Лекции № 13-14

Обратные операторы. Спектр операторов. Примеры. Функции от ограниченных операторов. Примеры применения к решению дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами

- **Обратные операторы**.

Обратные операторы и связанное с ними понятие спектра — это можно сказать центральная тема курса "Линейный функциональный анализ", в частности раздела "Операторы". Многочисленные модели в различных областях приводят к операторным уравнениям вида $Bx = y$. Решить такое уравнение означает найти обратный оператор B^{-1}.

Определение 1. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства. Пусть линейный оператор $B : D(B) \subset X \to R(B) \subset Y$ (коротко $B : X \to Y$) осуществляет взаимно-однозначное отображение $D(B)$ на $R(B)$. Тогда обратное (однозначное) отображение $R(B) \to D(B)$ называется *обратным оператором.* Эквивалентно обратный оператор B^{-1} можно определить как оператор, для которого выполняются равенства

$$B^{-1}Bx = x,\ x \in D(B), \quad BB^{-1}y = y,\ y \in R(B),$$

коротко:

$$B^{-1}B = I_{\overline{D(B)}}, \quad BB^{-1} = I_{\overline{R(B)}},$$

где $I_{\overline{D(B)}}$, $I_{\overline{R(B)}}$ — это единичные операторы, заданные на подпространствах $\overline{D(B)}$, $\overline{R(B)}$, из X, Y, соответственно.

При изучении решений $Bx = y$ важным вопросом является существование и ограниченность обратного оператора. *Почему*?

Одна из базовых теорем линейного ФА — теорема Банаха об обратном операторе. Сформулируем ее без доказательства.

Теорема Банаха об обратном операторе. *Пусть X, Y — банаховы пространства и $A : X \to Y$ — линейный ограниченный оператор, отображающий взаимно-однозначно X на все пространство Y. Тогда обратный оператор ограничен.*

В завершающих лекциях, мы будем изучать операторные уравнения первого и второго рода на основе свойств обратных операторов к операторам первого рода $B = A$, где A — вполне непрерывный оператор, и операторам второго рода $B = I - A$. Покажем, что операторные уравнения второго рода $(I - A)x = y$, при достаточно общих условиях, порождают корректные задачи (теория Фредгольма), а операторные уравнения первого рода $Ax = y$ — некорректные задачи (методы регуляризации).

Переходим к изучению важного понятия — спектра линейных операторов A, определяемого через поведение оператора, обратного к $\lambda - A$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (другое обозначение $\lambda I - A$). Рассматривая примеры спектра операторов, мы, по сути, будем рассматривать примеры обратных операторов.

- **Спектр линейных операторов. Примеры**

Определение 2. Пусть X — ЛНП (линейное нормированное пространство) и линейный оператор $A : X \to X$.

Рассмотрим три возможности поведения оператора $\lambda - A$:

1). Оператор $\lambda - A$ имеет ограниченный обратный $(\lambda - A)^{-1} =: R_A(\lambda)$. В этом случае оператор $R_A(\lambda)$ называется *резольвентой* (разрешающий оператор, от resolve) и точка λ называется регулярной. Множество регулярных точек называют *резольвентным множеством* и обозначают $\rho(A)$.

2) Обратный к $\lambda - A$ существует, но не ограничен. В этом случае λ называется точкой непрерывного спектра. Множество точек непрерывного спектра обозначают $\sigma_c(A)$ (c от continuous).

3) Не существует оператора, обратного к $\lambda - A$. Это эквивалентно тому, что уравнение $(\lambda - A)x = 0$ имеет ненулевое решение: $\exists x \neq 0 : \ \lambda x = Ax$. Как вы знаете из алгебры, такие λ называются собственными значениями оператора A, а ненулевые решения x — соответствующими собственными векторами (или собственными функциями в ФА). Множество собственных значений $\sigma_d(A)$ называют дискретным спектром, а множество

$$\sigma_c(A) \cup \sigma_d(A) =: \sigma(A)$$

называют *спектром* оператора A.

Вспомним некоторые спектральные свойства линейных операторов в конечномерных пространствах, знакомые вам из алгебры: собственных значений и собственных векторов у таких операторов не более конечного числа, собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Отметим, что в общем случае в бесконечномерных пространствах спектр операторов, даже ограниченных, может быть устроен достаточно сложно.

Приведем геометрически наглядные результаты о спектре линейного ограниченного оператора.

