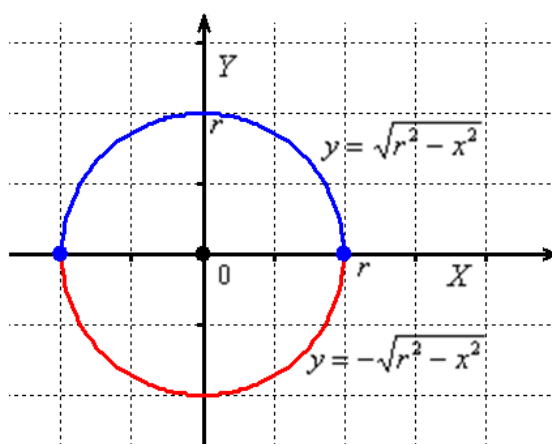
x	1/2	1	2	3	4
y	$\approx -2,83$	-2	$\approx -1,41$	$\approx -1,15$	-1

Исследуем функцию $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$: $f(-x) = \frac{3}{\sqrt[3]{-x}} = \frac{3}{-\sqrt[3]{x}} = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} = -f(x)$, значит, данная функция является нечётной и её график симметричен относительно начала координат. Для построения гиперболы достаточно найти несколько точек правой ветви:

x	1/2	1	2	3	4
y	$\approx 3,78$	3	$\approx 2,38$	$\approx 2,08$	$\approx 1,89$

Точки левой ветви находим из соображений симметрии или пользуясь аналитическим условием нечётности, например: $f(-1) = -3$.

г) Запишем уравнение в виде $y^2 = r^2 - x^2$ и извлечём квадратный корень из обеих частей: $\sqrt{y^2} = \sqrt{r^2 - x^2}$. Слева **нужно поставить модуль**: $|y| = \sqrt{r^2 - x^2}$ и **раскрыть его**:



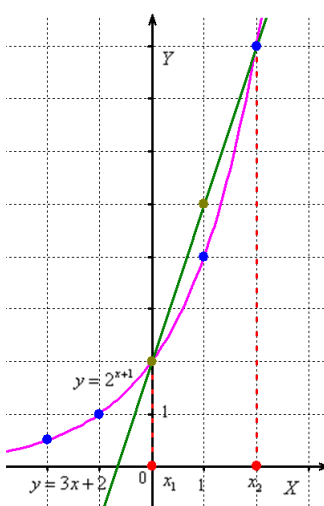
$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \text{ когда } y \geq 0;$$

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2}, \text{ когда } y < 0.$$

Первая функция задаёт верхнюю полуокружность (так как «игреки» неотрицательны), вторая функция – нижнюю полуокружность.

Область определения каждой функции: $D(y) = [-r; r]$. Очевидно, что обе функции чётные, их графики симметричны относительно оси OY .

Задание 8. Решение: а) Представим уравнение в виде $2^{x+1} = 3x + 2$ и построим графики функций $y = 2^{x+1}$, $y = 3x + 2$. Найдём следующие опорные точки:



для построения графика $y = 2^{x+1}$:

x	-2	-1	0	1	2
y	1/2	1	2	4	8

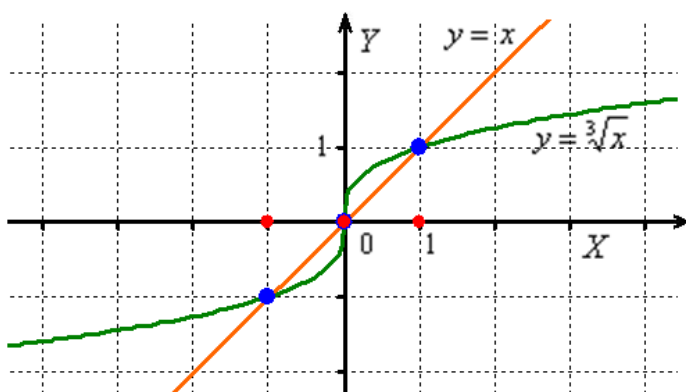
для построения прямой $y = 3x + 2$:

x	0	1
y	2	5

Корнями являются «иксовые» координаты точек пересечения графиков, в данном примере это значения:

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$ – самостоятельно подставьте их в исходное уравнение $2^{x+1} - 3x - 2 = 0$ и убедитесь в том, что получаются верные равенства.

