Математика для анализа данных, МФТИ 2023/2024
Дискретная математика
Занятие #1

20 сентября 2023 г.

Основные понятия и обозначения, связанные с множествами и операциями над ними

- Множества определяются своими элементами. Запись $x \in M$ означает, что x является элементом множества M. В частности, все элементы множества должны быть разными.
- Говорят, что множество A является подмножеством множества B (запись: $A \subset B$), если все элементы A являются элементами B. Иногда для того, чтобы подчеркнуть возможное равенство A и B встречается эквивалентное обозначение $A \subseteq B$.
- Множества A и B равны (запись: $A = B$), если они содержат одни и те же элементы (другими словами, если $A \subset B$ и $B \subset A$).
- Пустое множество $\emptyset$ не содержит ни одного элемента и является подмножеством любого множества.
- Пересечение $A \cap B$ двух множеств A и B состоит из элементов, которые принадлежат обоим множествам A и B. Это записывают так:
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$$
(читается: множество таких x, что ...).
- Объединение $A \cup B$ состоит из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B:
$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}.$$
Примечание. Множества A и B, не имеющие общих элементов, называются дизъюнктными. Для объединения таких событий применяется термин “дизъюнктное объединение”, для которого иногда используется специальное обозначение $A \sqcup B$. Такая запись автоматически подразумевает, что $A \cap B = \emptyset$.
- Разность $A \setminus B$ состоит из элементов, которые принадлежат A, но не принадлежат B:
$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$
Если множество B является подмножеством множества A, разность $A \setminus B$ называют также дополнением B до A. Если рассматривается набор множеств $A, B, \ldots$, каждое из которых является подмножеством некоторого множества Ω (называющегося в таком случае *объемлющим*), то дополнения этих множеств до Ω обозначаются $\overline{A}, \overline{B}, \ldots$
- Симметрическая разность $A \Delta B$ состоит из элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств A и B:
$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$
- Через $\{a, b, c\}$ обозначается множество, которое содержит элементы a, b, c и не содержит других. Если среди a, b, c есть равные, оно может содержать один или два элемента. Подобное обозначение используется и в менее формальных ситуациях: множество членов последовательности $a_0, a_1, \ldots$ обозначается

$\{a_0, a_1, \ldots\}$ или даже $\{a_i\}$. Более аккуратная запись для того же множества такова: $\{a_i | i \in \mathbb{N}\}$, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

- Для любого множества X определено множество 2^X, состоящее из всех его подмножеств (булеан).

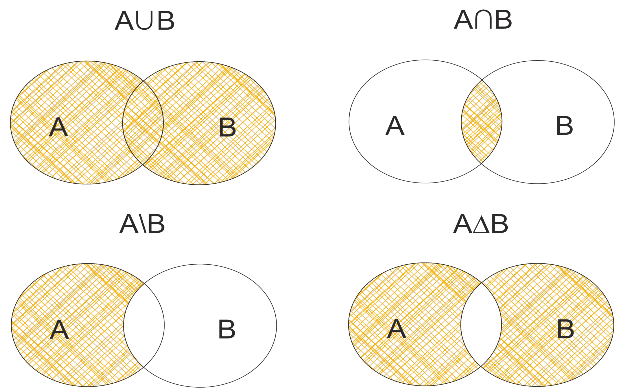

Рис. 1: Диаграммы Венна для множеств $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A\Delta B$.

Число элементов в конечном множестве A называют также его мощностью и обозначают $|A|$ (а также $\#A$).

Законы де Моргана.

Пусть $\{A_i\}$ – конечный или счётный набор множеств, каждое из которых является подмножеством Ω. Тогда выполняются следующие соотношения:

$$\Omega \setminus \cup_i A_i = \cap_i (\Omega \setminus A_i) \tag{1}$$

$$\Omega \setminus \cap_i A_i = \cup_i (\Omega \setminus A_i) \tag{2}$$

Доказательство утверждения (1): стандартный способ доказательства равенства множеств $A = B$ заключается в проверке выполнения вложений $A \subset B$ и $B \subset A$. Пусть $x \in \Omega \setminus \cup_i A_i$. Это означает по определению разности множеств, что x входит (синоним слова «принадлежит») в Ω, но не входит в $\cup_i A_i$. Тогда по определению объединения множеств x не входит ни в одно из множеств A_i. Но тогда $x \in \Omega \setminus A_i$ при всех i и по определению пересечения $x \in \cap_i (\Omega \setminus A_i)$.

Докажем теперь обратное вложение. Если $x \in \cap_i (\Omega \setminus A_i)$, то x принадлежит всем множествам $\Omega \setminus A_i$, откуда следует, что $x \in \Omega$, но ни при каком i элемент x не содержится в A_i. Но тогда $x \notin \cup_i A_i$ и $x \in \Omega \setminus \cup_i A_i$.

