ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Лекции № 3–4

Сравнение норм. Эквивалентность норм в конечномерных пространствах. Полнота пространств. Примеры полных и неполных пространств. Два критерия полноты пространств. Сепарабельные пространства. Примеры сепарабельных и несепарабельных пространств

• **Сравнение норм. Эквивалентность норм в конечномерных пространствах**

Пусть задано ЛП X и на нем заданы две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$. Эти нормы называются *эквивалентными*, если

$$\exists\ \alpha > 0, \beta > 0 : \quad \forall x \in X \quad \alpha\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta\|x\|_1.$$

Свойства: рефлексивность, симметричность, транзитивность.

Если выполняется левое неравенство, то норма $\|x\|_1$ подчинена норме $\|x\|_2$.

Если выполняется левое неравенство, но не выполняется правое, то норма $\|x\|_2$ сильнее нормы $\|x\|_1$.

Что скажите про сходимость в пространствах $(X, \|x\|_1)$, $(X, \|x\|_2)$, если нормы эквивалентны? Если одна норма подчинена другой?

• **Примеры** сравнения норм на основе рассмотренных нами пространств.

$$\|x\|_1 = \sup_i\{|\xi_i|\}, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2}.$$

$$\|x\|_1 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|, \quad \|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt, \quad \|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\|x\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|dt, \quad \|x\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

На каких ЛП можно сравнивать указанные нормы? Получить оценки.

Теорема 1. *Во всяком к/м линейном пространстве все нормы эквивалентны.*

Доказательство. Зафиксируем базис $\{e_k\}$ в $\mathbb{R}^n$. Пусть

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k, \quad \|x\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right\|.$$

Сравним эту норму с евклидовой:

$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \|e_k\|$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2} =: \beta \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2} = \beta \|x\|_e.$$

Таким образом, получили, что произвольная норма на $\mathbb{R}^n$ подчинена евклидовой.

Покажем, что евклидова норма подчинена произвольной норме. Для этого рассмотрим функцию $f(x) = \|x\|$ на множестве $S_1 = \{x : \|x\|_e = 1\}$ — единичной сфере радиуса 1. Эта числовая функция непрерывна в силу неравенств:

$$\big|\, \|x_1\| - \|x_2\| \,\big| \leq \|x_1 - x_2\| \leq \beta \|x_1 - x_2\|_e.$$

По известным вам свойствам непрерывных функций на ограниченном замкнутом множестве, на единичной сфере радиуса 1 непрерывная функция f достигает своего наибольшего и наименьшего значений. Пусть

$$\alpha = f(x_0) = \|x_0\| = \inf \|x\|, \quad x_0 \in S_1.$$

Тогда
$$\left\| \frac{x}{\|x\|_e} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_e} \geq \alpha \;\Rightarrow\; \|x\| \geq \alpha \|x\|_e.$$
В итоге получили обе оценки, необходимые для эквивалентности норм:
$$\beta \|x\|_e \geq \|x\| \geq \alpha \|x\|_e. \quad \blacksquare$$

• Полнота пространств. Примеры полных и неполных пространств. Два критерия полноты пространств

С важностью свойства полноты пространств мы будем встречаться на протяжении всего курса ФА.

Понятие полноты в общем случае вводится для МП.

Определение 1. *МП называется полным*, если в нем сходится любая фундаментальная последовательность.

Полные ЛНП называются банаховыми пространствами.

Последовательность x_n называется фундаментальной, если . . .

$$\forall \varepsilon$$

Рассмотрим **примеры**.

1). Пространство $\mathbb{R}^n$ с любой нормой (все нормы на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны) является полным.

У4. Докажите полноту бесконечномерных пространств: m, l_1, l_2.

2). $C[a,b]$ — полное пространство. Это следует из теоремы из МА о том, что если последовательность непрерывных функций фундаментальна в смысле равномерной сходимости, то она равномерно сходится к непрерывной функции.

3). Важный пример неполного пространства. Рассмотрим пространство $\widetilde{L}[a,b]$ непрерывных на $[a,b]$ функций с интегральной нормой:
$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Зная геометрическую интерпретацию такого интеграла, можем построить последовательность непрерывных на $[a,b]$ функций, сходящуюся к разрывной функции, скажем, к характеристической функции некоторого отрезка $[c,d]$, лежащего внутри $[a,b]$:

$$\chi_{[c,d]} := \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [c,d], \\ 0, & \text{если } x \notin [c,d]. \end{cases}$$

Можем построить последовательность кусочно-линейных функций, сходящуюся к $\chi_{[c,d]}$ по интегральной норме, а можем построить последовательность сверток.

