Лекции № 15-16

Компактные множества. Компактные операторы. Вполне непрерывные операторы = линейные компактные. Свойства вполне непрерывных операторов. Спектральные свойства вполне непрерывных сомосопряженных операторов

Определение 1. Оператор $A : X \to Y$ называется *компактным*, если он любое ограниченное множество переводит в компактное.

Определение 2. Линейный компактный оператор $A : X \to Y$ называется *вполне непрерывным* (иногда, вполне ограниченным).

Понятно, что прежде, чем переходить к основной теме лекции "Свойства вполне непрерывных операторов", необходимо познакомиться с компактными множествами.

- **Компактные множества**

Известная теорема Больцано-Вейерштрасса гласит: из любой ограниченной последовательности действительных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Эта теорема легко переносится и на конечномерные пространства, но в бесконечномерных пространствах она в общем случае не верна. Действительно, возьмём в гильбертовом пространстве l_2 ортонормальный базис $\{e_k\}$. Эта последовательность ограничена: $\|e_k\| = 1$, но из нее нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, так как расстояние между разными e_k равно $\sqrt{2}$:

$$\|e_k - e_m\|^2 = (e_k - e_m, e_k - e_m) = 2.$$

Чтобы выделить случаи в бесконечномерных пространствах, когда этот важный результат все-таки имеет место, дадим (или напомним) следующие определения.

Определение 3. Множество Q банахова пространства X называется *бикомпактным* (*бикомпактом*), если из любой его последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит Q. Множество Q банахова пространства X называется *компактным*, если из любой его последовательности можно выделить фундаментальную подпоследовательность (которая необязательно сходится к элементу из Q).

Замечание. В некоторых учебниках такую пару называют, соответственно, компактом и предкомпактом. Мы будем использовать терминологию определения 3.

Из определения 3 и теоремы Больцано-Вейерштрасса следует, что в конечномерном пространстве любое ограниченное множество является компактом, а любое замкнутое ограниченное множество является бикомпактом.

В бесконечномерных пространствах имеет место

Предложение 1. Всякий бикомпакт Q является ограниченным и замкнутым.

Ограниченность доказывается от противного: пусть для любого n во множестве Q существует $x_n : \ \|x_n\| > n$, тогда из такой последовательности $\{x_n\}$ нельзя выбрать фундаментальную подпоследовательность и, следовательно, сходящуюся подпоследовательность. Замкнутость легко следует из определния бикомпакта. *Проверьте.* $\square$

Следующий факт является аналогом на случай функционалов хорошо известных из матанализа фактов для непрерывных функций на отрезке.

Предложение 2. Пусть $f = f(x)$ — вещественный непрерывный функционал на бикомпакте Q. Тогда f ограничен на Q и достигает своих верхней и нижней границ.

Доказательство. полностью аналогично доказательству соответствующих теорем для непрерывных функций на отрезке. Проведем его для случая ограниченности сверху. Остальные утверждения *докажите сами.*

Покажем, что $f = f(x)$ ограничен сверху, т.е. существует такая $c \in \mathbb{R}$, что $f(x) \leq c$. От противного: найдется $x_1 \in Q$, такое что $f(x_1) > 1$, затем найдется $x_2 \in Q$, такое что $f(x_2) > 2$, $\ldots$ В итоге получим в Q последовательность x_n со свойством $f(x_n) > n$. В силу бикомпактности множества Q для последовательности x_n найдется сходящаяся подпоследовательность x_{n_k}: $x_{n_k} \to x \in Q$. Отсюда, в силу непрерывности функционала следует, что $f(x_{n_k}) \to f(x)$, значит подпоследовательность $f(x_{n_k})$ ограничена. С другой стороны $f(x_{n_k}) > n_k$, т.е. $f(x_{n_k}) \to \infty$ и мы пришли к противоречию. $\square$

На основе этого предложения приведем **пример** ограниченного замкнутого множества, не являющегося бикомпактным в б/м пространстве X .

Пусть $X = C[0,1]$. Рассмотрим в пространстве $C[0,1]$ множество

$$M = \{x(t) \in C[0,1] : \ x(0) = 0, \ x(1) = 1, \ \|x\| \leq 1\}.$$

Это множество является ограниченным и замкнутым в пространстве $C[0,1]$. Рассмотрим на M функционал $f(x) = \int_0^1 x^2(t)dt$.