Утверждение (2) доказывается аналогично.

Докажите следующие равенства:

a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

c) $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$.

d) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$.

Доказательство:

a) $x \in (A \cup B) \cap C \leftrightarrow \{x \in A$ или $x \in B\}$ и $x \in C \leftrightarrow \{x \in A$ и $x \in C\}$ или $\{x \in B$ и $x \in C\} \leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

b) $x \in (A \cap B) \cup C \leftrightarrow \{x \in A$ и $x \in B\}$ или $x \in C \leftrightarrow \{x \in A$ или $x \in C\}$ и $\{x \in B$ или $x \in C\} \leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

c) $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A$ и $x \in B \leftrightarrow x \in A$ и $x \notin A \backslash B \leftrightarrow x \in A \backslash (A \backslash B)$.

d) $x \in A \backslash (B \backslash C) \leftrightarrow x \in A$ и $x \notin B \backslash C \leftrightarrow \{x \in A$ и $x \notin B\}$ или $\{x \in A$ и $x \in C\} \leftrightarrow x \in (A \backslash B) \cup (A \cap C)$.

Задачи.

Пусть даны множества A, B и C. Выразить следующие множества через A, B и C при помощи операций $\cup, \cap, \backslash$ и $\triangle$.

- Множество элементов, принадлежащих всем трём множествам.
- Множество элементов, принадлежащих хотя бы двум из множеств A, B и C.
- Множество элементов, принадлежащих ровно двум из множеств A, B и C.
- Множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B и C.
- Множество элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A, B и C.

Равномощные множества

Понятие мощности определено также и для бесконечных множеств следующим образом. Два множества называют равномощными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором каждому элементу одного множества соответствует ровно один элемент другого. Для конечных множеств это означает, что в них одинаковое число элементов, но определение имеет смысл и для бесконечных множеств. Например, отрезки $[0, 1]$ и $[0, 2]$ равномощны, поскольку отображение $x \leftrightarrow 2x$ осуществляет искомое соответствие.

Множество называется счётным, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел, то есть, если его можно представить в виде последовательности $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ (здесь x_i – элемент, соответствующий натуральному числу i; соответствие взаимно однозначно, так что все x_i должны быть различны). Например, множество целых чисел $\mathbb{Z}$ счётно, так как целые числа можно расположить в последовательность $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$

Задача. В отеле бесконечное счётное количество номеров. Все номера заняты туристами. Приехал ещё один турист. Как переразместить всех постояльцев, чтобы всем хватило места?

Решение. Эта задача эквивалентна нахождению взаимно-однозначного соответствия между множествами $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Поселим нового туриста в первой комнате; того, кто раньше жил в первой комнате переселим во вторую, из второй в 3ю, итд. Таким образом задаётся взаимно-однозначное соответствие между всеми туристами и всеми номерами комнат, значит всем хватит места.

Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел также счётно, поскольку все рациональные числа представляются несократимыми дробями с целым числителем и знаменателем. Множество простых дробей с каким-либо фиксированным знаменателем счётно, поэтому $\mathbb{Q}$ представимо в виде объединения счётного числа счётных множеств – а такое объединение всегда также является счётным.

Через $\mathbb{Q}$, как обычно, обозначается множество всех рациональных чисел на прямой $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Через $\mathbb{Q}_{[0;1]}$ будет обозначаться множество всех рациональных чисел из отрезка $[0; 1]$. Запись $\mathbb{Q}_{[0;1]} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет означать, что множество $\mathbb{Q}_{[0;1]}$ занумеровано некоторым образом.

Если $A \sim [0, 1]$, то говорят, что множество A имеет мощность континуума.

О несчётности отрезка $[0, 1]$. Предположим, что утверждение неверно, и множество $[0, 1]$ счётно. Это означает, что все точки отрезка $[0, 1]$ можно как-то занумеровать, т. е. $[0, 1] = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Выберем отрезок $I_1 = [a_1, b_1] \subset [0, 1]$ так, чтобы $x_1 \notin I_1$. Затем выберем отрезок $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1$ так, чтобы $x_2 \notin I_2$, и т. д. По индукции мы получим такую последовательность отрезков $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, что $x_n \notin I_n$. Согласно принципу вложенных отрезков существует точка

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Но тогда для любого n выполнено неравенство $x \neq x_n$, и мы приходим к противоречию.

Пример. Множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно множеству всех подмножеств натурального ряда. (В самом деле, сопоставим с каждой последовательностью множество номеров мест, на которых стоят единицы: например, последовательность из одних нулей соответствует пустому множеству, из одних единиц – натуральному ряду, а последовательность $10101010\ldots$ – множеству нечётных чисел).

