# Глава IX. Евклидовы и унитарные пространства

# § 35. Скалярное произведение в векторном пространстве

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Напомним, что если $\alpha \in \mathbb{C}$, то через $\overline{\alpha}$ обозначается число, комплексно сопряженное к $\alpha$ (см. § 5).

## Определения

Пусть $F$ — одно из полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, а $V$ — векторное пространство над $F$. Пространство $V$ называется *пространством со скалярным произведением*, если задано отображение из $V \times V$ в $F$, которое любой упорядоченной паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ставит в соответствие число из $F$, называемое *скалярным произведением* этих векторов и обозначаемое через $\mathbf{xy}$ или $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, так, что выполнены следующие условия, называемые *аксиомами скалярного произведения*:

1) для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$: $\mathbf{xy} = \overline{\mathbf{yx}}$;
2) для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и любого $\alpha \in F$: $(\alpha\mathbf{x})\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{xy})$;
3) для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$: $(\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{xz} + \mathbf{yz}$ (скалярное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов*);
4) для любого $\mathbf{x} \in V$: $\mathbf{xx} \geqslant 0$, причем $\mathbf{xx} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Пространство со скалярным произведением называется *евклидовым*, если $F = \mathbb{R}$, и *унитарным*, если $F = \mathbb{C}$.

# Комментарии к определению скалярного произведения

- Как и «обычное» скалярное произведение в трехмерном пространстве, рассматривавшееся в § 11, скалярное произведение в векторном пространстве не является алгебраической операцией (в смысле определения операции из § 4), поскольку его результатом является число, а не вектор.
- Если $F = \mathbb{R}$, то аксиома 1) означает, что $\mathbf{xy} = \mathbf{yx}$. Иными словами, *скалярное произведение в евклидовом пространстве коммутативно*.
- Хотя для комплексного числа $\alpha$ соотношение $\alpha \geqslant 0$, вообще говоря, не имеет смысла (поскольку на множестве всех комплексных чисел нет естественного отношения порядка), аксиома 4) имеет смысл не только в евклидовом, но и в унитарном пространстве. В самом деле, из аксиомы 1) вытекает, что $\mathbf{xx} = \overline{\mathbf{xx}}$, и потому $\mathbf{xx} \in \mathbb{R}$ для любого $\mathbf{x} \in V$ даже в случае, когда $F = \mathbb{C}$.

**Пример 1.** Множество всех векторов обычного трехмерного пространства с обычным скалярным произведением (см. § 11) является евклидовым пространством, так как все аксиомы 1)–4) в этом случае выполнены. То же самое можно сказать и о множестве всех векторов на плоскости с обычным скалярным произведением.

Следующий пример, в сочетании с примером 1, показывает, что в одном и том же векторном пространстве скалярное произведение можно вводить разными способами.

**Пример 2.** На множестве всех векторов на плоскости введем следующую операцию $\bullet$: если векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ этой плоскости имеют в некотором базисе координаты $(x_1, x_2)$ и $(y_1, y_2)$ соответственно, то

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2.$$

Несложно проверить, что все аксиомы евклидова пространства будут при этом выполнены, и потому множество векторов на плоскости с указанной операцией является евклидовым пространством.

**Пример 3.** Ясно, что нулевое векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ [соответственно $\mathbb{C}$] станет евклидовым [унитарным], если мы определим скалярное произведение правилом $\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = 0$.

Пример 4. Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов над полем $\mathbb{R}$. Для произвольных многочленов $f, g \in \mathbb{R}[x]$ положим $(f, g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$. Нетрудно убедиться, что эта операция удовлетворяет аксиомам 1)–4). Это означает, что $\mathbb{R}[x]$ превращается в евклидово пространство. Точно таким же образом можно ввести скалярное произведение в пространстве всех многочленов степени $\leqslant n$ над полем $\mathbb{R}$.