Проверьте, что этот функционал непрерывен.

Покажем, что функционал f не достигает на M точной нижней грани и, следовательно, M не является бикомпактом. Для этого возьмем последовательность $x_n(t) = t^n$, тогда

$$f(x_n) = \int_0^1 t^{2n}dt = \frac{1}{2n+1},$$

следовательно, $\inf f(x) = 0$. Если допустить, что нижняя грань достигается на элементе $x_0 = x_0(t)$, то $\int_0^1 x_0^2(t)dt = 0 \Rightarrow x_0(t) = 0$ на $[0,1]$. Но тогда $x_0(1) \neq 1$ и, следовательно, $x_0 \notin M$. $\square$

Введем геометрически наглядное важное для исследования компактных множеств понятие ε-сети.

Определение 4. Пусть $\varepsilon > 0$. Множество M_ε в нормированном пространстве X называется ε-сетью множества M, если для любой точки $x \in M$ найдется точка $\tilde{x} \in M_\varepsilon$, такая что $\|x - \tilde{x}\| < \varepsilon$.

Подумайте над геометрической интерпретацией понятия ε-сети.

С помощью понятия ε-сети формулируется следующий критерий компактности.

Теорема 1 ***(Хаусдорфа)***. *Множество M в банаховом пространстве X является компактным тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть.*

Без доказательства. (Посмотреть доказательство можно в [1] и [2].)

Эта теорема редко используется для проверки является ли конкретное множество в некотором пространстве компактным, но, как мы увидим далее, теорема и ее следствия полезны для установления критерия компактности множеств в конкретных пространствах, в частности, при доказательстве знаменитого критерия компактности в $C[a, b]$ — теоремы Арцела.

• Следствия из теоремы Хаусдорфа

Следствие 1. Замкнутое множество M в банаховом пространстве X является бикомпактным тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ для M существует конечная ε-сеть.

Следствие 2. Пусть X — ЛНП. Если для любого $\varepsilon > 0$ для множества $M \subset X$ существует компактная ε-сеть, то M компактно.

Доказательство проводится методом "последовательных приближений множеств". Пусть M_ε — компактная ε-сеть для M. По теореме Хаусдорфа для компактного множества M_ε существует конечная ε-сеть M'_ε. Тогда M'_ε является конечной 2ε-сетью для M:

$$\|x - x''\| \leq \|x - x'\| + \|x' - x''\|, \text{ где } \quad x \in M, \ x' \in M_\varepsilon, \ x'' \in M'_\varepsilon.$$

Следствие 3. Всякое компактное множество в ЛНП X ограничено.

Доказательство. Пусть M компактно. Построим для M конечную 1-сеть: $\{x_1, \dots x_n\}$. Тогда для любого $x \in M$ существует элемент x_i из 1-сети, такой, что $\|x - x_i\| < 1$, и для любого $x \in M$ получаем оценку:

$$\|x\| \leq \|x - x_i\| + \|x_i\| < 1 + \|x_i\| \leq 1 + \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|,$$

т.е. M ограничено.

• Компактность и конечномерность. Теоремы Рисса и Арцела

Определение 5. Неограниченное множество M в ЛНП X, в частности само X, является *локально компактным* (*локально бикомпактным*), если пересечение M с любым замкнутым шаром в X компактно (бикомпактно).

Теорема Рисса. Для того, чтобы нормированное пространств X было локально компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было конечномерным.

Без доказательства.

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть X конечномерно. Возьмем в X произвольный замкнутый шар $\overline{S}$. Тогда множество $\overline{S}$ ограничено и по теореме Больцано-Вейерштрасса любая последовательность из $\overline{S}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, X локально компактно.

$\Rightarrow$ Пусть X локально компактно, т.е. любой замкнутый шар $\overline{S}_a^r$ в X компактен. Чтобы доказать, что X конечномерное пространство, предположим противное, т.е. что X бесконечномерно. Возьмем $x_1 \in X$ с $\|x_1\| = 1$, положим $z = a + rx_1$ и рассмотрим множество M_1 элементов вида λx_1 — линейную оболочку элемента x_1. Очевидно, множество M_1 является замкнутым линейным многообразием. Тогда по лемме Рисса о почти перпендикуляре существует x_2, такой что

$$\|x_2\| = 1,\ \rho(x_2, M_1) > \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \|z_2 - z_1\| = r\|x_2 - x_1\| > \frac{r}{2},$$

где $z_{1(2)} = a + rx_{1(2)}$ — это точки лежащие на границе шара с центром в точке a радиуса r.

