影像處理 04 頻率域上的濾波

教師:許閔傑、蕭兆翔

助教:莊媞涵

目錄

- 頻率域基本概念
- 傅立葉變換
- 濾波器應用

低通

- 理想低通
- 巴特沃斯低通
- 高斯低通

高通

- 理想高通
- 巴特沃斯高通
- 高斯高通

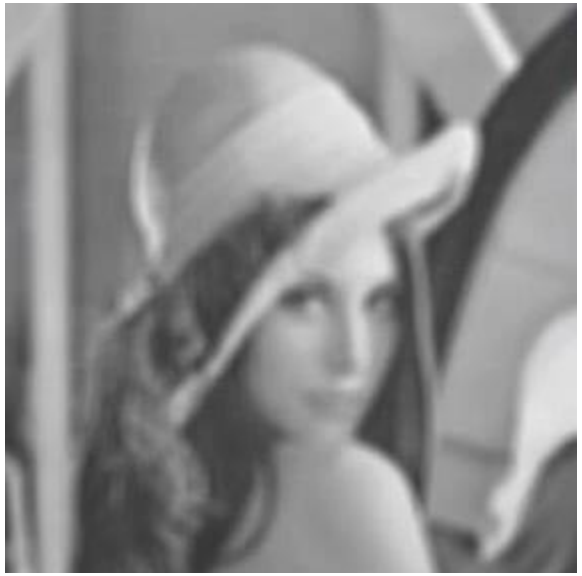
特殊

- 選擇性濾波
- 同態濾波(Homomorphic Filtering)

轉成頻率域濾波要幹嘛?

我空間濾波就可以做到

濾高頻



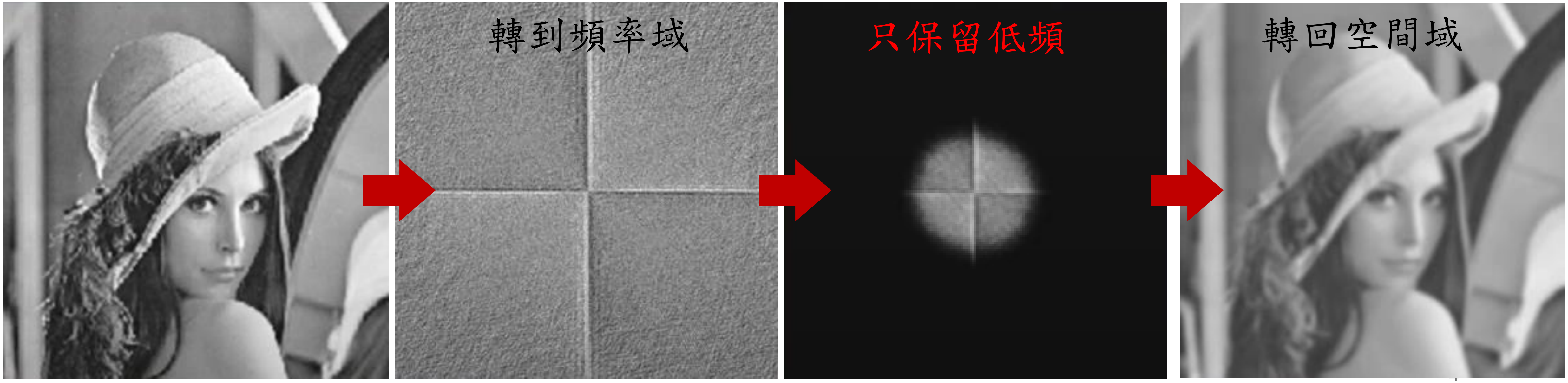
抓邊緣

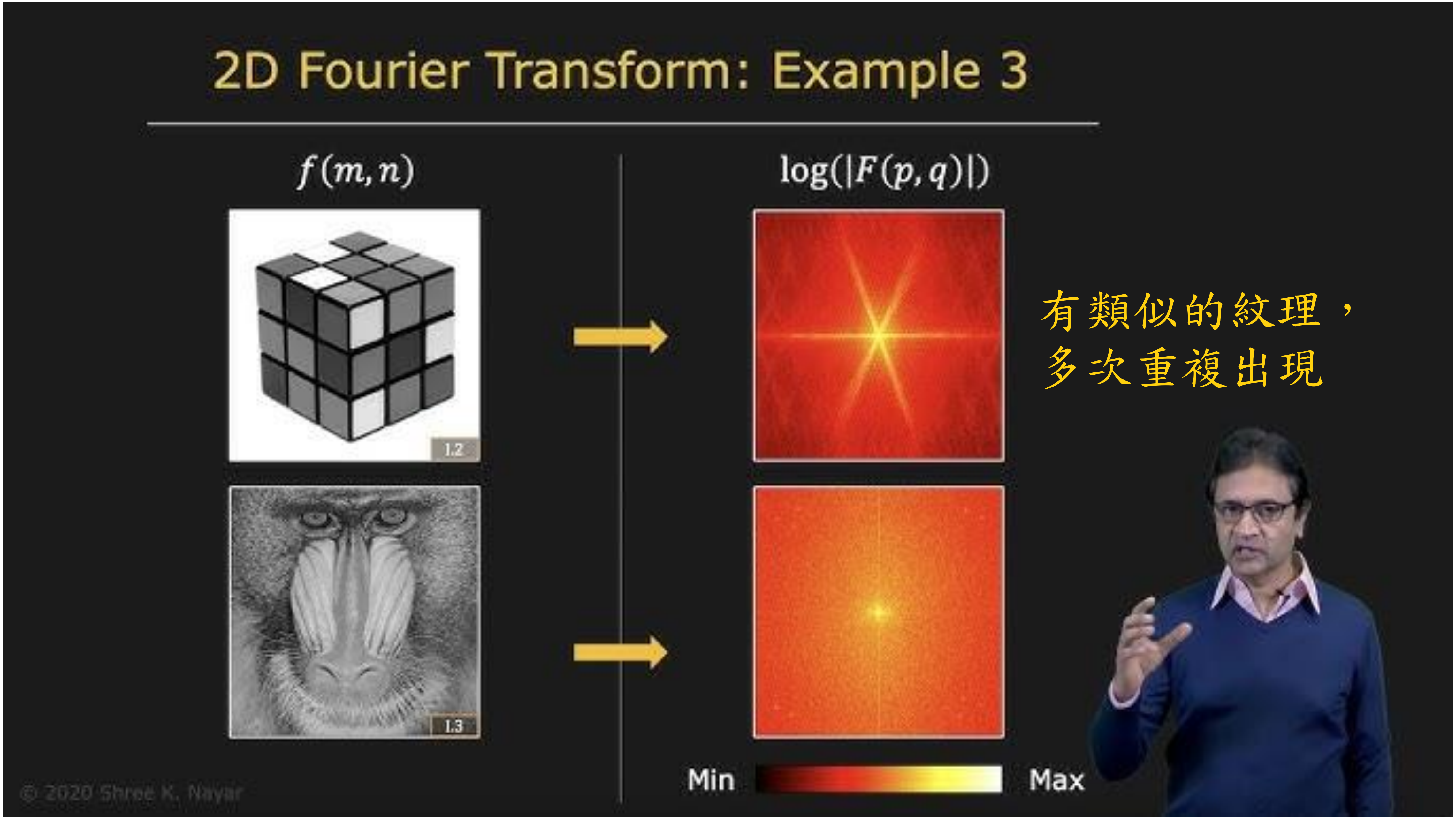
幹嘛那麼複雜要
用傅立葉轉成頻率域?

