Математика для анализа данных, МФТИ 2023/2024
Линейная алгебра
Занятие #1

29 октября 2023 г.

1 Системы линейных уравнений

1.1 Несколько вводных примеров

Решение систем линейных уравнений (СЛАУ) является составной частью многих математических задач, встречающихся в этом курсе.

Пример. Найдите множество решений СЛАУ

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$$

Решение. Выражая x из первого уравнения и подставляя полученное значение во второе, получаем

$$x = 4 - 3y$$
$$2(4 - 3y) + y = 3$$
$$8 - 6y + y = 3$$
$$y = 1, x = 1.$$

Фактически, при решении мы использовали эквивалентные преобразования линейных уравнений.

Пример. Решите СЛАУ

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + y + z = 4 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Решение. Как и в прошлый раз, выражаем x и подставляем полученное выражение в 2-е и 3-е уравнения.

$$x = 6 - 2y - 3z,$$
$$\begin{cases} 2(6 - 2y - 3z) + y + z = 4 \\ 6 - 2y - 3z - y + z = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 12 - 3y - 5z = 4 \\ 6 - 3y - 2z = 1 \end{cases},$$
$$\begin{cases} 3y + 5z = 8 \\ 3y + 2z = 5 \end{cases}$$
$$3z = 3, z = 1, x = 1, y = 1.$$

Можно заметить, что проводимые операции затрагивают только коэффициенты перед x, y и z. Поэтому такое решение можно записать более компактно, используя матричную запись, в которой коэффициенты при

x, y и z, а также свободные члены уравнений записаны в таблицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

В общем случае, матрицы – прямоугольные таблицы значений; далее в тексте матрицы будут обозначаться заглавными латинскими буквами, например

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

где соответствующими маленькими буквами будут обозначаться элементы матрицы. В примере выше – квадратная матрица $n \times n$, у которой выделены элементы главной диагонали.

Аналогичное обозначение матрицы подразумевается записью $A = (a_{ij})$, где i и j – индексы, обозначающие позицию элемента a_{ij} в матрице. Элемент a_{ij} находится на пересечении i-й строки и j-го столбца таблицы.

1.2 Трансформация строк матриц

Далее будем использовать следующие типы трансформаций строк матриц, которые соответствуют действиям над компонентами системы линейных уравнений, и не приводят к изменениям множества решений, поскольку каждое из них приводит к созданию эквивалентной СЛАУ.

1. Строка j умножается на константу c и складывается с i-й строкой.

2. Строка i умножается на ненулевую константу c.

3. Строки i и j меняются местами.

1.3 Метод Гаусса

Метод Гаусса является основным алгоритмом решения СЛАУ. Идея метода заключается в обнулении коэффициентов под главной диагональню матрицы коэффициентов, приводя матрицу в т.н. верхнетреугольную форму.[1] После приведения матрицы коэффициентов к верхнетреугольному виду, корни СЛАУ найти очень легко.

Основные этапы метода Гаусса[2] проиллюстрированы следующими примерами.

Пример. Решите СЛАУ

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + y + z = 4 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

[1]Схожим образом определяются нижнетреугольные матрицы; квадратная матрица, являющаяся одновременно верхне- и нижнетреугольной, то есть имеющая ненулевые элементы только на главной диагонали, называется диагональной и обозначается $\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

[2]Точнее, его разновидности – метода Гаусса-Жордана

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{[2]\mapsto[2]-[1]\cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{[2]\mapsto[2]\cdot(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{[3]\mapsto[3]-[1]} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{[3]\mapsto[3]+[2]}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{[3]\mapsto[3]/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{[1]\mapsto[1]-[3]\cdot 3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{[2]\mapsto[2]-[3]\cdot 5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{[2]\mapsto[2]/3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{[1]\mapsto[1]-[2]\cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Таким образом, алгоритм решения СЛАУ заключается в следующем:

- Глядя на первый столбец матрицы, при необходимости использовать перестановку строк (трансформацию 3-го типа) чтобы сделать элемент в верхней строке ненулевым; такой элемент называется ведущим или поворотным. Если все числа в первом стобце равны нулю, то аналогичную процедуру нужно осуществить со вторым столбцом, и т. д.

- Для каждой из строк снизу от вещущего элемента нужно использовать трансформацию 1-го типа, чтобы занулить все остальные коэффициенты в первом столбце.

- Переходим ко второму столбцу, при необходимости переставляя строки (кроме самой первой), чтобы сделать элемент на позиции $(2, 2)$ ненулевым. Этот элемент будет новым ведущим, и все элементы снизу от него нужно занулить с помощью трансформаций первого типа.

