§ 32. Инвариантные подпространства

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V. Подпространство U пространства V называется *инвариантным относительно оператора* $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \in U$ для всякого вектора $\mathbf{x} \in U$.

Приведем примеры инвариантных подпространств.

Пример 1. Ясно, что все пространство V и его нулевое подпространство $\{\mathbf{0}\}$ инвариатны относительно любого линейного оператора.

Пример 2. Если V — векторное пространство над полем F, U — его произвольное подпространство, а $t \in F$, то U инвариантно относительно оператора растяжения в t раз (так как если $\mathbf{x} \in U$, то и $t\mathbf{x} \in U$).

Пример 3. Предположим, что векторное пространство V разлагается в прямую сумму подпространств M_1 и M_2, а $\mathcal{P}$ — оператор проектирования на подпространство M_1 параллельно M_2. Тогда подпространство M_1 инвариантно относительно $\mathcal{P}$ (так как если $\mathbf{x} \in M_1$, то $\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \in M_1$).

Пример 4. Пусть $V = F[x]$ — пространство всех многочленов от одной переменной над полем F, $U = F_n[x]$ — его подпространство, состоящее из многочленов степени $\leq n$, а $\mathcal{D}$ — оператор дифференцирования в V. Если $p \in U$, то $\deg p' \leq n - 1$, и потому $p' \in U$. Следовательно, U инвариантно относительно $\mathcal{D}$.

Теорема о матрице оператора и инвариантном подпространстве

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V, а U — подпространство в V, инвариантное относительно $\mathcal{A}$ и отличное от нулевого пространства и V. Тогда:

1) *существует базис пространства V, в котором оператор $\mathcal{A}$ имеет полураспавшуюся матрицу;*
2) *порядок одного из диагональных блоков этой матрицы равен $\dim U$;*
3) *ограничение линейного оператора $\mathcal{A}$ на подпространство U является линейным оператором на U, характеристический многочлен которого делит характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Положим $\dim V = n$ и $\dim U = k$. Из условия вытекает, что $0 < k < n$. Пусть $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_k$ — базис U. В соответствии с теоремой о дополнении до базиса (см. § 23), дополним его до базиса V векторами $\mathbf{p}_{k+1}, \ldots, \mathbf{p}_n$ и обозначим базис $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ пространства V через P. Пусть $A_p = (p_{ij})$ — матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе P. В i-м столбце этой матрицы записаны координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i)$ в базисе P. Поскольку оператор $\mathcal{A}$ инвариантен относительно U, $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i) \in U$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$.

Следовательно, вектор $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, k$, имеет в базисе P координаты вида $(p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{ik}, 0, \ldots, 0)$. Это означает, что матрица A_P имеет вид

$$A_P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \ldots & p_{k1} & p_{k+1\,1} & \ldots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \ldots & p_{k2} & p_{k+1\,2} & \ldots & p_{n2} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ p_{1k} & p_{2k} & \ldots & p_{kk} & p_{k+1\,k} & \ldots & p_{nk} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & p_{k+1\,k+1} & \ldots & p_{n\,k+1} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & p_{k+1\,n} & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Это доказывает пп. 1) и 2). Докажем п. 3). Тот факт, что ограничение $\mathcal{A}$ на U является линейным оператором на U, очевиден. Запишем матрицу $A_p - xE$:

$$A_P - xE = \begin{pmatrix} p_{11} - x & p_{21} & \ldots & p_{k1} & p_{k+1\,1} & \ldots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} - x & \ldots & p_{k2} & p_{k+1\,2} & \ldots & p_{n2} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ p_{1k} & p_{2k} & \ldots & p_{kk} - x & p_{k+1\,k} & \ldots & p_{nk} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & p_{k+1\,k+1} - x & \ldots & p_{n\,k+1} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & p_{k+1\,n} & \ldots & p_{nn} - x \end{pmatrix}.$$

Используя предложение об определителе полураспавшейся матрицы (см. § 25), получаем, что

$$\chi_{\mathcal{A}}(x) = |A_P - xE| = \begin{vmatrix} p_{11} - x & p_{21} & \dots & p_{k1} & p_{k+1\,1} & \dots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} - x & \dots & p_{k2} & p_{k+1\,2} & \dots & p_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1k} & p_{2k} & \dots & p_{kk} - x & p_{k+1\,k} & \dots & p_{nk} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_{k+1\,k+1} - x & \dots & p_{n\,k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_{k+1\,n} & \dots & p_{nn} - x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} p_{11} - x & p_{21} & \dots & p_{k1} \\ p_{12} & p_{22} - x & \dots & p_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1k} & p_{2k} & \dots & p_{kk} - x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_{k+1\,k+1} - x & \dots & p_{n\,k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{k+1\,n} & \dots & p_{nn} - x \end{vmatrix} =$$

$$= \chi_{\mathcal{A}|_U}(x) \cdot \begin{vmatrix} p_{k+1\,k+1} - x & \dots & p_{n\,k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{k+1\,n} & \dots & p_{nn} - x \end{vmatrix}.$$

Это доказывает п. 3).

