§ 37. Матрица Грама и определитель Грама

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение

Определитель матрицы Грама набора векторов A в пространстве со скалярным произведением называется *определителем Грама* этого набора векторов. Этот определитель обозначается через g_A. Таким образом, $g_A = |G_A|$.

Некоторые приложения матрицы Грама были указаны в § 35. Данный параграф посвящен другим приложениям матрицы Грама и определителя Грама.

Предложение об определителе Грама и процессе ортогонализации

Пусть V — пространство со скалярным произведением, $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ — линейно независимая система векторов из V, а $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m\}$ — ортогональная система векторов, полученная из системы A применением процесса ортогонализации Грама–Шмидта. Тогда

$$g_A = g_B = |\mathbf{b}_1|^2 \cdot |\mathbf{b}_2|^2 \cdot \ldots \cdot |\mathbf{b}_m|^2.$$

Доказательство. Равенство $g_B = |\mathbf{b}_1|^2 \cdot |\mathbf{b}_2|^2 \cdot \ldots \cdot |\mathbf{b}_m|^2$ вытекает из того, что матрица G_B диагональна, и на ее главной диагонали стоят числа вида $\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i = |\mathbf{b}_i|^2$, где $i = 1, 2, \ldots, m$. Осталось доказать, что $g_A = g_B$.

Как видно из описания процесса ортогонализации Грама–Шмидта (см. доказательство теоремы о существовании ортонормированного базиса в § 36), каждый из векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ получается из системы векторов A применением конечное число раз операции прибавления к одному вектору из A другого вектора из A, умноженного на некоторое число. Пусть $k, \ell \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $k \neq \ell$, а λ — произвольный скаляр. Положим

$$B' = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k + \lambda\mathbf{a}_\ell, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_m\}.$$

В силу сказанного выше, достаточно установить, что $g_A = g_{B'}$. Положим $G_{B'} = (b_{ij})$. Тогда, по определению матрицы Грама,

$$b_{ij} = \begin{cases} \mathbf{a}_i\mathbf{a}_j, & \text{если } i \neq k \text{ и } j \neq k; \\ (\mathbf{a}_i + \lambda\mathbf{a}_\ell)\mathbf{a}_j, & \text{если } i = k \text{ и } j \neq k; \\ (\mathbf{a}_i + \lambda\mathbf{a}_\ell)(\mathbf{a}_i + \lambda\mathbf{a}_\ell), & \text{если } i = j = k. \end{cases} \qquad (1)$$

Обозначим через G_1 матрицу, полученную из G_A прибавлением к k-й строке матрицы G_A ее ℓ-й строки, умноженной на λ, а через G_2 — матрицу, полученную из G_1 прибавлением к k-му столбцу матрицы G_1 ее ℓ-го столбца, умноженного на $\overline{\lambda}$. Положим $G_1 = (a'_{ij})$ и $G_2 = (a''_{ij})$.

Ясно, что

$$a'_{kj} = a_{kj} + \lambda a_{\ell j} = \mathbf{a}_k \mathbf{a}_j + \lambda \mathbf{a}_\ell \mathbf{a}_j = (\mathbf{a}_k + \lambda \mathbf{a}_\ell)\mathbf{a}_j,$$

а если $i \neq k$, то $a'_{ij} = a_{ij} = \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$. Используя полученные только что равенства, имеем

$$\begin{aligned} a''_{kk} &= a'_{kk} + \overline{\lambda}\, a'_{k\ell} = \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k + \lambda \mathbf{a}_\ell \mathbf{a}_k + \overline{\lambda}\, (\mathbf{a}_k \mathbf{a}_\ell + \lambda \mathbf{a}_\ell \mathbf{a}_\ell) = \\ &= \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k + \lambda \mathbf{a}_\ell \mathbf{a}_k + \overline{\lambda}\, \mathbf{a}_k \mathbf{a}_\ell + \lambda \overline{\lambda}\, \mathbf{a}_\ell \mathbf{a}_\ell = (\mathbf{a}_k + \lambda \mathbf{a}_\ell)(\mathbf{a}_k + \lambda \mathbf{a}_\ell), \end{aligned}$$

если $j \neq k$, то $a''_{kj} = a'_{kj} = (\mathbf{a}_k + \lambda \mathbf{a}_\ell)\mathbf{a}_j$, а если $i \neq k$ и $j \neq k$, то $a''_{ij} = a'_{ij} = a_{ij} = \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$.

