§ 27. Ранг матрицы

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица размера $m \times n$ над полем F. Векторы, компонентами которых являются элементы строк матрицы A, т. е. векторы вида $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, где $i = 1, 2, \ldots, m$, называются *векторами-строками* матрицы A. Аналогично, векторы, компонентами которых являются элементы столбцов матрицы A, т. е. векторы вида $\mathbf{a}^j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$, где $j = 1, 2, \ldots, n$, называются *векторами-столбцами* матрицы A.

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ принадлежат пространству F_n, а векторы $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$ — пространству F_m.

Определение

Рангом матрицы по строкам [*по столбцам*] называется размерность подпространства, порожденного векторами-строками [векторами-столбцами] этой матрицы. Ранг матрицы A по строкам [по столбцам] обозначается через $r_s(A)$ [соответственно, $r_c(A)$].

Минор матрицы (определение)

Определение

Минором матрицы A называется определитель квадратной матрицы, стоящей на пересечении некоторых строк и столбцов этой матрицы. *Порядком* минора называется порядок той матрицы, определителем которой этот минор является.

Если $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$, то всякий ее минор есть определитель вида

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \dots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix},$$

где $k \leqslant \min\{m, n\}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant m$ и $1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_k \leqslant n$. Порядок указанного минора равен k.

- Одна и та же матрица может иметь много различных миноров одного и того же порядка.
- Всякий элемент произвольной матрицы A является ее минором 1-го порядка. В частности, если $A \neq O$, то в A есть ненулевые миноры.
- Определитель квадратной матрицы порядка n является ее (единственным) минором n-го порядка.
- Введенное в §8 понятие минора элемента квадратной матрицы является частным случаем введенного на предыдущем слайде понятия минора матрицы: если $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n, а $1 \leqslant i, j \leqslant n$, то минор M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A является минором $(n-1)$-го порядка этой матрицы.

Определение

Пусть A — произвольная матрица. Если $A \neq O$, то *рангом матрицы A по минорам* называется наибольший из порядков ненулевых миноров этой матрицы. Ранг нулевой матрицы по минорам по определению равен 0. Ранг матрицы A по минорам обозначается через $r_m(A)$.

Бо́льшая часть данного параграфа будет посвящена доказательству следующего фундаментального результата.

Теорема о ранге матрицы

Пусть A — произвольная матрица над полем. Ранг матрицы A по строкам равен ее рангу по столбцам и равен ее рангу по минорам.

Прежде чем переходить к непосредственному доказательству этого утверждения, мы докажем ряд лемм. Во всех этих леммах мы, не оговаривая этого в явном виде, будем считать, что речь идет о матрицах над полем.

Лемма об элементарных преобразованиях и ранге по строкам

Умножение строки на ненулевое число и прибавление одной строки к другой не меняют ранга матрицы по строкам.

Доказательство. Пусть A — произвольная матрица, а B — матрица, полученная из A с помощью одного из двух элементарных преобразований, указанных в формулировке леммы. Обозначим векторы-строки матрицы A через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, а векторы-строки матрицы B — через $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$. Положим $V_A = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m \rangle$ и $V_B = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m \rangle$.

Случай 1: B получена из A умножением i-й строки матрицы A на ненулевое число t. В этом случае $\mathbf{b}_j = \mathbf{a}_j$ для всех $j = 1, 2, \ldots, m$, $j \neq i$ и $\mathbf{b}_i = t\mathbf{a}_i$. Ясно, что каждый из векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ лежит в V_A, и потому $V_B \subseteq V_A$. С другой стороны, каждый из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ лежит в V_B (для всех векторов, кроме $\mathbf{a}_i$, это очевидно, а для $\mathbf{a}_i$ вытекает из того, что $\mathbf{a}_i = \frac{1}{t} \cdot \mathbf{b}_i$). Следовательно, $V_A \subseteq V_B$, и потому $V_A = V_B$.

Случай 2: B получена из A прибавлением j-й строки матрицы A к ее i-й строке. В этом случае $\mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, m$, $k \neq i$ и $\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j$. Как и в предыдущем случае, ясно, что каждый из векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ лежит в V_A, и потому $V_B \subseteq V_A$. Остается справедливым и обратное утверждение: каждый из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ лежит в V_B (для всех векторов, кроме $\mathbf{a}_i$, это очевидно, а для $\mathbf{a}_i$ вытекает из того, что $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j$). Следовательно, $V_A \subseteq V_B$, и потому $V_A = V_B$. $\square$

Лемма об элементарных преобразованиях и ранге по минорам

Умножение строки на ненулевое число и прибавление одной строки к другой не меняют ее ранга по минорам.