- Повторить процедуру до тех пор, пока матрица не будет приведена в верхнетреугольную форму.

Преобразованную матрицу легко использовать для нахождения решений СЛАУ, рассматривая уравнения, начиная с самого нижнего. При необходимости, также можно продолжить процедуру в обратной последовательности до приведения матрицы к диагональному виду (метод Гаусса-Жордана).

- Если все элементы на главной диагонали после преобразований оказались отличными от нуля, то с помощью преобразования второго типа можно сделать их равными 1. После этого можно использовать преобразования первого типа с подходящим коэффициентом λ, чтобы сделать все элементы сверху от ведущего элемента нулями.

- Аналогичным способом можно привести к нулю все элементы, кроме лежащих на главной диагонали (а их сделать равными единицам). Тогда решением системы уравнений будет являться вектор, получившийся в столбце свободных членов матрицы. Заметим, что всё вышеперечисленное верно только в том случае, когда в процессе преобразований мы не столкнулись с ситуацией, что какой-то из элементов на главной диагонали оказался равным нулю.

Следующий пример показывает, что ведущий элемент не всегда равен единице, хотя обычно удобно сделать его таким, чтобы не иметь дела с дробями в процессе вычислений.

Пример. Решите СЛАУ

$$\begin{cases} 2x+3y+z=3 \\ 3x-y+2z=5 \\ 2x+2y+z=3. \end{cases}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{[2]\mapsto[2]-[1]\cdot\frac{3}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{[3]\mapsto[3]-[1]}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{[2]\mapsto[3]} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{[2]\mapsto[2]\cdot(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{[3]\mapsto[3]+[2]\cdot\frac{11}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{[3\mapsto[3]\cdot 2}$$

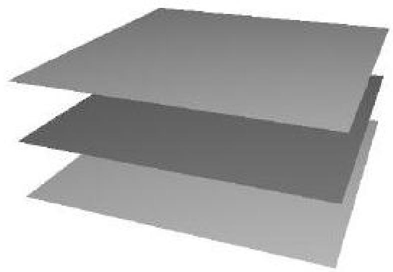
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{[1]\mapsto[1]-[3]} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{[1]\mapsto[1]-[2]\cdot 3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{[1]\mapsto[1]/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

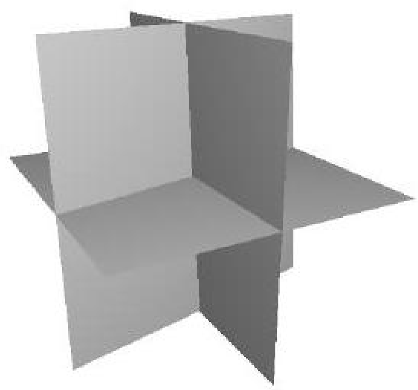
1.4 Геометрическая интерпретация СЛАУ

Геометрическая интерпретация решений СЛАУ проста и естественна. Рассмотрим систему из примера 1.1. Уравнения $2x+y=3$ и $x+3y=4$ задают две прямые на числовой плоскости. Множество решений СЛАУ – это множество точек, удовлетворяющих обоим уравнениям, т.е. пересечение двух прямых. Теоретически, возможны три разных случая взаимного расположения двух прямых: пересечение в одной точке (наиболее частый случай); параллельные прямые, или полное совпадение. Поэтому СЛАУ с двумя переменными может иметь одно, ноль, или бесконечно много решений. Так же выглядит множество решений СЛАУ в трёхмерном пространстве. Типичный случай – три плоскости, имеющие одну общую точку (две плоскости пересекаются по прямой линии, а она проходит через третью плоскость, имея одну общую точку с ней), но также возможны случаи бесконечного количества решенй (три плоскости имеют общую прямую линию, или совпадают полностью), и когда решений совсем нет (параллельные линии или плоскости). Некоторые из этих случаев показаны на рис.1.

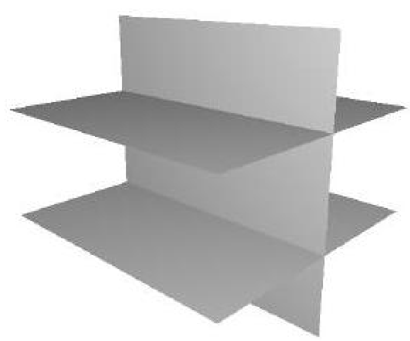
a) Бесконечно много решений



c) Нет решений



b) Ровно одно решение



d) Также нет решений

Рис. 1: Три плоскости в трёхмерном пространстве могут иметь ноль, одну или бесконечно много общих точек.

