תרגיל בית מס' 1.א

קבוצה 48

שאלה 1

לחברת "התופח" מכונה למילוי קמח בשקיות. ידוע שכמות הקמח בשקיות מתפלגת נורמלית עם תוחלת 1000 גרם וסטיית תקן 20 גרם.

א. מה ההסתברות שמשקל שקית קמח שנבחרה באופן מקרי יהיה נמוך מ-995 ג'? **(0.4013)**

ב. מה ההסתברות שמשקלן הממוצע של 25 שקיות קמח שנבחרו באופן מקרי יהיה נמוך מ-995 גרם? **(0.1056)**

ג. בהמשך ל-ב': מצאו חסמים a ו-b כך ש-95% מהממוצעים נמצאים ביניהם. **(992.16, 1007.84)**

ד. מהו גודל המדגם המינימלי שיבטיח בהסתברות 0.9 לפחות שממוצע המדגם לא יסטה מהתוחלת ביותר מ-5 גרם? **(44)**

1. א

$X_i \sim N(1000, 20^2)$

$$P(x \leq 995) = \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{995-1000}{20}\right) = 1 - \phi(0.25) = 1 - 0.5987 = 0.4013$$

טבלה

ב

$n = 25$

כיוון ש X_i עצמו מתפלג נורמלית, משפט הגבול המרכזי מתקיים ללא תלות בתנאי הגודל וגם ממוצע המדגם מתפלג נורמלית באופן הבא:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \sim N(1000, 16)$$

$$P(\bar{X} \leq 995) = \phi\left(\frac{995-1000}{\sqrt{16}}\right) = \phi(-1.25) = 1 - \phi(1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$$

ג

כיון בין החסמים יש 95% וה 5% הנותרים מתחלקים שווה בשווה בין הזנבות, אז לכל אחד מהזנבות הוא 2.5%.

ההסתברות המצטברת עד b (חסם עליון) היא 97.5% ולכן:

$$P(\bar{x} \leq b) = 0.975 \rightarrow \phi\left(\frac{b-1000}{\sqrt{16}}\right) = 0.975$$

$$\frac{b-1000}{\sqrt{16}} = z_{0.975} = 1.9675 \longrightarrow b = 1000 + 4 \cdot 1.9675 = 1007.87$$

מסימטריה, a נמצא בדיוק אותו מספר של סטיות תקן, רק משמאל לתוחלת:

$$a = 1000 - 4 \cdot 1.9675 = 992.13$$

3

$n = ?$ $\quad \bar{X} \sim N\left(1000, \frac{20^2}{n}\right)$

כדי להבטיח סטיה של עד 5 גרם מהתוחלת בהסתברות 90%, 10% הנותרים מתחלקים באופן זהה בין הזנבות. ההסתברות לכל אחד מהזנבות היא 5%. ולכן עלינו למצוא:

$$\phi\left(\frac{995-1000}{\sqrt{20^2/n}}\right) = 0.95 \rightarrow \frac{995-1000}{\sqrt{20^2/n}} = 1.645 \rightarrow \frac{-5}{1.645} = \sqrt{\frac{400}{n}} \quad /(\,)^2$$

$$\rightarrow n = \frac{400}{9.239} = 43.3$$

לכן גודל המדגם המינימלי הוא $n = 44$.

<u>שאלה 2</u>

חברת התעופה ״רקיע״ מעוניינת לדעת מהו משקלו הממוצע של המטען האישי של כל נוסע. סטטיסטיקאי החברה הציע לבדוק מדגם מקרי של n נוסעים ולחשב את המשקל הממוצע של מטעניהם. הערכת החברה היא שסטיית התקן של משקל המטען היא 5 ק״ג. הניחו שהמשקלים מתפלגים נורמלית עם תוחלת μ. מה צריך להיות n כך שבהסתברות 0.95 לא יסטה ממוצע המדגם מממוצע האוכלוסייה ביותר מ-0.49 ק״ג?

(400)

2. משקל המטען. $X_i \sim N(\mu, 5^2)$. ממוצע האוכלוסייה $= \mu$

כיוון ש X_i עצמו מתפלג נורמלית, משפט הגבול המרכזי מתקיים ללא תלות בגודל ומכאן שממוצע המדגם מתפלג נורמלית.