頻率域優點

- 快速計算濾波器
- 方便分析影像頻率
- 可選擇特定頻率去除

$$f * g \Leftrightarrow F \times G$$
$$f \times g \Leftrightarrow F * G$$





https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=OOu5KP3Gvx0

頻率域缺點

- 內存消耗大
- 複數運算有小小的誤差
- 處理不好會有Ringing artifacts

那我怎麼把影像從空間域轉到頻率域?

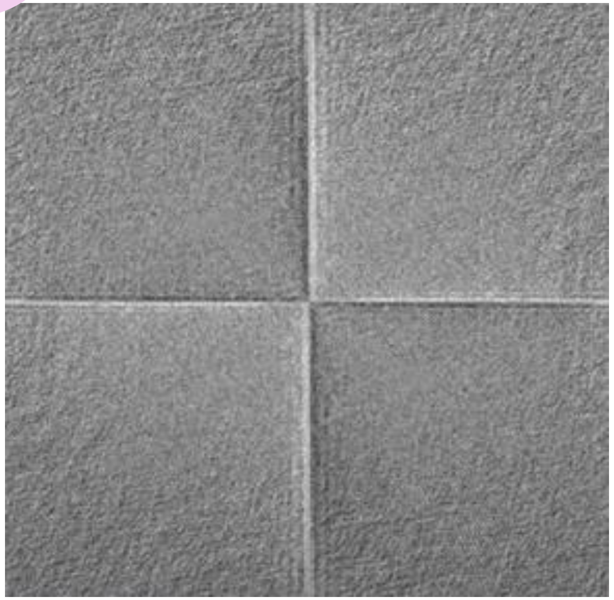
$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}\quad ?$$

這公式在寫甚麼?

空間域

怎麼轉?

頻率域



傅立葉 是誰?

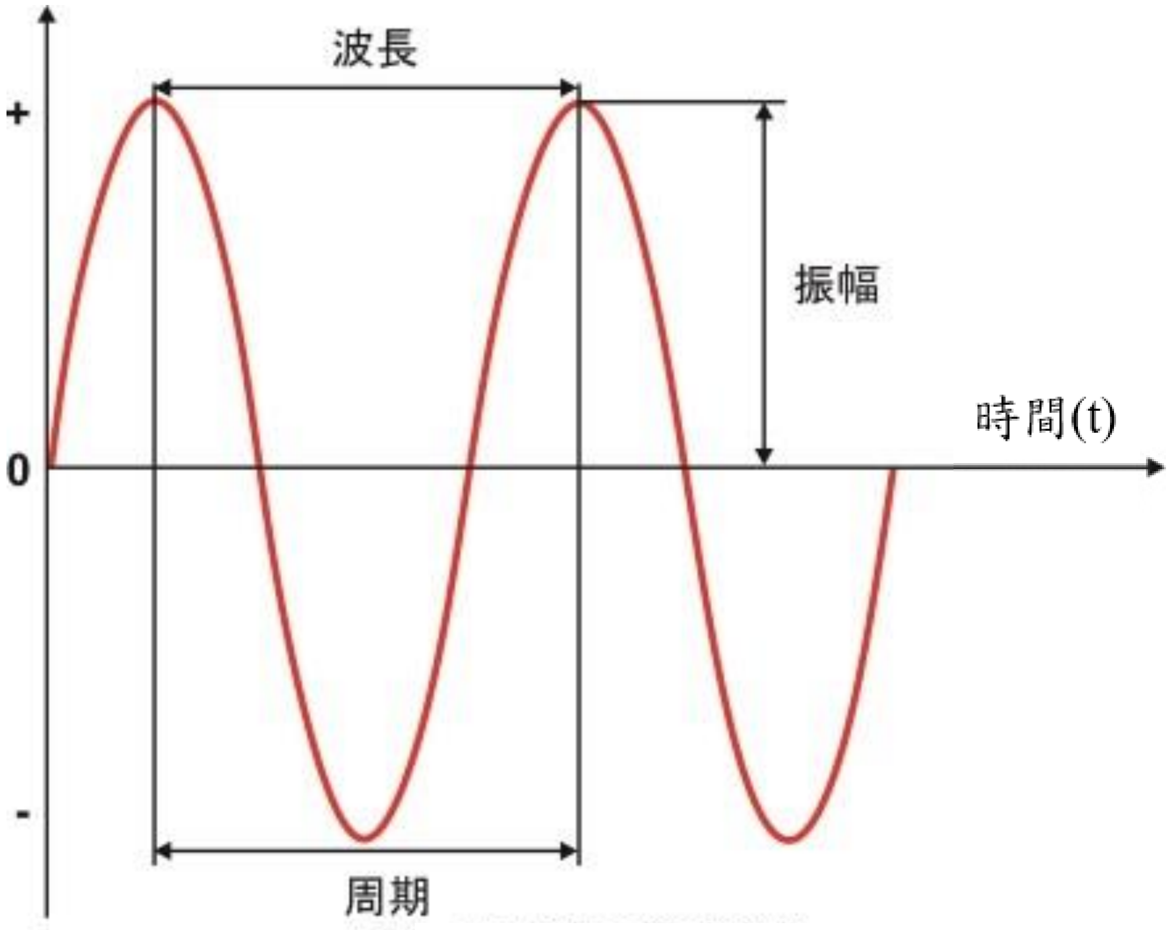
傅立葉是誰?

