

§ 31. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение

Пусть V — векторное пространство над полем F , а \mathcal{A} — линейный оператор в пространстве V . Вектор $x \in V$ называется **собственным вектором** оператора \mathcal{A} , если $x \neq 0$ и существует скаляр $t \in F$ такой, что

$$\mathcal{A}(x) = tx. \quad (1)$$

Скаляр $t \in F$ называется **собственным значением** или **собственным числом** оператора \mathcal{A} , если существует вектор $x \in V$ такой, что $x \neq 0$ и выполнено равенство (1). При наличии равенства (1) мы будем называть x собственным вектором, **относящимся к собственному значению** t , а t — собственным значением, **относящимся к собственному вектору** x .

Свойство собственных векторов, относящихся к одному и тому же собственному значению

Теорема о собственных векторах, относящихся к одному и тому же собственному значению

Совокупность всех собственных векторов, относящихся к одному и тому же собственному значению, вместе с нулевым вектором образует подпространство.

Доказательство. Обозначим через M_0 множество всех собственных векторов, относящихся к собственному значению t_0 и положим $M = M_0 \cup \{\mathbf{0}\}$. Пусть $x_1, x_2 \in M$. Если $x_1 + x_2 = \mathbf{0}$, то $x_1 + x_2 \in M$. Пусть теперь $x_1 + x_2 \neq \mathbf{0}$. Поскольку

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = t_0 x_1 + t_0 x_2 = t_0(x_1 + x_2),$$

получаем, что $x_1 + x_2 \in M_0 \subseteq M$. Аналогично, для любого скаляра t имеем: если $tx_1 = \mathbf{0}$, то $tx_1 \in M$, а если $tx_1 \neq \mathbf{0}$, то

$$A(tx_1) = tA(x_1) = t(t_0 x_1) = t_0(tx_1),$$

откуда $tx_1 \in M_0 \subseteq M$. □

Свойство собственных векторов, относящихся к различным собственным значениям (1)

Теорема о собственных векторах, относящихся к различным собственным значениям

Если векторы x_1, x_2, \dots, x_k являются собственными и относятся к попарно различным собственным значениям t_1, t_2, \dots, t_k соответственно, то векторы x_1, x_2, \dots, x_k линейно независимы.

Доказательство будем вести индукцией по числу векторов.

База индукции. Пусть $k = 1$ и x_1 — собственный вектор. По определению собственного вектора, $x_1 \neq 0$. Поэтому если $t_1 x_1 = 0$, то $t_1 = 0$.

Следовательно, система, состоящая из вектора x_1 , линейно независима.

Шаг индукции. Пусть теперь $k > 1$ и x_1, x_2, \dots, x_k — собственные векторы оператора A , относящиеся к попарно различным собственным значениям t_1, t_2, \dots, t_k . Предположим, что

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_{k-1} x_{k-1} + s_k x_k = 0 \quad (2)$$

для некоторых скаляров $s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_k \in F$.

Свойство собственных векторов, относящихся к различным собственным значениям (2)

Используя замечание о свойствах линейного оператора (см. § 29), имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathcal{A}(s_1\mathbf{x}_1 + s_2\mathbf{x}_2 + \cdots + s_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + s_k\mathbf{x}_k) = \\ &= s_1\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + s_2\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) + \cdots + s_{k-1}\mathcal{A}(\mathbf{x}_{k-1}) + s_k\mathcal{A}(\mathbf{x}_k) = \\ &= s_1t_1\mathbf{x}_1 + s_2t_2\mathbf{x}_2 + \cdots + s_{k-1}t_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + s_k t_k\mathbf{x}_k.\end{aligned}$$

Итак,

$$s_1t_1\mathbf{x}_1 + s_2t_2\mathbf{x}_2 + \cdots + s_{k-1}t_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + s_k t_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \quad (3)$$

С другой стороны, умножая обе части равенства (2) на t_k , получаем, что

$$s_1t_k\mathbf{x}_1 + s_2t_k\mathbf{x}_2 + \cdots + s_{k-1}t_k\mathbf{x}_{k-1} + s_k t_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Вычитая равенство (4) из (3), получаем, что

$$s_1(t_1 - t_k)\mathbf{x}_1 + s_2(t_2 - t_k)\mathbf{x}_2 + \cdots + s_{k-1}(t_{k-1} - t_k)\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{0}.$$

По предположению индукции векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ линейно независимы.

Следовательно, $s_1(t_1 - t_k) = s_2(t_2 - t_k) = \cdots = s_{k-1}(t_{k-1} - t_k) = 0$.

Поскольку скаляры $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k$ попарно различны, получаем, что $s_1 = s_2 = \cdots = s_{k-1} = 0$. Из (2) вытекает теперь, что $s_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$. Учитывая, что $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}$ (поскольку вектор \mathbf{x}_k — собственный), получаем, что $s_k = 0$.