Если $V = V_1 \oplus V_2$, то, в силу замечания о базисе прямой суммы подпространств (см. § 24), объединение базисов подпространств V_1 и V_2 является базисом V.

Теорема о прямой сумме инвариантных подпространств

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V и $V = V_1 \oplus V_2$, где V_1 и V_2 — ненулевые подпространства в V, инвариантные относительно $\mathcal{A}$. Обозначим через $\mathcal{A}_i$ ограничение оператора $\mathcal{A}$ на подпространство V_i, через P_i — некоторый базис пространства V_i, а через A_i — матрицу оператора $\mathcal{A}_i$ в базисе P_i, $i = 1, 2$. Тогда:

1) *матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $P = P_1 \cup P_2$ пространства V имеет вид*
$$\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix};$$
2) $\chi_{\mathcal{A}}(x) = \chi_{\mathcal{A}_1}(x) \cdot \chi_{\mathcal{A}_2}(x)$.

Доказательство. 1) Положим $r_1 = \dim V_1$ и $r_2 = \dim V_2$. По условию $r_1, r_2 \neq 0$. Если $\mathbf{p}$ — вектор из базиса P_1, то $\mathcal{A}(\mathbf{p}) = \mathcal{A}_1(\mathbf{p}) \in V_1$ (так как V_1 инвариантно относительно $\mathcal{A}_1$). Следовательно, вектор $\mathcal{A}(\mathbf{p})$ имеет в базисе P координаты вида $(p_1, \ldots, p_{r_1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{r_2 \text{ штук}})$, где $(p_1, \ldots, p_{r_1})$ — координаты вектора $\mathcal{A}_1(\mathbf{p})$ в базисе P_1. Аналогично, если $\mathbf{q}$ — вектор из базиса P_2, то вектор $\mathcal{A}(\mathbf{q})$ имеет в базисе P координаты вида $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{r_1 \text{ штук}}, q_1, \ldots, q_{r_2})$, где $(q_1, \ldots, q_{r_2})$ — координаты вектора $\mathcal{A}_2(\mathbf{q})$ в базисе P_2. Доказываемое утверждение вытекает теперь из определения матрицы линейного оператора в базисе.

2) Используя предложение об определителе полураспавшейся матрицы (см. § 25), имеем

$$\chi_{\mathcal{A}}(x) = |A - xE| = \begin{vmatrix} A_1 - xE & O \\ O & A_2 - xE \end{vmatrix} = |A_1 - xE| \cdot |A_2 - xE| = \chi_{\mathcal{A}_1}(x) \cdot \chi_{\mathcal{A}_2}(x).$$

Теорема доказана. $\square$

1-е замечание об инвариантных подпространствах

Если $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V, то подпространства $\mathrm{Im}(\mathcal{A}^m)$ и $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}^m)$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(\mathcal{A}^m)$. Тогда $\mathbf{x} = \mathcal{A}^m(\mathbf{y})$ для некоторого $\mathbf{y} \in V$. Следовательно,

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathcal{A}^m(\mathbf{y})) = \mathcal{A}^{m+1}(\mathbf{y}) = \mathcal{A}^m(\mathcal{A}(\mathbf{y})),$$

и потому $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \in \mathrm{Im}(\mathcal{A}^m)$. Таким образом, подпространство $\mathrm{Im}(\mathcal{A}^m)$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$.

Далее, пусть $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^m)$, т. е. $\mathcal{A}^m(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Тогда

$$\mathcal{A}^m(\mathcal{A}(\mathbf{x})) = \mathcal{A}^{m+1}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathcal{A}^m(\mathbf{x})) = \mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

и потому $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^m)$. Таким образом, подпространство $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}^m)$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$. □

2-е замечание об инвариантных подпространствах

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V над полем F, а $\lambda \in F$. Подпространство U пространства V инвариантно относительно $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно оператора $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in U$. Поскольку

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) - \lambda\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) - \lambda\mathbf{x}$$

и $\lambda\mathbf{x} \in U$, ясно, что $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{x}) \in U$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \in U$. Отсюда немедленно вытекает доказываемое утверждение. □