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{5^2}{n}\right)$$

5% מתחלקים בין הזנב הימני לשמאלי באופן שווה. ההסתברות לכל זנב היא 2.5%, לכן:

$$P(\bar{X} \le \mu - 0.49) = 0.975 \rightarrow \Phi\left(\frac{\mu - 0.49 - \mu}{\sqrt{5^2/n}}\right) = 0.975$$

$$\frac{\mu - 0.49 - \mu}{\sqrt{5^2/n}} = 1.96 \rightarrow \frac{-0.49}{1.96} = \sqrt{\frac{25}{n}} \quad /()^2$$

$$\rightarrow n = \frac{25}{\frac{1}{16}} = 400$$

תרגיל בית מס' 1.ב

שאלה 2 - מבוחן

להלן פונקצית ההסתברות של משתנה מקרי:

$$P(X=x)=\begin{cases}\theta & x=-1\\ (1-\theta)^2\theta^x & x=0,1,2,.....\end{cases}$$ כאשר $0<\theta\le 1$.

מצאו אומד נראות מקסימלית ל- θ על סמך תצפית אחת.

(עפ"י החלוקה למקרים: $\hat{\theta}=1$ **או** $\hat{\theta}=\frac{x}{x+2}$**)**

2. הפרמטר: θ

עבור $x=0,1,2...$:

$$L(\theta)=(1-\theta)^2\cdot\theta^x$$

נמצא מקסימום לפונקצית הנראות $L(\theta)$

$$\ln(L(\theta))=\ln((1-\theta)^2\cdot\theta)=2\cdot\ln(1-\theta)+x\cdot\ln(\theta)$$

נגזור:

$$(\ln(L(\theta)))'=-\frac{2}{1-\theta}+\frac{x}{\theta}=0$$

$$-2\theta+x-\theta x=0$$

$$\theta(-2-x)=-x$$

אומד הנראות המתקבל:

$$\hat{\theta}=\frac{x}{2+x}$$

עבור $x=-1$:

$$L(\theta)=\theta$$

$$\ln(L(\theta))=\ln(\theta)$$

$$(\ln(L(\theta)))'=\frac{1}{\theta}$$

$$\theta=1$$

פונקצית הנראות $L(\theta)$ מקבלת את ערכה המקסימלי כאשר

$$\hat{\theta}=1$$

שאלה 4

X משתנה מקרי בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

$$P(X=x)=\begin{cases}ax+b & x=1,2,3,4\\ 0 & else\end{cases}$$

א. רשום את פונקציית ההסתברות של X באופן מפורש ומצא קשר בין a ל-b.

ב. מצא ל-a אומד בשיטת המומנטים על סמך מדגם מקרי של n תצפיות.

ג. במדגם מקרי של 2 תצפיות התקבלו הערכים 1 ו-3. מצא <u>אומדן</u> נראות מקסימלית ל-a. **(-1/6)**

4. <u>א</u>

X	1	2	3	4
P(x)	a+b	2a+b	3a+b	4a+b

$P(X_1=x_1)=a\cdot 1+b$

$P(X_2=x_2)=2a+b$

$P(X_3=x_3)=3a+b$

$P(X_4=x_4)=4a+b$

$$\Sigma P\cdot X = a+b+4a+2b+9a+3b+16a+4b=30a+10b$$

$$\Sigma p = a+b+2a+b+3a+b+4a+b=10a+4b=1$$

כלומר: $a=\dfrac{1-4b}{10}$ $\quad b=\dfrac{1-10a}{4}$

$$P(x_i)=\begin{cases}ax_i+\frac{1}{4}-2.5a & x=1,2,3,4\\ 0\end{cases}$$

<u>ב</u> X מ״מ בדיד. פרמטר: a

מומנט ראשון

$$E(x)=\bar{X}$$

$$E(x)=\sum_{i=1}^{4}X_i\cdot P_x(x)=X_1\cdot P_1+X_2\cdot P_2+X_3\cdot P_3+X_4\cdot P_4$$

$$=(a+b)\cdot 1+(2a+b)\cdot 2+3\cdot(3a+b)+4\cdot(4a+b)=30a+10b$$

$$\bar{X}=30a+10b\rightarrow\bar{X}-10b=30a\qquad\hat{a}=\frac{\bar{X}-10b}{30}$$