Итак, если выполнено равенство (2), то $s_1 = s_2 = \cdots = s_{k-1} = s_k = 0$.

Следовательно, векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k$ линейно независимы.

Пусть \mathcal{A} — линейный оператор, действующий в векторном пространстве V над полем F . Зафиксируем некоторый базис пространства V и обозначим через A матрицу оператора \mathcal{A} в этом базисе. Для произвольного вектора $x \in V$ обозначим через X столбец его координат в выбранном базисе. В силу леммы о замене координат вектора (см. § 29) равенство (1) равносильно матричному равенству $AX = tX$. Последнее равенство можно переписать в виде $AX = tEX$, где E — единичная матрица того же порядка, что и A . Следовательно, $AX - tEX = O$, где O — нулевой столбец. Последнее равенство можно переписать в виде

$$(A - tE)X = O. \quad (5)$$

Мы получили матричную запись системы линейных уравнений, основная матрица которой содержит параметр t . Эта система крамеровская (так как ее основная матрица — квадратная) и однородная. Очевидно, что

- *собственными векторами оператора \mathcal{A} являются ненулевые решения системы (5) и только они;*
- *собственными значениями оператора \mathcal{A} являются те значения параметра t , при которых система (5) имеет ненулевые решения, и только они.*

Используя признак существования ненулевого решения крамеровской системы (см. § 9), получаем, что справедливо следующее

Предложение о характеристическом уравнении

Пусть V — векторное пространство над полем F , а A — линейный оператор в пространстве V .

- а) Скаляр t является собственным значением линейного оператора A тогда и только тогда, когда $t \in F$ и

$$|A - tE| = 0. \quad (6)$$

- б) Собственными векторами линейного оператора A , относящимися к его собственному значению t_0 , являются ненулевые решения системы линейных уравнений $(A - t_0E)X = 0$ и только они. □

В левой части равенства (6) стоит характеристический многочлен оператора \mathcal{A} (или матрицы A).

Определение

Уравнение (6) называется *характеристическим уравнением* оператора \mathcal{A} и матрицы A .

Таким образом, п. а) предложения о характеристическом уравнении можно переформулировать следующим образом:

- *собственными значениями линейного оператора являются корни его характеристического уравнения, лежащие в основном поле, и только они.*

Критерий приводимости оператора к диагональному виду (1)

В оставшейся части параграфа изучаются операторы, матрица которых в некотором базисе устроена очень просто.

Определение

Линейный оператор \mathcal{A} , действующий в пространстве V , называется *приводимым к диагональному виду* или *оператором простой структуры*, если существует базис пространства V , в котором матрица этого оператора диагональна.

Критерий приводимости оператора к диагональному виду

Линейный оператор \mathcal{A} в векторном пространстве V над полем F приводим к диагональному виду тогда и только тогда, когда в V существует базис, состоящий из собственных векторов этого оператора.

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица A оператора \mathcal{A} в базисе y_1, y_2, \dots, y_n является диагональной, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t_n \end{pmatrix}.$$

Тогда, по определению матрицы оператора в базисе, $\mathcal{A}(y_1) = t_1 y_1$, $\mathcal{A}(y_2) = t_2 y_2$, ..., $\mathcal{A}(y_n) = t_n y_n$. В силу замечания о нулевом векторе и базисе векторного пространства (см. § 23) векторы y_1, y_2, \dots, y_n — ненулевые. Следовательно, базис y_1, y_2, \dots, y_n состоит из собственных векторов оператора \mathcal{A} .

Достаточность. Предположим теперь, что базис y_1, y_2, \dots, y_n пространства V состоит из собственных векторов оператора \mathcal{A} , т. е. $\mathcal{A}(y_1) = s_1 y_1$, $\mathcal{A}(y_2) = s_2 y_2$, ..., $\mathcal{A}(y_n) = s_n y_n$ для некоторых скаляров $s_1, s_2, \dots, s_n \in F$. Тогда по определению матрицы оператора в базисе матрица оператора \mathcal{A} в базисе y_1, y_2, \dots, y_n имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно, оператор \mathcal{A} приводим к диагональному виду. □

Из доказательства критерия приводимости оператора к диагональному виду непосредственно извлекается следующая информация, полезная при решении задач.