Но есть проблема: функция $\chi_{[c,d]}$ — разрывная функция, она не принадлежит пространству $\widetilde{L}[a,b]$. Чтобы доказать, что эта функция — единственный предел по интегральной норме построенной последовательности непрерывных функций (т.е. нет непрерывного предела), дополнительно рассмотрим $\widetilde{\widetilde{L}}[a,b]$ — пространство кусочно непрерывных на $[a,b]$ функций с конечным числом разрывов первого рода, и введем на нем интегральную норму. В этом пространстве построенная последовательность непрерывных функций сходится по норме к характеристической функции $\chi_{[c,d]}$, а предел в любом ЛНП единственный.

Таким образом, пространство $\widetilde{L}[a,b]$ неполное.

У5. *По образцу этого примера постройте другие неполные пространства (выбирая на известных линейных пространствах "неродную" норму).*

4). Пространства $L_p[a,b]$, $L_p(\mathbb{R})$ являются полными. Мы докажем это немного позже через понятие пополнения метрического пространства (ЛНП).

• Два критерия полноты пространств: принцип вложенных шаров в МП и критерий Коши для рядов в банаховых пространствах

Теорема о вложенных шарах Для того, чтобы МП X было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.

Доказательство для наглядности проведем для ЛНП.

$\Rightarrow$ Пусть X — банахово пространство и пусть $\overline{S}_{x_1}^{r_1}$, $\overline{S}_{x_2}^{r_2}$ $\ldots$, $\overline{S}_{x_n}^{r_n}$, $\ldots$ — последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых r_n стремятся к нулю.

Последовательность x_n — центров этих шаров, фундаментальна, так как радиусы стремятся к нулю. Следовательно в полном пространстве X существует предел

$$x = \lim x_n, \quad x \in \bigcap_k \overline{S}_{x_k}^{r_k}.$$

$\Leftarrow$ Пусть x_n — фундаментальная последовательность. Покажем, что она имеет предел. В силу фундаментальности последовательности можно выбрать такую точку x_{n_1}, что $\|x_n - x_{n_1}\| < 1/2$ при всех $n \geq n_1$. Примем точку x_{n_1} за центр замкнутого шара радиуса 1. Обозначим этот шар S_1.

Далее выберем x_{n_2} с условием $n_2 > n_1$ и $\|x_n - x_{n_2}\| < 1/2^2$ при всех $n \geq n_2$. Примем точку x_{n_2} за центр замкнутого шара радиуса $1/2^2$. Обозначим этот шар S_2 и т.д.

Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю. По предположению они имеют непустое пересечение. Пусть точка x лежит в этом пересечении. Тогда x — предельная точка для центров шаров x_{n_k}. Следовательно, точка x является предельной и для всей фундаментальной последовательности x_n. ■

Чтобы дать еще один критерий полноты пространства, в терминах сходимости рядов, рассмотрим ряд в ЛНП X:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

Ряд называется *сходящимся* в X, если частичные суммы $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ имеют предел в X. Ряд называется *абсолютно сходящимся* в X, если частичные суммы $S_n = \sum_{k=1}^n \|u_k\|$ имеют предел в $\mathbb{R}$.

Критерий полноты ЛНП в терминах сходимости рядов. Для того, чтобы ЛНП X было банаховым, необходимо и достаточно, чтобы в нем любой абсолютно сходящийся ряд сходился.

Без доказательства.

Доказательство.

$\Rightarrow$ Пусть ЛНП X является банаховым. Пусть ряд $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ абсолютно сходится. Тогда по критерию Коши для числовых рядов

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \ \forall n > N, \ \forall p > 0 \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right\| = \|S_{n+p} - S_n\| \leq \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \|u_k\| \right\| < \varepsilon.$$

Значит, последовательность S_n фундаментальна, следовательно, сходится.

$\Leftarrow$ Пусть x_n — фундаментальная последовательность. Покажем, что она имеет предел в X.

Из фундаментальной последовательности x_n можно выделить x_{n_1} так, чтобы $\|x_n - x_{n_1}\| < 1/2$ для всех $n > n_1$. Тогда из фундаментальной последовательности x_n можно выделить x_{n_2} $(n_2 > n_1)$ так, чтобы $\|x_{n_2} - x_{n_1}\| < 1/2$. Далее, из фундаментальной последовательности x_n можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ так, чтобы выполнялись неравенства $\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| < 1/2^k$.

Составим ряд

$$S = x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \dots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + \dots$$

Этот ряд сходится абсолютно, так как мажорируется рядом $\|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k$. Тогда существует x, к которому сходится последовательность его частичных сумм S_n. Легко проверить, что $x_{n_k} = S_k$. Тогда $x_{n_k} \to x$. Следовательно, $x_n \to x$. ■

Введем понятие множеств первой и второй категории и приведем еще одно свойство полных пространств.

