Лекции № 10-12

Линейные операторы. Основные свойства. Примеры. Норма оператора. Примеры. Функционалы. Теорема Рисса об общем виде функционала на гильбертовом пространстве. Сопряженные операторы. Примеры.

Лекция № 10

- **Линейные операторы. Основные свойства. Примеры**

В качестве приложений свойств полноты и сепарабельности пространств мы рассмотрели решение операторных уравнений методом последовательных приближений и методом разложения в ряды Фурье. Среди уравнений, решаемых указанными методами, есть функциональные уравнения, дифференциальные уравнения и интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода.

Важно отметить, что метод последовательных приближений позволяет решать уравнения вида $x = Ax$ со сжимающим (необязательно линейным!) оператором A^k, $k \geq 1$, и сводящиеся к ним уравнения вида $x - Ax =: Bx = y$.

Теперь переходим к изучению свойств линейных операторов и обратных к ним, позволяющих решать уравнения вида $Bx = y$ с различными операторами B, необязательно сжимающими.

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства и A — оператор (однозначное отображение), действующий из X в Y. Записывают это обычно так $A : X \to Y$. В общем случае это означает, что A действует из $D(A) \subseteq X$ в $R(A) \subseteq Y$, где $D(A)$ — область определения, а $R(A)$ — область значения оператора A.

Оператор $A : X \to Y$ называется *линейным*, если для любых $x, y \in D(A)$ и для любых, в общем случае комплексных чисел α и β, имеет место равенство

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Примеры. Найдем области определения и проверим линейность следующих операторов A в пространстве $C[a,b]$, т.е. действующих из $D(A) \subseteq C[a,b]$ в $R(A) \subseteq C[a,b]$:

1) $Ax(t) = f(t)x(t)$, где f — непрерывная на $[a,b]$ функция;

2) интегральный оператор: $(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$, где $K(t,s)$ — непрерывная на $[a,b] \times [a,b]$ функция;

3) дифференциальный оператор: $Ax(t) = \frac{dx(t)}{dt}$;

4) в гильбертовом пространстве с ортогональным базисом $\{e_k\}$ операторы заданы на базисе

$$A_1 e_k = e_{k+1},\ k = 1, 2, \dots\ A_2 e_{k+1} = e_k,\ A_1 = 0,\ k = 1, 2, \dots;$$

5) оператор, заданный матрицей в пространствах $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_e)$ и $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_{max})$.

Оператор $A : X \to Y$ (необязательно линейный) называется *непрерывным* в точке $x \in X$, если из сходимости $\rho(x_n, x) \to 0$ следует сходимость $\rho(Ax_n, Ax) \to 0$.

Утверждение 1. Для линейного оператора $A : X \to Y$ непрерывность оператора в нуле эквивалентна непрерывности в любой точке x.

Оператор $A : X \to Y$ (необязательно линейный) называется *непрерывным* в точке $x \in X$, если из сходимости $\rho(x_n, x) \to 0$ следует сходимость $\rho(Ax_n, Ax) \to 0$.

У17. *Докажите это утверждение, используя замену*

$$z_n = y_n - x :\ \|y_n - x\| \to 0 \Leftrightarrow \|z_n\| \to 0.$$

Оператор A (необязательно линейный) называется *ограниченным*, если он ограниченное множество переводит в ограниченное. Для линейного оператора ограниченность оператора означает, что он шар радиуса единица с центром в нуле переводит в некоторый шар с центром в нуле.

Этот факт в нормированных пространствах можно записать следующим образом:

$$\exists M > 0 : \ \forall x \in X \ \|Ax\| \le M\|x\|. \tag{1}$$

Оказывается эта оценка является для линейного оператора удобным и часто используемым критерием ограниченности.

Теорема 1. Оператор $A : X \to Y$ является ограниченным тогда и только тогда, когда справедлива оценка (1).

Доказательство.