Сначала решить соответствующее уравнение: $\sqrt[3]{x} - x = 0$, для этого представим его в виде $\sqrt[3]{x} = x$ и построим графики функций $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x$:

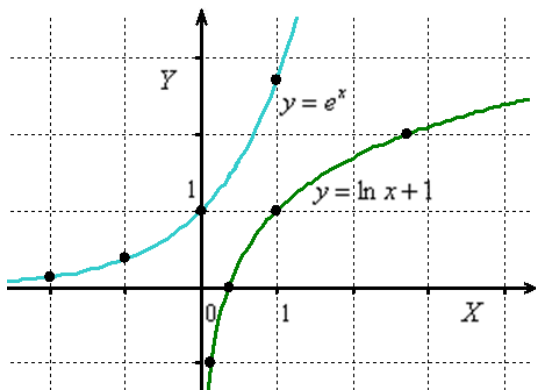


Из чертежа следует, что уравнение имеет три корня: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ (красные точки).

Неравенству $\sqrt[3]{x} - x > 0$ и равносильному ему неравенству $\sqrt[3]{x} > x$ соответствуют те промежутки, на которых график $y = \sqrt[3]{x}$ **выше** графика $y = x$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$

Представим неравенство $e^x - \ln x - 1 \leq 0$ в виде $e^x \leq \ln x + 1$ и изобразим на чертеже графики функций $y = e^x$, $y = \ln x + 1$ (чтобы построить второй график нужно «поднять» график $y = \ln x$ на одну единицу вверх).



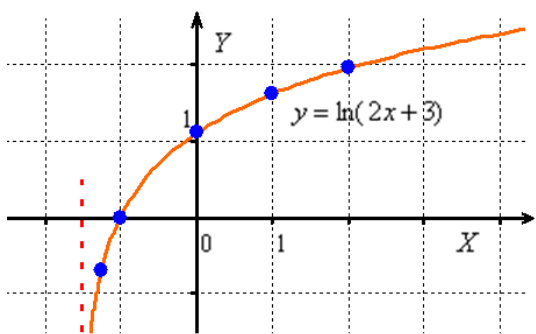
Внимание! Не путаем $\ln x + 1$ и $\ln(x + 1)$!

В первом случае единица никак не относится к логарифму – это просто два слагаемых, которые можно поменять местами: $1 + \ln x$.

Неравенству $e^x \leq \ln x + 1$ соответствуют те промежутки, на которых экспонента **не выше** графика второй функции. Однако она везде (на интервале $(0; +\infty)$) выше его.

Ответ: решений нет.

Построим график $y = \ln(2x + 3)$. Найдём асимптоту $2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3/2$



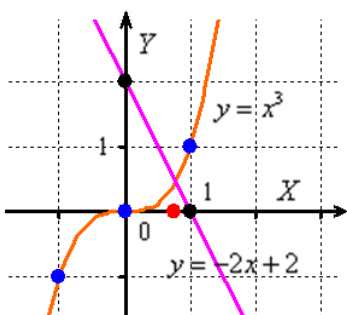
и опорные точки:

x	$-5/4$	-1	0	1	2
y	$\approx -0,69$	0	1	$\approx 1,61$	$\approx 1,95$

Неравенству $\ln(2x + 3) < 0$ соответствует промежуток, на котором график логарифма **ниже** оси абсцисс.

Ответ: $x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right)$

б) Решение представим уравнение в виде $x^3 = -2x + 2$ и изобразим на чертеже графики функций $y = x^3$, $y = -2x + 2$:



Из чертежа следует, что прямая пересекает кубическую параболу в единственной точке. «Икс-овая» координата этой точки и является корнем, «на глазок» он приближённо равен $x \approx 0,75$ (красная точка).