Следующий пример показывает, что операцию скалярного произведения можно ввести в произвольном конечномерном векторном пространстве над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Пример 5. Пусть $V$ — произвольное ненулевое конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ — его базис. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Обозначим координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ через $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ соответственно. Положим

$$\mathbf{xy} = \alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2} + \cdots + \alpha_n\overline{\beta_n}. \qquad (1)$$

Простая проверка показывает, что аксиомы 1)–4) в этом случае также выполняются. Следовательно, пространство $V$ с введенной операцией является пространством со скалярным произведением. Если $V$ — пространство над $\mathbb{R}$, то равенство (1) можно переписать в более простом виде:

$$\mathbf{xy} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n.$$

Укажем несколько простых следствий из аксиом скалярного произведения. Аксиома 2) утверждает, что скалярный множитель можно выносить за скобки от первого сомножителя. В действительности, его можно выносить и от второго сомножителя, но при этом его надо сопрягать. Более точно,

$$\mathbf{x}(\alpha\mathbf{y}) = \overline{\alpha}(\mathbf{x}\mathbf{y}) \tag{2}$$

для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и $\alpha \in F$. В самом деле, используя аксиомы 1) и 2) и свойства комплексно сопряженных чисел (см. § 5), имеем

$$\mathbf{x}(\alpha\mathbf{y}) = \overline{(\alpha\mathbf{y})\mathbf{x}} = \overline{\alpha(\mathbf{y}\mathbf{x})} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\mathbf{y}\mathbf{x}} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\overline{\mathbf{x}\mathbf{y}}} = \overline{\alpha}(\mathbf{x}\mathbf{y}).$$

Если $F = \mathbb{R}$, то формула (2) принимает более простой вид: $\mathbf{x}(\alpha\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}\mathbf{y})$.

Аналогичное замечание можно сделать об аксиоме 3): скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения не только по первому, но и по второму аргументу. В самом деле, используя аксиомы 1) и 3), имеем

$$\mathbf{x}(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \overline{(\mathbf{y}+\mathbf{z})\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}\mathbf{x}+\mathbf{z}\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{z}\mathbf{x}} = \overline{\overline{\mathbf{x}\mathbf{y}}} + \overline{\overline{\mathbf{x}\mathbf{z}}} = \mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{x}\mathbf{z}.$$

Далее, для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ выполнены равенства

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = 0, \tag{3}$$

поскольку $\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = (0 \cdot \mathbf{x})\mathbf{x} = 0 \cdot (\mathbf{x}\mathbf{x}) = 0$ и $\mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = \overline{\mathbf{0} \cdot \mathbf{x}} = \overline{0} = 0$.

Следующее утверждение как по формулировке, так и по доказательству, вполне аналогично ослабленному закону сокращения для скалярного произведения в обычном пространстве (см. § 11).

**Ослабленный закон сокращения в пространстве со скалярным произведением**

*Если $V$ — пространство со скалярным произведением, а векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ таковы, что для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ выполняется равенство $\mathbf{ax} = \mathbf{bx}$, то $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. То же заключение верно, если для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ выполняется равенство $\mathbf{xa} = \mathbf{xb}$.*

*Доказательство.* Докажем первое утверждение. Из условия вытекает, что $(\mathbf{a} - \mathbf{b})\mathbf{x} = 0$ для любого $\mathbf{x} \in V$. В частности, $(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$. В силу аксиомы 4) отсюда вытекает, что $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, т. е. $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Второе утверждение доказывается аналогично. $\square$

**Определение**

Скалярное произведение вектора $\mathbf{x}$ на себя называется *скалярным квадратом* вектора $\mathbf{x}$ и обозначается через $\mathbf{x}^2$.

Аксиома 4) позволяет дать следующее

**Определение**

*Длиной* вектора $\mathbf{x}$ называется число $\sqrt{\mathbf{xx}}$, обозначаемое через $|\mathbf{x}|$.