Предложение 1. Пусть $A \in L(X)$, X — банахово пространство. Тогда

$$\Lambda = \{\lambda : \ |\lambda| > \|A\|\} \subset \rho(A).$$

Доказательство. Для оператора $\lambda - A$ при $\lambda \in \Lambda$ имеет место следующее равенство $\lambda I - A = \lambda(I - \lambda^{-1}A)$, где $\|\lambda^{-1}A\| = |\lambda|^{-1}\|A\| < 1$.

Далее используем полезный факт:

если $\|B\| < 1$, то для оператора $I - B$ существует ограниченный обратный $(I - B)^{-1}$, определяемый рядом из степеней оператора B:

$$(I - B)^{-1} := I + B + B^2 + \dots$$

Этот ряд сходится в пространстве $L(X)$, т.к. сходится ряд из норм операторов, и для него выполняется равенство

$$(I - B)^{-1}(I - B)x = (I - B)(I - B)^{-1}x = x, \ x \in X.$$

Отсюда следует, что при условии $|\lambda|^{-1}\|A\| < 1$ оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ ограничен. Про оператор $\lambda I - A$ в таком случае говорят, что он непрерывно обратим. □

Предложение 2. Резольвентное множество открыто (следовательно, спектр — дополнение комплексной плоскости до резольвентного множества — замкнутое множество).

Без доказательства.

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$. Это означает, что оператор $\lambda_0 I - A$ непрерывно обратим. Для оператора $\lambda I - A$ имеем следующую цепочку равенств:

$$\lambda I - A = \lambda I - \lambda_0 I + (\lambda_0 I - A) = (\lambda_0 I - A)[I + (\lambda I - \lambda_0 I)R_{\lambda_0}(A)].$$

Отсюда следует, что при

$$|\lambda - \lambda_0| \|R_{\lambda_0}(A)\| < 1,$$

т.е. при $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|R_{\lambda_0}(A)\|$, оператор $\lambda I - A$ непрерывно обратим и

$$(\lambda I - A)^{-1} = [I + (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}(A)]^{-1} R_{\lambda_0}(A) \quad ((AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}).$$

Таким образом, мы доказали, что для точки λ_0 существует целая окрестность точек $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < 1/\|R_{\lambda_0}(A)\|\}$, которые тоже являются регулярными. Это по определению означает, что множество регулярных точек (резольвентное множество) является открытым. $\square$

- **Примеры**

Рассмотрим оператор A умножения на непрерывную функцию f в пространстве $C[a, b]$.

Обычно исследование спектра начинают с того, что записывают оператор $\lambda I - A$. Далее, в соответствии с определением спектра, смотрят в какую из трех возможностей поведения обратного к нему этот оператор попадает.

В нашем случае $(\lambda I - A)x(t) = (\lambda - f(t))x(t)$. Посмотрим, есть ли у этого оператора обратный, т.е. посмотрим имеет ли уравнение $(\lambda I - A)x(t) = (\lambda - f(t))x(t) = 0$ ненулевые решения. Это зависит от поведения множителя $(\lambda - f(t))$. Тут могут быть три подслучая:

a) $(\lambda - f(t)) \neq 0$ при любом $t \in [a, b]$. В этом случае обратный оператор

$$(\lambda I - A)^{-1} y(t) = \frac{y(t)}{\lambda - f(t)}.$$

Проверьте, что этот оператор ограничен. Следовательно $\lambda \notin R(f)$ принадлежит множеству $\rho(A)$.

b) $\lambda - f(t_0) = 0$ в некоторой точке $t_0 \in [a, b]$.

Проверьте, что в этом случае оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ существует (т.е. оператор $\lambda I - A$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие), но он неограничен. Следовательно, данная точка λ является точкой непрерывного спектра.

c) Если функция f принимает значение λ на некотором отрезке из $[a, b]$, то обратный к оператору $(\lambda - A)$ не существует и, следовательно, данная точка λ является собственным значением.

У21. 1). *Проверьте это и найдите соответствующую собственную функцию. Найдите спектр для случая* $[a,b]=[2,3]$ и $f(t)=1+t^2$.

2). *Найдите спектр оператора* $A\{x_1,x_2,\dots\}=\{x_1-x_2,x_2,\alpha x_3,x_4,\dots\}$ *в пространстве* l_2.