Доказательство. Вновь предположим, что A — произвольная матрица, а B — матрица, полученная из A с помощью одного из двух элементарных преобразований, указанных в формулировке леммы. Пусть M — произвольный минор матрицы A. Матрицу, определителем которой является минор M, будем обозначать через A_M. Если матрица A_M расположена в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцах с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$ матрицы A, то определитель матрицы, расположенной в строках и столбцах матрицы B с теми же номерами, обозначим через M'. Ясно, что M' — минор матрицы B, и порядки миноров M и M' совпадают. Рассмотрим те же два случая, что и в доказательстве леммы об элементарных преобразованиях и ранге по строкам.

Случай 1: B получена из A умножением i-й строки матрицы A на ненулевое число t. Пусть M — произвольный минор матрицы A. Если матрица A_M не содержит элементов i-й строки матрицы A, то $M' = M$. В противном случае 2-е свойство определителей (см. § 8) влечет, что $M' = tM$. Учитывая, что $t \neq 0$, получаем, что $M = 0$ тогда и только тогда, когда $M' = 0$.

Следовательно, максимальные порядки ненулевых миноров в матрицах A и B совпадают, и потому $r_m(A) = r_m(B)$.

Случай 2: B получена из A прибавлением j-й строки матрицы A к ее i-й строке. Пусть M — ненулевой минор k-го порядка матрицы A. Покажем, что в матрице B тоже есть ненулевой минор k-го порядка. Если матрица A_M не содержит элементов i-й строки матрицы A, то $M' = M \neq 0$. Если A_M содержит элементы как i-й, так и j-й строки матрицы A, то в силу 7-го свойства определителей (см. § 8) вновь получаем, что $M' = M \neq 0$. Предположим, наконец, что A_M содержит элементы i-й строки матрицы A, но не содержит элементов ее j-й строки. Если $M' \neq 0$, то нужный нам факт установлен. Пусть теперь $M' = 0$. Будем для простоты предполагать, что матрица A_M расположена в первых k строках и первых k столбцах матрицы A, $i = 1$ и $j = k + 1$ (в общем случае доказательство вполне аналогично).

Используя 6-е свойство определителей (см. § 8), мы получаем, что

$$M' = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{k+1\,1} & a_{12} + a_{k+1\,2} & \ldots & a_{1k} + a_{k+1\,k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \ldots & a_{k+1\,k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} =$$

$$= M + \begin{vmatrix} a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \ldots & a_{k+1\,k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Обозначим последний из определителей, возникших в этой цепочке равенств, через D. Поскольку $M + D = M' = 0$, имеем

$$D = \begin{vmatrix} a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \ldots & a_{k+1\,k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} = -M \neq 0. \tag{1}$$

В матрице, определитель которой мы обозначили через D, поменяем местами сначала первую строку и вторую, затем вторую строку и третью, ..., наконец, $(k-1)$-ю строку и k-ю. В результате, сделав $k-1$ перестановку строк, мы получим минор k-го порядка матрицы B (матрица, определителем которой он является, расположена в первых k столбцах и в строках со второй по $(k+1)$-ю матрицы B). Обозначим этот минор через D'. Равенство (1) и 4-е свойство определителей (см. § 8) влекут, что $D' = (-1)^{k-1}D = (-1)^k M \neq 0$.

Итак, если матрица A содержит ненулевой минор k-го порядка, то тем же свойством обладает и матрица B. Следовательно, максимальный порядок ненулевого минора матрицы B не может быть меньше, чем максимальный порядок ненулевого минора матрицы A. Иными словами, $r_m(A) \leqslant r_m(B)$. Матрица A может быть получена из матрицы B последовательным выполнением трех операций: умножением j-й строки матрицы B на -1, прибавлением j-й строки полученной матрицы к ее i-й строке и повторным умножением j-й строки полученной после этого матрицы на -1. Первая и третья из этих операций, как было установлено при разборе случая 1, не меняют ранга матрицы по минорам, а вторая, как мы только что убедились, может разве лишь увеличить его. Следовательно, $r_m(B) \leqslant r_m(A)$ и потому $r_m(A) = r_m(B)$. $\square$

Лемма о ранге ступенчатой матрицы по строкам

Ранг ступенчатой матрицы по строкам равен числу ее ненулевых строк.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$ — ступенчатая матрица, число ненулевых строк которой равно k. Очевидно, что любой набор из более чем k векторов-строк матрицы A (если он существует, т. е. если A содержит более k строк) содержит нулевой вектор и потому линейно зависим (см. лемму о системе векторов, содержащей нулевой вектор, в § 22). Следовательно, $r_s(A) \leqslant k$. Для завершения доказательства достаточно установить, что первые k векторов-строк матрицы A линейно независимы. Положим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1i_1} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & a_{1n} \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 & a_{2i_2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{8}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & 0 & a_{ki_k} \ \ldots & a_{kn} \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ki_k} \neq 0$.