Это определение представляется естественным, так как в обычном пространстве длина вектора также равна корню квадратному из его скалярного квадрата (см. § 11). Как мы увидим ниже, на пространства со скалярным произведением переносятся и многие другие свойства, связанные с длинами векторов в обычном пространстве. В частности, легко понять, что если $\alpha \in F$, то

$$|\alpha\mathbf{x}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{x}|. \tag{4}$$

В самом деле, $\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2$ (см. § 5), и потому

$$|\alpha\mathbf{x}| = \sqrt{(\alpha\mathbf{x})(\alpha\mathbf{x})} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(\mathbf{xx})} = \sqrt{|\alpha|^2(\mathbf{xx})} = \sqrt{|\alpha|^2} \cdot \sqrt{\mathbf{xx}} = |\alpha| \cdot |\mathbf{x}|.$$

Отсюда вытекает, что, как и в обычном пространстве (см. § 10), справедливо

**Замечание об орте вектора**

*Если* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, *то длина вектора* $\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ *равна* 1.

*Доказательство.* Используя (4), имеем

$$\left|\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right| = \left|\frac{1}{|\mathbf{x}|}\cdot\mathbf{x}\right| = \left|\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right|\cdot|\mathbf{x}| = \frac{1}{|\mathbf{x}|}\cdot|\mathbf{x}| = 1,$$

что и требовалось доказать. □

**Определение**

Если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, то вектор $\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ называется *ортом* вектора $\mathbf{x}$.

**Теорема о модуле скалярного произведения**

*Пусть $V$ — пространство со скалярным произведением над полем $F$ и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.*

1) *Выполнено неравенство*
$$|\mathbf{xy}| \leqslant |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|. \tag{5}$$
2) *Равенство $|\mathbf{xy}| = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$ имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно зависимы.*

Неравенство (5) называется *неравенством Коши–Буняковского*.

*Доказательство.* 1) Из (3) вытекает, что если $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, то обе части неравенства (5) равны нулю и потому неравенство выполняется. Поэтому далее можно считать, что $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, и, в силу аксиомы 4), $\mathbf{yy} > 0$. Рассмотрим вектор $\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y}$, где $\alpha \in F$. По аксиоме 4) $(\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y})(\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y}) \geqslant 0$. Раскрывая скобки и используя аксиому 1) и равенство (2), получаем неравенство
$$\mathbf{xx} - \alpha\mathbf{yx} - \overline{\alpha}\mathbf{xy} + \alpha\overline{\alpha}\mathbf{yy} \geqslant 0. \tag{6}$$

Подставим в (6) вместо $\alpha$ число $\frac{\mathbf{xy}}{\mathbf{yy}}$. Получим

$$0 \leqslant \mathbf{xx} - \frac{\mathbf{xy}}{\mathbf{yy}} \cdot \mathbf{yx} - \frac{\overline{\mathbf{xy}}}{\mathbf{yy}} \cdot \mathbf{xy} + \frac{\mathbf{xy}}{\mathbf{yy}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{xy}}}{\mathbf{yy}} \cdot \mathbf{yy} = \mathbf{xx} - \frac{\mathbf{xy} \cdot \mathbf{yx}}{\mathbf{yy}} =$$

$$= \mathbf{xx} - \frac{\mathbf{xy} \cdot \overline{\mathbf{xy}}}{\mathbf{yy}} = \mathbf{xx} - \frac{|\mathbf{xy}|^2}{\mathbf{yy}}.$$

Итак, $\frac{|\mathbf{xy}|^2}{\mathbf{yy}} \leqslant \mathbf{xx}$. Домножая обе части этого неравенства на положительное число $\mathbf{yy}$, имеем $|\mathbf{xy}|^2 \leqslant \mathbf{xx} \cdot \mathbf{yy}$. Заменяя в последнем неравенстве $\mathbf{xx}$ на $|\mathbf{x}|^2$ и $\mathbf{yy}$ на $|\mathbf{y}|^2$ и извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства, получаем (5).

2) Если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно независимы, то $\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ для всякого $\alpha$ и вместо неравенства (6) можно записать неравенство

$$\mathbf{xx} - \alpha\mathbf{yx} - \overline{\alpha}\mathbf{xy} + \alpha\overline{\alpha}\mathbf{yy} > 0.$$

После этого во всех последующих неравенствах можно заменить нестрогое неравенство на строгое и вместо (5) получить неравенство $|\mathbf{xy}| < |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$. Таким образом, если в (5) имеет место равенство, то $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно зависимы. Докажем обратное утверждение. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно зависимы, т. е. $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \mathbf{0}$ для некоторых чисел $\alpha, \beta \in F$, по крайней мере одно из которых не равно 0.