$\Rightarrow$ Поскольку из линейности оператора следует, что $A0 = 0$, при $x = 0$ оценка очевидна. Пусть $x \ne 0$. Положим $x' = \frac{x}{\|x\|}$, тогда $\|x'\| = 1$ и из ограниченности оператора следует

$$\|Ax'\| \le M = M\|x'\|, \quad \text{т.е.} \quad \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \le M\|x'\|.$$

По свойству однородности нормы и свойству линейности оператора имеем

$$\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \frac{1}{\|x\|}\|Ax\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le M.$$

Получили $\|Ax\| \le M\|x\|$, т.е. (1).

$\Leftarrow$ Если верно (1), то для $x \in \overline{S_0^1}$ имеем $\|Ax\| \le M$, т.е. A ограничен. $\square$

Линейность оператора — это такое сильное условие, что для линейных операторов свойство непрерывности оператора в точке ноль эквивалентно непрерывности оператора в произвольной точке (Утверждение 1). Более того, свойства ограниченности и непрерывности для линейных операторов оказываются эквивалентными.

Теорема 2. Пусть $A : X \to Y$ — линейный оператор и $D(A) = X$. Оператор является непрерывным, тогда и только тогда, когда он является ограниченным.

Доказательство.

$\Rightarrow$ Пусть оператор является непрерывным. Предположим, что он не является ограниченным, тогда образ единичного шара не является ограниченным множеством. Следовательно, для любого n

$$\forall n\ \exists x_n \in X, \|x_n\| \le 1:\ \|Ax_n\| > n.$$

Возьмем $x' = x/n$, для него имеем $\|x'_n\| = \|x_n\|/n \le \frac{1}{n} \to_{n\to\infty} 0$. По непрерывности оператора A отсюда следует, что $Ax'_n \to 0$.

С другой стороны, $\|Ax'_n\| = \frac{1}{n}\|Ax_n\| \ge 1$. Полученное противоречие (нет непрерывности) доказывает первую часть теоремы.

$\Leftarrow$ Доказательство получается из оценки (1).

2-е задание: У8–У18 сдать ведущим практику до 14 декабря.

Лекция № 11

Норма оператора. Примеры. Функционалы. Теорема Рисса об общем виде функционала на гильбертовом пространстве

Мы продолжаем изучать свойства пространства $L(X,Y)$ — пространства линейных ограниченных операторов $A : X \to Y$, и их частного случая $A : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — операторов с областью значений на действительной оси $\mathbb{R}$ (или на комплексной плоскости $\mathbb{C}$), называемых функционалами. Пространство линейных ограниченных функционалов $L(X, \mathbb{R}(\mathbb{C}))$ обозначают X^* и называют пространством, сопряженным к X. Функционалы, в отличие от операторов, обычно обозначают малыми буквами: $f(x)$ (как функции) или $\langle x, f\rangle$. Это обозначение идет от скалярного произведения (см. ниже теорему Рисса).

Для ограниченных операторов, т.е. таких что

$$\exists M > 0:\ \forall x \in X\ \|Ax\| \le M\|x\|, \tag{2}$$

вводится важная характеристика — *норма оператора*, равная нижней грани всех M в оценке (2):

$$\|A\| := \inf\{M > 0:\ \forall x \in X\ \|Ax\| \le M\|x\|\}. \tag{3}$$

Можно проверить (см.[1]), что для нормы оператора можно дать несколько (эквивалентных) определений:

Теорема 3. Пусть $A \in L(X,Y)$, тогда

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

С введенной нормой пространство линейных ограниченных операторов $L(X,Y)$ становится линейным нормированным пространством.

Практически, для нахождения нормы оператора обычно сначала, используя определение нормы через $\inf$, получают оценку нормы сверху, а потом оценку снизу, используя определение нормы через $\sup$. Если оценки сделаны аккуратно, то сравнивая эти оценки, можно получить равенство для нормы.