Повторяя ту же аргументацию для произвольного числа переменных или используя математическую индукцию, приходим к следующему соображению:

Теорема. Система линейных алгебраических уравнений может не иметь решений, иметь ровно одно решение, либо иметь бесконечно много решений.

Доказательство этого утверждения достаточно просто, однако для этого вначале нам понадобится ввести определение линейного (векторного) пространства.

В примерах ранее решение СЛАУ было единственным, поэтому в итоге матрицы коэффициентов приводились к диагональному виду. При решении вырожденных СЛАУ (т.е. не имеющих решения, либо имеющих бесконечно много решений) это не будет выполняться. Однако метод Гаусса можно эффективно применять и в этом случае.

Пример. Решите СЛАУ

$$\begin{cases} 2x+3y+z=3 \\ 2x+3y+2z=6 \end{cases}.$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{[2]\mapsto[2]-[1]} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{[1]\mapsto[1]-[2]} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Выполняется $x_3 = 3$ и $x_1 = -\frac{3}{2}x_2$. Здесь x_2 можно рассматривать, как параметр, и находить x_1 как функцию от x_2.

Заметим, что после второго шага матрица получилась верхнетреугольной, но на этот раз “шаг лестницы” оказался более длинным, чем в предыдущий примерах. Такой вид матрицы СЛАУ называется эшелонной формой.

1.5 Упражнения

Решите следующие СЛАУ

a) $\begin{cases} -3x_1+3x_3=-3 \\ -x_1+2x_2+2x_4=-8 \\ -2x_2+2x_3-2x_4=8 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+2x_4=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -5x_1-2x_2+4x_3+3x_4=-14 \\ -3x_1-4x_2-4x_3=10 \\ -5x_1+4x_2+4x_3-4x_4=-18 \\ -2x_2+3x_3+x_4=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x_1-x_2+2x_3-3x_4-x_5=10 \\ -x_2+2x_3-3x_4+x_5=10 \\ -2x_1-5x_2+2x_3-4x_4+2x_5=14 \\ 3x_1+4x_2+2x_3-x_4+4x_5=-16 \\ x_1+4x_2-5x_3-x_4-4x_5=13 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x_1+3x_2-4x_3+3x_4=-3\\ -4x_1-3x_2+3x_4=21\\ -x_1+2x_2+4x_3+3x_4=1\\ -5x_1-4x_2-x_3+4x_4=28 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x_1-5x_2+3x_3+4x_4=-27\\ 4x_1-3x_2-2x_3-3x_4=0\\ 4x_1-4x_2+3x_4=-18\\ -x_1-3x_4=7 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} -3x_1+3x_3-x_4=-3\\ 3x_1-2x_2-2x_3+4x_4=20\\ 4x_1+4x_2+2x_3+3x_4=25\\ -4x_1+2x_2-4x_3-x_4=-39 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3-5x_4=4\\ 9x_1+2x_2-10x_3-6x_4=10\\ 3x_1+5x_2-3x_3+3x_4=11\\ 11x_1+5x_2+10x_4=0 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} 3x_1+11x_2+7x_3-9x_4=-1\\ 12x_1+10x_2-x_3+4x_4=-8\\ 12x_1+3x_2-x_4=3\\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4=-10 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 5x_1+10x_2+11x_3+9x_4=-10\\ 5x_1-4x_2+12x_3+6x_4=3\\ 3x_1+5x_2-3x_3+3x_4=-6\\ 6x_1+3x_2-5x_3+5x_4=-7 \end{cases}$ (j) $\begin{cases} x_1+12x_3-2x_4=-1\\ 5x_1-8x_2+10x_3+x_4=8\\ x_1-4x_2-4x_3+10x_4=-1\\ 10x_1-8x_2-8x_3-x_4=-5 \end{cases}$

2 Линейное (векторное) пространство

Определение. Линейной пространство над полем вещественных чисел состоит из трёх объектов:

i) непустого множества V элементов произвольной природы, которые называются векторами;

ii) отображения $f: V\times V\to V$, сопоставляющего каждой паре элементов x,y множества V единственный элемент множества V, называемый их суммой и обозначаемый $x+y$.

iii) отображения $g:\mathbb{R}\times V\to V$, сопоставляющего каждому числу $\lambda\in\mathbb{R}$ и каждому элементу x множества V единственный элемент множества V, обозначаемый λx.

