Лекция № 5

Применение свойства полноты пространств: принцип сжимающих отображений в полных пространствах. Обобщенный принцип сжимающих отображений. Примеры. Применение принципа сжимающих отображений (метода последовательных приближений) к решению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода

Познакомившись с полными пространствами, мы можем перейти к применению полных пространств к решению операторных уравнений со сжимающии операторами в полных пространствах, в частности, к решению интегральных уравнений.

Пусть $A : X \to X$ — оператор (т.е. однозначное отображение), действующий в полном метрическом пространстве X, в частности в банаховом (полном нормированном) пространстве.

Определние 1. Оператор A называется *сжимающим*, если для любых $x, y \in X$ выполняется оценка $\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y)$, где $\alpha < 1$.

Нетрудно проверить, что любой сжимающий оператор является непрерывным и что

$$\rho(A^n x, A^n y) \le \alpha^n \rho(x, y).$$

Точка $x \in X$ называется *неподвижной точкой оператора* A, если она является решением уравнения $x = Ax$.

Теорема 1. Принцип сжимающих отображений *Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве, имеет одну и только одну неподвижную точку.*

Доказательство теоремы основано на доказательстве того, что последовательность приближений $\{x_n\}$:

$$x_1 = Ax_0, \quad x_2 = Ax_1 = A^2 x_0, \quad \dots, \quad x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0,$$

где точка x_0 взята произвольно, является фундаментальной и, следовательно, сходится в полном пространстве: $x_n \to_{n\to\infty} x$. Эта предельная точка x, в силу непрерывности любого сжимающего оператора, как раз и является единственной неподвижной точкой оператора A.

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ является последовательностью приближений к x — неподвижной точке.

Доказывать фундаментальность для наглядности будем в нормированных пространствах. И так, по порядку: пусть $m > n$, тогда, учитывая, что

$$\forall x, y \in X,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad \|A^n x - A^n y\| \leq \alpha^n \|x - y\|,$$

получаем

$$\begin{gathered}\|x_n - x_m\| = \|A^n x_0 - A^m x_0\| \leq \alpha^n \|x_0 - x_{m-n}\| \\ \leq \alpha^n \left(\|x_0 - x_1\| + \|x_1 - x_2\| + \cdots + \|x_{m-n-1} - x_{m-n}\|\right) \\ \leq \alpha^n (\|x_0 - x_1\| \left(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-n-1}\right) \\ \leq \alpha^n \|x_0 - x_1\| \frac{1}{1-\alpha}.\end{gathered}$$

Отсюда, в силу малости α^n, следует фундаментальность последовательности x_n, значит, сходимость:

$$\exists\ x \in X:\ x = \lim x_n$$

и оценка для предельного элемента

$$\|x_n - x\| \leq \alpha^n \|x_0 - x_1\| \, \frac{1}{1-\alpha} = \alpha^n \|x_0 - Ax_0\| \, \frac{1}{1-\alpha}.$$

Из того, что A является сжимающим оператором: $\|Ax - Ay\| \leq \alpha \|x - y\|$, следует, что он непрерывен, значит

$$Ax = A \lim x_n = \lim Ax_n = \lim x_{n+1} = x,$$

т.е. существование неподвижной точки доказано. Докажем единственность. От противного:

$$x = Ax, \quad y = Ay, \quad x \neq y.$$

Тогда

$$\|x - y\| = \|Ax - Ay\| \leq \alpha \|x - y\| \implies \|x - y\| = 0 \iff x = y. \quad \blacksquare$$

Принцип сжимающих отображений можно применять к решению функциональных уравнений $f(x) = x$ с функцией f, удовлетворяющей условию Липшица с показателем $\alpha < 1$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \alpha |x_1 - x_2|,$$

и уравнений $F(x) = 0 : \lambda F(x) = x - f(x)$. Геометрическую интерпретацию этих решений можно посмотреть, напр., в [2], раздел "Принцип сжимающих отображений и его применения".

Принцип сжимающих отображений также можно применять к решению задач Коши для дифференциальных уравнений, сводя их к интегральным уравнениям.

Мы подробно остановимся на применении принципа сжимающих отображений к решению целого класса интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода. Начнем с применения к решению уравнений Фредгольма.

Уравнение вида

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t), \ t \in [a,b]. \tag{1}$$

называется *интегральным уравнением Фредгольма второго рода*, а уравнение

$$\int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t), \ t \in [a,b]$$

— *интегральным уравнением Фредгольма первого рода.*

Здесь функция $K(t,s)$ задана, она называется *ядром интегрального оператора* $\mathtt{K}$:

$$\mathtt{K}x(t) = (\mathtt{K}x)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds,$$

функция $y(t)$ определяется исходными данными задачи, а $x(t)$ — неизвестная функция.

Покажем, что если выбрать параметр λ достаточно малым, то к уравнению Фредгольма второго рода с непрерывным ядром можно применять принцип сжимающих отображений, и последовательность приближений $\{x_n(t)\}$ сходится к решению этого уравнения в пространстве $C[a,b]$ (следовательно, в $L_p[a,b]$).

Отметим, что уравнения первого рода решаются методами некорректных задач, которые мы рассмотрим позже, после того, как используя свойства интегральных операторов, покажем, что в общем случае уравнения второго рода представляют собой корректные задачи, а уравнения первого рода — некорректные.

