Математика для анализа данных, МФТИ 2023/2024

Математический анализ

Домашнее задание

15 октября 2023 г.

Задача 1.

Вычислите производную функции.

a) $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$;
b) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;
c) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$;
d) $y = \sin[\sin(\sin x)]$;
e) $y = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a}$;
f) $y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$;
g) $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)$;
h) $y = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_1}\dots(x-a_n)^{\alpha_n}$;

Задача 2.

a) Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{если } x \leqslant x_0 \\ ax+b, & \text{если } x > x_0. \end{cases}$$

Как следует подобрать коэффициенты a и b, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной и дифференцируемой в точке $x = x_0$?

b) Пусть

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{если } x \leqslant x_0 \\ ax+b, & \text{если } x > x_0. \end{cases}$$

где функция $f(x)$ дифференцируема слева при $x = x_0$. При каком выборе коэффициентов a и b функция $F(x)$ будет непрерывной и дифференцируемой в точке x_n?

Задача 3.

Пусть $f(u,v) = e^{\cos(u-v)}$. Найдите разложение этой функции в ряд Тейлора около точки $(u,v) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ до второго порядка (включительно).

Задача 4.

Найдите предел функции или докажите, что он не существует.

a)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$$

b)

$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

Задача 5.

Вычислите интегралы:
a) $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} xy\, dydx$;
b) $\int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y\, dydx$;
c) $\iint xdydx$ по региону, ограниченному графиками функций $y = x$ and $y = 3 - x^2$;
d) $\int_0^1 \int_y^1 x^2 \sin(xy)\, dxdy$.