Сравнивая полученные равенства с (1), получаем, что $G_2 = G_{B'}$. Таким образом, матрица $G_{B'}$ получается из матрицы G_A путем двух последовательных преобразований: прибавления к k-й строке матрицы G_A ее ℓ-й строки, умноженной на λ, и последующего прибавления к k-му столбцу полученной матрицы ее ℓ-го столбца, умноженного на $\overline{\lambda}$. В силу 7-го свойства определителей и принципа равенства строк и столбцов (см. § 8), $g_A = |G_A| = |G_{B'}| = g_{B'}$. □

Из критерия линейной независимости на языке матрицы Грама (см. § 35) и предложения об определителе Грама и процессе ортогонализации непосредственно вытекает

Следствие о неотрицательности определителя Грама

Определитель Грама произвольной системы векторов в пространстве со скалярным произведением является неотрицательным действительным числом. Если система векторов линейно независима, то этот определитель больше 0. □

Определение

Параллелотопом, порожденным линейно независимой системой векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ евклидова пространства V, называется множество всех векторов из V вида $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_m\mathbf{a}_m$, где $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$. *Объем параллелотопа* $V_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}}$ определяется индукцией по m: если $m = 1$, то $V_{\{\mathbf{a}_1\}} = |\mathbf{a}_1|$, а если $m > 1$, то $V_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}} = V_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{m-1}\}} \cdot d$, где d — длина ортогональной составляющей вектора $\mathbf{a}_m$ относительно подпространства $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{m-1} \rangle$.

- В унитарном пространстве понятие параллелотопа ввести нельзя, так неравенства вида $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ в случае, когда λ — комплексное число, не имеют смысла.
- Понятие параллелотопа обобщает понятия отрезка, параллелограмма, параллелипипеда, а понятие объема параллелотопа — понятия длины отрезка, площади параллелограмма, объема параллелипипеда (см. рис. 1 и 2 и комментарии к ним на следующем слайде).

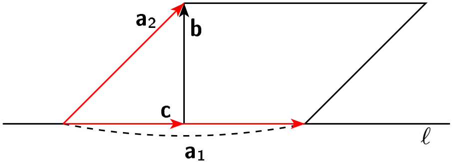

Рис. 1. Параллелограмм

Комментарий. Здесь $m = 2$, $V_{\{\mathbf{a}_1\}} = |\mathbf{a}_1|$, подпространство $\langle \mathbf{a}_1 \rangle$ — прямая ℓ, ортогональная составляющая вектора $\mathbf{a}_2$ относительно этого подпространства — вектор $\mathbf{b}$, и $V_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}} = |\mathbf{a}_1| \cdot d = V_{\{\mathbf{a}_1\}} \cdot d$, где $d = |\mathbf{b}|$. Через $\mathbf{c}$ обозначена ортогональная проекция $\mathbf{a}_2$ на $\langle \mathbf{a}_1 \rangle$.

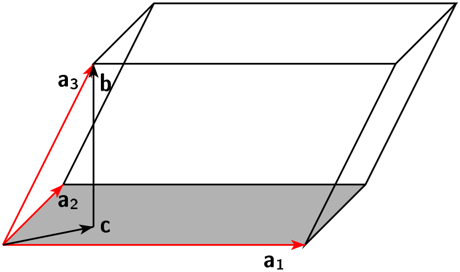

Рис. 2. Параллелипипед

Комментарий. Здесь $m = 3$, $V_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}}$ — площадь S «серого» параллелограмма, подпространство $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ — плоскость, в которой расположен этот параллелограмм, ортогональная составляющая вектора $\mathbf{a}_3$ относительно этого подпространства — вектор $\mathbf{b}$, и $V_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}} = S \cdot d = V_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}} \cdot d$, где $d = |\mathbf{b}|$. Через $\mathbf{c}$ обозначена ортогональная проекция $\mathbf{a}_3$ на $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$.

