ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Лекция № 9

Пополнение пространств. Примеры. Интеграл Лебега. Пространства Лебега и Соболева через пополнение пространств. Обобщенные производные в пространствах Соболева. Примеры. Простейшая теорема вложения Соболева. Примеры

Дадим простейшее определение интеграла Лебега.

Начнем с меры Лебега. Назовем на плоскости элементарными множествами множества, составленные из конечного числа замкнутых прямоугольников P_i, на прямой — составленные из конечного числа отрезков. Мера элементарного множества P равна сумме составляющих его непересекающихя прямоугольников (отрезков): $m(P) := \sum m(P_i)$.

Верхней мерой множества A называется величина

$$\mu^*(A) := \inf \sum m(P_i),$$

где нижняя грань берется по всевозможным конечным или счетным объединениям (P_i), покрывающим A.

Множество A называется *измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется элементарное множество B, такое что

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon.$$

Функция f, заданная на измеримом множестве A называется *измеримой (по Лебегу)* , если для любого $c \in \mathbb{R}$ измеримо множество $\{x : f(x) < c\}$.

Ограниченная измеримая функция f *интегрируема по Лебегу* на множестве A, если существует последовательность простых функций f_n равномерно сходящаяся к f и такая, что существует предел интегралов от f_n, тогда интеграл Лебега от f

$$\int_A f(x) d\mu(x) := \lim \int_A f_n(x) d\mu(x).$$

Понять как устроены интегрируемые по Лебегу функции и ввести важное понятие обобщенной производной помогает *понятие пополнения* метрических пространств. Для наглядности будем рассматривать пополнение нормированных пространств.

В теореме о пополнении нормированного пространства вводится очень важная операция замыкания произвольного нормированного пространства, в результате чего получается банахово пространство. Если исходное пространство было полным, то замыкание совпадает с исходным пространством.

Теорема о пополнении нормированного пространства *Всякое нормированное пространство X можно рассматривать как линейное многообразие, плотное в некотором банаховом пространстве $\hat{X}$.*

Дадим **схему доказательства** этой теоремы. В доказательстве можно выделить три основные части :

(**1**) ввести ЛНП $\hat{X}$ и отождествить исходное пространство X с некоторым линейным многообразием X_1 в $\hat{X}$ (установить линейный изоморфизм и изометрию между X и X_1);

(**2**) показать, что построенное линейное многообразие $X_1 \subseteq \hat{X}$, совпадающее с X в смысле (**1**), плотно в $\hat{X}$, т.е. $\overline{X_1} = \hat{X}$;

(**3**) показать, что $\hat{X}$ — банахово пространство.

Схема доказательства.

(**1**): Для конструкции $\hat{X}$ рассмотрим всевозможные фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ в пространстве X. Пространство X в общем случае неполное (иначе оно совпадает с $\hat{X}$ и не надо строить пополнение), поэтому следует отметить, что среди этих фундаментальных последовательностей есть сходящиеся к некоторому элементу из X и есть не имеющие предела в X. Это важный момент для понимания конструкции $\hat{X}$ и $X_1 \subseteq \hat{X}$.

Две фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ назовем эквивалентными, если

$$\|x_n - x'_n\| \to 0, \quad \text{при } n \to \infty,$$

и будем обозначать это $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$. Множество всех фундаментальных последовательностей разобьем на непересекающиеся классы эквивалентных последовательностей. Множество всех классов обозначим $\hat{X}$, а классы обозначим $\hat{x}, \hat{y}, \ldots$.

Превратим пространство $\hat{X}$ в нормированное. Линейные операции на классах зададим естественно через входящие в классы элементы, а норму на классах введем следующим образом: пусть $\{x_n\} \in \hat{x}$, тогда

$$\|\hat{x}\| := \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Предел этот существует, так как последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, а, значит, фундаментальна и последовательность из норм, и этот предел не зависит от представителя класса.