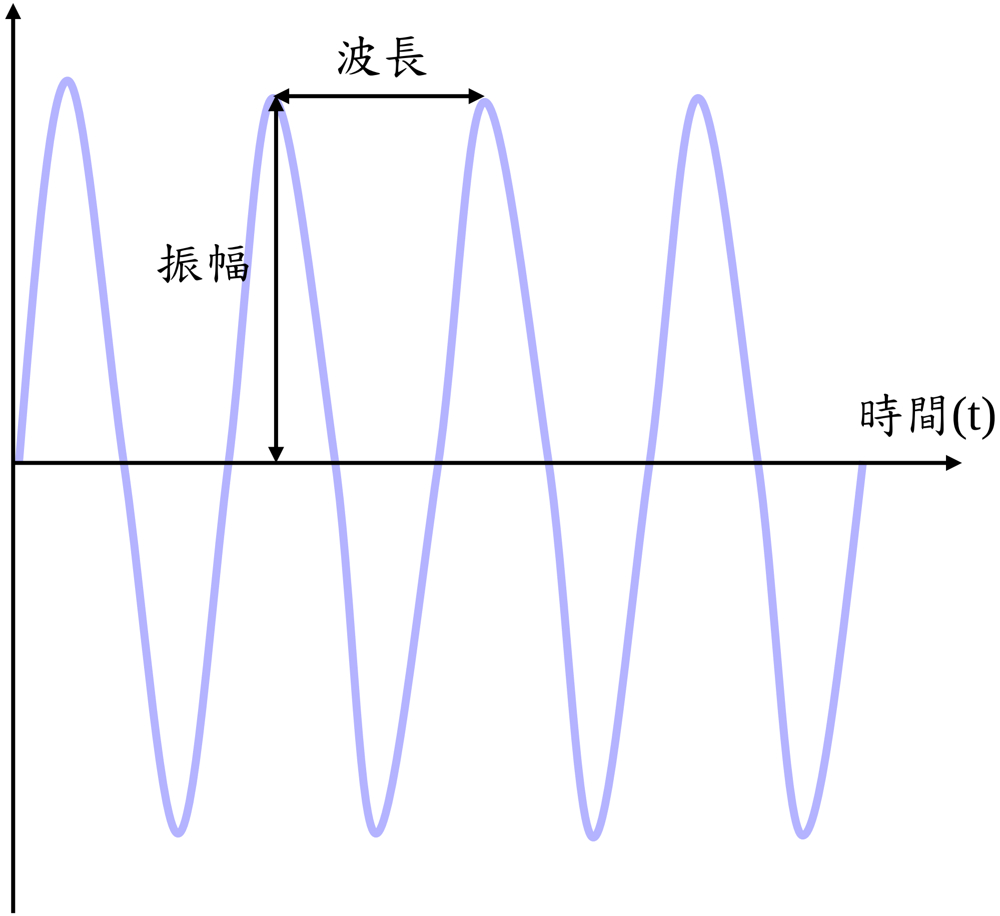
Joseph Fourier
約瑟夫·傅立葉
(1768–1830）

- 法國數學家和物理學家
  - 1822 年出版 《 Théorie analytique de la chaleur 》 (熱的解析理論)
  - 1878 年由不知名人物翻成英文出版
- (1)傅立葉級數
- (2)傅立葉變換

波長、振幅、頻率

頻率 $= \dfrac{1}{\text{波長}}$ = 波長越短 頻率越快

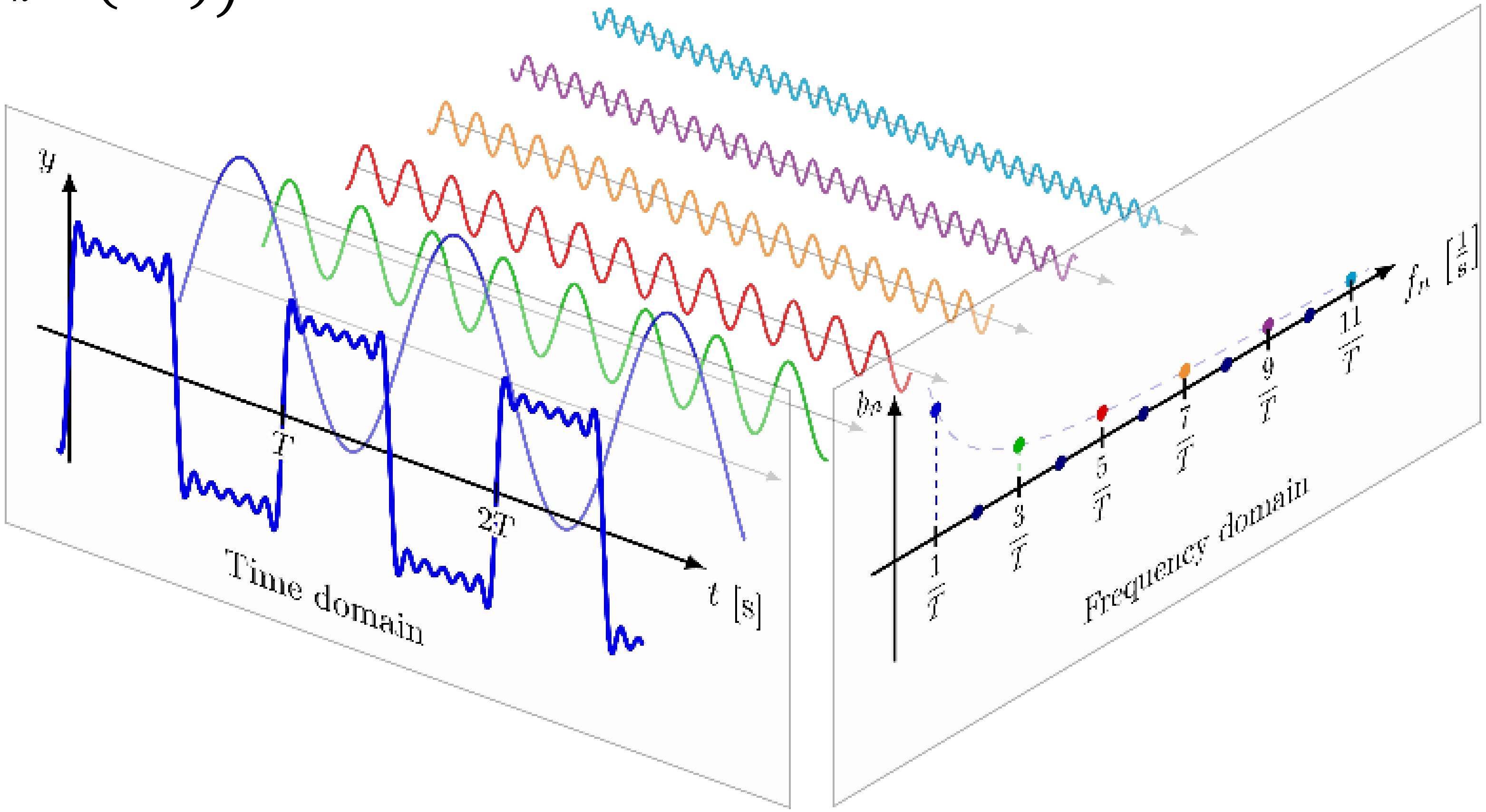




(1)傅立葉級數(Fourier Series)