Продолжая этот процесс, построим $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n$, затем построим соответствующие $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$ и соответствующие M_n — (замкнутые) линейные оболочки элементов $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$. Тогда найдется x_{n+1}, такой что $\|x_k - x_{n+1}\| > \frac{1}{2}$ для любого $x_k \in M_n$, и соответствующий элемент z_{n+1}, такой что $\|z_{n+1} - z_k\| > \frac{r}{2}$ для $k < n + 1$. Из последовательности $\{z_k\}$, лежащих на сфере с центром a радиуса r нельзя выделить фундаментальную подпоследовательность. Следовательно, X не является локально компактным. $\square$

Прежде, чем формулировать знаменитую теорему Арцела о компактности множества в $C[a, b]$, дадим определение равностепенной непрерывности множества непрерывных функций, естественным образом обобщающее понятие равномерной непрерывности отдельной непрерывной функции.

Определение 6. Семейство M непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ называется равностепенно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует

$\delta > 0$, такое, что для любых $t_1,\ t_2 \in [a,b]$: $|t_1 - t_2| < \delta$, для любой функции $x \in M$ имеет место оценка

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon.$$

Теорема Арцела. Для того, чтобы множество $M \subset C[a,b]$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы функции из M были

1) равномерно ограниченными, т.е. $\exists c : \forall x \in M,\ \|x\| \le c$;

2) равностепенно непрерывными.

Без доказательства. Геометрически понятное доказательство, основанное на теореме Хаусдорфа и на возможности приближать непрерывные на $[a,b]$ функции ступенчатыми дано в [2].

У24. *Является ли компактным в $C[a,b]$ множество ограниченных функций, имеющих ограниченные (ограниченные в совокупности) производные? Привести примеры компактных множеств в пространствах $C[a,b]$ и l_2.*

Рассмотрев свойства компактных множеств, переходим к свойствам вполне непрерывных операторов.

Легко проверить, что определение 2 вполне непрерывного оператора эквивалентно следующему: линейный оператор, переводящий единичный шар в компактное множество, называется *вполне непрерывным.*

Множество вполне непрерывных операторов обозначают $\sigma(X, Y)$.

Название "вполне непрерывный" сразу наводит на мысль сравнить вполне непрерывные операторы с (линейными) непрерывными. Линейные непрерывные операторы, как вы знаете, совпадают линейными ограниченными операторами. Ограниченные операторы — это операторы, которые переводят ограниченные множества в ограниченные. Отсюда следует связь: множество вполне непрерывных операторов является подмножеством линейных ограниченных операторов и, следовательно, подмножеством линейных непрерывных операторов, т.е.

$$\sigma(X, Y) \subset L(X, Y).$$

Более того, оно является замкнутым подмножеством:

Утверждение 1. Множество $\sigma(X,Y)$ является подпространством в $L(X,Y)$.

Без доказательства. По определению, подпространство — это замкнутое линейное многообразие, поэтому доказательство начинается с того, что $\sigma(X,Y)$ — линейное многообразие, а затем доказывается, что оно замкнутое.

У25 *Проверьте следующие следствия из утверждения 1.*

Следствие 1. Если X или Y конечномерно, то $\sigma(X,Y) = L(X,Y)$.

Следствие 2. Любой линейный функционал $f \in X^*$ вполне непрерывен.

Следствие 3. Если $\|A_n - A\| \to 0$ в пространстве $L(X,Y)$, где A_n — вполне непрерывные или конечномерные (переводящие ограниченные множества в конечномерные) операторы, то $A \in \sigma(X,Y)$.

Следующее утверждение оказывается очень важным при исследовании обратного оператора к вполне непрерывному. *Подумайте, почему.*

Утверждение 2. Пусть $A \in L(X,Y)$, $B \in L(Y,Z)$. Если хоть один из этих операторов является вполне непрерывным, то $BA \in \sigma(X,Z)$.