נציב את b ונקבל:

$$\bar{X}-2.5(1-10a)=30a\Rightarrow\bar{X}-2.5=5a\Rightarrow\hat{a}=\frac{\bar{X}}{5}-\frac{1}{2}$$

ג תצפיות המדגם: 3, 1, $n=2$ תצפיות

$$L(a) = \prod_{i=1}^{n} \left(a(x_i - 2.5) + \frac{1}{4}\right) = \left(a(x_i - 2.5) + \frac{1}{4}\right)^n$$

$n=2$ פריטים במדגם:

$$L(a) = \left(a\left(\sum_{i=1}^{2} x_i - 2.5\right) + \frac{1}{4}\right)^2 = a^2\left(\sum_{i=1}^{2} x_i - 2.5\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot a\left(\sum_{i=1}^{2} x_i - 2.5\right) + \frac{1}{16}$$

$$\frac{\partial(L(a))}{\partial a} = 2a\left(\sum_{i=1}^{2} x_i - 2.5\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{2} x_i - 2.5\right) = 0$$

$$\hat{a} = \frac{-1}{4\sum x_i - 10}$$

כדי למקסם את פונ' הנראות נרצה a מקסימלי.

האומדן המתקבל:

$$a = \frac{-1}{4\cdot 4 - 10} = -\frac{1}{6}$$

שאלה 5

מצא אומד ל- θ בשיטת המומנטים ובשיטת הנראות המקסימלית, על סמך מדגם מקרי בגודל n שנלקח מהאוכלוסייה הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2(x-1)}{\theta^2} & 1\le x\le \theta+1\\ 0 & else\end{cases}$$

(**מומנטים:** $\hat{\theta}=1.5\bar{X}-1.5$, **נראות מקסימלית:** $\hat{\theta}=\max(x_i)-1$)

<u>שיטת המומנטים</u>

רוצים לאמוד את θ (פרמטר), X מ״מ מייצג רציפות.

מומנט מסדר ראשון של המדגם:

$$\bar{X}=E(x)$$

$$\bar{X}=E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx$$

$$E(x)=\int_1^{\theta+1} x\cdot\frac{2(x-1)}{\theta^2}\,dx=\frac{2}{\theta^2}\int_1^{\theta+1}(x^2-x)\,dx=\frac{2}{\theta^2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^{\theta+1}$$

$$=\frac{2}{\theta^2}x^2\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\right)\Big|_1^{\theta+1}=\frac{2}{\theta^2}\left((\theta+1)^2\left(\frac{1}{3}(\theta+1)-\frac{1}{2}\right)--\frac{1}{6}\right)$$

$$=\frac{2}{\theta^2}\left((\theta^2+2\theta+1)\left(\frac{\theta}{3}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6}\right)$$

$$=\frac{2}{\theta^2}\left(\frac{\theta^3}{3}-\frac{\theta^2}{6}+\frac{1}{3}\theta-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\theta^2-\frac{1}{3}\theta+\frac{1}{6}\right)$$

$$=\frac{2}{\theta^2}\left(\frac{1}{3}\theta^3+\frac{\theta^2}{2}\right)=\frac{2}{3}\theta+1=\bar{X}$$

נבודד את θ:

$$\theta=\frac{3}{2}\bar{X}-\frac{3}{2}$$

$$\hat{\theta}=\frac{3\bar{X}-3}{2}=1.5\bar{X}-1.5$$

שיטת הנראות המקסימלית:

n פריטים במדגם.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2(x-1)}{\theta^2} = \frac{2^n \cdot \prod_{i=1}^{n}(x_i-1)}{\theta^{2n}}$$

$$\ln(L(\theta)) = n \cdot \ln 2 + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i-1) - 2n \cdot \ln\theta$$

$$\frac{\partial \cdot \ln(L(\theta))}{\partial\theta} = 0 \quad \frac{-2n}{\theta} \quad < 0$$

θ חיובית כי נתון $\theta>1$ ולכן הנגזרת שלילית תמיד (לא מתאפסת).

ערך המקסימום שלה יתקבל כאשר θ מינימלי. נתון כי $1 \le X \le \theta+1$

ואז $X-1 \le \theta$ נרצה X מקסימלי ולכן נקבל:

$$\hat{\theta} = max(x_i) - 1$$