- 週期性函數，可將其分解成無窮多個不同頻率的sin和cos的組合。

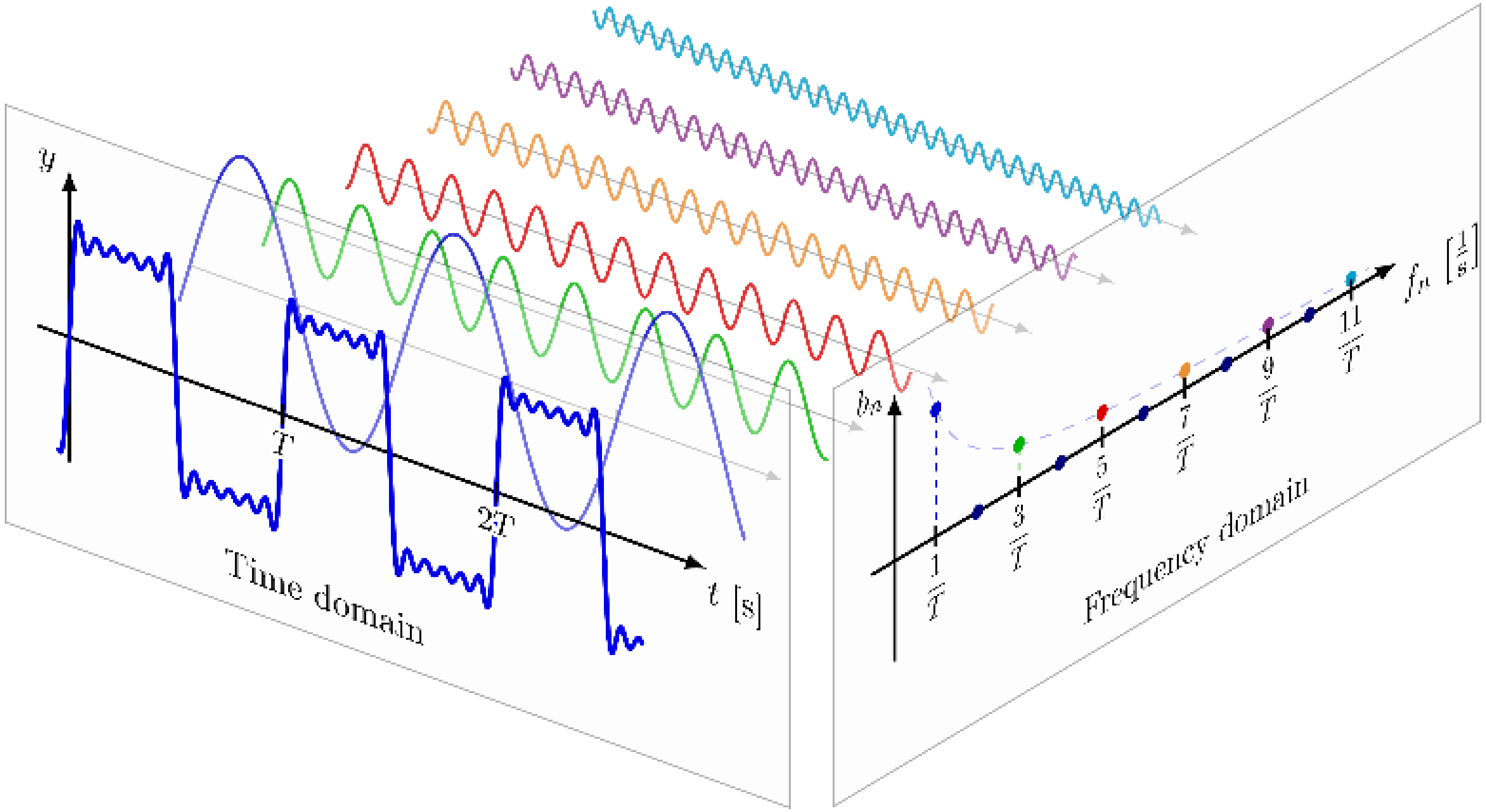
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$$



(2)傅立葉變換(Fourier Transform)

- 時間域(Time)或空間域(Spatial)中的訊號轉換到頻率域(Frequency)的一種數學方法。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt$$



想想為甚麼傅立葉可以寫成這樣?

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

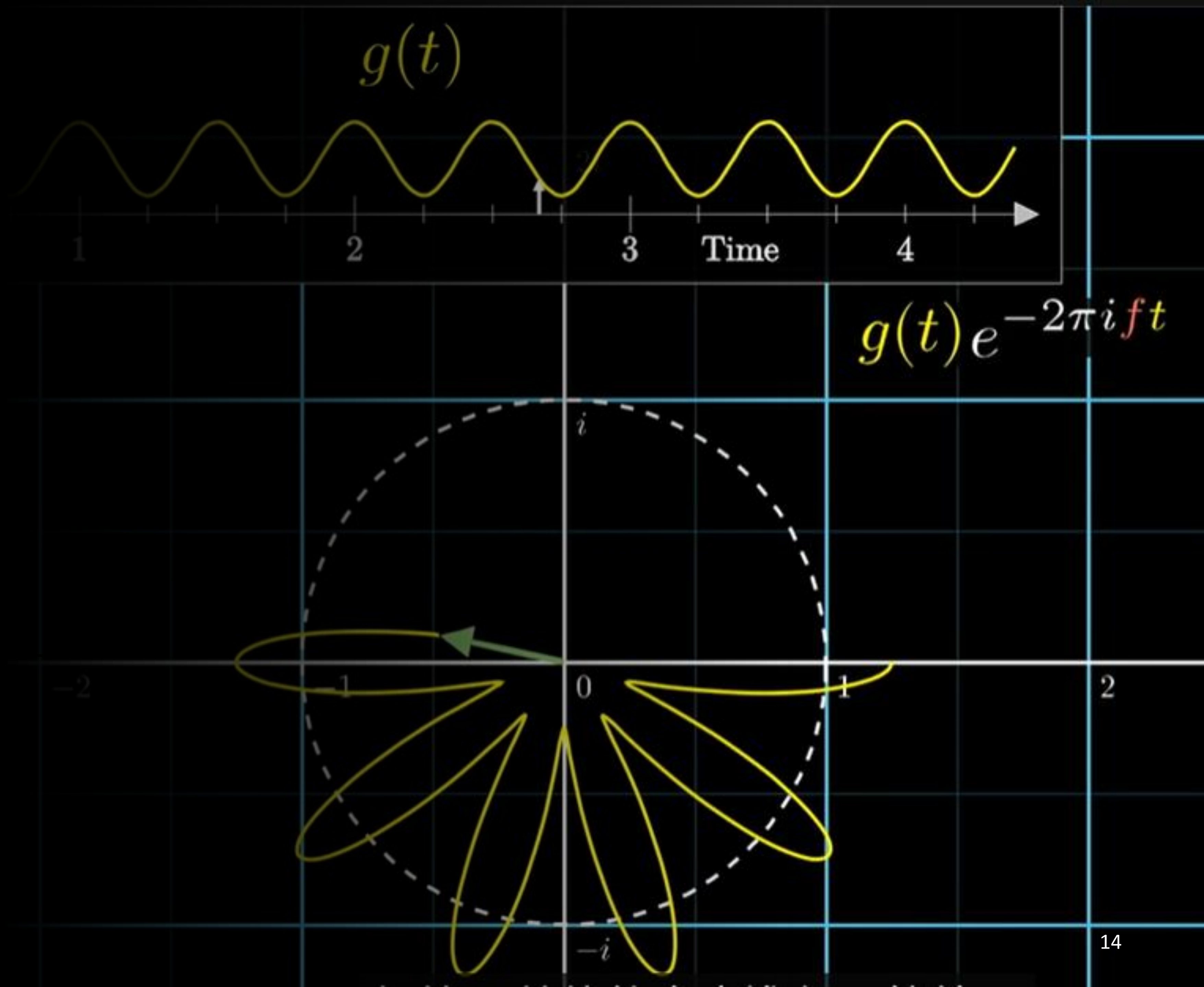
為甚麼可以寫成這樣?