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha \neq 0$. Тогда $\mathbf{x} = \gamma\mathbf{y}$, где $\gamma = -\frac{\beta}{\alpha}$. Используя (4), имеем

$$|\mathbf{xy}| = \big|(\gamma\mathbf{y})\mathbf{y}\big| = \big|\gamma(\mathbf{yy})\big| = |\gamma| \cdot |\mathbf{yy}| = |\gamma| \cdot |\mathbf{y}| \cdot |\mathbf{y}| = |\gamma\mathbf{y}| \cdot |\mathbf{y}| = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|.$$

Теорема доказана. $\square$

Предположим, что пространство $V$ евклидово. В этом случае, если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, то неравенство Коши–Буняковского равносильно тому, что

$$-1 \leqslant \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} \leqslant 1.$$

Это делает корректным следующее определение.

**Определение**

*Углом между ненулевыми векторами* $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства называется наименьший угол $\varphi$ такой, что

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|}.$$

Угол между нулевым вектором и любым другим вектором не определен. Угол между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ обозначается через $(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}})$.

Отметим, что формула для вычисления косинуса угла между векторами в евклидовом пространстве полностью аналогична соответствующей формуле для векторов в обычном пространстве (см. § 11).

- В унитарном пространстве понятие угла между векторами не определено.

Из теоремы о модуле скалярного произведения вытекает

**Следствие о длине суммы векторов**

1) *Для произвольных векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *из пространства со скалярным произведением выполнено неравенство*

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|. \tag{7}$$

2) *Если векторы* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *линейно независимы, то* $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| < |\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|$.

*Доказательство.* 1) Число $(\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ действительно и неотрицательно. Следовательно, оно совпадает со своим модулем. Поскольку $|\alpha| = |\overline{\alpha}|$ для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ (см. § 5), из аксиомы 1) вытекает, что $|\mathbf{xy}| = |\mathbf{yx}|$. Используя эти факты, свойство 3) модуля комплексных чисел (см. § 5) и теорему о модуле скалярного произведения, имеем

$$\begin{aligned}|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = |(\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y})| = |\mathbf{xx}+\mathbf{xy}+\mathbf{yx}+\mathbf{yy}| \leqslant \\ &\leqslant |\mathbf{xx}|+|\mathbf{xy}|+|\mathbf{yx}|+|\mathbf{yy}| = |\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{xy}|+|\mathbf{y}|^2 \leqslant \\ &\leqslant |\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|+|\mathbf{y}|^2 = \big(|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|\big)^2.\end{aligned}$$

Мы видим, что $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 \leqslant \big(|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|\big)^2$. Извлекая из обеих частей этого неравенства квадратный корень, получаем неравенство (7).

2) Если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно независимы, то, в силу теоремы о модуле скалярного произведения, $|\mathbf{xy}| < |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$. Заменяя в проведенных выше выкладках второе из нестрогих неравенств на строгое, получаем, что в этом случае $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| < |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$. $\square$

Неравенство (7) называется *неравенством Минковского*. Оно обобщает известный факт из элементарной геометрии, называемый неравенством треугольника: сумма длин двух сторон треугольника больше длины третьей стороны. Поэтому неравенство (7) называют также *неравенством треугольника*.

**Определение**

*Расстоянием между векторами* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ в пространстве со скалярным произведением называется длина вектора $\mathbf{x} - \mathbf{y}$. Оно обозначается через $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Отметим, что приведенное определение естественно. В самом деле, предположим, что мы рассматриваем обычное пространство с обычным скалярным произведением векторов. Представим себе, что все векторы откладываются от начала координат, и отождествим вектор с точкой, являющейся его концом. Тогда расстояние между двумя точками есть длина вектора, соединяющего их концы, т. е. длина разности векторов, соответствующих этим двум точкам (см. рис. 1).

