ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Лекции № 6-8

Евклидовы пространства. Гильбертовы пространства. Некоторые вопросы теории приближений в ЛНП, в частности, в гильбертовых пространствах. Ряды Фурье в гильбертовых пространствах

После изучения полных и сепарабельных пространств и их применения к решению уравнений, мы переходим к изучению гильбертовых пространств — пространств по своим свойствам наиболее близким к конечномерным евклидовым пространствам, важных как с точки зрения теории ФА, так и многочисленных приложений.

В качестве приложений свойств гильбертовых пространств мы рассмотрели некоторые вопросы теории приближений, ряды Фурье и методы решения уравнений с помощью рядов Фурье.

Определение 1. Гильбертово пространство — это полное сепарабельное евклидово пространство.

Определение 2. ЛНП $(X, \|x\|)$, в котором норма задается через скалярное произведение:

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)},$$

называется евклидовым. Линейное пространство над полем комплексных чисел и со скалярным произведением еще называют унитарным.

Напомним определение скалярного произведения пары элементов (x, y) (или другое обозначение: $\langle x, y\rangle$):

1) $(x,x) \geq 0,\ (x,x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0;$

2) $(x,y) = \overline{(y,x)};$

3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y);$

4) $(\lambda x, y) = \lambda(x,y).$

Привести множество примеров ЛНП, являющихся и не являющихся евклидовыми (унитарными) пространствами, позволяет критерий евклидовости ЛНП — *равенство параллелограмма*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Утверждение 1. Для того, чтобы ЛНП было евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство параллелограмма.

Доказательство.

$\Rightarrow$ легко проверяется, если записать квадраты норм в равенстве параллелограмма через скалярные произведения:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) =$$

$$= (x,x) + (x,y) + \overline{(x,y)} + (y,y) + (x,x) - (x,y) - \overline{(x,y)} + (y,y) =$$

$$= 2(\|x\|^2 + \|x\|^2).$$

$\Leftarrow$ Проверку того, что при выполнении равенства параллелограмма скалярное произведение, согласующееся с нормой, задается следующим образом:

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2),$$

можно посмотреть в [2]. $\blacksquare$

Чтобы практически проверить, является ли данное пространство евклидовым, надо проверить удовлетворяет ли норма равенству параллелограмма. Если есть подозрение, что не удовлетворяет, то найти хотя бы одну пару элементов x, y, для которой равенство не выполняется.

У8. *Проверьте, являются ли евклидовыми* $C[a,b]$, $L_2[a,b]$, $L_1[a,b]$.

• Некоторые вопросы теории приближений в ЛНП, в частности, в гильбертовых пространствах

Мы будем рассматривать для элемента x из ЛНП X элементы наилучшего приближения из некоторого замкнутого выпуклого множества M.

Для $x \in X$ *элемент наилучшего приближения* из M — это $x^* \in M$, такой что

$$\|x - x^*\| = \inf_{u \in M} \|x - u\| =: \rho(x, M).$$

Такого элемента может не быть, он может быть не единственным.

Теорема 1. Пусть L — к/м подпространство ЛНП X. Тогда для любого $x \in X$ существует (возможно не единственный) элемент x^*, такой что

$$\rho(x, L) = \|x - x^*\|.$$

Доказательство. Подпространство ЛНП X — это линейное многообразие, замкнутое по норме X.

Пусть $x \notin L$, тогда $\rho(x, L) = d > 0$. *Почему*?

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^m$ — базис в L. Пусть $u = \sum_{k=1}^m \eta_k e_k$ — разложение произвольного элемента u из L по базису. Введем на X и, следовательно на L, еще евклидову норму, тогда имеем

$$\exists\ \alpha, \beta > 0 : \quad \forall x \in L \quad \alpha \|x\|_e \le \|x\| \le \beta \|x\|_e. \tag{1}$$

Почему?