Доказательство. Пусть S — единичный шар в X. Если A вполне непрерывен, то AS компактно, но тогда и BAS компактно, т.к. ограниченный оператор B переводит компактное множество в компактное. Следовательно BA вполне непрерывен.

Если B вполне непрерывен, то AS ограничено, следовательно BAS компактно, т.е. опять BA вполне непрерывен. $\square$

Из утверждения 2 следует, что $A^{-1} : Y \to X$ — **оператор обратный к вполне непрерывному A не может быть ограниченным в случае бесконечномерных X и Y**, т.к. единичные операторы $I_X = A^{-1}A$ и $I_Y = AA^{-1}$ не являются вполне непрерывными в бесконечномерных пространствах.

- **Примеры**

Приведем важные примеры вполне непрерывных операторов — интегрального и матричного.

Пример 1. Рассмотрим интегральный оператор $K : C[a,b] \to C[a,b]$

$$Kx(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds,\ t \in [a,b], \tag{1}$$

с ядром $K(t,s)$ — непрерывной функцией двух переменных в квадрате $[a,b]\times[a,b]$. Линейность оператора очевидна. Чтобы доказать вполне непрерывность оператора K, возьмем в $C[a,b]$ единичную сферу S и проверим, что ее образ является компактным множеством.

Для проверки компактности множества KS воспользуемся теоремой Арцела: проверим, что функции из KS образуют ограниченное и равностепенно непрерывное семейство. Для $x\in KS$ имеем

$$\|Kx\| = \max_{t\in[a,b]}\left|\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right| \le \max_{t\in[a,b]}\int_a^b |K(t,s)||x(s)|ds \le$$

$$\le (b-a)M\max_{t\in[a,b]}|x(t)| = (b-a)M\|x\| =\le (b-a)M, \quad M := \max_{(t,s)\in[a,b]\times[a,b]}|K(t,s)|.$$

Таким образом, множество KS ограничено. Теперь проверим, что функции из KS образуют равностепенно непрерывное семейство. Имеем

$$|Kx(t_1)-Kx(t_2)| = \left|\int_a^b K(t_1,s)x(s)ds - \int_a^b K(t_2,s)x(s)ds\right| \le$$

$$\le \int_a^b |K(t_1,s)-K(t_2,s)||x(s)|ds.$$

Из равномерной непрерывности функции $K(t,s)$ на множестве $[a,b]\times[a,b]$ следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>)$, что для любых t_1 и $t_2\in[a,b]$ и любого $s\in[a,b]$, как только имеем $|t_1-t_2|<\delta$, так сразу же $|K(t_1,s)-K(t_2,s)|<\varepsilon$. Отсюда следует равностепенная непрерывность образов единичного шара. $\square$

Пример 2 Доказательство вполне непрерывности интегрального оператора $K: L_2[a,b]\to L_2[a,b]$ с ядром, называемым ядром Гильберта-Шмидта: $K(t,s)\in L_2([a,b]\times[a,b])$ можно найти в [1]. В доказательстве сначала используется теорема Арцела для случая непрерывного ядра, а затем ядро из $K\in L_2([a,b]\times[a,b])$ приближается непрерывными ядрами.

Пример 3 Рассмотрим в l_2 матричный оператор $A\{x_l\}=\{y_k\}$, где $y_k=\sum_{l=1}^{\infty}a_{kl}x_l$ b матрица удовлетворяет условию $\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|^2<\infty$. Операторы такого типа называют матричными операторами Гильберта-Шмидта. Линейность оператора A очевидна. Докажем ограниченность оператора A.

По неравенству Коши-Буняковского имеем

$$\|\{y_k\}\|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} |y_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} x_l \right|^2 \leq$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|^2 \sum_{l=1}^{\infty} |x_l|^2 \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|^2 \|x\|^2.$$

Это означает ограниченность оператора $A : l_2 \to l_2$.

Покажем вполне непрерывность оператора A, пользуясь доказанным свойством замкнутости множества вполне непрерывных операторов в пространстве непрерывных операторов: в данном примере $\sigma(l_2, l_2)$ замкнуто в $L(l_2, l_2)$.