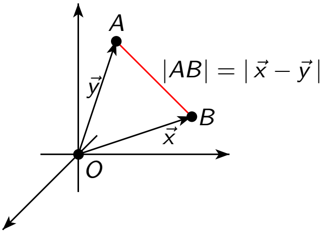


Рис. 1. Расстояние между точками

## Замечание о расстоянии между векторами

*Если* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *и* $\mathbf{z}$ *— произвольные векторы из пространства со скалярным произведением, то*:

1) $\rho(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$;
2) $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y},\mathbf{x})$;
3) *выполнено неравенство*

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y},\mathbf{z}) \geqslant \rho(\mathbf{x},\mathbf{z}). \tag{8}$$

*Доказательство.* Свойства 1) и 2) очевидны. Докажем свойство 3). Используя неравенство Минковского, имеем

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{z}) = |\mathbf{x}-\mathbf{z}| = \big|(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + (\mathbf{y}-\mathbf{z})\big| \leqslant |\mathbf{x}-\mathbf{y}| + |\mathbf{y}-\mathbf{z}| = \rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

Замечание доказано. $\square$

Неравенство (8) можно рассматривать как еще одно обобщение упоминавшегося выше неравенства треугольника из элементарной геометрии.

### Определение

Пусть $V$ — пространство со скалярным произведением, а $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ — система векторов из $V$. *Матрицей Грама* системы векторов $A$ называется квадратная матрица $G_A = (a_{ij})$ порядка $m$, определяемая правилом: $a_{ij} = \mathbf{a}_i\mathbf{a}_j$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, m$.

Это понятие имеет многочисленные приложения. Два из них будут указаны в оставшейся части данного параграфа, а некоторые другие — в § 37. Нам понадобится одно новое обозначение: для произвольной матрицы $B = (b_{ij})$ над полем $\mathbb{C}$ мы полагаем $\overline{B} = \left(\overline{b_{ij}}\right)$. Как показывает следующее утверждение, знание матрицы Грама системы базисных векторов в пространстве со скалярным произведением позволяет вычислить скалярное произведение любых двух векторов из этого пространства.

### Предложение о матрице Грама и скалярном произведении

*Пусть $V$ — пространство со скалярным произведением, $C$ — базис в $V$, а $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Тогда*

$$\mathbf{xy} = [\mathbf{x}]_C^\top \cdot G_C \cdot \overline{[\mathbf{y}]_C}. \tag{9}$$

Уточним, что в формуле (9) мы отождествляем число **xy** и квадратную матрицу 1-го порядка $[\mathbf{x}]_C^\top \cdot G_C \cdot \overline{[\mathbf{y}]_C}$, единственным элементом которой является это число.

*Доказательство.* Положим $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$. Обозначим координаты векторов **x** и **y** в базисе $C$ через $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ соответственно. Для того, чтобы вычислить произведение $[\mathbf{x}]_C^\top \cdot G_C \cdot \overline{[\mathbf{y}]_C}$, найдем сначала произведение $[\mathbf{x}]_C^\top \cdot G_C$, а затем умножим эту матрицу на $\overline{[\mathbf{y}]_C}$. Матрица $[\mathbf{x}]_C^\top \cdot G_C$ имеет размер $1 \times n$, т. е. является строкой длины $n$, $i$-й элемент которой (для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$) равен

$$x_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_i + x_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_i + \cdots + x_n\mathbf{c}_n\mathbf{c}_i.$$

Произведение этой матрицы на матрицу $\overline{[\mathbf{y}]_C}$ — это квадратная матрица 1-го порядка, т. е., по сути дела, число.

Вычислим это число, используя (2):

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{x}]_C^{\top} \cdot G_C \cdot \overline{[\mathbf{y}]_C} &= \sum_{i=1}^{n} (x_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_i + x_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_i + \cdots + x_n\mathbf{c}_n\mathbf{c}_i)\overline{y_i} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_1\overline{y_i}\mathbf{c}_1\mathbf{c}_i + x_2\overline{y_i}\mathbf{c}_2\mathbf{c}_i + \cdots + x_n\overline{y_i}\mathbf{c}_n\mathbf{c}_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big((x_1\mathbf{c}_1)(y_i\mathbf{c}_i) + (x_2\mathbf{c}_2)(y_i\mathbf{c}_i) + \cdots + (x_n\mathbf{c}_n)(y_i\mathbf{c}_i)\big) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n)(y_i\mathbf{c}_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}(y_i\mathbf{c}_i) = \mathbf{x} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{c}_i = \mathbf{x}\mathbf{y}.
\end{aligned}
$$

Предложение доказано. $\square$

Следующее утверждение показывает, что матрицу Грама можно использовать для выяснения вопроса о линейной зависимости или независимости данной системы векторов.