Примеры

Продемонстрируем этот характерный прием вычисления нормы оператора на примере важных для приложений операторов — оператора умножения на непрерывную функцию f в пространстве $C[a,b]$ и интегрального оператора $A : C[a,b] \to C[a,b]$.

1). $Ax(t) = f(t)x(t)$. Имеем оценку сверху:

$$\|Ax\| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)||x(t)| \leq \max_{t\in[a,b]} |f(t)| \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = M\|x\|, \; M = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

Отсюда, по определению нормы следует, что $\|A\| \leq M$. С другой стороны, возьмем $x_0(t) \equiv 1$, тогда $Ax_0(t) = f(t)$. Отсюда следует оценка снизу

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \geq \max_{t\in[a,b]} |f(t)|,$$

следовательно, $\|A\| = M$.

2). $$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds, \quad \text{где} \quad K(t,s) \in C([a,b]\times[a,b]).$$

Имеем оценку сверху

$$\|Ax\| = \max_{t\in[a,b]} \left| \int_a^b K(t,s)x(s)ds \right| \leq \max_{s\in[a,b]} |x(s)| \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|ds = M\|x\|,$$

где
$$M = \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|ds = \int_a^b |K(t_0,s)|ds,$$
t_0 — точка, в которой достигается максимум интеграла от модуля функции K.

Чтобы получить оценку снизу и показать, что M и есть норма A, возьмем последовательность непрерывных функций x_n с нормами, равными единице, такую, что интегралы $\int_a^b K(t_0,s)x_n(s)ds$ сходятся к интегралу $\int_a^b |K(t_0,s)|ds$. Отсюда по теореме 1 получим оценку снизу и, следовательно, равенство $\|A\| = M$.

У18. *Как частный случай интегрального оператора из примера 2), найдите норму функционала*
$$\langle x, f\rangle = \int_a^b K(s)x(s)ds,$$
заданного 1) на $C[a,b]$, 2) на $L[a,b]$.

Рассмотрим важные для приложений интегральные операторы — оператор преобразования Фурье, прямого:
$$\mathcal{F}[f](\alpha) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\alpha,y)} f(y)dy = \widehat{f}(\alpha),$$
обратного:
$$\mathcal{F}^{-1}[f](\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i(\alpha,y)} f(y)dy$$
и оператор свертки:
$$Af(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy = f*g(x) = g*f(x) = \int_{\mathbb{R}} g(y)f(x-y)dy = Ag(x).$$
Нетрудно проверить, что операторы преобразования Фурье и оператор свертки (с ограниченной g) являются ограниченными в пространстве $L(\mathbb{R})$.

У19. *Найти нормы операторов преобразования Фурье и оператора свертки (с ограниченной g), действующих в пространстве $L(\mathbb{R})$.*

Кроме того, важным свойством обладает оператор преобразования Фурье от производной: если $f', f'' \in L(\mathbb{R})$, то имеют место равенства:

$$\mathcal{F}[f'](\alpha) = i\alpha\mathcal{F}[f](\alpha).$$

$$\mathcal{F}[f''](\alpha) = -\alpha^2\mathcal{F}[f](\alpha).$$

Формулы получаются интегрированием по частям. *Проверьте !*

Покажем использование свойств операторов преобразования Фурье для решения дифференциальных уравнений в частных производных на примере задачи Коши для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}, \quad u(0) = f(x).$$

Применим к этой задаче оператор преобразования Фурье по переменной x, считая переменную t параметром, получим:

$$\frac{d\,\widehat{u}(t,\alpha)}{dt} = -(a\alpha)^2\,\widehat{u}(t,\alpha), \quad t \geq 0,\ \alpha \in \mathbb{R}, \quad \widehat{u}(0,\alpha) = \widehat{f}(\alpha).$$

