

§ 26. Обратная матрица

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение

Пусть A — произвольная матрица. Матрица B называется *обратной к A* , если $AB = BA = E$, где E — единичная матрица. Если матрица, обратная к A , существует, то матрица A называется *обратимой*. Матрица, обратная к A , обозначается через A^{-1} .

В определении ничего не говорится о размерах матрицы A и обратной к ней матрицы.

Замечание о квадратности обратимой матрицы

Если матрица A обратима, то она является квадратной матрицей, а обратная к ней матрица является квадратной матрицей того же порядка, что и A .

Доказательство. Обозначим матрицу, обратную к A , через B . Пусть $A \in R^{m \times n}$, а $B \in R^{r \times s}$. Из существования произведения AB вытекает, что $n = r$, а из существования произведения BA — что $m = s$. Но тогда $AB \in R^{m \times m}$, а $BA \in R^{n \times n}$. Поскольку $AB = E = BA$, получаем, что $m = n$. Таким образом, A и B — квадратные матрицы порядка n . □

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема, первое утверждение которой называется *критерием обратимости матрицы*.

Теорема об обратной матрице

Пусть A — квадратная матрица.

- 1) Матрица, обратная к A , существует тогда и только тогда, когда матрица A невырождена.
- 2) Если матрица A невырождена, то матрица, обратная к A , единственна и может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^V)^T. \quad (1)$$

Доказательство. Предположим, что $|A| = 0$ и существует матрица B , обратная к A . Тогда $|AB| = |A| \cdot |B| = 0$ по теореме об определителе произведения матриц (см. § 25). С другой стороны, из определения обратной матрицы вытекает, что $|AB| = |E| = 1$. Полученное противоречие показывает, что если матрица, обратная к A , существует, то $|A| \neq 0$, т. е. матрица A невырождена.

Предположим теперь, что A невырождена, т. е. $|A| \neq 0$. Положим $B = \frac{1}{|A|} \cdot (A^\vee)^\top$. Докажем, что матрица B , обратна к A . В самом деле, из замечания о присоединенной матрице (см. § 25) вытекает, что

$$AB = A \cdot \left(\frac{1}{|A|} \cdot (A^\vee)^\top \right) = \frac{1}{|A|} \cdot A \cdot (A^\vee)^\top = \frac{1}{|A|} \cdot |A| \cdot E = E,$$

и, аналогично, $BA = E$. Итак, матрица B обратна к A . Тем самым мы, во-первых, завершили доказательство п. 1), так как установили, что матрица, обратная к невырожденной матрице, существует, а во-вторых доказали часть п. 2), не связанную с единственностью обратной матрицы. Осталось учесть, что единственность обратной матрицы в специальной проверке не нуждается, так как вытекает из общеалгебраических соображений, а именно, — из леммы об обратном элементе (см. § 4). \square

Из сказанного выше вытекает, что

- совокупность всех невырожденных квадратных матриц порядка n над полем F с операцией умножения матриц образует группу. Нейтральным элементом этой группы является единичная матрица порядка n .

Матрица B , обратная к A , должна удовлетворять двум равенствам: $AB = E$ и $BA = E$. Следующее утверждение показывает, что на практике достаточно проверять одно из них.

Лемма об определении обратной матрицы

Пусть A — квадратная матрица, а матрица B такова, что $AB = E$. Тогда матрица A обратима и $B = A^{-1}$.

Доказательство. В силу теоремы об определителе произведения матриц (см. § 25) $|A| \cdot |B| = |AB| = |E| = 1$. В частности, отсюда следует, что $|A| \neq 0$. Из теоремы об обратной матрице теперь вытекает, что матрица A обратима. Умножая обе части равенства $AB = E$ слева на A^{-1} , получим $A^{-1}(AB) = A^{-1}E$. Но $A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = EB = B$, а $A^{-1}E = A^{-1}$. Таким образом, $B = A^{-1}$. □

Свойства обратной матрицы

Если A и B — невырожденные квадратные матрицы одного и того же порядка над полем F , $t \in F$ и $t \neq 0$, то:

- 1) $(A^{-1})^{-1} = A$;
- 2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- 3) $(tA)^{-1} = \frac{1}{t} \cdot A^{-1}$;
- 4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
- 5) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Свойства 1) и 2) являются частными случаями общих свойств обратных элементов (см. § 4). Свойство 3) вытекает из леммы об определении обратной матрицы и того, что

$$(tA) \cdot \left(\frac{1}{t} \cdot A^{-1}\right) = \left(t \cdot \frac{1}{t}\right) \cdot (AA^{-1}) = 1 \cdot E = E.$$

Свойство 4) легко вытекает из формулы (1) и 1-го свойства определителей (см. § 8). Используя теорему об определителе произведения матриц из § 25, имеем $|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1$. Это доказывает свойство 5).

Один из способов вычисления обратной матрицы дает формула (1). Эту формулу удобно применять при $n = 2$: легко проверяется, что в этом случае она принимает следующий простой вид:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Но при больших n этот способ требует выполнения большого объема вычислений, который к тому же очень быстро растет с ростом порядка матрицы: если матрица A имеет порядок n , то необходимо сосчитать один определитель n -го порядка и n^2 определителей $(n - 1)$ -го порядка. На следующем слайде будет указан менее трудоемкий способ нахождения обратной матрицы. При этом способе не требуется вычислять ни одного определителя, а с ростом n объем необходимых вычислений растет медленно.

Алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований

Матрица, обратная к матрице A , есть не что иное, как решение уравнения $AX = E$, где A — невырожденная квадратная матрица. Из приведенного в § 25 алгоритма решения матричного уравнения вида $AX = B$ в случае невырожденной квадратной матрицы A вытекает

Алгоритм нахождения обратной матрицы

Пусть A — невырожденная квадратная матрица порядка n . Запишем матрицу $(A | E)$ размера $n \times 2n$. С помощью элементарных преобразований всей этой матрицы приведем ее левую часть (т. е. первые n столбцов) к единичному виду. В правой части (т. е. в последних n столбцах) полученной матрицы будет записана матрица A^{-1} .

Обратная матрица, системы линейных уравнений и матричные уравнения

Рассмотрим матричное уравнение вида $AX = B$, где A — невырожденная квадратная матрица. Умножив обе его части слева на матрицу A^{-1} (существующую в силу критерия обратимости матрицы), получим слева $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, а справа — $A^{-1}B$. Таким образом, рассматриваемое уравнение решается по формуле $X = A^{-1}B$. Аналогично проверяется, что уравнение вида $XA = B$, где A — невырожденная квадратная матрица, решается по формуле $X = BA^{-1}$, а уравнение вида $AXB = C$, где A и B — невырожденные квадратные матрицы — по формуле $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Особый интерес представляет первое из рассмотренных в предыдущем абзаце уравнений, т. е. уравнение $AX = B$, в случае, когда B (а значит и X) — матрица, состоящая из одного столбца. Как мы знаем, в этом случае $AX = B$ — это матричная запись системы линейных уравнений с основной матрицей A (см. § 6). Тот факт, что матрица A квадратна, означает, что эта система является крамеровской. Если $|A| \neq 0$, то по теореме Крамера система имеет единственное решение. В силу сказанного выше, это решение может быть найдено по формуле $X = A^{-1}B$.