**Критерий линейной независимости на языке матрицы Грама**

*Пусть $V$ — пространство со скалярным произведением. Система векторов $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ из $V$ линейно независима тогда и только тогда, когда матрица Грама этой системы невырождена.*

*Доказательство. Достаточность.* Предположим, что система $A$ линейно зависима, т. е. $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$ для некоторых скаляров $t_1, t_2, \dots, t_m$, не все из которых равны 0. Умножая это равенство последовательно на $\mathbf{a}_1$, на $\mathbf{a}_2$, …, на $\mathbf{a}_m$ и учитывая определение матрицы $G_A = (a_{ij})$, получаем следующий набор равенств:

$$\begin{cases} t_1 a_{11} + t_2 a_{21} + \dots + t_m a_{m1} = 0, \\ t_1 a_{12} + t_2 a_{22} + \dots + t_m a_{m2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t_1 a_{1m} + t_2 a_{2m} + \dots + t_m a_{mm} = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Обозначим через $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m$ векторы-строки матрицы $G_A$. Систему равенств (10) можно переписать в виде

$$t_1\mathbf{g}_1 + t_2\mathbf{g}_2 + \dots + t_m\mathbf{g}_m = \mathbf{0}. \qquad (11)$$

Таким образом, векторы-строки матрицы $G_A$ линейно зависимы. Следовательно, ранг этой матрицы по строкам меньше $m$. По теореме о ранге матрицы (см. § 27) ее ранг по минорам также меньше $m$. Следовательно, матрица $G_A$ вырождена.

*Необходимость.* Предположим, что матрица $G_A$ вырождена. Следовательно, ранг этой матрицы по минорам меньше $m$. По теореме о ранге матрицы ее ранг по строкам также меньше $m$. Это означает, что векторы-строки матрицы $G_A$ линейно зависимы, т. е. для некоторых скаляров $t_1, t_2, \ldots, t_m$, не все из которых равны 0, выполнено равенство (11), а значит и набор равенств (10). С учетом определения матрицы $G_A$, этот набор равенств можно переписать в виде

$$\begin{cases} t_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m\mathbf{a}_1 = 0, \\ t_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + t_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m\mathbf{a}_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_m + t_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_m + \cdots + t_m\mathbf{a}_m\mathbf{a}_m = 0. \end{cases}$$

В свою очередь, эти равенства можно переписать в виде

$$\begin{cases} (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m)\mathbf{a}_1 = 0, \\ (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m)\mathbf{a}_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m)\mathbf{a}_m = 0. \end{cases}$$

Положив $\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m$, получим $\mathbf{x}\mathbf{a}_1 = \mathbf{x}\mathbf{a}_2 = \cdots = \mathbf{x}\mathbf{a}_m = 0$. Для всякого $i = 1, 2, \ldots, m$ умножим равенство $\mathbf{x}\mathbf{a}_i = 0$ на $\overline{t_i}$ и сложим полученные равенства. Используя (2), получим:

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{t_1}(\mathbf{x}\mathbf{a}_1) + \overline{t_2}(\mathbf{x}\mathbf{a}_2) + \cdots + \overline{t_m}(\mathbf{x}\mathbf{a}_m) = \\ &= \mathbf{x}(t_1\mathbf{a}_1) + \mathbf{x}(t_2\mathbf{a}_2) + \cdots + \mathbf{x}(t_m\mathbf{a}_m) = \\ &= \mathbf{x}(t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m) = \mathbf{x}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Итак, $\mathbf{x}\mathbf{x} = 0$. В силу аксиомы 4) $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m = \mathbf{x} = \mathbf{0}$, т. е. система $A$ линейно зависима. □