Данный корень является **иррациональным**, и в курсе высшей математики мы научимся находить такие корни с очень высокой точностью.

в) Дело в том, что $y = 2x^2 - 4x$ и $y = x^2 - 2x$ – это две **разные** функции с **разными** графиками. Следует, однако, заметить, что на два можно сократить обе части:

$\frac{y}{2} = x^2 - 2x$, получая **ту же самую** функцию в **неявном виде**. Уравнения же $2x^2 - 4x = 0$ и $x^2 - 2x = 0$ **равносильны** – по той геометрической причине, что параболы $y = 2x^2 - 4x$, $y = x^2 - 2x$ пересекают прямую $y = 0$ (ось OX) в **одних и тех же точках**, т.е. сокращение уравнения на два никак не затрагивает его корни.

з) $\log_{1/2} 2 = -1$, $\log_3 81 = 4$, $\log_5(-3)$ – не существует, $3\lg 10 = 3 \cdot 1 = 3$, $\ln e^2 = 2$ или можно так: $\ln e^2 = 2 \ln e = 2 \cdot 1 = 2$, в следующем примере используем основное логарифмическое тождество: $e^{2 \ln 5} = e^{\ln 5^2} = 5^2 = 25$, используем свойства логарифмов:

$$2 \log_2 3 + 3 \log_2 2 = \log_2 3^2 + \log_2 2^3 = \log_2 9 + \log_2 8 = \log_2 (9 \cdot 8) = \log_2 72 \approx 6,17$$

$$\frac{2}{\lg 5} - \log_5 4 = 2 \log_5 10 - \log_5 4 = \log_5 10^2 - \log_5 4 = \log_5 \frac{100}{4} = \log_5 25 = 2$$

д) Для разрешения уравнения $2^x = 4^x$ относительно «икс» прологарифмируем обе части: $\ln 2^x = \ln 4^x \Rightarrow x \ln 2 = x \ln 4$ – полученное уравнение обращается в верное числовое равенство при единственном значении: $x = 0$.

Примечание 1: семейство показательных функций $y = a^x$ пересекается в точке $(0; 1)$, таким образом, решение уравнения $2^x = 4^x$ легко усмотреть геометрически.

Примечание 2: уравнение $x \ln 2 = x \ln 4$ **ни в коем случае** нельзя сокращать на x ! **! уравнение нельзя сокращать на множитель, который содержит переменную.**

$\lg 3x = -1$ – по определению логарифма: $3x = 10^{-1} = \frac{1}{10} \Rightarrow x = \frac{1}{3 \cdot 10} = \frac{1}{30}$, не забываем о проверках! $\lg \left(3 \cdot \frac{1}{30} \right) = \lg \frac{1}{10} = \lg 10^{-1} = -1$, что и требовалось проверить.

$\ln(x^2 + 3) = 1 \Rightarrow x^2 + 3 = e^1 \Rightarrow x^2 = e - 3$ – данное уравнение не имеет действительных корней, поскольку $e - 3 < 0$.

Решим неравенство $\log_2(1 - 2x) \geq 3$. Найдём область определения логарифма:

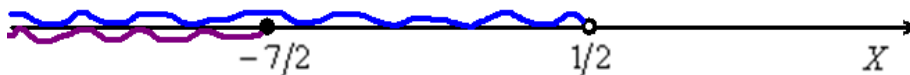
$1 - 2x > 0 \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$. Теперь решаем основное неравенство, для этого искусственно домножаем его правую часть:

$$\log_2(1 - 2x) \geq 3 \log_2 2 \text{ и «поднимаем» тройку:}$$

$\log_2(1 - 2x) \geq \log_2 2^3$, т.к. основание логарифма больше единицы, то в результате потенцирования знак неравенства не меняется:

$$1 - 2x \geq 8 \Rightarrow -2x \geq 7 \Rightarrow x \leq -\frac{7}{2}$$

В результате имеем систему $\begin{cases} x < 1/2 \\ x \leq -7/2 \end{cases}$, изобразим решения неравенств:



Решением системы и исходного неравенства является общая часть: $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{2} \right]$