Рассмотрим L_e — линейное подпространство с евклидовой нормой. Функция $f(u) = \|x - u\|$ непрерывна в L_e:

$$\big|\, \|x - u_1\| - \|x - u_2\| \,\big| \le \|u_1 - u_2\| \le \beta \|u_1 - u_2\|_e.$$

Покажем, что $\inf_{u \in L} \|x - u\|$ может достигаться только в шаре

$$\|u\|_e \le r, \quad r = \alpha^{-1}(d + 1 + \|x\|).$$

Действительно, если $\|u\|_e > r$, то

$$\|x - u\| \ge \|u\| - \|x\| \ge \alpha \|u\|_e - \|x\| > \alpha r - \|x\| = d + 1.$$

Значит, нижняя грань не может достигаться во множестве $\|u\|_e > r$, а может достигаться (и достигается) только на ограниченном замкнутом множестве $\|u\|_e \le r$. Следовательно,

$$\exists\ u^* : \ \rho(x, L) = \inf_{u \in L_e} \|x - u\| = \|x - u^*\|. \quad \blacksquare$$

У9. *Учитывая геометрию шаров с различными нормами в $\mathbb{R}^2$, геометрически покажите возможность существования на плоскости не единственного ближайшего элемента к выпуклому замкнутому множеству. С какими нормами на $\mathbb{R}^2$ это возможно?.*

Кроме к/м пространств особую роль в вопросах приближения (и во многих других вопросах) играют гильбертовы пространства.

Теорема 2. Пусть M — замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве и точка $x \notin M$. Тогда существует единственный элемент $y \in M$, такой что

$$\rho(x, M) = \|x - y\|.$$

Доказательство. Знаем, что $\rho(x, M) = \inf_{u \in M} \|x - u\| = d > 0$. Из определения inf следует, что

$$\exists\ u_n \in M:\ d \leq \|x - u_n\| < d + 1/n. \tag{2}$$

Покажем, что последовательность u_n фундаментальна, используя равенство параллелограмма и взяв за стороны $x - u_n$ и $x - u_m$:

$$\|u_n - u_m\|^2 + \|2x - u_n - u_m\|^2 = 2(\|x - u_n\|^2 + \|x - u_m\|^2).$$

Элемент $\frac{u_n + u_m}{2} \in M$, так как M выпукло, поэтому

$$\|2x - u_n - u_m\|^2 = 4\Big\|x - \frac{u_n + u_m}{2}\Big\|^2 \geq 4d^2.$$

Далее, из неравенства (2) имеем

$$\|x - u_n\|^2 < (d + 1/n)^2, \quad \|x - u_m\|^2 < (d + 1/m)^2.$$

Отсюда следует

$$\|u_n - u_m\|^2 = 2\left(\|x - u_n\|^2 + \|x - u_m\|^2\right) - 4\left\|x - \frac{u_n + u_m}{2}\right\|^2$$

$$< 2(d + 1/n)^2 + 2(d + 1/m)^2 - 4d^2 = \frac{4d}{n} + \frac{4d}{m} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} \to_{n,m\to\infty} 0.$$

Отсюда следует фундаментальность последовательности u_n, следовательно сходимость к некоторому $y \in M$.

Переходя к пределу в неравенствах (2), получаем

$$\|x-y\| = d = \rho(x, M).$$

Единственность получается от противного и тоже из равенства параллелограмма: пусть существует два элемента наилучшего приближения y и y^*, тогда

$$4d^2 = 2\|x-y\|^2 + 2\|x-y^*\|^2$$

$$= \|y-y^*\|^2 + 4\left\|x - \frac{y^*+y}{2}\right\|^2 \geq \|y-y^*\|^2 + 4d^2 \;\Rightarrow\; \|y-y^*\| = 0. \quad \blacksquare$$

Следствие. Пусть L — подпространство в полном евклидовом пространстве и точка $x \notin L$. Тогда существует единственный элемент $y \in L$, такой что

$$\rho(x, L) = \|x-y\|.$$

Отсюда вытекают следующий важный результата, который мы сформулируем в форме теоремы.