Предложение об объеме параллелотопа

Если $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ *— линейно независимая система векторов в еквклидовом пространстве, то* $V_A = \sqrt{g_A}$.

Доказательство проведем индукцией по m.

База индукции. Если $m = 1$, то G_A — квадратная матрица 1-го порядка, единственным элементом которой является $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1$. Учитывая определение объема параллелотопа, имеем $g_A = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 = |\mathbf{a}_1|^2 = V_A^2$. Следовательно, $V_A = \sqrt{g_A}$.

Шаг индукции. Пусть теперь $m > 1$. Пусть $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ — ортогональная система векторов, полученная из системы A применением процесса ортогонализации Грама–Шмидта. Положим $A' = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{m-1}\}$ и $B' = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{m-1}\}$. Используя предположение индукции и предложение об определителе Грама и процессе ортогонализации, получаем, что

$$V_{A'} = \sqrt{g_{A'}} = \sqrt{g_{B'}} = \sqrt{|\mathbf{b}_1|^2 \cdot |\mathbf{b}_2|^2 \cdot \ldots \cdot |\mathbf{b}_{m-1}|^2} = |\mathbf{b}_1| \cdot |\mathbf{b}_2| \cdot \ldots \cdot |\mathbf{b}_{m-1}|.$$

Положим $S = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{m-1} \rangle$. В силу замечания об ортогональной составляющей и процессе ортогонализации (см. § 36) $\mathbf{b}_m$ является ортогональной составляющей вектора $\mathbf{a}_m$ относительно подпространства S. Используя определение объема параллелотопа и предложение об определителе Грама и процессе ортогонализации, имеем

$$V_A = V_{A'} \cdot |\mathbf{b}_m| = |\mathbf{b}_1| \cdot |\mathbf{b}_2| \cdot \ldots \cdot |\mathbf{b}_{m-1}| \cdot |\mathbf{b}_m| = \sqrt{g_A}.$$

Предложение доказано. □

Из теоремы о скалярном произведении в ортонормированном базисе (см. § 36) вытекает следующее утверждение.

Замечание о вычислении матрицы Грама

Пусть V *— пространство со скалярным произведением,* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ *— система векторов из* V*, а* A *— квадратная матрица порядка* k*, в которой по столбцам записаны координаты векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *в некотором ортонормированном базисе пространства* V*. Тогда* $G_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}} = A^\top \overline{A}$*. В частности, если пространство* V *евклидово, то* $G_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}} = A^\top A$*.* □

Определитель Грама и объем параллелотопа в ортонормированном базисе

Пусть A — квадратная матрица над полем $\mathbb{R}$. Как и в § 12 и 13, будем обозначать через $\operatorname{mod}|A|$ модуль определителя матрицы A.

Следствие об объеме параллелотопа в ортонормированном базисе

Пусть $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ *— ортонормированный базис евклидова пространства* V, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *— произвольный базис того же пространства, а* A *— квадратная матрица порядка* n*, в которой по столбцам записаны координаты векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *в базисе* $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\}$. *Тогда*

$$V_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}} = \operatorname{mod}|A|. \tag{2}$$

Доказательство. В силу замечания о вычислении матрицы Грама, $A^\top A = G_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}}$. Переходя к определителям, имеем $g_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}} = |A^\top A| = |A^\top| \cdot |A| = |A|^2$. В силу предложения об объеме параллелотопа,

$$V_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}} = \sqrt{g_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}}} = \sqrt{|A|^2} = \operatorname{mod}|A|.$$

Следствие доказано. $\square$

Два замечания об объеме параллелотопа

- Формулу (2) можно рассматривать как обобщение формулы (6) из § 12 для вычисления площади параллелограмма и формулы (4) из § 13 для вычисления объема параллелипипеда[1].
- Как мы увидим ниже, следствие об объеме параллелотопа в ортонормированном базисе обобщает также геометрический смысл смешанного произведения векторов в обычном трехмерном пространстве (см. § 13).