Обозначим первые k векторов-строк матрицы A через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Предположим, что

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0} \tag{3}$$

для некоторых скаляров $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Приравнивая в этом векторном равенстве компоненты с номерами i_1, i_2, …, i_k, мы получим следующую однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{1i_1}t_1 & & & & & = 0, \\ a_{1i_2}t_1 & + \ a_{2i_2}t_2 & & & & = 0, \\ a_{1i_3}t_1 & + \ a_{2i_3}t_2 & + \ a_{3i_3}t_3 & & & = 0, \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{1i_1}t_1 & + \ a_{2i_k}t_2 & + \ a_{3i_k}t_3 & + \ \cdots & + \ a_{ki_k}t_k & = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Основная матрица этой системы нижнетреугольна, а ее определитель равен $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ki_k}$. В частности, он отличен от 0. По теореме Крамера система (4) имеет единственное решение. Поскольку она однородна, этим решением является нулевое решение. Итак, из равенства (3) вытекает, что $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0$. Следовательно, векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно независимы. $\square$

Лемма о ранге ступенчатой матрицы по минорам

Ранг ступенчатой матрицы по минорам равен числу ее ненулевых строк.

Доказательство. Вновь предположим, что $A = (a_{ij})$ — ступенчатая матрица, число ненулевых строк которой равно k. Очевидно, что любой минор более чем k-го порядка матрицы A (если он существует, т. е. если A содержит более k строк и более k столбцов) является определителем матрицы, которая содержит нулевую строку, и потому равен 0 (см. 3-е свойство определителей в § 8). Следовательно, $r_m(A) \leqslant k$. Для завершения доказательства достаточно установить, что матрица A имеет ненулевой минор порядка k. Пусть матрица A имеет вид (2), где $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ki_k} \neq 0$. Матрица, расположенная в первых k строках матрицы A и столбцах этой матрицы с номерами i_1, i_2, ..., i_k является верхнетреугольной, и все элементы на ее главной диагонали отличны от 0. Определитель этой матрицы, являющийся минором k-го порядка матрицы A, отличен от 0 (см. предложение об определителе треугольной матрицы в § 8). □

Из 1-го свойства определителей (см. § 8) с очевидностью вытекает

Лемма о транспонировании и ранге по минорам

При транспонировании матрицы ее ранг по минорам не меняется. □

Лемма о двух элементарных преобразованиях

Любую матрицу можно привести к ступенчатому виду, используя только умножение строки на ненулевой скаляр и прибавление одной строки к другой.

Доказательство. Как мы видели в § 7 (см. там 2-й комментарий к алгоритму приведения матрицы к ступенчатому виду), любую матрицу можно привести к ступенчатому виду, используя два преобразования, указанных в формулировке леммы, и перестановку строк местами. Покажем, как заменить перестановку строк операциями, указанными в формулировке леммы. Обозначим векторы, стоящие в i-й и j-й строках исходной матрицы, через $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{a}_j$ соответственно.

Выполним последовательно действия, указанные в первом столбце табл. 1 (в том порядке, в котором они перечислены в таблице, сверху вниз). Во втором и третьем столбцах указано, чему после очередного действия, будут равны i-я и j-я строки соответственно.

Табл. 1. Перестановка строк местами

Действие	i-я строка	j-я строка
Прибавим j-ю строку к i-й	$\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j$	$\mathbf{a}_j$
Умножим j-ю строку на -1	$\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j$	$-\mathbf{a}_j$
Прибавим i-ю строку к j-й	$\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j$	$\mathbf{a}_i$
Умножим j-ю строку на -1	$\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j$	$-\mathbf{a}_i$
Прибавим j-ю строку к i-й	$\mathbf{a}_j$	$-\mathbf{a}_i$
Умножим j-ю строку на -1	$\mathbf{a}_j$	$\mathbf{a}_i$

Итак, мы переставили местами i-ю и j-ю строки с помощью преобразований, указанных в формулировке леммы. $\square$