Вот теперь главный шаг: покажем, что X можно отождествить с некоторым линейным многообразием X_1 в построенном $\hat{X}$. А именно, отождествим элемент $x \in X$ с классом, содержащим стационарную последовательность $\{x_n = x\}$. Таким образом, каждый элемент x из X отождествляем с классом, содержащим (фундаментальные) последовательности, сходящиеся к x.

(**2**): Доказывается, что такие классы всюду плотны в пространстве всех классов $\hat{X}$. Смысл построенного пополнения: к пространству классов, содержащему стационарные последовательности $\{x\}$ и отождествленному с пространством X, добавили классы, содержащие фундаментальные последовательности, не имеющие предела в X (пополнили классами, содержащими фундаментальные последовательности, не имеющие предела в X).

(**3**): Доказывается, что линейное нормированное пространство $\hat{X}$ классов, содержащих стационарные последовательности $\{x\}$ и пополненное классами, содержащими фундаментальные последовательности, не имеющие предела в X, уже является полным пространством, т.е. банаховым. ■

• Примеры пополнений. Пространства $L_p[a,b], p \geq 1$. Пространства Соболева. Обобщенная производная Соболева

Доказывается, что пространства $L_p[a,b], p \geq 1$, — функций, интегрируемых (и абсолютно интегрируемых) по Лебегу, являются пополнением пространства непрерывных функций по норме $L_p[a,b]$.

В частности, показано, каждый класс $\hat{x}$ из $\widehat{\tilde{L}[a,b]}$ может быть отождествлен с некоторой интегрируемой по Лебегу функцией x, т.е. с $x \in L[a,b]$. При этом $\|\hat{x}\| = \int_a^b |x(t)|dt$. В частности, если $\hat{x}$ содержит сходящиеся к некоторой непрерывной функции x фундаментальные последовательности, то этот x образует класс в $L[a,b]$, с которым $\hat{x}$ отождествляется. Непрерывные функции образуют линейное многообразие в $L[a,b]$.

Отметим, что среди всех пополнений пространств непрерывных функций по норме $L_p[a,b]$, $p \geq 1$, только пространство $L_2[a,b]$ является гильбертовым.

Следующий пример пополнения позволяет ввести новые важные пространства — пространства Соболева $W_p^l(\overline{G})$, в которых определены обобщенные производные, в частности, важный частный случай — гильбертово пространство

$$H^1[a,b] := W_2^1[a,b].$$

Пространство Соболева $W_p^l(\overline{G})$ определяется как пополнение l раз непрерывно дифференцируемых функций по норме

$$\|u\| = \left(\int_{\overline{G}} |u(x)|^p dx + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq l} \int_{\overline{G}} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \overline{G} \subset \mathbb{R}^n$$

или по эквивалентной норме

$$\|u\|_1 = \left(\int_{\overline{G}} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{1 \leq |\alpha| \leq l} \int_{\overline{G}} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \overline{G} \subset \mathbb{R}^n$$

Более подробно рассмотрим важный частный случай $\overline{G} = [a,b] \subset \mathbb{R}, p = 2$: гильбертово пространство $H^1[a,b] = W_2^1[a,b]$.

Пространство $H^1[a,b]$ определяется как пополнение непрерывно дифференцируемых функций по норме

$$\|u\|_e = \left(\int_a^b |u(x)|^2 dx + \int_a^b |u'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

или по эквивалентной норме

$$\|u\|_1 = \left(\int_a^b |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b |u'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Легко видеть, что норма $\|u\|_e$ порождена скалярным произведением. Норма пополнения $H^1[a,b]$ тоже порождена скалярным произведением и, следовательно, $H^1[a,b]$ является гильбертовым.

Проверьте!