Итак, переходим к решению уравнений Фредгольма второго рода с малым параметром:

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t),\ t \in [a,b].$$

Запишем это уравнение в форме $x = Ax$, где

$$Ax(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t).$$

Покажем, что в пространстве $C[a,b]$ оператор A является сжимающим при малых λ. Для этого оценим норму разности $\|Ax_1 - Ax_2\|$:

$$\|Ax_1 - Ax_2\| = \max_{t\in[a,b]} |Ax_1(t) - Ax_2(t)|$$

$$\leq \max_{t\in[a,b]} |\lambda| \int_a^b |K(t,s)||x_1(s) - x_2(s)|ds \leq$$
$$\leq |\lambda| M(b-a)\|x_1 - x_2,\|$$

где

$$M := \sup_{(t,s)\in[a,b]\times[a,b]} |K(t,s)| = \max_{(t,s)\in[a,b]\times[a,b]} |K(t,s)|.$$

Отсюда следует, что при $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ оператор A является сжимающим. Следовательно, при малых λ, удовлетворяющих условию $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, уравнение (4) можно решать методом последовательных приближений.

Как конкретно находить степени интегрального оператора, которые требуются в конструкции решения, мы посмотрим ниже при решении интегральных уравнений Вольтерра.

Уравнения Вольтерра являются частным случаем рассмотренных уравнений Фредгольма и их можно решать указанным методом. Более того, оказывается, что, используя обобщенный принцип сжимающих отображений, уравнения Вольтерра можно решать и без требования малости параметра.

Введем *обобщенный принцип сжимающих отображений* и покажем, что интегральное уравнение второго рода с переменным верхним пределом

$$x(t) - \lambda \int_a^t K(t,s)x(s)ds = y(t), \ t \in [a,b], \tag{2}$$

называемое *уравнением Вольтерра*, можно решать без каких-либо ограничений на параметр λ.

Теорема 2. (Обобщенный принцип сжимающих отображений) Пусть оператор A, действующий в полном метрическом пространстве, обладает таким свойством, что некоторая его степень является сжимающим отображением. Тогда оператор A имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство. Предположим, что A^k при некотором (целом) k является сжимающим. Тогда A^k имеет единственную неподвижную точку x: $x = A^k x$.

Покажем, что x является неподвижной точкой и оператора A. Применим к равенству $x = A^k x$ оператор A. Получим

$$Ax = AA^k x = A^k Ax.$$

Отсюда следует, что $y := Ax$ является неподвижной точкой сжимающего оператора A^k. В силу единственности неподвижной точки получаем, что Ax совпадает с x: $x = Ax$, т. е. x — это неподвижная точка и оператора A. ■

Оценка, показывающая что некоторая степень интегрального оператора Вольтерра $Af(x) := \lambda \int_a^x K(x,y)f(y)dy$ является сжимающим оператором, основана на том, что оценивая первую степень интеграла с переменным верхним пределом, вместо множителя $(b-a)$, который берут в случае уравнения Фредгольма, для уравнения Вольтерра берут множитель $(t-a)$, тогда в оценке второй степени получается $(t-a)^2/2$ и т.д. На k-ом шаге получается $(t-a)^k/k!$. Этот множитель и обеспечивает сжимаемость оператора A^k. Проведем подробные выкладки:

$$|Af_1(x) - Af_2(x)| = |\lambda| \left| \int_a^x K(x,y)(f_1(y) - f_2(y))dy \right|$$
$$\leq |\lambda| M(x-a) \max_y |f_1(y) - f_2(y)| = |\lambda| M(x-a)m,$$
$$M = \max_{x,y} |K(x,y)|, \quad m = \max_y |f_1(y) - f_2(y)| = \|f_1 - f_2\|_{X=C[a,b]}.$$

Далее

$$|A^2 f_1(x) - A^2 f_2(x)| \leq |\lambda|^2 M^2 \frac{(x-a)^2}{2} \max_y |f_1(y) - f_2(y)|, \quad \ldots$$
$$|A^n f_1(x) - A^n f_2(x)| \leq |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n!} m$$
$$\leq |\lambda|^n M^n m \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Отсюда следует, что некоторая степень оператора Вольтерра является сжимающим. Значит, любое интегральное уравнение Вольтерра имеет неподвижную точку (совпадающую с неподвижную точкой соответствующей степени оператора Вольтерра.)

Таким образом, интегральные уравнения Вольтерра второго рода можно решать методом последовательных приближений. Кроме того, их можно решать, сводя к дифференциальному уравнению.

На практике вы должны научиться решать интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода. Для уравнений Фредгольма метод последовательных приближений называют еще методом малого параметра.

Кроме того, на практике вы должны научиться решать интегральные уравнения второго рода с вырожденным ядром, т.е. ядром вида

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{k} A_i(t) B_i(s),$$

где A_i и B_i — линейно независимые функции.

Для уравнений с вырожденным ядром

$$x(t) - \int_a^b \sum_{i=1}^{k} A_i(t) B_i(s) x(s) ds = y(t), \ t \in [a,b],$$

решение имеет следующий вид: $x(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i A_i(t) + y(t)$ с константами c_i, которые подлежат определению.

У7. *Решите приведенные вами для примера интегральные уравнения второго рода*:

1) *Фредгольма,*
2) *Вольтерра,*
3) *с вырожденным ядром.*

Желательно, чтобы это не были те уравнения, которые вы решали на практике.

Самостоятельные работы с задачами У1–У7 сдавать ведущим практику до 26 октября.

References

[1] *Треногин С.В.* Функциональный анализ М.: Наука, 1983, 384 с.

[2] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 572 с.

[3] *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. Изд. Лань. 2009. - 271 с.