ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Лекции № 1-2

Предмет и задачи курса ФА. Метрические пространства (МП). Примеры. Линейные нормированные пространства (ЛНП). Примеры. План следующих лекций.

- **Предмет и задачи курса ФА.**

Для начала вспоминаем предмет математического анализа и линейной алгебры.

ФА возник в результате взаимодействия и последующего обобщения на б/м случай идей и методов математического анализа, геометрии и линейной алгебры.

Обсуждаем тесную связь ФА с другими курсами. Например, задачи, возникающие в ОДУ, приводят к решению интегральных уравнений:

$$u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \geq a, \quad u(a) = 1, u'(a) = 0.$$
$$u(x) = \cos(x - a) + \int_a^x \sin(x - s) f(s) ds.$$

$$u''(x) + u(x) = \sigma(x)u(x), \quad x \geq a, \quad u(a) = 1, u'(a) = 0.$$
$$u(x) = \cos(x - a) + \int_a^x \sin(x - s)\sigma(s)u(s) ds.$$

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$x(t) - \int_a^b K(t, s)x(s)ds = y(t), \ t \in [a, b].$$

Интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$x(t) - \int_a^t K(t, s)x(s)ds = y(t), \ t \in [a, b].$$

Интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$\int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t),\ t \in [a,b].$$

Мы будем изучать методы решения непосредственно интегральных уравнений и методы решения интегральных уравнений как частного случая операторных уравнений. Интегральные уравнения первого и второго рода — это, соответственно, частный случай операторных уравнений первого и второго рода:

$$Kx = y, \qquad x - Kx = y.$$

Мы покажем, что в зависимости от свойств операторов K, уравнения второго рода порождают корректные задачи (теория Фредгольма), а уравнения первого рода — некорректные задачи (теория регуляризации). Поэтому изучение свойств операторов — важная часть ФА.

Общая схема курса:

$$\boxed{\textbf{Пространства}} \ \to \ \boxed{\textbf{Операторы}} \ \to \ \boxed{\textbf{Операторные уравнения}}$$

Задача курса — овладеть аппаратом ФА, научиться использовать его для постановки и решения конкретных задач.

Основная и некоторая дополнительная литература указана в конце лекции.

В лекциях будут даны задачи и упражнения. Они даны в сплошной нумерации: У1 – У26. Есть номера, в которых несколько близких по теме задач.

Формальности. За решение каждой задачи можно получить от 0 до 3 баллов. Сдавать решенные задачи (в письменном виде аккуратно оформленные) надо ведущим практику 4 раза за семестр: первый раз в течение двух недель после того, как в лекциях даны задачи У1-У7, затем задачи У8-У16, затем задачи У17-У24, в конце семестра У25-У26. В это же время задания будут выставлены в TEAMS. В TEAMS вам сдавать работы не нужно, следует только указать когда сдали работу и какие задачи решили.

Практика будет нацелена на то, чтобы вы научились решать задачи типа У1–У26. Такого же типа задачи и вопросы будут на зачете.

Результаты решения задач У1–У7 и У8–У16 будут отражены в БРС по лекциям, остальные – в БРС по практике.

Чтобы получить допуск к зачету по лекциям, надо набрать ≥ 30 баллов. Зачет — письменный очный. Задача зачета — проверить как вы усвоили базовый материал ФА и применение техники ФА к решению задач типа тех, что были даны на лекциях и разобраны на практике.

- **Метрические пространства (МП). Примеры. Линейные нормированные пространства (ЛНП). Примеры**

Вспоминайте определение и свойства линейных пространств.

В основном мы будем использовать наиболее важные для приложений ЛНП, но начнем с более общих, метрических пространств, где естественно определяется понятие окрестности, а значит понятие сходимости, предельного элемента, открытых/замкнутых множеств, непрерывности.

Определение 1

Метрическое пространство — это пара (X, ρ) (или просто X), где расстояние (метрика) ρ удовлетворяет следующим условиям (аксиомам метрики):

1) $\rho(x, y) \geq 0,\ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (аксиома треугольника).

Примеры.

1) $(X = \mathbb{R},\ \rho(x, y) = |x - y|)$;

2) $(X = [a, b],\ ([a, b),\ (a, b),\ [a, b) \cup (c, d]),\ \ldots,\ \rho(x, y) = |x - y|)$;

3) $C[a, b] = (X = \{$пространство непрерывных функций на $[a, b]\}$, $\rho(x, y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|\,)$.

Остальные примеры (много) будем рассматривать в ЛНП, частном случае метрических пространств.

Определение 2

Сравнивайте с хорошо известным вам пространством $(\mathbb{R}, \rho(x, y) = |x-y|\,)$!

1) Открытый шар с центром в точке x радиуса r (r-окрестность точки x):

$$S_x^r = \{y : \rho(x,y) < r\},$$

замкнутый шар:

$$\overline{S}_x^r = \{y : \rho(x,y) \le r\},$$

ε-окрестность ?