По определению классов в $H^1[a,b]$, для любых эквивалентных фундаментальных последовательностей непрерывно дифференцируемых функций $\{u_k(x)\}$ и $\{\tilde{u}_k(x)\}$, принадлежащих некоторому классу $\hat{x}$ из $H^1[a,b]$ имеем

$$\int_a^b |u_n(x) - u_m(x)|^2 dx + \int_a^b |u_n'(x) - u_m'(x)|^2 dx \to 0 \ \text{ при } \ n, m \to \infty$$

и

$$\int_a^b |\tilde{u}_n(x) - \tilde{u}_m(x)|^2 dx + \int_a^b |\tilde{u}_n'(x) - \tilde{u}_m'(x)|^2 dx \to 0 \ \text{ при } \ n, m \to \infty.$$

Отсюда следует, что последовательности непрерывных функций $\{u_k(x)\}$ и $\{u_k'(x)\}$ являются фундаментальными в пространстве $L_2[a,b]$ и, в силу полноты пространства $L_2[a,b]$, сходятся. (Это верно и для любой другой последовательности из класса $\hat{x}$). Пусть предел последовательности $\{u_k(x)\}$ есть некоторая функция $u \in L_2[a,b]$, а предел последовательности $\{u_k'(x)\}$ — функция $v \in L_2[a,b]$.

В этом случае $v \in L_2[a,b]$ называется *обобщенной производной* функции $u \in L_2[a,b]$.

Дадим другое, более удобное для практического применения (эквивалентное) определение обобщенной производной, используя формулу интегрирования по частям.

По формуле интегрирования по частям, если u и φ — непрерывно дифференцируемые функции на $[a,b]$ и $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, то имеет место равенство

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b u'(x)\varphi(x)dx.$$

Этим равенством на множестве непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций φ, таких что $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, производная $u'(x) \in L_2[a, b]$ полностью определяется. Действительно, если есть еще одна функция $w(x)$, удовлетворяющая этому тождеству:

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b w(x)\varphi(x)dx,$$

то

$$\int_a^b [u'(x) - w(x)]\varphi(x)dx = 0.$$

Отсюда, в силу плотности множества функций φ в $L_2[a, b]$, следует

$$u'(x) = w(x).$$

Почему указанное множество плотно в $L_2[a, b]$*?*

Если теперь взять $\hat{u} = \{u_n\} \in H^1[a, b]$, а функцию φ оставить из рассматриваемого класса непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю на концах отрезка, то функция φ отождествляется с элементом $\hat{\varphi}$ из $H^1[a, b]) : \hat{\varphi} = \{\varphi_n\} \in H^1[a, b])$, где $\varphi_n \to \varphi$, в смысле сходимости в $H^1[a, b])$, и имеет место равенство

$$\int_a^b u_n(x)\varphi_n'(x)dx = -\int_a^b u_n'(x)\varphi_n(x)dx.$$

Следовательно, существует $w(x) = \{u_n'\} \in L_2[a, b]$, для которой выполняется равенство

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b w(x)\varphi(x)dx.$$

Это равенство и берется за определение *обобщенной производной* w от функции $u \in H^1[a, b]$. Чуть ниже, через теорему вложения, мы покажем, что любая $u \in H^1[a, b]$ — это непрерывная функция.

- **Примеры обобщенных производных**

Возьмем непрерывную функцию u — "уголок" на отрезке $[0, 1]$, скажем высоты $\frac{1}{2}$ и $u(0) = u(1) = 0$. *Нарисуйте*!

Классической производной у этой функции не существует. Однако, проверим, что эта функция из пространства $H^1[0, 1]$ и, следовательно, у нее есть обобщенная производная.