Теорема 3. Пусть L — подпространство в полном евклидовом (в гильбертовом) пространстве и точка $x \notin L$. Пусть $\rho(x, L) = \|x-y\|$. Тогда $x - y \perp L$.

Доказательство. Докажем, что $(x-y, h) = 0$ для любого $h \in L$. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеем

$$\|x-y+\lambda h\| = \|x-(y-\lambda h)\| \geq \|x-y\|.$$

Следовательно,

$$(x-y+\lambda h, (x-y+\lambda h) \geq (x-y, x-y) \iff$$

$$\lambda(h, x-y) + \overline{\lambda}(x-y, h) + \lambda\overline{\lambda}\|h\|^2 \geq 0.$$

Положим

$$\lambda = \frac{(x-y,h)}{\|h\|^2}, \quad \text{получим} \quad -\frac{|(x-y,h)|^2}{\|h\|^2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (x-y,h) = 0. \quad \blacksquare$$

Определение 3. Пусть L — линейное многообразие в полном евклидовом пространстве H. Совокупность всех элементов из H, ортогональных к L, называется *ортогональным дополнением к* L и обозначается $L^{\perp}$.

У10. *Проверьте, что* $L^{\perp}$ *— подпространство в* H*, т.е. замкнутое линейное многообразие в* H*.*

Теорема о разложении H в прямую сумму. Пусть L — подпространство в полном евклидовом пространстве H. Тогда для любого $x \in H$ справедливо разложение

$$x = y + z, \quad y \in L,\ z \in L^{\perp}.$$

Доказательство. Точка y в разложении — это ближайшая (единственная) к x точка в L. По теореме 3 $z = x - y \perp L$.

Элемент y в разложении $x = y + z$ называется *проекцией элемента* x на подпространство L.

Полученное свойство (единственного!) разложения для произвольного элемента из полного евклидова пространства H записывают еще так:

$$H = L \oplus L^{\perp}.$$

Здесь знак $\oplus$ как раз и означает, что любой элемент $x \in H$ единственным образом разлагается в сумму $y \in L$ и $z \in L^{\perp}$. $\blacksquare$

У11. *Докажите теорему Пифагора*: $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.

У12. *В пространствах* l_2 *и* L_2 *задайте подпространство* L *и постройте к нему ортогональное дополнение.*

В общем случае ЛНП (не обязательно полного евклидова) имеет место

Лемма Рисса о почти перпендикуляре. Пусть L — подпространство в ЛНП X и $L \neq X$. Тогда

$$\forall \varepsilon \in (0,1)\ \ \exists z_{\varepsilon} \notin L,\ \|z_{\varepsilon}\| = 1 :\ \rho(z_{\varepsilon}, L) > 1 - \varepsilon.$$

Лемма без доказательства.

Сравните результат леммы Рисса с результатом о разложении полных евклидовых пространств.

• **Шапочка** Последний вопрос, который мы рассмотрим под углом проблем, связанных с приближением, — это приближение функций более гладкими, чем исходная, функциями. Для этой цели будет использована функция, называемая шапочкой, δ-образной функцией, ядром усреднения и пр., вернее, будет использована последовательность таких функций $\varphi_n(t)$.

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} C_n \exp\left(-\frac{1}{1/n^2 - t^2}\right) & \text{при } |t| < 1/n \\ 0 & \text{при } |t| \geq 1/n. \end{cases}$$

Здесь константа C_n выбирается так, чтобы $\int \varphi_n(t)dt = 1$.

У13. *Нарисуйте графики функций φ_n и проследите их зависимость от параметра n. Докажите бесконечную дифференцируемость функций φ_n.*

Начнем с приближения непрерывной на $\mathbb{R}$ функции f сверткой с шапочками $f * \varphi_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_n(x-t)dt$.

Известно, (см., напр., [2]) что для функций $f, g \in L(\mathbb{R})$ *свертка*

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$$

существует и тоже принадлежит $L(\mathbb{R})$.