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы о ранге матрицы. Пусть A — произвольная матрица, а B — ступенчатая матрица, полученная при приведении матрицы A к ступенчатому виду с помощью умножения строки на ненулевой скаляр и прибавления одной строки к другой (см. лемму о двух элементарных преобразованиях). Тогда $r_s(A) = r_s(B) = r_m(B) = r_m(A)$ (первое из этих равенств вытекает из леммы об элементарных преобразованиях и ранге по строкам, второе — из леммы о ранге ступенчатой матрицы по строкам и леммы о ранге ступенчатой матрицы по минорам, а третье — из леммы об элементарных преобразованиях и ранге по минорам). Таким образом, ранг A по строкам равен рангу A по минорам. Очевидно, что $r_c(A) = r_s(A^\top)$. Используя только что доказанное совпадение рангов произвольной матрицы по строкам и по минорам и лемму о транспонировании и ранге по минорам, имеем $r_c(A) = r_s(A^\top) = r_m(A^\top) = r_m(A)$. Таким образом, ранг A по столбцам равен рангу A по минорам (а значит, и рангу A по строкам). $\square$

Теорема о ранге матрицы позволяет ввести следующее

Определение

Рангом матрицы называется число, равное любому из трех ее вышеопределенных рангов. Ранг матрицы A мы будем обозначать через $r(A)$.

Из леммы об элементарных преобразованиях и ранге по строкам и леммы о ранге ступенчатой матрицы по строкам вытекает следующий

Алгоритм нахождения ранга матрицы

Приведем данную матрицу к ступенчатому виду. Число ненулевых строк в полученной матрице равно рангу исходной матрицы.

В § 23 был приведен без обоснования следующий алгоритм определения линейной зависимости или независимости системы векторов: запишем в матрицу по строкам координаты этих векторов в некотором базисе и начнем приводить ее к ступенчатому виду. Если в процессе элементарных преобразований возникнет нулевая строка, система линейно зависима, в противном случае она линейно независима. Обоснуем этот алгоритм. При приведении матрицы к ступенчатому виду мы заменяем каждую строку матрицы на нетривиальную линейную комбинацию ее строк. Поэтому возникновение нулевой строки означает, что векторы-строки исходной матрицы линейно зависимы. Если же нулевых строк не возникло, то в силу леммы об элементарных преобразованиях и ранге по строкам и леммы о ранге ступенчатой матрицы по строкам размерность пространства, порожденного векторами-строками исходной матрицы равна числу этих строк, а значит эти векторы-строки линейно независимы.

В § 24 был приведен без обоснования алгоритм нахождения базиса и размерности подпространства, порожденного данным набором векторов. Напомним, в чем он состоит. Запишем в матрицу по строкам координаты данных векторов в некотором базисе и приведем эту матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки полученной матрицы будут базисом нашего подпространства, а число этих строк равно его размерности. Теперь мы в состоянии обосновать этот алгоритм. В самом деле, в силу алгоритма нахождения ранга матрицы число ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы равно рангу исходной матрицы по строкам, т. е. размерности пространства, порожденного ее векторами-строками. Далее, как проверено в процессе доказательства леммы о ранге ступенчатой матрицы по строкам, справедливо следующее

Замечание о строках ступенчатой матрицы

Ненулевые векторы-строки ступенчатой матрицы линейно независимы. $\square$

Следовательно, ненулевые векторы-строки полученной нами ступенчатой матрицы линейно независимы и их число равно размерности пространства, порожденного этими векторами-строками. В силу замечания о базисах n-мерного пространства из § 23, эти векторы-строки образуют базис порожденного ими пространства.

Нашей следующей целью является доказательство следующего утверждения.

Теорема о ранге произведения матриц

Ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $k \times \ell$, а $B = (b_{ij})$ — матрица размера $\ell \times m$. Положим $C = AB$. По определению произведения матриц, первый столбец матрицы C имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & + & a_{12}b_{21} & + & \cdots & + & a_{1\ell}b_{\ell 1} \\ a_{21}b_{11} & + & a_{22}b_{21} & + & \cdots & + & a_{2\ell}b_{\ell 1} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{k1}b_{11} & + & a_{k2}b_{21} & + & \cdots & + & a_{k\ell}b_{\ell 1} \end{pmatrix} =$$

$$= b_{11} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{k1} \end{pmatrix} + b_{21} \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{k2} \end{pmatrix} + \dots + b_{\ell 1} \cdot \begin{pmatrix} a_{1\ell} \\ a_{2\ell} \\ \dots \\ a_{k\ell} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, первый столбец матрицы C является линейной комбинацией столбцов матрицы A. Аналогичное утверждение можно получить и для любого другого столбца матрицы C. Итак, все столбцы матрицы C являются линейными комбинациями столбцов матрицы A. Следовательно, подпространство, порожденное векторами-столбцами матрицы C, содержится в подпространстве, порожденном векторами-столбцами матрицы A. Размерность первого подпространства не превосходит поэтому размерности второго. Это означает, что ранг по столбцам матрицы C не превосходит ранга по столбцам матрицы A, т. е. $r(C) \leqslant r(A)$.