Решим неравенство $\ln(x^2 + 2x + 2) < 0$. Найдём область определения логарифма:

$x^2 + 2x + 2 > 0$ – для решения этого неравенства решим соотв. уравнение:

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

Вычислим **дискриминант**: $D = 4 - 8 = -4 < 0$, следовательно, уравнение не имеет действительных корней. Берём любое «икс», удобно $x = 0$ и подставляем в неравенство:

$$0^2 + 2 \cdot 0 + 2 > 0$$

$2 > 0$ – в результате получено верное числовое неравенство, значит,

$x^2 + 2x + 2 > 0$ при любом значении «икс».

Примечание: также здесь есть простое геометрическое решение: **парабола** $y = x^2 + 2x + 2$ полностью лежит **над** осью OX (т.к. не пересекает ось и ветви направлены вверх), а значит, неравенству $x^2 + 2x + 2 > 0$ удовлетворяет любое x .

Решаем основное неравенство:

$$\ln(x^2 + 2x + 2) < 0 \ln e$$

$\ln(x^2 + 2x + 2) < \ln e^0$, поскольку основание логарифма больше единицы, то после потенцирования знак неравенство следует оставить прежним:

$$x^2 + 2x + 2 < 1$$

$$x^2 + 2x + 1 < 0$$

Для соответствующего уравнения $x^2 + 2x + 1 = 0$ вычислим дискриминант:

$D = 4 - 4 = 0$, значит, уравнение имеет кратные корни: $x_{1,2} = \frac{-2}{2} = -1$. Неравенство

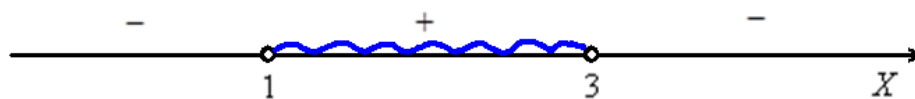
$x^2 + 2x + 1 < 0$ не имеет решений, поскольку при любом x получаем неверное числовое неравенство (это можно выяснить **аналитически** или геометрически – парабола $y = x^2 + 2x + 1$ касается оси OX в точке $x = -1$ и её ветви направлены вверх).

Вывод: неравенство $\ln(x^2 + 2x + 2) < 0$ не имеет решений.

Примечание: решением же $\ln(x^2 + 2x + 2) > 0$ является любое x кроме $x = -1$.

Решим неравенство $\ln \frac{1-x}{x-3} > 0$. Сначала найдём область определения: $\frac{1-x}{x-3} > 0$.

Данное неравенство решим **методом интервалов**:

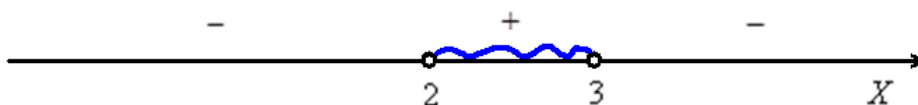


Решаем основное неравенство: $\ln \frac{1-x}{x-3} > 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x-3} > 1$ – для решения этого

неравенства перенесём единицу влево и **приведём разность к общему знаменателю**:

$$\frac{1-x}{x-3} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1-x-(x-3)}{x-3} > 0 \Rightarrow \frac{1-x-x+3}{x-3} > 0 \Rightarrow \frac{4-2x}{x-3} > 0$$

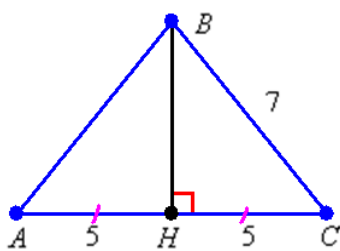
Неравенство решим **методом интервалов**:



Таким образом, имеем систему $\begin{cases} x \in (1; 3) \\ x \in (2; 3) \end{cases}$ и решением является интервал $x \in (2; 3)$

Задание 9. Решение:

а) Выполним схематический (без соблюдения пропорций) чертёж:



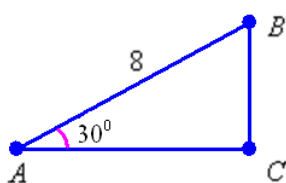
В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является медианой, т.е. делит основание на

равные части: $|AH| = |HC| = \frac{|AC|}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Рассмотрим

$\triangle BHC$, по теореме Пифагора: $|BH|^2 + |HC|^2 = |BC|^2$, откуда находим: $|BH| = \sqrt{|BC|^2 - |HC|^2} = \sqrt{7^2 - 5^2} = \sqrt{49 - 25} = \sqrt{24}$.

