§ 30. Образ и ядро линейного оператора

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V. *Образом* оператора $\mathcal{A}$ называется множество всех векторов $\mathbf{y} \in V$ таких, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ для некоторого $\mathbf{x} \in V$. *Ядром* оператора $\mathcal{A}$ называется множество всех векторов $\mathbf{x} \in V$ таких, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Образ оператора $\mathcal{A}$ обозначается через $\operatorname{Im} \mathcal{A}$, а его ядро — через $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

- Образ линейного оператора — это аналог известного из школьного курса понятия области изменения функции.
- Каждое из множеств $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ и $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ непусто. Для первого из них это очевидно, а для второго вытекает из того, что $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (см. § 29).

Замечание об образе и ядре

Пусть V — векторное пространство над полем F, а $\mathcal{A}$ — линейный оператор в V. Образ и ядро оператора $\mathcal{A}$ являются подпространствами в V. Если $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ — базис пространства V, то подпространство $\operatorname{Im} A$ *порождается векторами $\mathcal{A}(\mathbf{p}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{p}_2)$, …, $\mathcal{A}(\mathbf{p}_n)$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$, а $t \in F$. Тогда существуют векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ такие, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1$ и $\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_2$. Следовательно,

$$\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \quad \text{и} \quad t\mathbf{y}_1 = t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = \mathcal{A}(t\mathbf{x}_1).$$

Это означает, что $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2, t\mathbf{y}_1 \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$, и потому $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ — подпространство в V. Далее, пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$, а t — вновь произвольный скаляр. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathcal{A}(t\mathbf{x}_1) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = t \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Это означает, что $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, t\mathbf{x}_1 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$, и потому $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ — подпространство в V. Если $\mathbf{x} \in V$ и $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе P, то

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + \cdots x_n\mathbf{p}_n) = x_1\mathcal{A}(\mathbf{p}_1) + x_2\mathcal{A}(\mathbf{p}_2) + \cdots + x_n\mathcal{A}_n(\mathbf{p}_n).$$

Следовательно, $\operatorname{Im} \mathcal{A} \subseteq \langle \mathcal{A}(\mathbf{p}_1), \mathcal{A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{p}_n) \rangle$. Обратное включение очевидно, поскольку $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i) \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \langle \mathcal{A}(\mathbf{p}_1), \mathcal{A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{p}_n) \rangle$. $\square$

Замечание об образе и ядре позволяет говорить о размерности и базисе образа и ядра оператора $\mathcal{A}$.

Определение

Размерность образа линейного оператора $\mathcal{A}$ называется *рангом* $\mathcal{A}$ и обозначается через $r(\mathcal{A})$, а размерность ядра оператора $\mathcal{A}$ называется *дефектом* $\mathcal{A}$ и обозначается через $d(\mathcal{A})$.

Замечание о ранге линейного оператора

Пусть V — векторное пространство, $\mathcal{A}$ — линейный оператор в V, а P — базис пространства V. Тогда ранг оператора $\mathcal{A}$ равен рангу матрицы A_P.

Доказательство. Из замечания об образе и ядре и определения матрицы линейного оператора в базисе вытекает, что пространство $\operatorname{Im} A$ порождается векторами-столбцами матрицы A_P. Следовательно, ранг оператора равен рангу этой матрицы по столбцам. $\square$

Теорема о ранге и дефекте

Пусть V — векторное пространство, а $\mathcal{A}$ — линейный оператор в V. Тогда сумма ранга и дефекта оператора $\mathcal{A}$ равна размерности пространства V.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in V$. Ясно, что $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $A_P[\mathbf{x}]_P = [\mathcal{A}(\mathbf{x})]_P = O$, где O — нулевой столбец. Иными словами, пространство $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ совпадает с пространством решений однородной системы линейных уравнений $A_P[\mathbf{x}]_P = O$. Положим $r = r(A_P)$. В силу теоремы о размерности пространства решений однородной системы (см. § 28) $d(\mathcal{A}) = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = n - r$. Учитывая замечание о ранге линейного оператора, получаем, что $r(\mathcal{A}) + d(\mathcal{A}) = r + (n - r) = n$. $\square$

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве V, а A — матрица этого оператора в некотором базисе. Из замечания об образе и ядре и определения матрицы линейного оператора в базисе вытекает, что пространство $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ совпадает с пространством, порожденным векторами-столбцами матрицы A или, что то же самое, с пространством, порожденным векторами-строками матрицы $A^\top$. Учитывая алгоритм нахождения базиса подпространства, изложенный в § 24, мы получаем следующий

Алгоритм нахождения базиса и размерности образа линейного оператора

Пусть V — векторное пространство над полем F, $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ — базис пространства V, а A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе P. Чтобы найти базис подпространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, надо привести к ступенчатому виду матрицу $A^\top$. В ненулевых строках полученной матрицы будут записаны координаты базисных векторов пространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ в базисе P, а число этих строк равно размерности пространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$.