[1] В этих двух формулах координаты векторов располагаются не по столбцам, а по строкам, но это несущественно, так как при транспонировании матрицы определитель не меняется.

Из определения расстояния от вектора до подпространства (см. § 36), определения объема параллелотопа и предложения об объеме параллелотопа непосредственно вытекает

Следствие о расстоянии от вектора до подпространства

Пусть $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ — линейно независимая система векторов евклидова пространства, а $A' = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{m-1}\}$. Тогда расстояние от вектора $\mathbf{a}_m$ до подпространства, порожденного системой векторов A', равно $\sqrt{\frac{g_A}{g_{A'}}}$. □

С этого места и до конца данного параграфа V — n-мерное евклидово пространство. В силу теоремы об изоморфизме векторных пространств, V изоморфно пространству $\mathbb{R}_n$. Для простоты будем всюду далее считать, что $V = \mathbb{R}_n$. Как обычно, через $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ обозначается стандартный базис пространства $\mathbb{R}_n$.

Определение

Базис F евклидова пространства называется *положительно ориентированным*, если определитель матрицы перехода от E к F больше 0, и *отрицательно ориентированным* в противном случае.

В силу замечания о матрице перехода от стандартного базиса к произвольному (см. § 29), матрицей перехода от E к F является матрица, в которой по столбцам записаны векторы базиса F. С учетом этого, ясно, что

- в обычном трехмерном пространстве базис является положительно (или отрицательно) ориетированным в смысле введенного только что определения тогда и только тогда, когда он обладает этим свойством в смысле определения, которое было дано в § 13.

В произвольном евклидовом пространстве можно ввести аналог понятия векторного произведения векторов из векторной алгебры. Прежде, чем давать соответствующее определение, вспомним некоторые свойства этого «обычного» векторного произведения, сформулировав их с использованием терминов, появившихся при изучении пространств со скалярным произведением.

Пусть $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ — векторы из физического трехмерного пространства, а $\vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$. Если векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ линейно зависимы (т. е. коллинеарны), то $\vec{b} = \vec{0}$. В противном случае вектор $\vec{b}$ обладает следующими тремя свойствами (см. § 12):

1) длина вектора $\vec{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$;
2) вектор $\vec{b}$ лежит в ортогональном дополнении к подпространству, порожденному векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$;
3) тройка $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b})$ является положительно ориентированным базисом пространства.

Определение

Пусть V — n-мерное евклидово пространство, где $n > 1$, и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1} \in V$. Если векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ линейно зависимы, то их *обобщенное векторное произведение* по определению равно $\mathbf{0}$. Если же векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ линейно независимы, то их *обобщенным векторным произведением* называется вектор $\mathbf{b}$ такой, что:

1) длина вектора $\mathbf{b}$ равна объему параллелотопа, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$;
2) вектор $\mathbf{b}$ лежит в ортогональном дополнении к подпространству, порожденному векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$;
3) набор векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}\}$ является положительно ориентированным базисом пространства.

Обобщенное векторное произведение векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ обозначается через $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}$.

- Из определения обобщенного векторного произведения не вытекает, что оно существует. Ниже мы покажем, что для произвольного набора из $(n-1)$-го вектора евклидова пространства их обобщенное векторное произведение существует и единственно.
- Обобщенное векторное произведение в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве является n-арной алгебраической операций. Это единственный в нашем курсе пример n-арной операциии при $n > 2$.

Теорема об обобщенном векторном произведении

Для любого набора векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ из n-мерного евклидова пространства V существует, и притом единственный, вектор $\mathbf{b}$, являющийся обобщенным векторным произведением векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$.