Ответ: $|BH| = 2\sqrt{6}$ ед. $\approx 4,9$ ед.

б) Выполним схематический чертёж:



По определению, $\sin \angle A = \frac{|BC|}{|AB|}$, $\cos \angle A = \frac{|AC|}{|AB|}$. По

Тригонометрической таблице находим: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Из вышеприведённых отношений **выражаем:**

$$|BC| = |AB| \cdot \sin \angle A = 8 \sin 30^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4, \quad |AC| = |AB| \cdot \cos \angle A = 8 \cos 30^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

И здесь напрашивается **проверка** по теореме Пифагора:

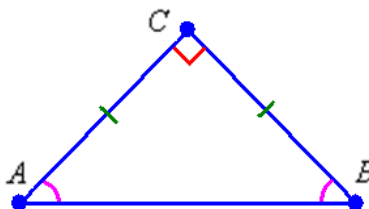
$$|BC|^2 + |AC|^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2 = 16 + 16 \cdot 3 = 16 + 48 = 64 = |AB|^2, \text{ откуда: } |AB| = \sqrt{64} = 8.$$

Площадь треугольника равна половине произведения стороны, на проведённую к ней высоту. Катет BC одновременно является и высотой к катету AC (и наоборот),

$$\text{поэтому: } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

Ответ: $|BC| = 4$ ед., $|AC| = 4\sqrt{3}$ ед., $S_{\triangle ABC} = 8\sqrt{3}$ ед.²

в) Тангенс острого угла – это отношение его противолежащей стороне к прилежащей: $\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AC}$. По условию, это отношение равно единице, а значит, катеты имеют равные длины:



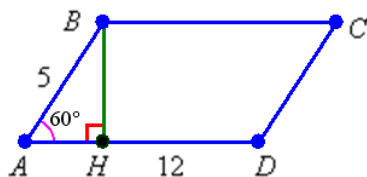
Таким образом, $\triangle ABC$ является не только прямоугольным, но ещё и равнобедренным. Углы при основании равнобедренного треугольника равны, поэтому $\angle A = \angle B = 45^\circ$. И в самом деле, если мы заглянем в Тригонометрическую таблицу, то обнаружим, что $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

И тут осталось местечко для последнего пункта, где чертёж не нужен:

е) По формуле длины окружности: $L = 2\pi r = 5\pi$, и из этого **уравнения** находим радиус: $r = \frac{5\pi}{2\pi} = \frac{5}{2}$. Вычислим площадь соответствующего круга: $S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25\pi}{4}$

Ответ: $S = \frac{25\pi}{4}$ ед.²

г) Выполним схематический чертёж:

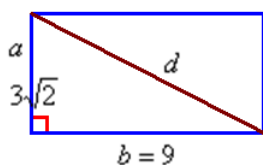


По формуле, $S = |AD| \cdot |BH|$. Найдём высоту BH . Для этого рассмотрим прямоугольный $\triangle ABH$ и отношение $\sin \angle A = \frac{|BH|}{|AB|}$. По триг. таблице, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, таким

образом: $|BH| = |AB| \cdot \sin 60^\circ = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. В результате: $S = |AD| \cdot |BH| = 12 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$.

Ответ: $S = 30\sqrt{3}$ ед.²

д) Выполним схематический чертёж:



Длину диагонали найдём с помощью теоремы Пифагора:

$$a^2 + b^2 = d^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 9^2} = \sqrt{18 + 81} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$$

Площадь прямоугольника: $S = ab = 3\sqrt{2} \cdot 9 = 27\sqrt{2}$.