3). *Найдите собственные значения и собственные векторы интегрального оператора с ядром* e^{2x+y} *в пространстве* $C[-1,1]$, *используя вырожденность ядра.*

• Функции от ограниченных операторов. Примеры применения к решению дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами

Обратный оператор A^{-1} и оператор $(\lambda I-A)^{-1}$, возникающий при определении спектра оператора A, являются функциями от оператора A, они соответствуют функциям

$$F_1(x)=\frac{1}{x},\qquad F_2(x)=\frac{1}{\lambda-x},$$

соответственно.

В общем случае, для бесконечно дифференцируемой функции F с ограниченными производными

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+F''(0)/2!x^2+F'''(0)/3!x^3+\dots)$$

и ограниченного оператора $A:X\to X$, действующего в банаховом пространстве X, можно определить оператор $F(A)$ следующим образом:

$$F(A):=F(0)+F'(0)A+F''(0)/2!\,A^2+F'''(0)/3!\,A^3+\dots.$$

Этот ряд сходится абсолютно в пространстве $L(X)$ $\Rightarrow$ сходится в пространстве $L(X)$ $\Rightarrow$ для любого $u\in X$ сходится ряд

$$F(A)u:=(F(0)+F'(0)A+F''(0)/2!\,A^2+F'''(0)/3!\,A^3+\dots)u,\quad u\in X.$$

Например, соответствующая функции $F(x)=e^{tx}$, зависящей от параметра t, оператор-функция $F(A)=e^{tA}$, в приложениях обычно зависящая от параметра времени $t\ge 0$:

$$e^{tA}:=I+tA+(tA)^2/2!+(tA)^3/3!+\dots$$

Определенные таким образом функции от операторов, зависящие от параметра времени, можно использовать при решении задач Коши (краевых задач) для дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами, называемых дифференциально-операторными уравнениями.

Простейшее *дифференциально-операторное уравнение* — это дифференциальное уравнение первого порядка с ограниченным операторным коэффициентом $A : X \to X$ в банаховом пространстве X:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t \geq 0.$$

Здесь $u(t)$ при каждом t — это элемент пространства X (например непрерывная на $[a, b]$ функция при $X = C[a, b]$)), производная $\frac{du}{dt}(t)$ определяется как производная по параметру t в пространстве X:

$$\frac{du(t)}{dt} := \lim \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t}.$$

Как и в ОДУ, для такого уравнения обычно ставится задача Коши: $u(0) = f \in X$. Решение этой задачи Коши, как нетрудно проверить, строится следующим образом:

$$u(t) = e^{tA} f = (I + tA + t^2\, A^2/2! + t^3\, A^3/3! + \dots)f.$$

Построенный ряд сходится абсолютно, так как оператор A ограниченный и сходится ряд из норм слагаемых $\|A^k/k!\|$.

У22. *Покажите, что используя оператор e^{tA} и формулу Коши из ОДУ, можно построить решение неоднородной задачи Коши*:

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + g(t), \ t \geq 0 \quad u(0) = f.$$

Здесь $g(t)$ при каждом t (как и $u(t)$) — элемент пространства X.

У23. *Запишите однородную задачу Коши с конкретным интегральным оператором A в $C[a, b]$. Постройте приближения к ее решению.*

Подобным образом можно строить и решение задачи Коши для уравнения второго порядка с непрерывно обратимым $B : X \to X$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = -B^2 u(t), \ t \geq 0, \quad u(0) = u_0, \ u'(0) = Bu_1.$$

$$u(t) = \sin Bt\, u_1 + \cos Bt\, u_0,$$

где $\sin Bt$ и $\cos Bt$ определяются соответствующими степенными рядами:

$$\sin Bt = \qquad\qquad \cos Bt =$$

Запишите эти ряды.

Подобным образом можно строить ряды для оператор-функций $F(A)$, если функция $F(x), x \in \Omega \subset \mathbb{R},$ раскладывается в ряд Тейлора на множестве Ω. В частности, если функция $f = f(x), x \in [a, b],$ раскладывается в ряд Тейлора на отрезке $[a, b]$.

Задачи из матфизики (теории УрЧП) тоже приводят к задачам Коши вида (1), но уже с неограниченными операторами A. Например, к задаче Коши для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}, \quad u(0) = f(x).$$

В предыдущей лекции мы построили решение этой задачи, используя преобразование Фурье.

References

[1] *Треногин С.В.* Функциональный анализ М.: Наука, 1983, 384 с.

[2] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 572 с.

[3] *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. Изд. Лань. 2009. - 271 с.