Проверьте, что для любых интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций f, g свертка $f * g$ коммутативна:

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)f(x-t)dt$$

и тоже является интегрируемой на $\mathbb{R}$ функцией.

Для свертки непрерывной на $\mathbb{R}$ функции f с φ_n имеем равенства

$$f * \varphi_n(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_n(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)f(x-t)dt$$

$$= \int_{-1/n}^{1/n} \varphi_n(t)f(x-t)dt = f(x-t^*) \to_{n\to\infty} f(x).$$

При этом из теорем о дифференцировании функций по параметру под знаком интеграла следует, что $f * \varphi_n(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Таким образом, мы получили поточечное приближение непрерывной на $\mathbb{R}$ функции f бесконечно дифференцируемыми на $\mathbb{R}$ функциями $f * \varphi_n$.

У14. *Аналитически и геометрически покажите приближение* $\chi_{[a,b]}$ — *характеристической функции отрезка* $[a, b]$, *функциями* $\chi_{[a,b]} * \varphi_n \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Теперь переходим к изучению свойств рядов Фурье в гильбертовых пространствах.

• Ряды Фурье в гильбертовых пространствах

Пусть в гильбертовом пространстве H задана ортогональная система $\{\varphi_k\}$: скалярное произведение (φ_k, φ_j) равно нулю при $k \neq j$ и отлично от нуля при $k = j$. Тогда система $\{e_k := \varphi_k / \|\varphi_k\|\}$ является ортонормальной системой.

Проверьте, что знакомая вам из МА тригонометрическая система

$$1,\ \cos n\frac{2\pi t}{b-a},\ \sin n\frac{2\pi t}{b-a}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

является ортогональной в $L_2(a, b)$.

У15. *Постройте соответствующую ей ортогональную и ортонормальную тригонометрические системы в* $L_2(-\pi, \pi)$ *и в* $L_2(0, \pi)$. *Приведите пример разложения функции из* $L_2(0, \pi)$ *в ряд Фурье.*

Ряд вида $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k \varphi_k$ $(\sum_{k=1}^\infty \alpha_k e_k)$ называется рядом по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$ (рядом по ортонормальной системе $\{e_k\}$). Ряд вида

$$\sum_{k=1}^\infty x_k \varphi_k,\ \text{где } x_k = \frac{(x, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} \quad \left(\sum_{k=1}^\infty x_k e_k,\ x_k = (x, e_k)\right)$$

называется *рядом Фурье* элемента x по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$ (рядом Фурье элемента x по ортонормальной системе $\{e_k\}$).

Из того, что любое гильбертово пространство H по определению является сепарабельным, следует, что в нем существует счетное всюду плотное множество. Из этого счетного всюду плотного множества через их линейные комбинации по правилу ортогонализации Грамма-Шмидта можно построить ортогональную (линейно независимую) систему, которая тоже будет плотной в H. Эта система является ортогональным базисом в H. Из полученного указанным выше способом счетного ортогонального базиса $\{\psi_k\}$ можно построить ортонормальную систему — ортонормальный базис: $\{e_k := \psi_k/\|\psi_k\|\}$. Таким образом, в любом гильбертовом пространстве существуют счетный ортогональный и счетный ортонормальный базисы.

Оказывается, что такой базис обладает замечательным свойством оптимальности: частичные суммы ряда Фурье $\sum_{k=1}^n x_k\psi_k$ являются наилучшим приближением к x среди всех линейных комбинаций $\sum_{k=1}^n \alpha_k\psi_k$.

Почему важно иметь приближение именно отрезками рядов?

Далее мы для простоты будем рассматривать ряды Фурье по ортонормальным системам. Указанное свойство оптимальности отражает следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $\{e_k\}$ — ортонормальная система в гильбертовом пространстве H, рассматриваемом для простоты над полем действительных чисел. Тогда для любого элемента $x \in H$ частичная сумма ряда Фурье $\sum_{k=1}^n x_k e_k$ минимизирует норму разности $\|x-\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\|$ по всем частичным суммам $S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$.