Определение 2. Множество M называется *нигде не плотным* в ЛНП X, если в каждом шаре содержится другой шар, не содержащий точек из M.

Проверьте, что это отрицание всюду плотности. Множество M называется *всюду плотным* в X, если $\overline{M} = X$.

Определение 3. Множество в ЛНП в X называется *множеством первой категории*, если оно есть счетное объединение нигде не плотных множеств. Если множество нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств, то оно называется *множеством второй категории.*

Теорема Бэра–Хаусдорфа о категориях. Всякое полное пространство X является множеством второй категории.

Доказательство от противного: пусть X представимо в виде счетного объединения нигде не плотных множеств:

$$X = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \dots$$

Возьмем какой-нибудь замкнутый шар S_1 в X. Поскольку M_1 нигде не плотно в X, существует замкнутый шар $S_2 \subset S_1$, не содержащий точек из M_1. Поскольку M_2 нигде не плотно в X, существует замкнутый шар $S_3 \subset S_2$, не содержащий точек из M_2 и т.д.: существует замкнутый шар $S_k \subset S_{k-1}$, не содержащий точек из M_{k-1}.

Без потери общности можно считать, что радиусы r_k шаров S_k стремятся к нулю. Тогда последовательность вложенных замкнутых шаров S_k с радиусами, стремящимися к нулю, имеет общую точку x_0, принадлежащую пространству X.

С другой стороны x_0 не принадлежит всем M_k, объединение которых равно X и, значит, не принадлежит X. ■

• Сепарабельные пространства

Определение 4. Пространство называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

Почему такое свойство является важным?

• Примеры сепарабельных и несепарабельных пространств

1). Пространство $\mathbb{R}^n$ с любой нормой (все нормы на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны) является сепарабельным. В нем существует счетное всюду плотное множество, состоящее из векторов с рациональными координатами.

2). Пространства l_p тоже являются сепарабельными. *Постройте в них счетные всюду плотные множества.*

3). Пространство $C[a,b]$ являются сепарабельным. В нем счетным всюду плотным множеством является множество полиномов с рациональными коэффициентами.

4). Пространства $L_p[a,b]$. В них счетным всюду плотным (по своей норме) множеством тоже является множество полиномов с рациональными коэффициентами.

5). Пример несепарабельного пространства: m — пространство ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой $\|x\| = \sup_k |x_k|$.

Доказательство несепарабельности, которое мы проведем для пространства m — это характерное доказательство несепарабельности метрических (нормированных) пространств. Ниже для пространств $C(\mathbb{R})$ и $C[0,\infty)$ доказательство несепарабельности будет проведено подобным образом.

Выберем в m последовательности, состоящие из разных наборов нулей и единиц. Обозначим множество выбранных последовательностей через M. Как вы знаете из школы (из курса алгебры), такие последовательности являются двоичным представлением вещественных чисел и их "столько же", сколько вещественных чисел, их "больше", чем натуральных чисел. Таким образом, множество M несчетное, оно имеет мощность континуум.

Расстояние между разными точками из M равно единице (*Проверьте*!) Если взять шары радиуса, скажем $1/4$, вокруг каждой точки из M, то шаров будет столько же, сколько точек, и они не пересекаются. Следовательно, не может существовать счетного множества, для которого все выбранные точки были бы предельными. Следовательно, не существует счетного всюду плотного множества в m.

6). Пространства $C(\mathbb{R})$ и $C(\mathbb{R}_+)$ не сепарабельны.

Пространство $C(\mathbb{R})$ — это пространство ограниченных на всей оси функций $x = x(t), t \in \mathbb{R}$, с нормой $\|x\| = \sup_t |x(t)|$.

Для доказательства несепарабельности этих пространств по схеме доказательства несепарабельности пространства m надо построить множество M непрерывных функций, у которых на месте единиц у построенных в m последовательностей стоят на отрезках $[k, k+1]$ треугольники высоты единица, а на месте нулей — нулевые функции.

Мощность множества таких функций, как и в случае пространства m, континуум. Следовательно, пространства $C(\mathbb{R})$ и $C(\mathbb{R}_+)$ не являются сепарабельными.

У6. *Нарисуйте такие функции. Найдите, чему равно расстояние между разными точками из* M. *Будет сепарабельным или несепарабельным подпространство непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности?*

References

[1] *Треногин С.В.* Функциональный анализ М.: Наука, 1983, 384 с.

[2] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 572 с.

[3] *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. Изд. Лань. 2009. - 271 с.

[4] *Zeidler E.* Applied Functional Analysis. Springer Verlag, New York, 1998.