Постройте (нарисуйте) соответствующую ей последовательность $\{u_n\} \in H^1[a,b]$, такую, что

$$\{u_n'(x)\} \to w(x) := \begin{cases} 1 & \text{при } \ 0 \le t < 1/2 \quad (\text{или при } \ 0 \le t \le 1/2), \\ -1 & \text{при } \ 1/2 \le t \le 1 \quad (\text{или при } \ 1/2 < t \le 1). \end{cases}$$

Проверяем, что по определению обобщенной производной, функция скачка $w(x)$ является обобщенной производной от функции u, т.е. для любой φ, непрерывно дифференцируемой на $[0,1]$ и равной нулю на концах отрезка, имеем

$$\int_0^1 u(x)\varphi'(x)dx = \int_0^{1/2} x\varphi'(x)dx + \int_{1/2}^1 (1-x)\varphi'(x)dx = -\int_0^1 w(x)\varphi(x)dx.$$

Приведите другие примеры функций, у которых нет классической производной, но можете построить обобщенную производную.

Обратите внимание, что у функции скачка $u(x)$ нет классической производной, нет и обобщенной производной. *Почему*?

• Простейшая теорема вложения Соболева. Абсолютная непрерывность функций из $H^1[a,b]$

Теорема вложения Соболева *Пространство* $H^1[a,b]$ *вложено в* $C[a,b]$.

Как это надо понимать? Мы покажем, что все фундаментальные последовательности, образующие классы в $H^1[a,b]$, равномерно сходятся к непрерывным функциям, т.е. к функциям из $C[a,b]$, с которыми эти классы и отождествляются.

Доказательство основано на равенстве, которое имеет место для любой непрерывно дифференцируемой функции u:

$$u(x) = \int_\xi^x u'(s)ds + \frac{1}{b-a}\int_a^b u(s)ds, \quad \xi \in [a,b]. \tag{1}$$

Чтобы получить (1), сначала по теореме о среднем запишем равенство

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b u(s)ds = u(\xi), \quad \xi \in [a,b],$$

а затем равенство

$$\int_{\xi}^{x} u'(s)ds = u(x) - u(\xi).$$

В итоге получаем равенство (1).

Из равенства (1), полученного для любого $x \in [a, b]$, следуют оценки:

$$|u(x)| \leq \int_a^b |u'(s)|ds + \frac{1}{b-a}\int_a^b |u(s)|ds$$

$$\leq \sqrt{b-a}\left(\int_a^b |u'(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\int_a^b |u(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq M\|u\|_1 \quad \text{где } M = \max(\sqrt{b-a}, \frac{1}{\sqrt{b-a}}).$$

Далее, поскольку полученные оценки имеют место для любого $x \in [a, b]$, получаем оценку для норм:

$$\|u\|_{C[a,b]} \leq M\|u\|_1,$$

т.е. для любого элемента u из $C[a, b]$ норма в $C[a, b]$ подчинена норме $\|\cdot\|_1$ и, следовательно, подчинена эквивалентной норме $\|\cdot\|_e$ в $H^1[a, b]$. Тогда для любой последовательности $\{u_n(x)\}$, фундаментальной по норме $H^1[a, b]$, имеем

$$\|u_n - u_m\|_{C[a,b]} \leq M\|u_n - u_m\|_1 \leq cM\|u_n - u_m\|_{H^1[a,b]}.$$

Отсюда, в силу полноты $C[a, b]$, следует, что последовательность непрерывных функций $\{u_n(x)\}$ сходится (равномерно) к некоторой непрерывной функции и, значит класс $\hat{x} = \{u_n(x)\}$ отождествляется с этой функцией. ■

Наряду с пространством $H^1[a, b]$ при решении задач матфизики часто используют его подпространство $\overset{o}{H}{}^1[a, b]$ — непрерывных функций, обращающихся в ноль на границе.

У16. *Привести примеры функций из $H^1[a, b]$, не являющихся непрерывно дифференцируемыми. Найти обобщенные производные от них. Можно ли найти обобщенную производную от функции sign?*

References

[1] *Треногин С.В.* Функциональный анализ М.: Наука, 1983, 384 с.

[2] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 572 с.

[3] *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. Изд. Лань. 2009. - 271 с.

[4] *Zeidler E.* Applied Functional Analysis. Springer Verlag, New York, 1998.