レポート 2

205713B 朝比奈太郎

pascal 分布の確率関数は、次式で定義されている。

$$P(X=k)=\frac{1}{1+\mu}(\frac{\mu}{1+\mu})^k \qquad (\mu>0, k=0,1,2,...)$$

確率変数であることを証明し、期待値と分散を求めよ。

Answer

確率変数である条件は、

$$0 <= P(X) <= 1 \text{ かつ } \sum P(X=k)=1$$

であることから、

$$0 <= \frac{1}{1+\mu}(\frac{\mu}{1+\mu})^k <= 1$$

となる。また、

$$p=\frac{1}{1+\mu},\ q^{k-1}=(\frac{\mu}{1+\mu})^k$$

とすると

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty} q^{k-1}p=p*\frac{1}{1-q}=1$$

となる。従って、与式は確率変数といえる。

確率分布が幾何分布に従うので、X の期待値は、

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty} kp^k(1-p)=(1-p)p*\sum_{k=0}^{\infty} k*p^{k-1}...(1)$$

である。右辺の総和を求めるために、関数 1/(1-p) のテーラ展開に着目すると、

$$\frac{1}{1-p}=1+p+p^2+...=\sum_{k=0}^{\infty} p^k$$

左辺の微分は、

$$(\frac{1}{1-p})'=\frac{1}{(1-p)^2}$$

であり、右辺の微分は、

$$(\sum_{k=0}^{\infty} p^k)'=\sum_{k=0}^{\infty} kp^{k-1}$$

であるので、

$$\frac{1}{(1-p)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} kp^{k-1}$$

となる。これを (1) に代入すると、

$$E[X] = (1-p)p\frac{1}{(1-p)^2} = \frac{p}{1-p}$$

また、分散は二乗期待値と期待値の二乗の差に等しいことから、求める分散を V(X) とすると,E(X) = 1/p より

$$V(X) = E[X^2] - \frac{1}{p^2}$$

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2(1-p)p^k = (1-p)p\sum_{k=0}^{\infty} k^2p^{k-1}$$

テイラー展開に対して、両辺を p について 2 回微分する。

$$\frac{2}{(1-p)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)p^{k-2}$$

両辺に p をかける。

$$\frac{2p}{(1-p)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)p^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2p^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} kp^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2p^{k-1} - \frac{1}{(1-p)^2}$$

よって、

$$E[X^2] = \frac{2p^2}{(1-p)^2} + \frac{p}{1-p}V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2p^2}{(1-p)^2} + \frac{p}{1-p} - \frac{p^2}{(1-p)^2} = \frac{p}{(1-p)^2}$$