- *Если пространство имеет базис, состоящий из собственных векторов линейного оператора A , то матрица оператора A именно в этом базисе диагональна и на ее диагонали стоят собственные значения, причем каждое собственное значение стоит столько раз, сколько имеется относящихся к нему линейно независимых собственных векторов. Если матрица линейного оператора A в некотором базисе диагональна, то именно этот базис состоит из собственных векторов оператора A .*

Достаточное условие приводимости оператора к диагональному виду

Пусть V — n -мерное векторное пространство над полем F , \mathcal{A} — линейный оператор в этом пространстве, а A — матрица оператора \mathcal{A} в некотором базисе. Если уравнение $|A - tE| = 0$ имеет n различных корней, лежащих в поле F , то оператор \mathcal{A} приводим к диагональному виду.

Доказательство. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_n \in F$ — различные корни уравнения $|A - tE| = 0$. Они являются собственными значениями оператора \mathcal{A} . Для каждого собственного значения t_i зафиксируем собственный вектор u_i относящийся к t_i . По теореме о собственных векторах, относящихся к различным собственным значениям, векторы u_1, u_2, \dots, u_n линейно независимы. В силу замечания о базисах n -мерного пространства (см. § 23) они образуют базис пространства V . Для завершения доказательства остается сослаться на критерий приводимости оператора к диагональному виду. □

Приведем пример, показывающий как линейные операторы и их собственные значения возникают в приложениях линейной алгебры. Речь пойдет о математическом моделировании экономических процессов.

Рассмотрим n технологических процессов (или n предприятий) p_1, p_2, \dots, p_n , которые производят n продуктов G_1, G_2, \dots, G_n при следующих ограничениях: каждый технологический процесс производит один и только один продукт и нет притока продуктов извне. Для удобства обозначений будем считать, что технологический процесс p_i производит продукт G_i , где $i = 1, 2, \dots, n$.

Для производства продукта G_i в технологическом процессе p_i могут понадобиться продукты G_1, G_2, \dots, G_n . Пусть a_{ij} — количество единиц продукта G_i , необходимое для производства одной единицы продукта G_j . Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n называется **матрицей потребления**. Ясно, что A — матрица над полем \mathbb{R} , все элементы которой неотрицательны. Такие матрицы называются **неотрицательными**.

Зафиксируем некоторый временной интервал, скажем, год. Пусть в течение этого времени произведено x_i единиц продукта G_i , где $i = 1, 2, \dots, n$. Вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **вектором валового выпуска**. Векторы из пространства \mathbb{R}_n можно рассматривать как матрицы над \mathbb{R} размера $1 \times n$. Это позволяет говорить о **неотрицательных векторах**. Ясно, что вектор x — неотрицательный. Часть произведенной продукции расходуется в процессе производства. Эта часть описывается вектором $y = (y_1, y_2, \dots, y_i)$, где $y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Вектор y называется **вектором производственных затрат**. Через X обозначим столбец длины n , состоящий из элементов x_1, x_2, \dots, x_n , а через Y — столбец длины n , состоящий из элементов y_1, y_2, \dots, y_n . Переходя к матричным обозначениям, имеем $Y = AX$. Вектор $c = x - y$ предназначен для использования в непроеизводственной сфере и накопления. Он называется **вектором конечного потребления**. Столбец длины n , элементами которого являются компоненты вектора c , обозначим через C . Ясно, что $C = X - Y = X - AX$.

Основная задача, возникающая в планировании производства на наш временной интервал, формулируется следующим образом: при заданном векторе конечного потребления c найти необходимый вектор валового выпуска x . Другими словами, необходимо при заданных векторе c и матрице A найти хотя бы один неотрицательный вектор x , удовлетворяющий равенству $X - AX = C$ или

$$(E - A)X = C. \quad (7)$$

Это матричная запись системы линейных уравнений. Эта система с указанной интерпретацией матрицы A и столбцов X и C называется *простой линейной моделью производства*, а также *моделью межотраслевого баланса* или *моделью Леонтьева*. Решение $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ системы (7) называется *неотрицательным*, если $x_i^0 \geq 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Определение

Неотрицательная квадратная матрица A называется *продуктивной*, если для любого неотрицательного вектора x существует неотрицательное решение системы (7).

Следующее утверждение дает два критерия продуктивности матрицы. Мы не будем доказывать это утверждение, так как это выходит за рамки нашего курса.

Теорема о продуктивной матрице

Для неотрицательной квадратной матрицы A над полем \mathbb{R} следующие условия эквивалентны:

- 1) матрица A продуктивна;*
- 2) матрица $E - A$ обратима и матрица, обратная к $E - A$, неотрицательна;*
- 3) все корни характеристического уравнения матрицы A по модулю меньше единицы.*



В частности, если t — собственное значение продуктивной матрицы, то $|t| < 1$.

Из эквивалентности утверждений 1) и 2) теоремы о производительной матрице, критерия обратимости матрицы и теоремы Крамера вытекает

Следствие о производительной матрице

Если матрица A производительна, то система линейных уравнений (7) имеет единственное решение. □