Введем последовательность операторов A_n, переводящих вектор $\{x_l\}$ в вектор $\{y_l, y_2 \ldots y_n, 0, 0 \ldots\}$. Эти линейные ограниченные операторы переводят пространство в l_2 в конечномерное пространство, следовательно они вполне непрерывны (Следствие 3). Покажем, что оператор A — это предел вполне непрерывных операторов A_n:

$$\|A_n - A\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|^2 \|x\|^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

следовательно, и A — вполне непрерывен.

Сформулируем теперь без доказательства теорему о вполне непрерывности сопряженного оператора. Формулируется она очень просто, чего нельзя сказать о доказательстве (см. в [1]).

(Теорема Шаудера). Пусть оператор $A \in L(X, Y)$, где $X)$ — ЛНП, Y — банахово. Тогда оператор A вполне непрерывен, если и только если A^* вполне непрерывен.

• Спектральные свойства вполне непрерывных операторов и вполне непрерывных самосопряженных операторов

Мы будем рассматривать спектральные свойства вполне непрерывных и вполне непрерывных самосопряженных операторов. Покажем, что из собственных векторов вполне непрерывного самосопряженного оператора (с нулевым ядром) в гильбертовом пространстве можно составить ортонормированный базис. Техника разложения в ряды Фурье по этому базису является вполне рабочей для решения операторных уравнений первого и второго рода.

Как следует из свойств вполне непрерывных операторов, которые мы изучали на прошлой лекции, вполне непрерывные операторы чем-то близки к конечномерным. Для их собственных значений имеют место следующие утверждения.

Утверждение 3. Если оператор $A : X \to X$ вполне непрерывен, то его собственное подпространство $X_\lambda = \{x \in X : Ax = \lambda x\}$, отвечающее $\lambda \neq 0$, конечномерно.

Доказательство. Пусть $\overline{S_0^1}$ — единичный шар с центром в нуле, замкнутый в подпространстве X_λ.

Возьмем произвольную последовательность элементов $\{x_n\}$ из $\overline{S_0^1}$. Из вполне непрерывности оператора A следует, что последовательность $\{Ax_n\}$ компактна, но $\{x_n = \frac{1}{\lambda}Ax_n\}$, откуда следует, что и $\{x_n\}$ компактна. Значит, шар $\overline{S_0^1}$ компактен. Отсюда легко видеть, что и любой шар компактен. Следовательно, подпространство X_λ конечномерно.

Утверждение 4. Для любого $\varepsilon > 0$ вне круга радиуса ε может быть лишь конечное число собственных значений вполне непрерывного оператора.

Без доказательства.

В качестве примера рассмотрим как устроено множество собственных значений интегрального оператора A с непрерывным ядром K в пространстве $C[a, b]$:

$$\int_a^b K(t, s)x(s)ds = \lambda x(t), \quad t \in [a, b].$$

Было доказано, что такой оператор является вполне непрерывным. Из утверждения 2 следует, что существуют три возможности поведения собственных значений оператора A:

• оператор A не имеет собственных значений, отличных от нуля, т.е. из равенства $Ax(t) = \lambda x(t)$ при $\lambda \neq 0$ следует $x(t) = 0$.

• существует лишь конечное число собственных значений, отличных от нуля;

• существует последовательность собственных значений λ_n, отличных от нуля, при этом $\lambda_n \to_{n\to\infty} 0$.

До сих пор мы рассматривали свойства спектра различных операторов, в частности вполне непрерывных. Для вполне непрерывного самосопряженного оператора имеет место теорема существования собственных значений:

Теорема 2 . *Пусть $A \neq 0$ — вполне непрерывный самосопряженный в H оператор. Тогда A имеет по крайней мере одно собственное значение, отличное от нуля. Все собственные значения расположены на отрезке $[m, M]$, где*

$$m = \inf_{\|x\|=1}(Ax, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1}(Ax, x).$$

При этом, если $M \neq 0$, то M — это наибольшее собственное значение, если $m \neq 0$, то m — наименьшее собственное значение.

Без доказательства. (Доказательство можно посмотреть в [1]).

Теорема 3 *Все собственные значения вполне непрерывного самосопряженного оператора A действительны. Собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны.*

Без доказательства.