2) Открытое множество — это множество, содержащее любую точку с некоторой окрестностью.

3) x — предельная точка множества M, если любая ее окрестность содержит точку из M, отличную от x (содержит бесконечно много точек из M).

4) Замкнутое множество — это дополнение X до некоторого открытого множества. Эквивалентное определение: замкнутое множество - это множество, содержащее все свои предельные точки.

Привести примеры открытых и замкнутых множеств.

5) x — предел последовательности x_n означает, что $\rho(x_n, x) \to 0$.

Дайте определение через окрестности.

6) Замыкание. Свойства объединений и пересечений открытых и замкнутых множеств.

7) Функция f, $(f(\cdot),\ f(x), x \in A \subseteq (X,\rho))$ называется непрерывной в точке $x_0 \in X$, если для любой x_n, такой, что

$$x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x_0);$$

Функция f называется непрерывной на множестве $A \subseteq (X,\rho)$, если она непрерывна в каждой точке множества.

У1. *Дайте (эквивалентное) определение непрерывности в точке через окрестности.*

Определение 3

ЛНП — это пара $(X, \|\cdot\|)$ (или просто X), где X — линейное пространство, $\|\cdot\|$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\forall x \in X \ \ \|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $\forall x \in X, \ \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (однородность нормы);
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (аксиома треугольника).

Любое ЛНП является метрическим: $\rho(x, y) = \|x - y\|$.
В обратную сторону $\|x\| = \rho(x, 0)$?

Примеры

1) Начнем со знакомого вам евклидова (конечномерного) пространства $(\mathbb{R}^n, \|x\|_e)$.

$$\|x\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2}, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n).$$

Первые две аксиомы нормы проверяются легко. Аксиома треугольника следует из неравенства Гельдера для сумм:

$$\|x + y\|_e^2 = \sum_{i=1}^{n} (|\xi_i + \eta_i|)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \cdot |\eta_i|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2} = (\|x\|_e + \|y\|_e)^2.$$

2) $(\mathbb{R}^n, \|x\|_m)$, $\|x\|_m = \max_i \{|\xi_i|\}$.

3) $(\mathbb{R}^n, \|x\|_s)$, $\|x\|_s = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$.

4) $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$, $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i \xi_i|$.

У2. *Опишите окрестности, открытые и замкнутые множества, сходимости в этих пространствах. Нарисуйте шары* S_0^1 *в пространствах* $(\mathbb{R}^2, \|x\|)$ *с нормами* 1) – 4).

Теперь рассмотрим б/м аналоги этих пространств.

5) Пространство m. $x = (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \dots)$. $\|x\| = \sup_i \{|\xi_i|\}$. $x_n \to x$ означает равномерную покоординатную сходимость.

6) Пространство l_1: $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < \infty$, $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|$.
Сходимость $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^n| \to 0$ называется сходимостью в среднем.

7) Пространство l_2: $\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2<\infty$, $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2}$.
Сходимость $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\xi_i^n|^2} \to 0$ называется сходимостью в среднем квадратичном.

8) Пространство $l_p, p\geq 1$: $\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

9) Пространство $C[a,b]$ — пространство непрерывных на $[a,b]$ функций с нормой $\|x\|=\max_{t\in[a,b]}|x(t)|$. Сходимость?

Нарисуйте шары S_f^1 с разными f.

10) Пространство $C(\mathbb{R})$: $\sup_{t\in\mathbb{R}}|x(t)|<\infty$, $\|x\|=\sup_{t\in\mathbb{R}}|x(t)|$.

11) Пространство $C^k[a,b]$:

$$\sum_{i=0}^{k}\sup_{t\in[a,b]}|x^i(t)|=\sum_{i=0}^{k}\max_{t\in[a,b]}|x^i(t)|<\infty, \quad \|x\|=\sum_{i=0}^{k}\max_{t\in[a,b]}|x^i(t)|.$$

Сходимость?

12) Пространство $L_1[a,b]=L[a,b]$ — пространство интегрируемых на $[a,b]$ функций с нормой $\|x\|=\int_a^b|x(t)|dt$. Сходимость?

13) Пространство $\widetilde{L}[a,b]$ — пространство непрерывных функций с интегральной нормой.

14) Пространство $L_2[a,b]$: $\|x\|=\sqrt{\int_a^b|x(t)|^2dt}$. Сходимость?

15) Пространство $L_p[a,b], p\geq 1:$ $\|x\|_p=\left(\int_a^b|x(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}$.

16) Пространство $L_p(\mathbb{R}), p\geq 1$:

Под интегралами пока здесь можно понимать римановские и несобственные интегралы, немного позже мы дадим определение интеграла Лебега.

УЗ. 1) *Исследовать сходимость последовательности*

$$x_n(t)=n^{\alpha}t(1-t)^n, \quad t\in[0,1], \ \textit{параметр}\ \alpha\in\mathbb{R},$$

в пространстве $C[0,1]$ и $\widetilde{L}[0,1]$.