Периметр: $p = 2a + 2b = 2 \cdot 3\sqrt{2} + 2 \cdot 9 = 6\sqrt{2} + 18 = 6(\sqrt{2} + 3)$.

Ответ: $d = 3\sqrt{11}$ см, $S = 27\sqrt{2}$ см.² $p = 6(\sqrt{2} + 3)$ см.

Задание 10. Решение:

а) Используем формулу $\alpha_{\text{рад}} = \frac{\alpha_{\text{град}} \cdot \pi}{180}$:

$$\frac{60 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{90 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{135 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{150 \cdot \pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$$

Используем формулу $\alpha_{\text{рад}} = \alpha_{\text{рад}} \cdot \frac{180}{\pi}$: $\frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 30^\circ$, $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 45^\circ$, $\pi \cdot \frac{180}{\pi} = 180^\circ$.

б) Используем нечётность синуса и таблицу: $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, **второй**

способ – добавим один период: $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \sin\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (по таблице).

«Скрутим» один период: $\cos\frac{8\pi}{3} = \left(\cos\frac{8\pi}{3} - 2\pi\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

«Скрутим» 3 периода: $\operatorname{tg} 3\pi = \operatorname{tg}(0 + 3\pi) = \operatorname{tg} 0 = 0$ (период тангенса равен «пи»).

Добавим один период: $\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{6} + \pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

в) Используем формулу приведения: $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}^2 x$.

Используем алгебраические действия и **тригонометрические формулы**:

$$\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = \cos^2 x \cdot 1 = \cos^2 x;$$

$$\frac{\cos^3 2x}{\sin^3 2x} = \left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right)^3 = (\operatorname{ctg} 2x)^3 = \operatorname{ctg}^3 2x;$$

Используем *формулу квадрата суммы* $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + \sin 2x;$$

$$(\operatorname{tg}^2 x + 1) \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x = \frac{1}{\cos x};$$

$$1 - 2\sin^2 x + 2\cos 2x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin^2 x + 2\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x + 2\cos 2x = \\ = \cos 2x + 2\cos 2x = 3\cos 2x;$$

$$\sin x - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2} \cdot 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2} \sin x.$$

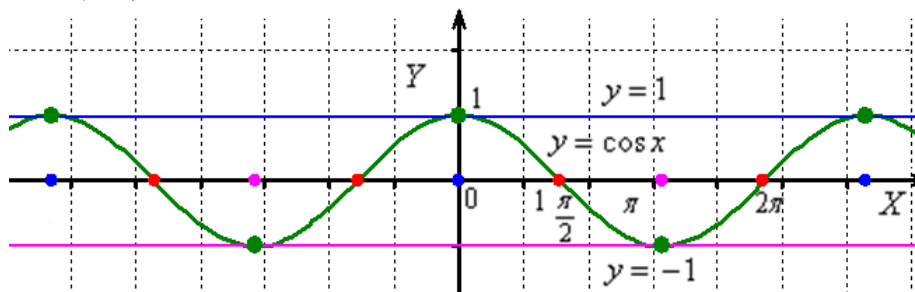
Понизим степень: $\sin^2 x \cos^2 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) =$ используем формулу

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2: = \frac{1}{4}(1 - \cos^2 2x) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(2 - 1 - \cos 4x)}{2} = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$$

Способ второй: $\sin^2 x \cos^2 x = (\sin x \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{4 \cdot 2} = \frac{1 - \cos 4x}{8}.$

$$(\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2 = \text{по формуле } a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2: \\ = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2}\right).$$

г) Изобразим на чертеже график $y = \cos x$ и прямые $y = -1$, $y = 1$ (прямая $y = 0$ – это ось абсцисс):



Решим уравнение $\cos x = -1$. График $y = -1$ пересекает синусоиду в точке с абсциссой $x = \pi$ и пересечения повторяются каждые 2π радиан, таким образом:

$$x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \text{ (малиновые точки).}$$