Отображение f называется сложением; отображение g называется умножением на скаляр. Отображение $f(x,y)$ обычно обозначается знаком "+", т.е. $f(x,y)=x+y$, в то время, как x и y могут отличаться от объектов, которые мы привыкли суммировать друг с другом (например, векторами могут быть студенты или преподаватели). Аналогично, отображение $g(\lambda,x)$ часто обозначается как $g(\lambda,x)=\lambda x$, хотя оно может не иметь ничего общего с обычным умножением. Элементы V называются векторами, хотя они могут отличаться от геометрических векторов. Множество V с заданными операциями должно подчиняться следующим аксиомам:

1. $\forall x,y\in V: x+y=y+x$;
2. $\forall x,y,z\in V:(x+y)+z=x+(y+z)$;
3. $\exists 0\in V:\forall x\in V: x+0=0+x=x$;
4. $\forall x\in V\exists(-x)\in V: x+(-x)=(-x)+x=0$;
5. $\forall x,y\in V,\forall\lambda\in\mathbb{R}:\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$;
6. $\forall x\in V,\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}:\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$.

Следующие примеры позволяют лучше разобраться, какие наборы являются векторными пространствами, а какие – нет.

1. Множество $\mathbb{R}$ образует векторное пространство по отношению к стандартным операциям сложения и умножения на число.

2. Множество $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$ образует векторное пространство по отношению к покомпонентному сложению и умножению на скаляры, т.е., $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ и $\lambda (x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

3. Аналогично, множество $\mathbb{R}^n$ образует векторное пространство по отношению к покомпонентному сложению и умножению на скаляры, т.е. $(x_1, \ldots, x_n)+(y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ и $\lambda (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$;

4. Множество $P_{[n]}$ полиномов степени n не является векторным пространством, поскольку $0 \notin P_{[n]}$.

5. Множество $P_{[\leq n]}$ полиномов, степень которых не превышает n образует векторное пространство.

6. Множество $C[a, b]$ всех непрерывных функций, определённых на отрезке $[a, b]$ образует векторное пространство (поскольку сумма непрерывных функций является непрерывной функцией).

7. Множество $C^n[a, b]$ всех функций, определённых на $[a, b]$, и имеющих n-ю непрерывную производную (также, n может принимать значение ∞) образует векторное пространство.

Пример. Проверим, что множество функций вида $f(x) = A\cos(x + \varphi)$, где $A, \varphi \in \mathbb{R}$, является векторным пространством по отношению к “обычному” сложению функций и умножению на константу.

Пусть $f(x) = a_1 \cos(x + \varphi_1)$ и $g(x) = a_2 \cos(x + \varphi_2)$. Применяя тригонометрические равенства, получаем

$$f(x) = a_1 \cos(\varphi_1) \cdot \cos(x) - a_1 \sin(\varphi_1) \cdot \sin(x),$$

$$g(x) = a_2 \cos(\varphi_2) \cdot \cos(x) - a_2 \sin(\varphi_2) \cdot \sin(x),$$

$$f(x) + g(x) = \underbrace{\big(a_1 \cos(\varphi_1) + a_2 \cos(\varphi_2)\big)}_{b_1} \cos(x) - \underbrace{\big(a_1 \sin(\varphi_1) + a_2 \sin(\varphi_2)\big)}_{b_2} \sin(x) =$$

$$= \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \left(\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \cos(x) - \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \sin(x) \right) = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cos \left(x + \arccos \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \right)$$

Поскольку $\sqrt{b_1^2 + b_1^2}$ и $\arccos \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ – вещественные числа для любых $a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2$ за исключением случая, когда $b_1 = 0$ и $b_2 = 0$ одновременно, получающаяся функция относится к классу функций $A\cos(x + \varphi)$. Остальные свойства векторного пространства проверяются тривиально.

В частном случае $b_1 = b_2 = 0, f(x) + g(x) \equiv 0$, то есть, результат тоже принадлежит к классу функций вида $A\cos(x + \phi)$, при этом $A = 0$.

Заметим, что в большинстве случаев операции над векторами являются логическим продолжением привычных операций сложения и умножения чисел, и вопрос, является ли множество V векторным пространством, зависит от того, замкнуто ли оно относительно таких операций, т.е. верно ли, что применение заданных операций к элементам V даёт в результате всегда элемент, также принадлежащий V. Это свойство объясняет следующее определение.