Доказательство.

$$\|x - S_n\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\right) =$$

$$(x, x) - 2\left(x, \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k,\right) + \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\right) =$$

$$\|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - x_k)^2.$$

Из полученной цепочки равенств легко видеть, что минимум $\|x - S_n\|$

достигается при условии равенства нулю последнего слагаемого:

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - x_k)^2 = 0, \text{ т.е. } \alpha_k = x_k, \ k = 1, \dots n.$$

В этом случае

$$\|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2. \quad \square \tag{3}$$

Так как $\|x - S_n\|^2 \geq 0$, из (2) следует неравенство, называемое *неравенством Бесселя*:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq \|x\|^2, \quad n = 1, \dots \ \Rightarrow \ \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \leq \|x\|^2.$$

Из неравенства Бесселя следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ сходится для любого элемента $x \in H$. В случае равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \|x\|^2. \tag{4}$$

из цепочки равенств, полученных в доказательстве теоремы 3, следует, что ряд Фурье для любого элемента $x \in H$ сходится к x:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \, e_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k \, e_k = x.$$

Равенство (3) называется равенством Парсеваля. Система $\{e_k\}$, для которой имеет место равенство Парсеваля, называется замкнутой (полной). Такая система является ортонормальным базисом в H.

Посмотрите, как изменится доказательство теоремы 4 в случае гильбертова пространства над полем комплексных чисел. Проверьте, что неравенство Бесселя будет иметь вид $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leq \|x\|^2$, *а равенство Парсеваля примет вид*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|x\|^2.$$

Для произвольного гильбертова пространства H, используя равенство Парсеваля, можно установить изоморфизм между пространствами H и l_2

следующим образом: для любого $x \in H$ имеем

$$\|x\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \|\tilde{x}\|_{l_2}^2, \quad \text{где} \;\; \tilde{x} = (x_1, x_2, \dots) \in l_2.$$

Теорема об изоморфизме произвольного гильбертова пространства H пространству l_2 называется теоремой Рисса-Фишера. Ее доказательство желающие могут найти в [2].

Разложение в ряды Фурье — широко применяемая техника для решения многих конкретных прикладных задач. Особенно эта техника полезна при решении линейных операторных уравнений, например, вида $Ax = y$, если линейный оператор A имеет ортогональный (следовательно, ортонормальный) базис, состоящий из собственных векторов e_k: $Ae_k = \lambda_k e_k$. По этой системе и составляются ряды Фурье для элемента y, определяемого исходными данными, и неизвестного элемента x.

В следующей лекции мы, завершая тему "Метрические и нормированные пространства. Приложения к решению операторных уравнений", рассмотрим понятие *пополнения* метрических (нормированных) пространств. Благодаря этому понятию, коротко познакомимся с интегралом Лебега, пространствами Лебега и Соболева, а также обобщенной производной (по Соболеву).

После изучения темы "Метрические и нормированные пространства. Приложения к решению операторных уравнений" мы перейдем к изучению второй большой темы курса ФА — "Линейные операторы", где, во-первых, выделим вполне непрерывные самосопряженные операторы, имеющие ортогональный (следовательно, ортонормальный) базис, состоящий из собственных векторов, во-вторых, укажем свойства операторов A,позволяющие отделить корректные задачи решения уравнений второго рода $x \pm Ax = y$ от некорректных задач решения уравнений первого рода $Ax = y$ и, наконец, займемся самой важной из прикладных задач теории операторов — изучением обратных операторов.

References

[1] *Треногин С.В.* Функциональный анализ М.: Наука, 1983, 384 с.

[2] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 572 с.

[3] *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. Изд. Лань. 2009. - 271 с.

[4] *Zeidler E.* Applied Functional Analysis. Springer Verlag, New York, 1998.