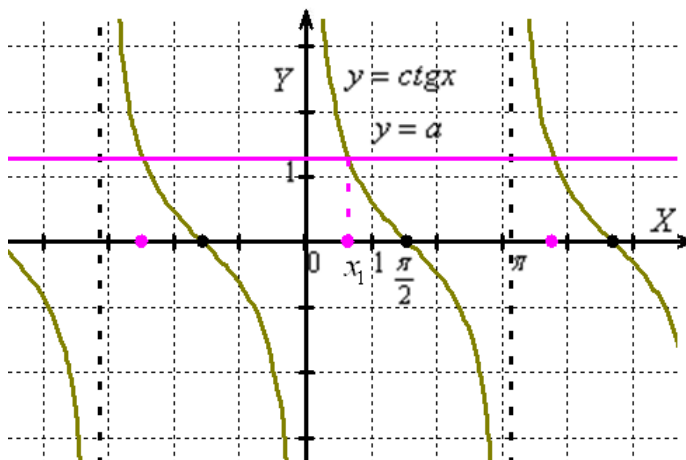
Решим уравнение $\cos x = 0$. Синусоида пересекается с осью OX в точке $x = \frac{\pi}{2}$ и пересечения повторяются каждые π радиан (красные точки), таким образом:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

И, наконец, уравнение $\cos x = 1$. График $y = 1$ пересекает синусоиду в точке с абсциссой $x = 0$ и пересечения повторяются каждые 2π радиан, таким образом:

$$x = 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \text{ (синие точки).}$$

д) Решим уравнение $\operatorname{ctgx} = a$. Изобразим на чертеже графики $y = \operatorname{ctgx}$, $y = a$ и определим «иксовую» координату их точки пересечения на «главном» периоде $(0; \pi)$ котангенса. Эта координата равна $x_1 = \operatorname{arccctga}$:



И, в силу периодичности котангенса, получаем решения:
 $x = \operatorname{arccctga} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ (малиновые точки). Из общей формулы легко получить частные, для $\operatorname{ctgx} = -1$:

$$x = \operatorname{arccctg}(-1) + \pi k = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

для $\operatorname{ctgx} = 0$:

$$x = \operatorname{arccctg}0 + \pi k = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \text{ и для}$$

$$\operatorname{ctgx} = 1: x = \operatorname{arccctg}1 + \pi k = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$$

е) Решим уравнение $\sin \frac{x}{2} = 1$. Используем частную формулу: $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Выразим искомое множество углов: $x = 2\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \pi + 4\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Преобразуем уравнение $3\cos 2x - 1 = 0$ к стандартному виду: $\cos 2x = \frac{1}{3}$.

Используем общую формулу: $2x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Выразим искомое множество

решений: $x = \frac{1}{2}\left(\pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k\right) = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$

Примечание: «плохое» значение $\arccos \frac{1}{3} \approx 1,23$ рад. оставляем в неизменном виде.

Уравнение $\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3}$ решим с помощью соответствующей общей формулы:

$$3x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ выразим «икс»}: x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Решим уравнение $\sin x \cos \frac{x}{4} = 0$. Произведение равно нулю, если равен нулю хотя бы один множитель, поэтому здесь нужно решить два отдельных уравнения и результаты объединить:

1) $\sin x = 0$, по частной формуле: $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

2) $\cos \frac{x}{4} = 0$, по частной формуле: $\frac{x}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = 2\pi + 4\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$

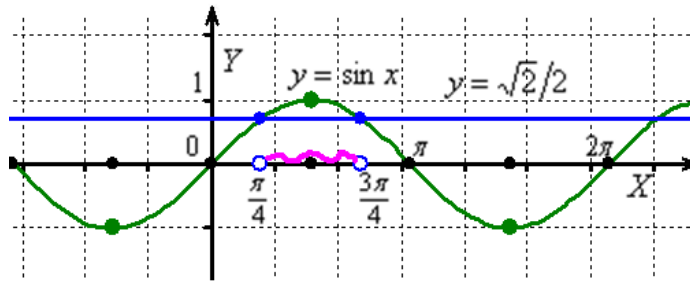
Все углы, полученные в пункте 2, входят во множество углов пункта 1, поэтому в **ответе** достаточно указать множество $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

