בוחן מס' 3

① הוכח כי אם $h: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מחזורית עם מחזור L אזי לכל $k\in\mathbb{N}$ גם kL מחזור של h.

נניח ש- $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מחזורית עם מחזור L ויהי $k\in\mathbb{N}$. מתקיים ש-

$$h(x+kL) = h(x+L+(k-1)L) \overset{\text{h מחזורית עם מחזור L}}{=} h(x+(k-1)L) = \dots = h(x+1\cdot L) = h(x)$$

$$h(x+kL) = h(x)$$

לכל $k\in\mathbb{N}$, kL מחזור של h. //

② $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

א. הוכח שאם f,g מחזוריות עם מחזור שהוא מספר טבעי אזי גם $f+g$ מחזורית עם מחזור שהוא מספר טבעי.

נוכיח זאת, יהיו f,g מחזוריות עם ש- $T_1\in\mathbb{N}$ מחזור של f ו- $T_2\in\mathbb{N}$ מחזור של f. מתקיים ש-

$$f(x) = f(x+T_1)$$
$$g(x) = g(x+T_2)$$

מכאן ש-

$$f+g(x) = f(x)+g(x) = f(x+T_1)+g(x+T_2) \overset{\text{מתרגיל 1}}{=} f(x+T_2\cdot T_1)+g(x+T_2\cdot T_1) \Rightarrow f+g(x) = f+g(x+T_1\cdot T_2)$$

$f+g$ מחזורית עם מחזור $T_1\cdot T_2$. //

ב. הוכח שאם f,g מחזוריות עם מחזור שהוא מספר טבעי אזי גם $f\cdot g$ מחזורית עם מחזור שהוא מספר טבעי.

נניח ש- f,g מחזוריות ויהיו $T_1\in\mathbb{N}$ מחזור של f ו- $T_2\in\mathbb{N}$ מחזור של g.

$$f(x)\cdot g(x) = f(x+T_1)\cdot g(x+T_2) \overset{\text{מתרגיל 1}}{=} f(x+T_1\cdot T_2)\cdot g(x+\overset{\text{כפל}}{T_2\cdot T_1}) \Rightarrow$$

$$f\cdot g(x) = f\cdot g(x+T_1T_2) \Rightarrow$$ $f\cdot g$ מחזורית עם מחזור $T_1\cdot T_2$ //

(3) הוכח שכל פונ' ב-$\mathbb{R}$ ניתנת להצגה כסכום של פונ' זוגית ופונ' אי זוגית.

פתרון: f פונ' $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נראה ש-

$$f(x)=\frac{f(x)+f(x)}{2}=\frac{f(x)+f(x)-f(-x)+f(-x)}{2}=$$

$$\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

נוכיח כי $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ פונ' זוגית:

יהא $x_0\in\mathbb{R}$ ונראה $-x_0\in\mathbb{R}$. נציב x_0 בפונ' ונקבל $\frac{f(x_0)+f(-x_0)}{2}$. כעת נציב $-x_0$ בפונ' ונקבל $\frac{f(-x_0)+f(-(-x_0))}{2}=\frac{f(-x_0)+f(x_0)}{2}$

$\Downarrow$

קיבלנו כי הביטוי זהה ולכן $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ זוגית.

כעת נוכיח כי $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ אי זוגית:

יהא $x_0\in\mathbb{R}$ ו- $-x_0\in\mathbb{R}$. נציב x_0 בפונ' ונקבל $\frac{f(x_0)-f(-x_0)}{2}$.

כעת נציב $-x_0$ ונקבל $\frac{f(-x_0)-f(-(-x_0))}{2}=\frac{f(-x_0)-f(x_0)}{2}$ וקיבלנו

$$\frac{f(x_0)-f(-x_0)}{2}=(-1)\cdot\left[\frac{f(-x_0)-f(x_0)}{2}\right] \rightarrow \text{הפונ' אי זוגית}$$

$\Downarrow$

$$f(x)=\overbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}^{\text{אי זוגית}}+\overbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}^{\text{זוגית}}$$

מורכבת מפונ' זוגית ואי זוגית.

(ב) הוכח כי אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ זוגית ואי זוגית אז $f(x)=0$ לכל $x\in\mathbb{R}$

נניח בשלילה, יהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ זוגית ואי זוגית כלומר:

$$\underbrace{f(x)=f(-x)}_{\text{זוגית}}\quad,\quad \underbrace{f(x)=-f(-x)}_{\text{אי-זוגית}}$$

$$f(x)=f(-x)=-f(-x)\Rightarrow f(-x)=-f(-x)$$

$\Downarrow$

$$2f(-x)=0\Leftrightarrow f(-x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \quad //$$

לזוגיות הפונ'

2. $f(x) = \tan\left(\frac{1}{x}\right) \quad , x \neq 0$

פו' אי זוגית

$$f(x) = \tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$$

פו' זוגית

$$\frac{\text{פו' אי זוגית}}{\text{פו' זוגית}} = \text{פו' אי זוגית}$$

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{-\sin\left(-\frac{1}{x}\right)}{\cos\left(-\frac{1}{x}\right)} = -\tan\left(-\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f(x)$$

אי זוגית.

משתמשים באי זוגיות של $\cos, \sin$

$$\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}+2\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}+2\pi\right)} = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}+\pi+\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}+\pi+\pi\right)} = \frac{\sin\left(\pi-\left(\frac{1}{x}+\pi+\pi\right)\right)}{-\cos\left(\pi-\left(\frac{1}{x}+\pi+\pi\right)\right)} =$$

מחזוריות $\cos, \sin$

$$\frac{\sin\left(-\pi-\frac{1}{x}\right)}{-\cos\left(-\frac{1}{x}-\pi\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{1}{x}+\pi\right)}{-\cos\left(\frac{1}{x}+\pi\right)} = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}+\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}+\pi\right)}$$

משתמשים באי זוגיות $\cos, \sin$

$\tan\left(\frac{1}{x}\right)$ מחזורית π.

$x \neq 0 \quad \frac{1}{x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

(3)

א. הוכח כי אם f,g אי זוגיות אז $f \cdot g$ זוגית.

הוכחה. נניח ש- $f,g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f,g אי זוגיות כלומר

$$f(x) = -f(-x), \quad g(x) = -g(-x)$$

נכפול את פונ'

$$f \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) = -f(-x) \cdot (-g(-x)) = f(-x) \cdot g(-x) = f \cdot g(-x)$$

מאי זוגיות.

$$f \cdot g(x) = f \cdot g(-x) \quad \text{זוגית} \ //$$

2. הוכח כי אם f אי זוגית ו- g זוגית אז $f \cdot g$ אי-זוגית.

בדומה לסעיף קודם $f,g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f אי-זוגית ו- g זוגית, כלומר

$$f(x) = -f(-x), \quad g(x) = g(-x)$$

נכפול את פונ'

$$f g(x) = f(x) \cdot g(x) = -f(-x) \cdot g(-x) = -f \cdot g(-x)$$

משתמשים באי זוגיות פונ'

$$f \cdot g(x) = -f \cdot g(-x) \ //$$

$f \cdot g$ אי-זוגית

ב. צ"ל שאם f אי זוגית אז $|f|$ זוגית.

נניח ש- f אי זוגית כלומר $f(x)=-f(-x)$ $\Leftarrow$

$$|f(x)|=|-f(-x)|=|f(-x)| \Rightarrow |f(x)|=|f(-x)| \rightarrow |f|$$

זוגית //