Решаем это линейное обыкновенное ДУ, получаем

$$\widehat{u}(t,\alpha) = e^{-t(a\alpha)^2}\,\widehat{f}(\alpha).$$

Применяя обратное преобразование Фурье и используя еще одно свойство преобразования Фурье (прямого и обратного):
преобразование Фурье от произведения равно свертке преобразований Фурье, получаем решение в виде свертки — знаменитую формулу Пуассона:

$$u(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} f(y)dy.$$

Проверим, что преобразование Фурье от свертки равно произведению преобразований Фурье:

$$\mathcal{F}[f * g](\alpha) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\alpha,y)}dy \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y-x)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\alpha,y-x)}g(y-x)dy \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\alpha,x)}f(x)dx = \mathcal{F}[g](\alpha)\cdot\mathcal{F}[f](\alpha).$$

Как можно видеть из приведенных здесь и в предыдущей лекции примеров, существует множество разнообразных линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y. В общем случае их нельзя записать в общей форме для заданной пары X и Y.

Оказывается для функционалов из X^* для многих конкретных пространств X это сделать можно. Самый знаменитый и часто используемый из таких результатов — это теорема Рисса об общем виде функционала на гильбертовом пространстве.

Теорема Рисса. Пусть H — гильбертово пространство (комплексное или вещественное), тогда для любого $f \in H^*$ существует единственный элемент $y \in H$, такой что $\langle x, f\rangle = (x, y)$. При этом $\|f\| = \|y\|$.

Доказательство. Рассмотрим ядро функционала $Kerf$ — множество всех таких элементов z, что $\langle z, f\rangle = 0$. *Проверьте, что* $Kerf$ — это подпространство в H. Если $Kerf = H$, то доказательство тривиально: в качестве $y \in H$ можно взять ноль.

Если $Kerf \neq H$, то $H = Kerf \oplus Kerf^{\perp}$. Следовательно, существует ненулевой элемент $z \in Kerf^{\perp}$. Будем считать, что $\langle z, f\rangle = 1$, иначе вместо z возьмем $z_0 = z/\langle z, f\rangle$. Пусть x — произвольный элемент из H, тогда

$$\langle x - \langle x, f\rangle z, f\rangle = \langle x, f\rangle - \langle x, f\rangle = 0,$$

следовательно, $x - \langle x, f\rangle z \in Kerf$ и поскольку $z \in Kerf^{\perp}$, имеем

$$(x - \langle x, f\rangle z, z) = (x, z) - \langle x, f\rangle \|z\|^2 = 0.$$

Отсюда получаем требуемое равенство

$$\langle x, f\rangle = (x, z/\|z\|^2) =: (x, y).$$

Проверим, что $\|f\| = \|y\|$. По неравенству Коши-Буняковского

$$|\langle x, f\rangle| = |(x, y)| \leq \|x\|\|y\| \;\Rightarrow\; \|f\| \leq \|y\|$$

по определению нормы f. Опять же по неравенству Коши-Буняковского

$$|\langle y, f\rangle| = |(y, y)| = \|y\|^2 \leq \|f\|\|y\|,$$

откуда $\|y\| \le \|f\|$ и, следовательно, $\|f\| = \|y\|$.

Единственность доказывается от противного. *Докажите.* $\square$

Таким образом, в теореме Рисса доказано, что пространство H изоморфно и изометрично пространству H^*. Условно этот факт часто записывают как равенство: $H = H^*$. Эти множества, конечно, разной природы, но с точки важных свойств ЛНП они тождественны.

У20. *Используя теорему Рисса, привести примеры линейных непрерывных функционалов на следующих пространствах*

1) на l_2,
2) на $L_2[a,b]$,
3) на $L_2(\mathbb{R})$,
4) на $L_2^f(\mathbb{R})$ с весом $f(x) = e^{-x^2}$.

При исследовании свойств операторов важное значение имеет поведение сопряженных к ним операторов.

Лекция № 12

Сопряженные операторы. Примеры.