Доказательство. Если векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ линейно зависимы, то требуемый факт непосредственно вытекает из определения обобщенного векторного произведения. Поэтому далее можно считать, что эти векторы линейно независимы.

Существование. Обозначим через $A = (a_{ij})$ матрицу размера $n \times (n-1)$, в которой по столбцам записаны векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ (или, что то же самое, координаты этих векторов в базисе E). Таким образом, $\mathbf{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$ для всякого $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Поскольку векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ линейно независимы, ранг этой матрицы по столбцам равен $n-1$. В силу теоремы о ранге матрицы, ее ранг по минорам также равен $n-1$. Для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ обозначим через Δ_i минор $(n-1)$-го порядка матрицы A, полученный при вычеркивании из нее i-й строки. Ясно, что матрица A не содержит миноров $(n-1)$-го порядка, отличных от $\Delta_1, \Delta_2, \ldots . \Delta_n$. Следовательно, по крайней мере один из этих миноров отличен от 0.

Для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ положим $A_i = (-1)^{i+n} \cdot \Delta_i$. Ясно, что по крайней мере одно из чисел $A_1, A_2, \ldots, A_n$ отлично от 0. Пусть

$$\mathbf{b} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + \cdots + A_n\mathbf{e}_n. \qquad (3)$$

Другими словами, $\mathbf{b} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Докажем, что вектор $\mathbf{b}$ является обобщенным векторным произведением векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$.

Положим $S = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1} \rangle$. Проверим сначала, что $\mathbf{b} \in S^{\perp}$. Пусть $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Рассмотрим следующий определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,n-1} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,n-1} & a_{2i} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,n-1} & a_{ni} \end{vmatrix}.$$

С одной стороны, этот определитель содержит два одинаковых столбца, и потому равен 0. С другой стороны, разлагая Δ по последнему столбцу, имеем

$$\Delta = a_{1i}A_1 + a_{2i}A_2 + \cdots + a_{ni}A_n = \mathbf{a}_i\mathbf{b}.$$

Итак, $\mathbf{a}_i\mathbf{b} = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Следовательно, $\mathbf{b} \in S^{\perp}$.

Проверим теперь, что набор векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}\}$ является базисом пространства V. Поскольку число векторов в этом наборе равно размерности V, достаточно убедиться, что этот набор линейно независим. Предположим, что это не так. Поскольку векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ линейно независимы, из леммы о добавлении вектора к линейно независимой системе векторов (см. § 22) вытекает, что $\mathbf{b} \in S$. С другой стороны, как показано выше, $\mathbf{b} \in S^{\perp}$. Поскольку $S \cap S^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, мы получаем, что $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Но это не так, поскольку $\mathbf{b} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ и $A_i \neq 0$ для некоторого i.

Докажем теперь, что базис $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}\}$ положительно ориентирован. Матрица перехода от базиса E к базису $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}\}$ имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,n-1} & A_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,n-1} & A_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,n-1} & A_n \end{pmatrix}.$$

Разлагая определитель этой матрицы по последнему столбцу, получаем

$$|T| = A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2. \tag{4}$$

В частности, $|T| > 0$, и потому базис $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}\}$ положительно ориентирован.

Осталось доказать, что $|\mathbf{b}| = V_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\dots,\mathbf{a}_{n-1}\}}$. Заметим, что

$$\mathbf{bb} = A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2. \tag{5}$$

Используя это равенство и тот факт, что $\mathbf{a}_i\mathbf{b} = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n-1$, имеем

$$T^\top T = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_1\mathbf{a}_{n-1} & 0 \\ \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_2\mathbf{a}_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{a}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{bb} \end{pmatrix}.$$

Вычислив этот определитель разложением по последней строке и учтя предложение об объеме параллелотопа, получим:

$$|T^\top T| = g_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\dots,\mathbf{a}_{n-1}\}} \cdot \mathbf{bb} = V^2_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\dots,\mathbf{a}_{n-1}\}} \cdot |\mathbf{b}|^2.$$