2) *Приведите примеры сходящихся последовательностей и расходящихся последовательностей в пространствах из примеров 5)–7).*

Счетно-нормированные пространства*.

Пример $\mathcal{S}$: $\|x\|_{n,q} = \max_{t\in\mathbb{R}} |(1+|t|)^q |x^{(n)}(t)|$.

Топологические пространства*.

План следующих лекций.

Лекции № 3–4

Сравнение норм. Эквивалентность норм в конечномерных пространствах. Полнота пространств. Примеры полных и неполных пространств. Два критерия полноты пространств. Сепарабельные пространства. Примеры сепарабельных и несепарабельных пространств

Лекция № 5

Применение свойства полноты пространств: принцип сжимающих отображений в полных пространствах. Обобщенный принцип сжимающих отображений. Примеры. Применение принципа сжимающих отображений (метода последовательных приближений) к решению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода

Лекции № 6-8

Евклидовы пространства. Гильбертовы пространства. Некоторые вопросы теории приближений в ЛНП, в частности, в гильбертовых пространствах. Ряды Фурье в гильбертовых пространствах.

Лекция № 9

Пополнение пространств. Примеры. Интеграл Лебега. Пространства Лебега и Соболева через пополнение пространств.

Обобщенные производные в пространствах Соболева. Примеры. Простейшая теорема вложения Соболева. Примеры

Лекции № 10-12

Линейные операторы. Основные свойства. Примеры. Норма оператора. Примеры. Функционалы. Теорема Рисса об общем виде функционала на гильбертовом пространстве. Сопряженные операторы. Примеры.

Лекции № 13-14

Обратные операторы. Спектр операторов. Примеры. Функции от ограниченных операторов. Примеры применения к решению дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами

Лекции № 15-16

Компактные множества. Компактные операторы. Вполне непрерывные операторы = линейные компактные. Свойства вполне непрерывных операторов. Спектральные свойства вполне непрерывных сомосопряженных операторов

Лекции № 17-18

Операторные уравнения второго рода. Нормально разрешимые операторы. Теория Фредгольма (Рисса–Фишера): три теоремы Фредгольма. Уравнения первого рода. Регуляризация

References

[1] *Треногин С.В.* Функциональный анализ М.: Наука, 1983, 384 с.

[2] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 572 с.

[3] *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. Изд. Лань. 2009. - 271 с.

[4] *Zeidler E.* Applied Functional Analysis. Springer Verlag, New York, 1998.

**Темы курсовых и БКР, связанные с курсом "ФА"
и с модулем "Стохастический анализ (СА):
1. Дискретные модели финансовой математики (ФМ),
2. Применение обобщенных функций к решению различных уравнений — дифференциальных, операторных, в свертках и др.
3. Введение в СА (Непрерывные модели ФМ и другие приложения к задачам, требующим учета случайных возмущений)" 2021/2022 уч.год**

1. Работы по книге **D. Higham** "An Introduction to Financial Option Evaluation. Mathematics, Stochastic, Computation". Для образца дано оглавление 1-й глава книги:

2. Уравнения для случайных процессов и для вероятностных характеристик случайных процессов, возникающих при непрерывных

возмущениях (типа броуновского движения). Анализ и сравнение уравнений для случая непрерывных возмущений с результатами в дискретном случае.

3. Случайные процессы Пуассона в моделях со скачкообразными возмущениями. Обобщение формулы Блэка-Шоулза (Нобелевская премия по экономике 1997 года) на случай решения стохастических уравнений с возмущениями типа Пуассона. Сравнение результатов для случая непрерывных и скачкообразных возмущений.

4. Псевдо-дифференциальные операторы — операторы, обобщающие дифференциальные, интегральные и интегро-дифференциальные операторы на основе техники обобщенного преобразования Фурье.

Формально — это ФА (теория операторов и обобщенные функции). С другой стороны, псевдо-дифференциальные операторы возникают при исследовании уравнений для вероятностных характеристик случайных процессов под воздействием непрерывных возмущений типа броуновского движения и скачкообразных типа процессов Пуассона.

5. Ценные бумаги — бонды (облигации). Изучение цены облигаций между моментом покупки $t = 0$ и моментом выплаты по облигации T — важная практическая задача, связанная с величиной текущих процентных ставок в банках.

Математически цены бондов описываются б/м стохастическими уравнениями. Неизвестными в этих уравнениях являются функции от времени t, принимающие значения в некотором функциональном пространстве (функций, зависящих от переменной $\tau = T - t$).

Основная литература по темам 2) – 6):

- лекции по с.курсам,
- учебники: **Shreve S.E.** Stochastic Calculus for Finance. Vol. I (Discrete time models), Vol. II (Continuous time models): Springer Finance Series: USA, 2004,
- сделанные ранее хорошие БКР и диссертации.

6. Моделирование стохастических задач и задач для вероятностных характеристик случайных процессов.

Литература:

Allen E.J. Modeling with Ito Stochastic Differential Equations. Springer, 2007.

Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. Мир, 1986 (новое издание, 2014 англ).