Пример. Множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно множеству чисел отрезка $[0, 1]$. Действительно, взаимно-однозначное соответствие между элементами двух множеств можно построить на основе двоичного представления чисел отрезка $[0, 1]$.

Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, а также любые отрезки, интервалы и полуинтервалы на $\mathbb{R}$ несчётны (синоним – имеют мощность континуума), поскольку для каждого из них можно найти подмножество, равномощное $\mathbb{N}$, а обратное невозможно.

Комбинаторная задача о выборках

Пусть есть n различных предметов (можно считать их занумерованными числами от 1 до n), – и из этого множества нам нужно выбрать k элементов. Число различных возможных выборок зависит от двух обстоятельств:

- выборка упорядоченная или неупорядоченная;
- выборка с возвращением или без возвращения.

Найдите общее число различных выборок в каждом случае и постройте формальные описания множества разных исходов.

Решение.

Эта задача аналогична четырём случаям размещения k шаров по n ящикам:

a) Шары различимы, и в каждом ящике может быть любое количество шаров (соответствует упорядоченной выборке с возвращением). Множество исходов:

$$\Omega = \big\{\omega : \omega = (r_1, \ldots, r_k),\, r_i \in \{1, \ldots, n\}\big\},$$

где r_i – номер ящика для i-го шара; $|\Omega| = n^k$, поскольку для каждого из шаров возможны n разных размещений. Данный случай соответствует физической модели статистического ансамбля Максвелла-Больцмана.

b) Шары различимы, и в каждом ящике – не более одного шара (соответствует упорядоченной выборке без возвращения). Решение возможно лишь при $n \geq k$. Множество исходов:

$$\Omega = \big\{\omega : \omega = (r_1, \ldots, r_k),\, r_i \neq r_j \text{ при } i \neq j,\, r_i \in \{1, \ldots, n\}\big\}.$$

Первый шар можно разместить n способами, второй – $(n-1)$ способами, ..., k-й шар – $(n-k+1)$ способами. Всего способов $|\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$ – число размещений из n по k.

c) Шары неразличимы, и в каждом ящике не более одного шара (соответствует неупорядоченной выборке без возвращения). Решение возможно лишь при $n \geq k$. Очевидно, этот случай можно получить из п. b), поделив количество размещений на число перестановок среди k шаров, равное $k!$ В таком случае $|\Omega| = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Поскольку шары неразличимы, то их распределение по n ящикам описывается неупорядоченным набором $[r_1, \dots, r_k]$. Множество исходов:

$$\Omega_1 = \big\{w : w = [r_1, \dots, r_k],\, r_i \neq r_j \text{ при } i \neq j,\, r_i \in \{1, \dots, n\}\big\}.$$

Другое множество исходов, которое так же пригодно для описания этого эксперимента, можно сформулировать в терминах векторов длины n, содержащих нули и единицы, и описывающих итоговое заполнение ящиков шарами:

$$\Omega_2 = \left\{\omega : \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n),\ \omega_i \in \{0, 1\},\ \sum_{i=1}^{n} \omega_i = k\right\}.$$

Такая модель используется в физике под названием “статистической ансамбль Ферми-Дирака”.

d) Шары неразличимы, и в каждом ящике может быть любое число шаров (соответствует неупорядоченной выборке с возвращением).

Множество исходов:

$$\Omega_1 = \big\{\omega : \omega = [r_1, \dots, r_k],\, r_i \in \{1, \dots, n\}\big\},$$

но можно использовать другое, более удобное описание – поскольку любое размещение можно представить, разложив подряд k шаров, и поместив $n-1$ перегородку на любых позициях перед-, после- и между шарами.

$$\Omega_2 = \left\{\omega : \omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n+k-1}),\ \omega_i \in \{0, 1\},\ \sum_{i=1}^{n+k-1} \omega_i = n-1\right\}.$$

Здесь $\omega_i = 0$ соответствует шару, а $\omega_i = 1$ – перегородке. Например, размещение 6 шаров по 4 ящиками может реализоваться следующим образом:

$$(0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0).$$

Здесь 2 шара попало в первый ящик, 1 шар – во второй, 0 – в третий, 3 – в четвертый. Видно, что общее количество разных элементов равно $k + n - 1 = 9$.

В такой постановке сразу очевидно, что число элементарных исходов в Ω_2 равно количеству размещений $n-1$ единиц по $k+n-1$ местам, и поэтому $|\Omega_2| = C_{k+n-1}^k = C_{k+n-1}^{n-1}$. Этот случай соответствует статистистическому ансамблю Бозе-Эйнштейна.

Задача. Найдите число решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ в натуральных[1] числах.

Решение. Искомое количество равно числу размещений десяти единиц между 4 “корзинами” – x_1, x_2, x_3 и x_4. Таким образом, количество решений равно $C_{10+4-1}^3 = 286$.

[1] Включая число 0.