Определение 1. Пусть A — линейный ограниченный оператор в нормированных пространствах: $A \in L(X,Y)$. Тогда *сопряженный оператор* $A^* \in L(Y^*, X^*)$ определяется следующим равенством

$$\langle Ax, f\rangle = \langle x, A^* f\rangle, \quad x \in X,\ f \in Y^*.$$

Разберемся с этим определением и покажем, что такой оператор A^* действительно существует, что $A^* \in L(Y^*, X^*)$ и более того, $\|A\| = \|A^*\|$. Для этого определим функционал φ на пространстве X:

$$\varphi(x) = \langle x, \varphi\rangle := \langle Ax, f\rangle.$$

Проверьте, что функционал φ определен на всем X и что он линеен (благодаря линейности A и f).

Теперь проверим, что функционал φ ограничен. Имеем

$$|\langle x, \varphi \rangle| = |\langle Ax, f \rangle| \leq \|f\| \|Ax\| \leq \|f\| \|A\| \|x\|. \tag{4}$$

Отсюда следует, что на элементах $f \in Y^*$ равенство

$$\langle x, \varphi \rangle = \langle Ax, f \rangle = \langle x, A^* f \rangle$$

задает линейный ограниченный оператор A^*: $A^* f := \varphi$.

Проверим, что $\|A^*\| = \|A\|$. Из оценки (1) следует, что

$$\|A^* f\| \leq \|A\| \|f\| \ \Rightarrow \ \|A^*\| \leq \|A\|.$$

Чтобы доказать неравенство в другую сторону, сформулируем часто используемое следствие из **теоремы Хана-Банаха о возможности продолжения с сохранением нормы функционала, заданного на линейном многообразии $L \subset X$, на все ЛНП X.**

Следствие из теоремы Хана-Банаха. *Пусть $A \in L(X, Y)$, тогда для каждого x_0, такого что* $Ax_0 \neq 0$, *существует функционал $f_0 \in Y^*$, такой что* $\|f_0\| = 1$ и $\langle Ax_0, f_0 \rangle = \|Ax_0\|$.

Из этого следствия имеем

$$\|Ax_0\| = |\langle Ax_0, f_0 \rangle| = |\langle x_0, A^* f_0 \rangle| \leq \|A^*\| \|f_0\| \|x_0\| = \|A^*\| \|x_0\|.$$

Отсюда $\|A\| \leq \|A^*\|$. Значит $\|A^*\| = \|A\|$.

Чтобы на практике пользоваться определением сопряженного оператора для построения сопряженного оператора A^* к конкретному оператору A, надо начать с того, что построить $\langle Ax, f \rangle$ а потом *перекомпоновать это выражение* так, чтобы получилось действие некоторого функционала на x: $\langle x, A^* f \rangle$.

У21. 1). *Используя смену порядка суммирования, построить оператор, сопряженный к матричному оператору A, действующему из гильбертова пространства E^n в E^m:*

$$Ax = y: \ x = \{x_1, x_1, \ldots, x_n\}, \ y = \{y_1, y_1, \ldots, y_m\},$$

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j, \; k = 1, \ldots, m.$$

2). *Используя смену порядка интегрирования, построить оператор, сопряженный к интегральному оператору с непрерывным ядром*:

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds, \; A : L_2[a,b] \to L_2[a,b].$$

Определение 2. Если для операторов $A \in L(X,Y)$ и $A^* \in L(Y^*, X^*)$ выполняется условие $A = A^*$ и, следовательно, $X = Y^*$, $Y = X^*$, то такой оператор называется *самосопряженным.* Обычно самосопряженные операторы рассматривают в гильбертовых пространствах H. Оператор $A \in L(H)$ называется *эрмитово самосопряженным*, если выполняется равенство $(Ax, y) = (x, Ay)$ для любых $x, y \in H$.

Укажите условия, при которых заданные матричный и интегральный операторы являются самосопряженными.

References

[1] *Треногин С.В.* Функциональный анализ М.: Наука, 1983, 384 с.

[2] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 572 с.

[3] *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. Изд. Лань. 2009. - 271 с.