e、j、ω、t 代表甚麼?

任何連續或週期性的訊號都可以拆解為

不同頻率的正弦波或餘弦波的組合

一維傅立葉



複數平面由來

1545年

卡爾達諾
（Gerolamo Cardano）

使用$\sqrt{-1}$解方程
但認為沒有真實意義

18世紀

歐拉
（Leonhard Euler）

高斯
（Carl Friedrich Gauss）

正式定義複數$\sqrt{-1}$
$z = a + bi$ 當中a是實部 b是虛部 i是虛數單位

1806年

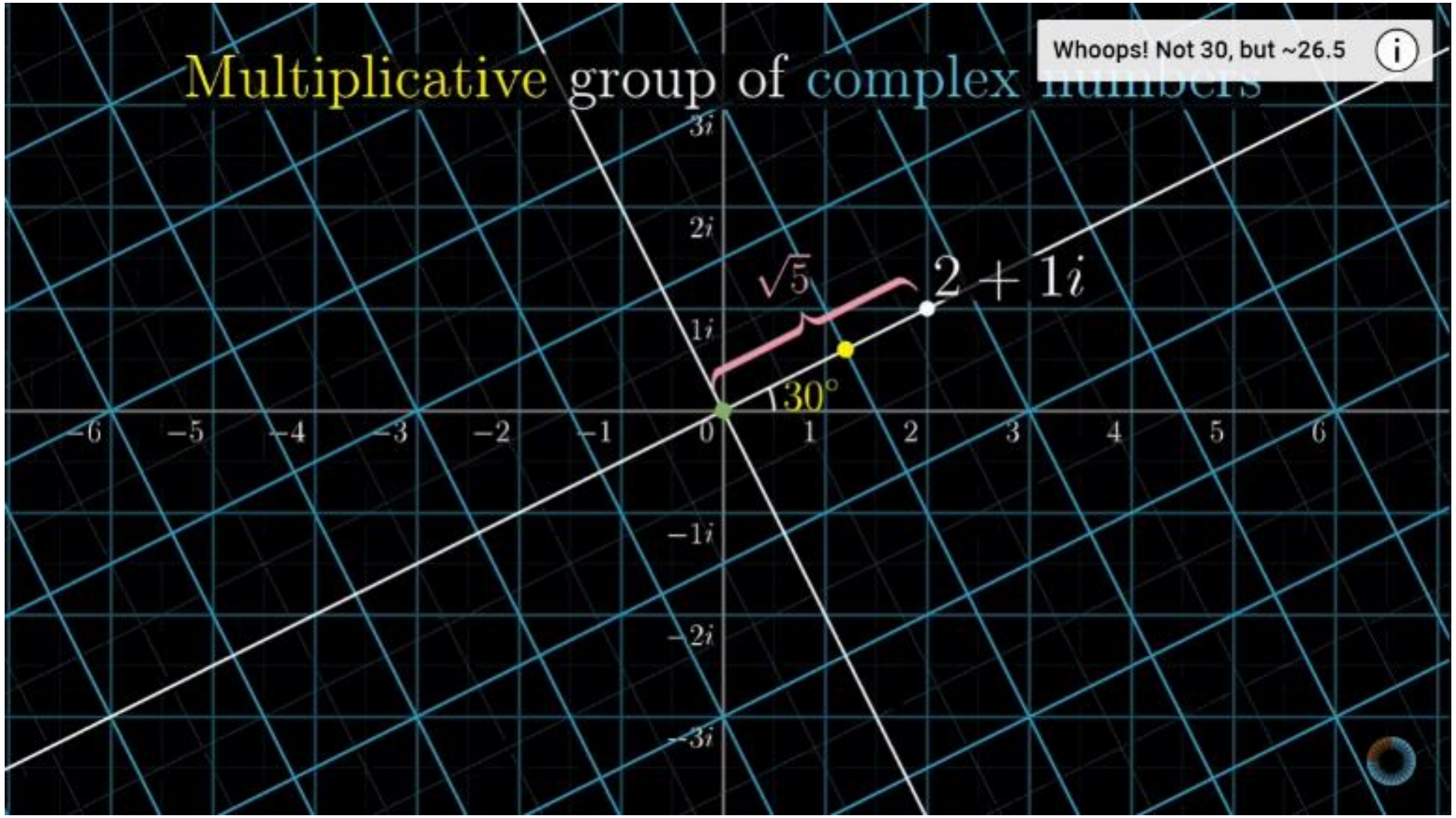
阿爾岡
（Jean-Robert Argand）

提出Argand plane
也就是現在的複數平面

複數平面意義 (Complex plan)