Доказательство. Если оператор $A \neq 0$ является вполне непрерывным и самосопряженным в H, то у него существует собственное значение $\lambda \neq 0$. Пусть x — соответствующий ему собственный вектор: $Ax = \lambda x$. Покажем, что λ — действительное число. В силу самосопряженности имеем $(Ax, x) = (x, Ax)$. Отсюда

$$(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x) \;\Rightarrow\; \lambda = \overline{\lambda}.$$

Теперь пусть $x_{1,2}$ — собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям $\lambda_{1,2}$. Тогда

$$(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2) = \lambda_1(x_1, x_2) = \lambda_2(x_1, x_2).$$

Отсюда следует, что $(x_1, x_2) = 0$. $\square$

Завершаем этот раздел теоремой, подводящей итог свойствам спектра вполне непрерывного самосопряженного оператора.

Теорема 4 ***(Гильберта–Шмидта)*** *Если A — вполне непрерывный самосопряженный оператор в H, то при любом $x \in H$ элемент Ax разлагается в сходящийся ряд Фурье по ортонормальной системе собственных векторов оператора A.*

Без доказательства.

Доказательство. Пусть e_1 — нормированный собственный вектор, отвечающий наибольшему по модулю собственному значению λ_1. Такое собственное значение по теореме 1 существует. Рассмотрим подпространство H_1 элементов, ортогональных e_1. Оператор A переводит элементы из H_1 в H_1, т.к.

$$(Ax, e_1) = (x, Ae_1) = \lambda_1(x, e_1) = 0,$$

следовательно, если x ортогонален e_1, то и Ax ортогонален e_1.

Таким образом, A можно рассматривать как вполне непрерывный самосопряженный оператор в H_1. Пусть e_2 — нормированный собственный вектор, отвечающий наибольшему по модулю собственному значению λ_2 оператора A в пространстве H_1. ($\lambda_2 \leq \lambda_1$). Продолжая этот процесс, можно построить подпространство H_2 пространства H_1 и т.д. Получим последовательность ортонормированных собственных векторов $e_k \in H_{k-1}$, отвечающих последовательности собственных значений $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k, ...$

Есть две возможности: либо этот процесс оборвется, либо будет бесконечным. Если оборвется, скажем на n-м шаге, тогда на пространстве H_n будем иметь $A = 0$. В этом случае для любого x рассмотрим элемент

$$y = x - \sum_{i=1}^{n}(x, e_k)e_k.$$

Нетрудно проверить, что $(y, e_k) = 0$ для $k = 1, \dots n$. Следовательно, $y \in H_n$. Значит $Ay = 0$, т.е. $Ax = \sum_{i=1}^{n}(x, e_k)\lambda_k e_k$, и для этого случая теорема доказана.

Другая возможность — процесс продолжается неограниченно. Значит мы получим последовательность e_k, отвечающих собственным значениям $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n, ...$

Далее, для самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве можно проверить, что $\|A\| = M = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$ (см.[1]). Тогда, согласно теореме 1,

$$\|A\|^2_{L(H_n)} = \lambda^2_{n+1}.$$

Отсюда получаем оценки:

$$\|A[x - \sum_{i=1}^{n}(x, e_k)e_k]\|^2 \leq \lambda^2_{n+1}\|x - \sum_{i=1}^{n}(x, e_k)e_k\|^2 =$$

$$= \lambda^2_{n+1}\left[\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}|(x, e_k)|^2\right] \leq \lambda^2_{n+1}\|x\|^2.$$

Поскольку $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$, то $A[x - \sum_{i=1}^{n}(x, e_k)\lambda_k e_k] \to 0$ при $n \to \infty$, т.е.

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty}(x, e_k)\lambda_k e_k. \quad \Box$$

Следствие. Если $N(A) = \{0\}$, то любой элемент из H раскладывается в ряд Фурье по ортонормальному базису — ортонормальной системе собственных векторов оператора A. В общем случае, когда $N(A) \neq \{0\}$, базис составляется из элементов множеств $N(A)$ и $R(A)$.

Разложением по ортонормальному базису, состоящему из собственных векторов оператора A, мы в дальнейшем воспользуемся при исследовании и решении операторных уравнений.

References

[1] *Треногин С.В.* Функциональный анализ М.: Наука, 1983, 384 с.

[2] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 572 с.

[3] *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. Изд. Лань. 2009. - 271 с.