В то же время, $|T^\top T| = |T^\top| \cdot |T| = |T|^2$. Следовательно, $|T|^2 = V^2_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\dots,\mathbf{a}_{n-1}\}} \cdot |\mathbf{b}|^2$, откуда $|T| = V_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\dots,\mathbf{a}_{n-1}\}} \cdot |\mathbf{b}|$. С другой стороны, сравнивая равенства (4) и (5), получаем, что $|T| = \mathbf{bb} = |\mathbf{b}|^2$. Мы видим, что $|\mathbf{b}|^2 = V_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\dots,\mathbf{a}_{n-1}\}} \cdot |\mathbf{b}|$, откуда $|\mathbf{b}| = V_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\dots,\mathbf{a}_{n-1}\}}$.

Существование обобщенного векторного произведения доказано.

Единственность. Предположим, что наряду с вектором $\mathbf{b}$ существует вектор $\mathbf{c}$ такой, что $\mathbf{c} \in S^{\perp}$, $|\mathbf{c}| = V_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\ldots,\mathbf{a}_{n-1}\}}$ и набор векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{c}\}$ является положительно ориентированным базисом пространства V. Поскольку вектор $\mathbf{c}$ входит в базис пространства V, он отличен от $\mathbf{0}$. Из теоремы об ортогональном разложении (см. § 36) и теоремы о прямой сумме подпространств (см. § 24) вытекает, что

$$\dim S^{\perp} = \dim V - \dim S = n - (n-1) = 1.$$

Следовательно, каждый из векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, будучи ненулевым, образует базис пространства $S^{\perp}$. Отсюда вытекает, что $\mathbf{c} = t\mathbf{b}$ для некоторого t. Поскольку $|\mathbf{c}| = V_{\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\ldots,\mathbf{a}_{n-1}\}} = |\mathbf{b}|$, получаем, что $t \in \{1, -1\}$. Обозначим через T_1 и T_2 матрицы перехода от базиса E к базисам $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}\}$ и $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{c}\}$ соответственно. Если $t = -1$, т. е. $\mathbf{c} = -\mathbf{b}$, то в матрицах T_1 и T_2 все столбцы, кроме последнего совпадают, а последние столбцы получаются один из другого умножением на -1. Следовательно, $|T_1| = -|T_2|$. Поскольку базис $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}\}$ положительно ориентирован, $|T_1| > 0$. Следовательно, $|T_2| < 0$, т. е. базис $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{c}\}$ отрицательно ориентирован, что противоречит его выбору. Следовательно, $t = 1$, т. е. $\mathbf{c} = \mathbf{b}$. $\square$

Пусть, как и в доказательстве теоремы об обобщенном векторном произведении, $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — стандартный базис евклидова пространства V, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ — линейно независимый набор векторов из V и $\mathbf{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$ для всякого $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Тогда справедливо равенство

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,n-1} & \mathbf{e}_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,n-1} & \mathbf{e}_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,n-1} & \mathbf{e}_n \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

В самом деле, если разложить по последнему столбцу символический определитель из правой части этого равенства, то получится правая часть равенства (3), которая, как показано выше, равна $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}$.

Транспонировав матрицу из правой части равенства (6) и поменяв в полученной матрице местами сначала n-ю и $(n-1)$-ю строки, затем $(n-1)$-ю и $(n-2)$-ю строки, ..., в конце концов, вторую и первую строки, мы получим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \ldots & \mathbf{e}_n \\ a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{1\,n-1} & a_{2\,n-1} & \ldots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix}.$$

Из свойств определителей (см. § 8) вытекает, что

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \Delta.$$

В частности, если n нечетно, то $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1} = \Delta$. Таким образом, в обычном трехмерном пространстве формула (6) равносильна известной из векторной алгебры формуле вычисления обычного векторного произведения векторов по их координатам в правом ортонормированном базисе (см. формулу (4) в § 12).