時間 12:06 ➢Group theory

https://youtu.be/mvmuCPvRoWQ?si=N0MgCwQZm8aWlMLj&t=726



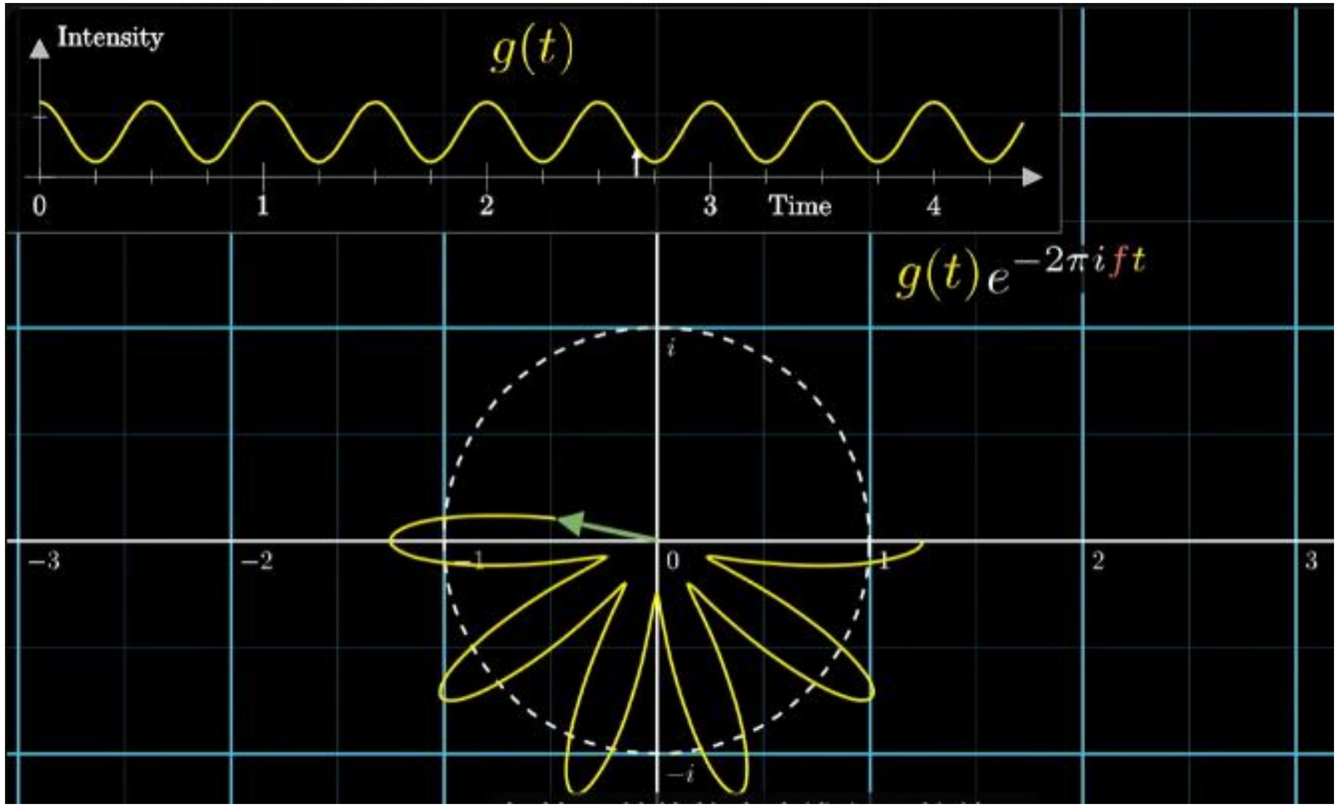
複數 (Complex number)

- 虛數 $i = \sqrt{-1}$
- 複數 $z = a + bi$
- 當中a是實部, b是虛部, i是虛數單位
- 虛數i有時候也會用j來表示。

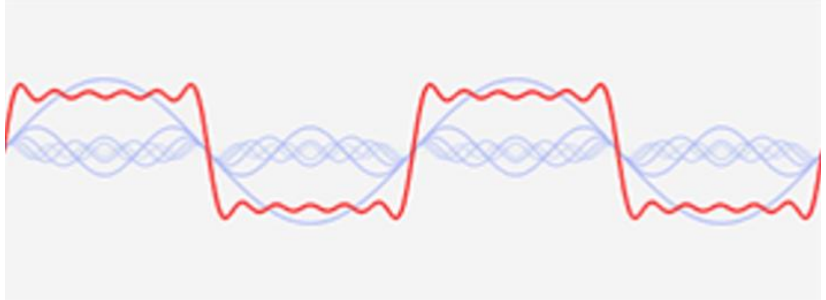
傅里葉變換

- 14:05 可視化的傅里葉變換

https://youtu.be/spUNpyF58BY?si=VpGsB77yWTGosB2k&t=845



傅里葉變換 推導:傅立葉級數



f

$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

角頻率 $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt$$

函數在一個週期內的平均值

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\, dt$$

cos項權重

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\, dt$$

sin項權重

傳里葉變換 推導:使用歐拉公式替換cos、sin

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$$

複數形式，怎麼變的 下一頁投影片有補充

$$\cos(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}$$

$$\sin(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}$$

- 換掉$\cos(n\omega t)$、$sin(n\omega t)$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}\right)$$

cos、sin 複數形式

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

$$e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j\sin(\theta)$$

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = \cos(\theta) + \cancel{j\sin(\theta)} + \cos(\theta) - \cancel{j\sin(\theta)}$$

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

歐拉公式
下一頁有推導

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

$$e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j\sin(\theta)$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = \cancel{\cos(\theta)} + j\sin(\theta) \cancel{- \cos(\theta)} + j\sin(\theta)$$

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

補充:歐拉公式(Euler's formula)

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

為甚麼會等於? 為甚麼他可以表示頻率?

根據泰勒展開: $e^{j\theta} = 1 + \frac{j\theta}{1!} + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \cdots$

$\boxed{j = \sqrt{-1}}$

$$e^{j\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + j\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

為甚麼cos、sin可以寫成這樣? 下一頁

整合 $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$

$$\cos(\theta) = \frac{f(0)\theta^0}{0!} + \frac{f'(0)\theta^1}{1!} + \frac{f''(0)\theta^2}{2!} + \frac{f'''(0)\theta^3}{3!} + \frac{f''''(0)\theta^4}{4!} \ldots$$

$$= 1 + \frac{-\sin(\theta)\,\theta^2}{1!} + \frac{-\cos(\theta)\,\theta^2}{2!} + \frac{\sin(\theta)\,\theta^2}{3!} + \frac{\cos(\theta)\,\theta^2}{4!} \ldots$$

$$= 1 + 0 + \frac{-\theta^2}{2!} + 0 + \frac{\theta^2}{4!} \ldots$$

$f(\theta) = \cos(\theta)$	$f(0) = 1$
$f'(\theta) = -\sin(\theta)$	$f'(0) = 0$
$f''(\theta) = -\cos(\theta)$	$f''(0) = -1$
$f'''(\theta) = \sin(\theta)$	$f'''(0) = 0$
$f^{(4)}(\theta) = \cos(\theta)$	$f^{(4)}(0) = 1$