Из доказательства теоремы о ранге и дефекте вытекает, что базис ядра линейного оператора $\mathcal{A}$ — это фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений, основная матрица которой есть матрица этого оператора в некотором базисе. Алгоритм нахождения фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений указан в § 28. Поэтому нет необходимости в том, чтобы специально формулировать алгоритм нахождения базиса и размерности ядра линейного оператора.

Приведем еще один алгоритм нахождения базисов и размерностей образа и ядра оператора $\mathcal{A}$. Его преимуществом является то, что он позволяет найти базисы образа и ядра *одновременно*. Кроме того, этот алгоритм будет существенно использоваться в дальнейшем при решении более сложных задач. Алгоритм найден сравнительно недавно (в 1991 г.), его автором является новосибирский математик В. А. Чуркин.

Алгоритм Чуркина

Пусть V — векторное пространство над полем F, $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ — базис пространства V, а A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе P. Запишем матрицу $B = (E \mid A^\top)$ размера $n \times 2n$. Элементарными преобразованиями всей этой матрицы (без использования перестановки столбцов) приведем ее правую часть к ступенчатому виду. Полученную матрицу обозначим через $C = (C_1 \mid C_2)$, где C_2 — ступенчатая матрица, полученная на месте матрицы $A^\top$. Тогда:

(i) ненулевые строки матрицы C_2 содержат координаты базисных векторов пространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ в базисе P;

(ii) строки матрицы C_1, продолжениями которых в матрице C_2 являются нулевые строки, содержат координаты базисных векторов пространства $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ в базисе P.

Утверждение (i) немедленно вытекает из описанного ранее алгоритма нахождения базиса образа и того факта, что в процессе преобразований левая и правая части матрицы не «перемешиваются». Обоснуем утверждение (ii). Для всякого $i = 1, 2, \ldots, m$ вектор $\mathbf{p}_i$ имеет в базисе P координаты $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где 1 стоит на i-м месте. Поэтому можно считать, что единичная матрица, стоящая в левой части матрицы B, есть матрица, в которой по строкам записаны координаты векторов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ в базисе P. Вспоминая определение матрицы линейного оператора, получаем, что в правой части i-й строки матрицы B стоят координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i)$ в базисе P. Итак, i-ю строку матрицы B можно записать в виде $\left([\mathbf{p}_i]_P^\top \,\middle|\, \left[\mathcal{A}(\mathbf{p}_i)\right]_P^\top\right)$, т. е. в виде

$$\left([\mathbf{v}]_P^\top \,\middle|\, \left[\mathcal{A}(\mathbf{v})\right]_P^\top\right), \tag{1}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{p}_i$. При элементарных преобразованиях матрицы мы будем получать строки вида

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j [\mathbf{p}_j]_P^\top \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[\mathcal{A}(\mathbf{p}_j)\right]_P^\top\right).$$

Преобразуем левую и правую части строки такого вида:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j [\mathbf{p}_j]_P^\top = \left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{p}_j\right]_P^\top,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[\mathcal{A}(\mathbf{p}_j)\right]_P^\top = \sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_j \mathcal{A}(\mathbf{p}_j)\right]_P^\top =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\mathcal{A}(\lambda_j \mathbf{p}_j)\right]_P^\top = \mathcal{A}\Bigl(\sum_{j=1}^{n} \left(\left[\lambda_j \mathbf{p}_j\right]_P^\top\right)\Bigr).$$

Сравнивая полученные выражения, мы видим, что после элементарных преобразований мы вновь получаем строки вида (1). Поэтому строки матрицы C_1, продолжения которых в C_2 являются нулевыми, суть строки координат векторов из пространства $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ в базисе P. Матрица C_1 получена с помощью элементарных преобразований из единичной матрицы. Поскольку элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, $r(C_1) = r(E) = n$. В частности, система всех строк матрицы C_1 линейно независима. Тогда ее подсистема, состоящая из тех строк, продолжения которых в C_2 являются нулевыми, также линейно независима (см. лемму о подсистеме линейно независимой системы векторов в § 22).