Рассуждая аналогично, легко убедиться в том, что строки матрицы C являются линейными комбинациями строк матрицы B. Отсюда вытекает неравенство $r(C) \leqslant r(B)$. $\square$

В некоторых случаях ранг произведения матриц оказывается равным рангу одного из сомножителей. Укажем один из таких случаев.

Следствие о ранге произведения квадратных матриц

Если A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка и $|A| \neq 0$, то ранги матриц AB и BA равны рангу матрицы B.

Доказательство. Положим $C = AB$. По теореме о ранге произведения матриц $r(C) \leqslant r(B)$. В силу критерия обратимости матрицы существует матрица A^{-1}. Равенство $C = AB$ умножим слева на A^{-1}. Получим

$$A^{-1}C = A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = EB = B,$$

т. е. $B = A^{-1}C$. Применяя теорему о ранге произведения матриц к последнему равенству получаем неравенство $r(B) \leqslant r(C)$. Следовательно, $r(B) = r(C)$. Аналогично проверяется равенство $r(B) = r(BA)$. $\square$

В заключение параграфа докажем следующее утверждение, показывающее, как понятие ранга может быть использовано для анализа систем линейных уравнений.

Теорема Кронекера–Капелли (критерий совместности системы линейных уравнений)

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу ее расширенной матрицы.

Доказательство. Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (5)$$

Обозначим ее основную матрицу через A, а расширенную — через B. Векторы-столбцы матрицы A будем обозначать через $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n$, а столбец свободных членов — через $\mathbf{b}$. Пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы A, условимся обозначать через V_A, а пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы B, — через V_B.

Заметим, что система (5) может быть записана в виде векторного равенства $x_1\mathbf{a}^1 + x_2\mathbf{a}^2 + \dots + x_n\mathbf{a}^n = \mathbf{b}$. Следовательно, система (5) совместна в том и только в том случае, когда вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов-столбцов матрицы A, т. е. когда $\mathbf{b} \in V_A$.

Пусть система (5) совместна. Тогда вектор $\mathbf{b}$ принадлежит пространству V_A. Это значит, что векторы-столбцы матрицы B принадлежат V_A, и поэтому $V_B \subseteq V_A$. Но столбцы матрицы A являются столбцами матрицы B. Отсюда следует, что $V_A \subseteq V_B$. Следовательно, $V_A = V_B$. Но тогда и $\dim V_A = \dim V_B$, т. е. ранг по столбцам матрицы A равен рангу по столбцам матрицы B. В силу теоремы о ранге матрицы, ранги матриц A и B равны.

Предположим теперь, что ранги матриц A и B равны. Положим $r = r(A) = r(B)$. Базис пространства V_A состоит из r векторов. Для удобства обозначений будем считать что он состоит из первых r векторов-столбцов матрицы A, т. е. из векторов $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^r$. Эти векторы принадлежат и пространству V_B. Размерность пространства V_B равна r. Следовательно, векторы $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^r$ образуют базис пространства V_B. Вектор $\mathbf{b}$ принадлежит V_B и потому является линейной комбинацией базисных векторов. Итак, вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^r$, а значит и линейной комбинацией всей системы векторов-столбцов матрицы A. Следовательно, система (5) совместна. $\square$

Отметим, что теорему Кронекера–Капелли легко вывести уже из метода Гаусса. В самом деле, как мы видели в § 7, *система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда при приведении ее расширенной матрицы к ступенчатому виду не возникает строки, в которой все элементы, кроме последнего, равны* 0, *а последний элемент отличен от* 0. Это, очевидно, равносильно тому, что *при приведении к ступенчатому виду основной и расширенной матриц системы получатся матрицы с одинаковым числом ненулевых строк*. С учетом алгоритма нахождения ранга матрицы, это, в свою очередь, равносильно тому, что *ранги основной и расширенной матриц системы равны*.

Таким образом, теорема Кронекера–Капелли не дает ничего нового по сравнению с методом Гаусса для анализа той или иной конкретной системы. Но она чрезвычайно полезна с теоретической точки зрения, так как используется в доказательствах большого числа важных утверждений, причем не только в алгебре, но и в других разделах математики.

- Теорема Кронекера–Капелли была впервые опубликована в 1867 г. английским математиком Чарльзом Доджсоном, который известен всему миру под псевдонимом Льюис Кэрролл как автор сказки «Алиса в стране чудес».