隨著項數增加，可以逼近任何角度下的cos(θ)

所以

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

傅里葉變換 推導:整理系數

➢ 化簡，部分系數簡寫成C_n、 C_{-n}

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}\right)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n e^{jn\omega t}}{2} + \frac{a_n e^{-jn\omega t}}{2} + \frac{b_n e^{jn\omega t}}{2j} + \frac{-b_n e^{-jn\omega t}}{2j}\right)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left((\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j})e^{jn\omega t} + (\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j})e^{-jn\omega t}\right)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n e^{jn\omega t} + C_{-n} e^{-jn\omega t})$$

傳里葉變換 推導:改變n，從-∞~∞

a_0其實就是n=0時的頻率分量

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n e^{jn\omega t} + C_{-n} e^{-jn\omega t}\right)$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{0}\left(C_0 e^{j0\omega t}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n e^{jn\omega t}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{-n} e^{-jn\omega t}\right)$$

把負號移到Σ裡面

$$\sum_{n=-1}^{-\infty}\left(C_n e^{jn\omega t}\right)$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n e^{jn\omega t}\right) + \sum_{n=0}^{0}\left(C_0 e^{j0\omega t}\right) + \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(C_n e^{jn\omega t}\right)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(C_n e^{jn\omega t}\right)$$

傅里葉變換 推導: 如何找出c_n

c_n跟F(ω) 概念類似，找出c_n通式後就能轉到F(ω)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(c_n e^{jn\omega t}\right)$$

使用正交性 將c_n 找出來，下一頁

何謂正交性?

在一個完整週期內，只有當兩個有相同頻率的東西相乘積分才會有非零的值。

$$\int_0^T e^{jm\omega t}\, e^{-jn\omega t}\, dt = \int_0^T e^{j(m-n)\omega t}\, dt$$

兩個不同頻率的指數函數

當m=n $\int_0^T e^{j(m-n)\omega t}\, dt = \int_0^T e^{j(0)\omega t}\, dt = \int_0^T 1\, dt = T$

當m≠n $\int_0^T e^{j(m-n)\omega t}\, dt$ 令$(m-n)$為k

角頻率 $\omega = \frac{2\pi}{T}$，$\omega T = 2\pi$

$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$

$$\Rightarrow \left[\frac{e^{jk\omega t}}{jk\omega t}\right]_0^T = \frac{e^{jk\boxed{\omega T}} - 1}{jk\omega} = \frac{e^{jk2\pi} - 1}{jk\omega} = \frac{(\cos(k2\pi) + j sin(k2\pi)) - 1}{jk\omega} = \frac{(1 + j0) - 1}{jk\omega} = 0$$

傅里葉變換 推導: 如何提取c_n

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e^{jn\omega t})$$

$$\int_0^{\mathrm{T}} f(t) e^{-jn\omega t}\, dt$$

傅立葉係數公式

怕搞混我這裡換成n_1、n_2

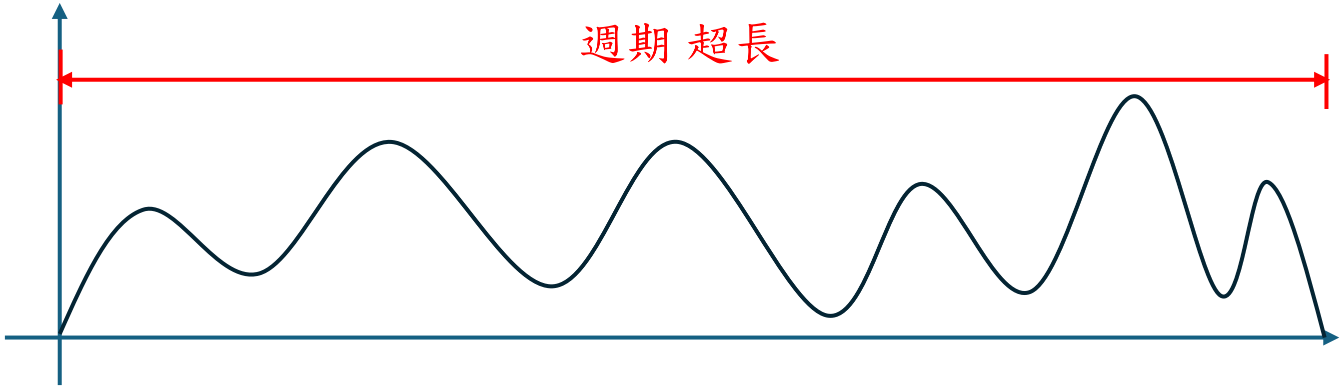
$$= \int_0^{\mathrm{T}} \Big(\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} (c_{n_1} e^{jn_1\omega t}) \Big) e^{-jn_2\omega t}\, dt = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} c_{n_1} \int_0^{\mathrm{T}} e^{jn_1\omega t} e^{-jn_2\omega t}\, dt$$

只有當$n_1 = n_2$ 時有值
其餘都是0 ，所以Σ可以去掉了

$$c_n \int_0^{\mathrm{T}} e^{0}\, dt = c_n \int_0^{\mathrm{T}} 1\, dt = c_n T$$

$$\int_0^{\mathrm{T}} f(t) e^{-jn\omega t}\, dt = c_n T \Rightarrow c_n = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} f(t) e^{-jn\omega t}\, dt$$

傅里葉變換 推導: 推導出F(ω)



兩者都是
權重

$$C_n = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f(t)e^{-jn\omega t}\, dt$$

c_n對應於特定的頻率成分nω，代表了該頻率在信號中的「強度」。

F(ω) 對應於每個連續頻率ω上的權重

由於訊號不一定是週期性的，所以我們可以把非週期性訊號看作是週期長度非常長的週期性訊號。

當T→無限， $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 就會很小 ，等於原本離散的nω變成連續的ω

$$F(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} f(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

[-T/2,T/2]在 T→∞的情況下對稱時間軸。確保正負頻率貢獻一樣

傅里葉變換 推導: 推導出F(ω)

$$F(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

- 當我們讓 T→∞ 時，積分區間 [−T/2,T/2] 延伸為 (−∞,∞)。
- 去除歸一化因子 $\frac{1}{\mathrm{T}}$，得到標準的傅立葉變換形式。

傅立葉變換可以將一個隨時間變化的信號 $f(t)$分解為不同頻率成分的「加權和」，從而告訴我們信號在不同頻率上的強度（權重）。

2D傅里葉變換 推導: 推導出$F(u,v)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

隨著時間變化信號的頻率成分

$$F(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j(ux+vy)}\, dxdy$$

隨著空間變化影像的頻率成分

離散化的角頻率要限制在[0,2π]

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

離算化角頻率$\omega_u = \dfrac{2\pi u}{M}$

當u從0~M-1
範圍會從0~2π

為甚麼$e^{-j\omega t}$可以表示頻率?