Учитывая теорему о ранге и дефекте, получаем, что число этих строк равно

$$n - r(A_P^T) = n - r(A_P) = n - r(\mathcal{A}) = d(\mathcal{A}) = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}.$$

В силу замечания о базисах n-мерного пространства (см. § 23) они образуют базис пространства $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Это завершает обоснование алгоритма Чуркина.

Как уже отмечалось в § 29, линейный оператор является эндоморфизмом векторного пространства. Следующее утверждение показывает, когда этот эндоморфизм является автоморфизмом.

Критерий автоморфности линейного оператора

Для линейного оператора $\mathcal{A}$ в векторном пространстве V следующие условия эквивалентны:

1) $\mathcal{A}$ — *автоморфизм пространства* V*;*

2а) $\mathcal{A}$ — *сюръективное отображение из* V *на себя;*

2б) $\operatorname{Im} \mathcal{A} = V$;

2в) $r(\mathcal{A}) = \dim V$;

3а) $\mathcal{A}$ — *инъективное отображение из* V *в себя;*

3б) $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$;

3в) $d(\mathcal{A}) = 0$;

4а) *матрица оператора* $\mathcal{A}$ *в произвольном базисе невырождена;*

4б) *матрица оператора* $\mathcal{A}$ *в некотором базисе невырождена.*

Доказательство. Эквивалентность условий 2а) и 2б) очевидна, а условия 2б) и 2в) эквивалентны в силу определения ранга оператора.

Условия 3б) и 3в) эквивалентны в силу определения дефекта оператора. Докажем эквивалентность условий 3а) и 3б).

3а) $\Longrightarrow$ 3б). Если оператор $\mathcal{A}$ инъективен, то $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ для любого ненулевого вектора $\mathbf{x} \in V$, и потому $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$.

3б) $\Longrightarrow$ 3а). Пусть $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$. Предположим, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{y})$ для некоторых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, и потому $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Следовательно, $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, т. е. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Это означает, что оператор $\mathcal{A}$ инъективен.

Из теоремы о ранге и дефекте вытекает эквивалентность условий 2в) и 3в). С учетом сказанного выше, мы доказали эквивалентность условий 2а)–2в) и 3а)–3в).

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2а) очевидна. В силу эквивалентности условий 2а) и 3а), импликация 2а) $\Longrightarrow$ 1) эквивалентна тому, что из одновременного выполнения условий 2а) и 3а) вытекает 1), а это следует из определений автоморфизма и линейного оператора. Это доказывает, что условие 1) эквивалентно условиям 2а)–2в) и 3а)–3в).

Импликация 4а) $\Longrightarrow$ 4б) очевидна.

4б) $\Longrightarrow$ 4а). Пусть A и B — матрицы оператора $\mathcal{A}$ в двух разных базисах и $|A| \neq 0$. Тогда существует невырожденная квадратная матрица T такая, что $B = T^{-1}AT$. Следовательно, $|B| = |T^{-1}AT| = |T^{-1}| \cdot |A| \cdot |T| \neq 0$.

Для завершения доказательства достаточно убедиться, например, в эквивалентности условий 2в) и 4а).

2в) $\Longrightarrow$ 4а). Пусть $\mathcal{A}$ — автоморфизм пространства V, а A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе. По условию $r(\mathcal{A}) = \dim V$, а согласно замечанию о ранге линейного оператора $r(\mathcal{A}) = r(A)$. Итак, $r(A) = \dim V$, т. е. ранг матрицы A совпадает с ее порядком. В частности, ранг A по минорам равен порядку матрицы A. Следовательно, $|A| \neq 0$, т. е. матрица A невырождена.

4а) $\Longrightarrow$ 2в). Пусть A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе. По условию $|A| \neq 0$. Следовательно, ранг A по минорам равен порядку матрицы A. Иными словами, $r(A) = \dim V$. Учитывая замечание о ранге линейного оператора, получаем, что $r(\mathcal{A}) = \dim V$. $\square$