## 3 Степенная функция, экспонента, логарифм

Опр. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ - произв. число.
Функция $f(x) = x^{\alpha}$ наз-ся степенной.

$$a^{-b} = \frac{1}{a^{b}}$$
$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^{p}}$$
$$a^{r} \qquad r \approx \frac{p_i}{q_i}$$

Выше мы рассуждаем о том, как определить степенную функцию для произвольного действительного альфа через последовательные приближения числа альфа рациональными числами.

**Определение.** *Экспоненциальной* или *показательной функцией* при $a > 0$ называется $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{+}$, действующая по формуле
$$f(x) = a^{x}.$$
В случае, если $a = e = 2.71828\ldots$, то функция $e^{x}$ называется экспонентой.

Свойства экспоненты

$$a^{x} \cdot a^{y} = a^{x+y}$$
$$a^{-x} = \frac{1}{a^{x}}$$
$$a^{0} = 0$$
$$(a^{x})^{y} = a^{xy}$$
$$a^{1/x} = \sqrt[x]{a}$$

Разложение экспоненты в ряд.

$$\boxed{e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \ldots}$$

# Логарифм

**Определение.** Пусть a — положительное число. *Логарифмом числа* $x > 0$ *по основанию* $a$ называется такое число $\log_a x$, что

$$a^{\log_a x} = x.$$

Логарифм по основанию числа $e$ записывается как $\ln x$.

# Свойства логарифма

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

$$a^{log_a x} = x$$

## Примеры задач с решениями

- $\log_3 \sqrt{27} = \log_3 \left(3^{3/2}\right) = \frac{3}{2} \log_3 3 = \frac{3}{2}.$
- $7^{2 \log_{49} 2} = \left(7^2\right)^{\log_{49} 2} = 2.$
- $\dfrac{\log_{\sqrt{3}} a + \log_9 a}{\log_{81} a} = \dfrac{\frac{1}{\log_a \sqrt{3}} + \frac{1}{\log_a 9}}{\frac{1}{\log_a 81}} =$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$= \frac{\frac{1}{\frac{1}{2}\log_a 3} + \frac{1}{2\log_a 3}}{\frac{1}{4\log_a 3}} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 10. \quad \blacksquare$$

Задача 2. Решить ур-е

$$\ln \ln x + \ln(\ln x^4 - 3) = 0.$$

$$\ln\left(\ln x \cdot (\ln x^4 - 3)\right) = 0 \qquad \left(\begin{array}{l}\ln x > 0\\ \ln x^4 - 3 > 0\end{array}\right)$$

$$\ln x \cdot (\ln x^4 - 3) = 1.$$

$$\ln x \cdot (4\ln x - 3) = 1$$

$$4t^2 - 3t - 1 = 0 \quad , t = \ln x.$$

$$(4t+1)(t-1) = 0$$

$$t = -\frac{1}{4} \; ; \; t = 1.$$

$x = e^{-1/4}$ не подходит.

$x = e$ – единственное решение

График экспоненты

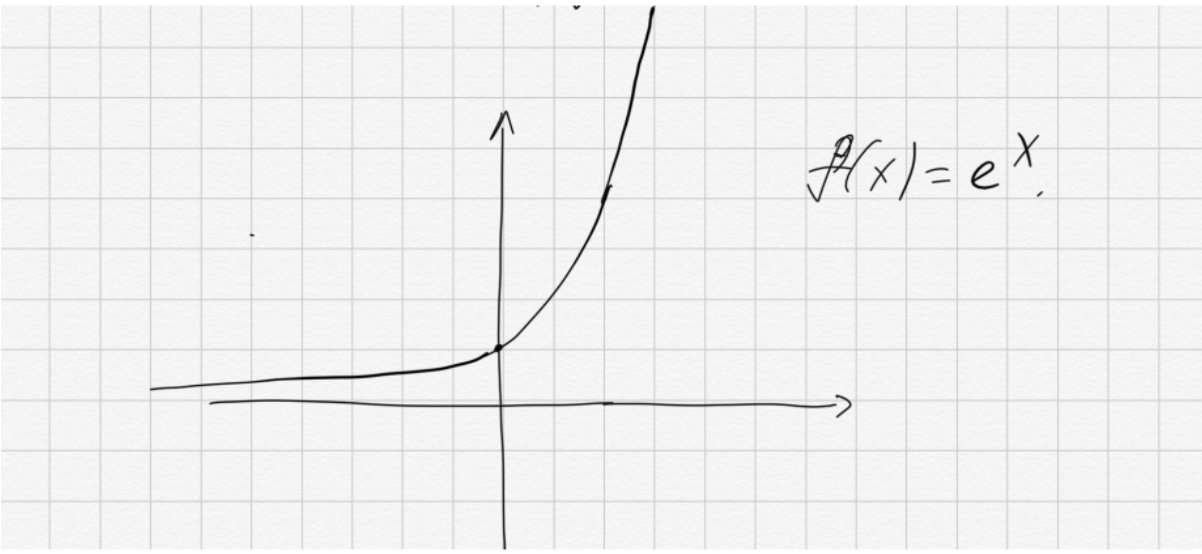
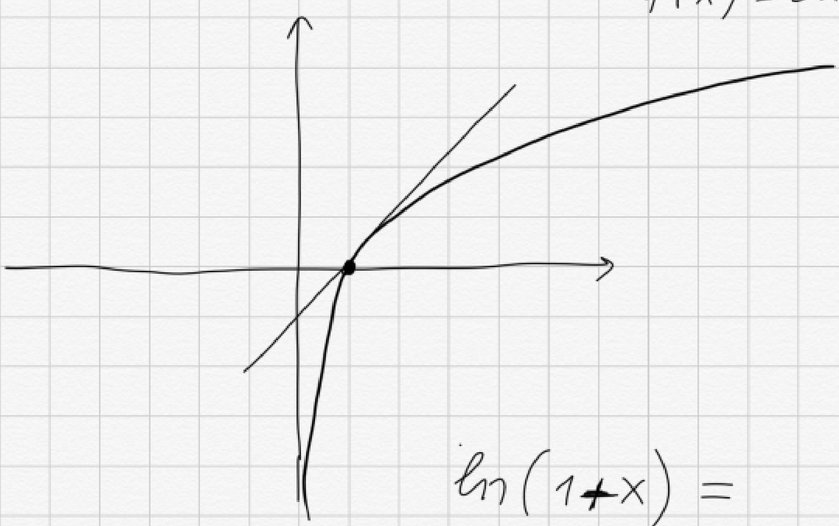


График логарифма и разложение в ряд

$f(x) = \ln x.$



$$\ln(1+x) =$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

при $x \in (-1; 1).$

$$\frac{x^n}{n!} \to 0 \qquad \frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1+x) \approx x$$
$$x \approx 0.$$

$$\ln(1-x) =$$
$$= -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\right).$$