Определение. Пусть $(V, +, \cdot)$ – векторное пространство. Подмножество $U \subseteq V$ называется подпространством V, если $(U, +, \cdot)$ образует векторное пространство по отношению к операциям “+” и $\cdot$, унаследованным от V (с помощью ограничения операций на подмножество исходного множества определения). Другими словами, U является подпространством V если $x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$ и $\lambda \in \mathbb{R}, x \in U \Rightarrow \lambda x \in U$.

Примеры векторных подпространств.

1. $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ может рассматриваться как подпространство исходного пространства.

2. $P_{[\leq n]}$ является линейным подпространством $C(-\infty, +\infty)$.

3. $C^{n+1}[a, b]$ является линейным подпространством $C^n[a, b]$ – поскольку не каждой функции $f(x)$, такой, что $f^{(n)}(x)$ непрерывна, есть непрерывная $n + 1$-я производная, но если известно, что $f^{(n+1)}(x)$ существует и непрерывна, то $f(x) \in C^n$.

4. Множество $B_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ не является линейным подпространством $\mathbb{R}^2$.

2.1 Линейная независимость

В этом разделе мы рассмотрим понятия линейной зависимости и независимости, являющиеся ключевыми для линейной алгебры.

Определение. Пусть V – линейное пространство и пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – векторы. Также пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – набор (вещественных) чисел. Выражение $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ называется линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с множителями (весами) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Линейная комбинация называется тривиальной, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Определение. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – набор векторов в линейном пространстве V. Вектора $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются линейно зависимыми, если существует нетривиальный набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, такой, что $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$. Фактически, если набор векторов линейно зависим, это значить что какой-то из них (не всегда заранее понятно, какой именно) можно выразить в виде линейной комбинации остальных векторов.

Набор векторов, не являющийся линейно зависимым, называется линейно независимым.

Пример. Рассмотрим следующие вектора: $x_1 = (1, 2, 3), x_2 = (0, 1, 2), x_3 = (1, 4, 7)$. Нужно проверить, являются ли они линейно зависимыми. Предположим, что существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, такие что $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$. То есть, $(\lambda_1, 2\lambda_1, 3\lambda_1) + (0, \lambda_2, \lambda_2) + (\lambda_3, 4\lambda_3, 7\lambda_3) = (0, 0, 0)$. Такое возможно тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Решая полученную СЛАУ методом Гаусса, получаем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{[2] \mapsto [2] - [1] \cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{[3] \mapsto [3] - [1] \cdot 3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{[3] \mapsto [3] \cdot \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{[3] \mapsto [3] - [2]} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Видно, что третье уравнение преобразовалось к виду $0 = 0$, т.е. фактически, осталось лишь два уравнения. Это подразумевает, что СЛАУ имеет бесконечно много решений, среди которых найдётся и нетривиальное. Поэтому можно заключить, что набор x_1, x_2, x_3 является линейно зависимым.

Определение. Вектор x линейно выражается с помощью векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ если $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ для каких-то $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Другими словами, x линейно выражается с помощью $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если x равен какой-то линейной комбинации этих векторов.

Теорема. Набор $x_1, x_2, \ldots, x_n$ является линейно зависимым тогда и только тогда, когда какой-то из векторов этого набора можно линейно выразить с помощью остальных векторов.

Доказательство. В одну сторону: предположим, что x_i можно линейно выразить с помощью $x_1, \ldots, x_{i-1}$, $x_{i+1}, \ldots, x_n$. То есть, $x_i = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \ldots + \lambda_n x_n$. Но это означает, что

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{i-1} x_{i-1} - x_i + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \ldots + \lambda_n x_n = 0,$$

т.е. существует нетривиальная (поскольку множитель при x_i равен -1) линейная комбинация векторов набора $x_1, \ldots, x_n$, равная нулю.

В обратную сторону: пусть $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$ – нетривиальная линейная комбинация векторов, в которой $\lambda_i \neq 0$ для некоторого i. Тогда $-\lambda_i x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \ldots + \lambda_n x_n$, и поэтому

$$x_i = \frac{\lambda_1}{-\lambda_i} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_{i-1}}{-\lambda_i} x_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{-\lambda_i} x_{i+1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{-\lambda_i} x_n,$$

т.е. x_i линейно выражается с помощью $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$.

Несколько комментариев на тему свойств линейно зависимых наборов векторов.

1. Если набор векторов $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ является линейно зависимым, то набор $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ тоже является линейно зависимым.

2. Если набор векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ содержит нулевой вектор, то этот набор является линейно зависимым.

3. Если набор векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ является линейно независимым, то и набор $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ также является линейно независимым.