ж) Неравенству $\sin x < 1$ удовлетворяют все значения x , кроме точек пересечения синусоиды и прямой: $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Умножим обе части неравенства $-2\cos x - 3 \geq 0$ на -1 , **сменив у него знак**:
 $2\cos x + 3 \leq 0$, далее: $2\cos x \leq -3 \Rightarrow \cos x \leq -3/2$ – **решений нет**, т.к. график косинуса лежит **над** прямой $y = -3/2$.

Преобразуем неравенство $\sqrt{2} \sin x - 1 > 0$ к виду $\sin x > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ и

изобразим на чертеже графики $y = \sin x$ и $y = \sqrt{2}/2 \approx 0,71$:



Найдём точки пересечения синусоиды и прямой, для этого решим соответствующее уравнение

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ по общей формуле}$$

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$$

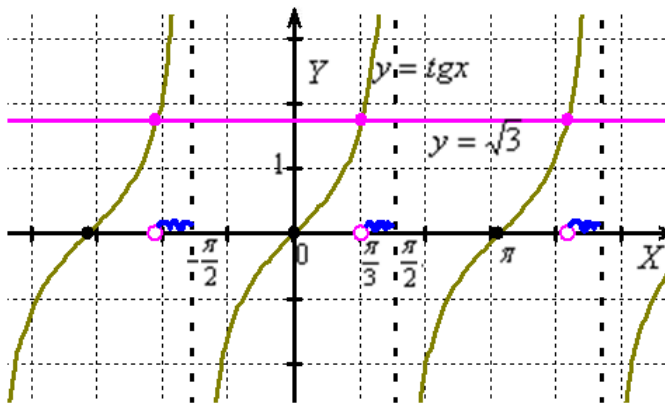
Нашему неравенству соответствуют те участки оси OX , где синусоида **выше** прямой, при этом нам нужно решить неравенство лишь на промежутке $0 \leq x \leq 2\pi$. Из чертежа следует, что этим условиям удовлетворяет единственный интервал, его концы найдём из общей формулы: $k = 0 \Rightarrow (-1)^0 \frac{\pi}{4} + \pi \cdot 0 = \frac{\pi}{4}$, $k = 1 \Rightarrow (-1)^1 \frac{\pi}{4} + \pi \cdot 1 = \frac{3\pi}{4}$.

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$

Для решения неравенства $\sin \frac{x}{2} < 0$ удобно использовать решение $\sin x < 0$.

Синусоида **ниже** оси OX на интервале $(\pi; 2\pi)$ (см. чертёж выше) и эта ситуация повторяется через каждые 2π радиан: $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$. Этот шаблон работает и для сложного аргумента: $\frac{x}{2} \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, осталось выразить «икс», умножив на два каждый интервал, **ответ:** $x \in (2(\pi + 2\pi k); 2(2\pi + 2\pi k)) = (2\pi + 4\pi k; 4\pi + 4\pi k)$.

Решим неравенство $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$, для этого построим графики $y = \operatorname{tg} x$, $y = \sqrt{3} \approx 1,73$:



И найдём их точки пересечения, для этого решим уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$:

$$x = \arctg \sqrt{3} + \pi k = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Из чертежа следует, что график тангенса **выше** прямой на $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$, и это повторяется через каждые «пи» радиан: $x \in \left(\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$

Неравенство $\operatorname{tg} 3x \leq \sqrt{3}$ решим с помощью неравенства с простым аргументом: $\operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$. Из чертежа следует, что график тангенса **не выше** прямой на полуинтервале $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right]$ и иже с ним: $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right], \quad k \in \mathbf{Z}$. Используем этот шаблон для сложного аргумента: $3x \in \left[-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right]$ и выразим **ответ**, уменьшив каждый полуинтервал в 3 раза: $x \in \left[\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k\right); \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{3} + \pi k\right)\right] = \left[-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}\right]$.