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — векторы из n-мерного евклидова пространства V. *Обобщенным смешанным произведением* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называется скалярное произведение вектора $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}$ на вектор $\mathbf{a}_n$. По определению это понятие аналогично смешанному произведению векторов в обычном трехмерном пространстве. По аналогии с обычным смешанным произведением, будем обозначать обобщенное смешанное произведение векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ через $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_n$.

Запишем координаты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ в стандартном базисе пространства V в матрицу по столбцам и обозначим эту матрицу через A. Разлагая определитель матрицы A по последнему столбцу и учитывая формулу (6), мы получаем, что этот определитель равен скалярному произведению вектора $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}$ на вектор $\mathbf{a}_n$, т. е. обобщенному смешанному произведению векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Итак,

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_n = |A|. \tag{7}$$

Поскольку определитель матрицы не меняется при ее транспонировании, это равенство аналогично формуле вычисления обычного смешанного произведения векторов в трехмерном пространстве по их координатам в правом ортонормированном базисе.

В силу теоремы о ранге матрицы, векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $|A| = 0$. Это утверждение является аналогом критерия компланарности векторов, поскольку три вектора в обычном трехмерном пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Предположим теперь, что векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно независимы. Из следствия об объеме параллелотопа в ортонормированном базисе и формулы (7) вытекает, что

$$|\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_n| = V_{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}}.$$

При $n = 3$ это равенство есть не что иное, как геометрический смысл смешанного произведения векторов в обычном трехмерном пространстве. При этом требование о линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ соответствует требованию о некомпланарности векторов в геометрическом смысле смешанного произведения (см. формулу (3) в § 13).

Для удобства обозначений мы до конца этого параграфа не будем делать различия между векторами, компоненты которых записаны в строку и в столбец. В частности, мы будем записывать систему линейных уравнений в виде $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ — векторы, записанные в виде столбцов.

До конца этого параграфа зафиксируем систему линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ над полем $\mathbb{R}$.

Определение

Псевдорешением системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с m неизвестными называется произвольный вектор $\mathbf{x}_0$ такой, что расстояние между векторами $A\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{b}$ минимально среди всех векторов из $\mathbb{R}_m$.

Замечание о псевдорешениях совместной системы

Если система линейных уравнений совместна, то ее псевдорешениями являются все ее частные решения и только они.

Доказательство. Вектор $\mathbf{x}_0$ является решением системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$, т. е. когда расстояние между векторами $A\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{b}$ равно нулю. Меньше нуля расстояние между векторами быть не может. □

Множество всех векторов вида $A\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ пробегает пространство V, образует подпространство в V, причем это подпространство порождено векторами-столбцами матрицы A. Псевдорешение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ — это вектор из этого подпространства, расстояние между которым и вектором $\mathbf{b}$ минимально.

Всюду далее: $\mathbf{a}_i$ — вектор, компонентами которого являются элементы i-го столбца матрицы A (для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$), $H = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$, а $\mathbf{b}_\perp$ и $\mathbf{b}^\perp$ — ортогональная проекция вектора $\mathbf{b}$ на подпространство H и ортогональная составляющая $\mathbf{b}$ относительно H соответственно. Из сказанного выше и замечания об ортогональной проекции (см. § 36) вытекает следующий факт.

Предложение о псевдорешении системы

Если $\mathbf{x}_0$ — псевдорешение системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, то $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_\perp$. $\square$

В силу предложения о псевдорешении системы, множество всех псевдорешений системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ совпадает с множеством всех решений системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_{\perp}$. Следующая теорема показывает, как найти псевдорешения системы, не находя ортогональной проекции вектора $\mathbf{b}$ на подпространство H.

Теорема о нахождении псевдорешения

Общее решение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_{\perp}$ совпадает с общим решением системы

$$G_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n\}}\mathbf{x} = A^{\top}\mathbf{b}. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}_0$ — решение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_{\perp}$, т. е. выполнено равенство $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_{\perp}$. Умножив обе части этого равенства слева на $A^{\top}$, получим

$$A^{\top}A\mathbf{x}_0 = A^{\top}\mathbf{b}_{\perp}. \tag{9}$$

Обозначим через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ векторы-столбцы матрицы A. В силу замечания о вычислении матрицы Грама, левую часть равенства (9) можно записать в виде $G_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n\}}\mathbf{x}_0$. Далее, в матрице $A^{\top}$ по строкам записаны векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Все они лежат в H, и потому ортогональны к вектору $\mathbf{b}^{\perp}$. Следовательно, $A^{\top}\mathbf{b}^{\perp} = \mathbf{0}$, и потому

$$A^{\top}\mathbf{b} = A^{\top}(\mathbf{b}_{\perp} + \mathbf{b}^{\perp}) = A^{\top}\mathbf{b}_{\perp} + A^{\top}\mathbf{b}^{\perp} = A^{\top}\mathbf{b}_{\perp} + \mathbf{0} = A^{\top}\mathbf{b}_{\perp}.$$

С учетом равенства (9), получаем, что $A^\top A\mathbf{x}_0 = A^\top\mathbf{b}$, т.е. $G_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n\}}\mathbf{x}_0 = A^\top\mathbf{b}$. Мы доказали, что всякое решение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_\perp$ является решением системы (8).

Докажем обратное. Пусть $\mathbf{x}_0$ — решение системы (8), т. е. выполнено равенство $G_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n\}}\mathbf{x}_0 = A^\top\mathbf{b}$. С учетом замечания о вычислении матрицы Грама, его можно переписать в виде $A^\top A\mathbf{x}_0 = A^\top\mathbf{b}$. Таким образом, $A^\top(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Положим $\mathbf{c} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$. В матрице $A^\top$ по строкам записаны векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Из равенства $A^\top\mathbf{c} = O$ вытекает, что вектор $\mathbf{c}$ ортогонален к каждому из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, и потому лежит в $H^\perp$. С другой стороны, очевидно, что вектор $A\mathbf{x}_0$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, и потому лежит в H. Итак, $\mathbf{b} = A\mathbf{x}_0 + \mathbf{c}$, причем $A\mathbf{x}_0 \in H$, а $\mathbf{c} \in H^\perp$. Ясно, что $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_\perp$ и $\mathbf{c} = \mathbf{b}^\perp$. Первое из этих равенств означает, что $\mathbf{x}_0$ — решение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_\perp$. $\square$

Из замечания о вычислении матрицы Грама и теоремы о нахождении псевдорешения вытекает следующий вывод.

! *Чтобы найти псевдорешения несовместной системы линейных уравнений над полем $\mathbb{R}$ надо решить (в обычном смысле этого слова) систему, которая получается умножением слева основной матрицы и столбца свободных членов исходной системы на матрицу, транспонированную к основной матрице исходной системы.*

Из теоремы о нахождении псевдорешения вытекает

Следствие о ранге матрицы $A^\top A$

Если A — произвольная матрица над полем действительных чисел, то ранг матрицы $A^\top A$ равен рангу матрицы A.

Доказательство. Обозначим векторы-столбцы матрицы A через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. В силу замечания о вычислении матрицы Грама, достаточно доказать, что $r(G_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n\}}) = r(A)$. Теорема о нахождении псевдорешения устанавливает, что системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_\perp$ и $G_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n\}}\mathbf{x} = A^\top\mathbf{b}$ имеют одно и то же общее решение. Общее решение произвольной совместной системы линейных уравнений — это линейное многообразие, направляющим подпространством которого является общее решение соответствующей однородной системы (см. § 24). В силу критерия равенства линейных многообразий (см. § 24), если два линейных многообразия совпадают, то совпадают и их направляющие подмногообразия. Объединяя сказанное получаем, что пространства решений однородных систем $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и $G_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n\}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ совпадают. В частности, они имеют одну и ту же размерность. Обе эти однородные системы имеют n неизвестных. В силу теоремы о размерности пространства решений однородной системы (см. § 28), $n - r(G_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n\}}) = n - r(A)$, откуда $r(G_{\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n\}}) = r(A)$. $\square$