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$ 原始訊號在時間域的分布

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt$$ 訊號在頻率域中的分布

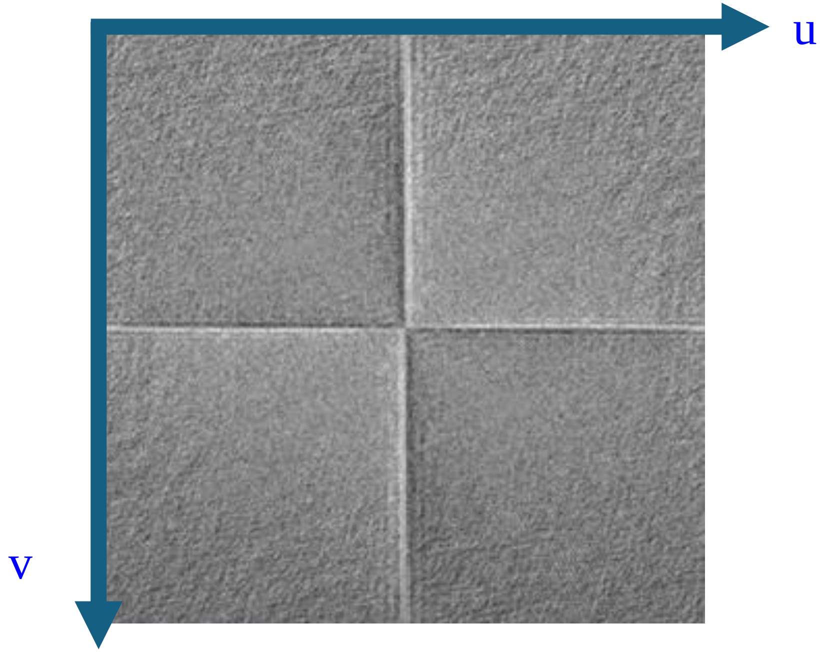
$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$ 頻率域中的頻譜表示，
揭示影像的高頻和低頻成分

二維傅立葉

影像從空間域轉到頻率域?

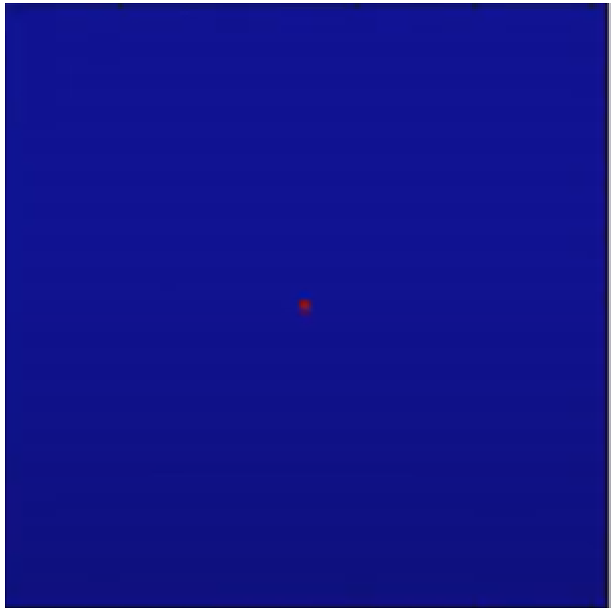
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

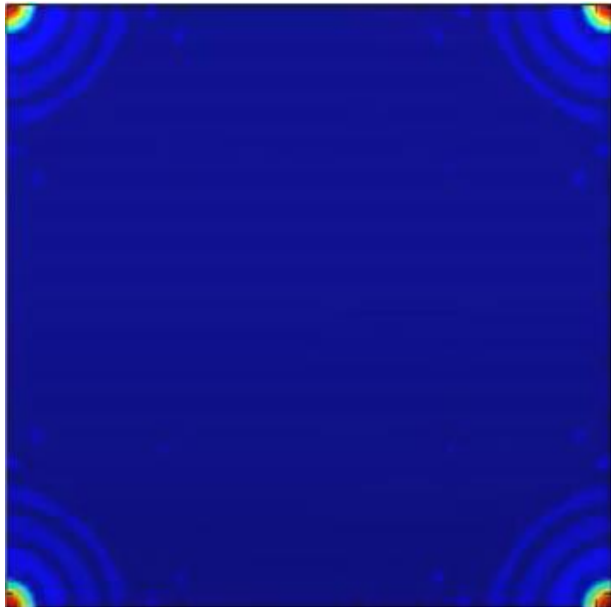


二維傳立葉轉換 共軛對稱（Conjugate Symmetry）

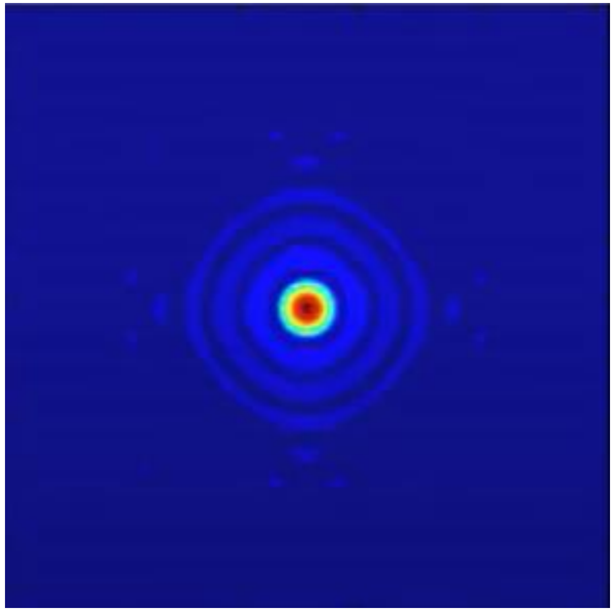
原圖



傳立葉轉換後
會在四個角



平移後



奈奎斯特取樣定理（Nyquist Sampling Theorem）

影像中的高頻成分在採樣頻率不足時會被錯誤地映射為低頻成分

為了避免混疊，採樣頻率必須至少是信號最高頻率的兩倍（即 $f_s \geq 2f$ ）

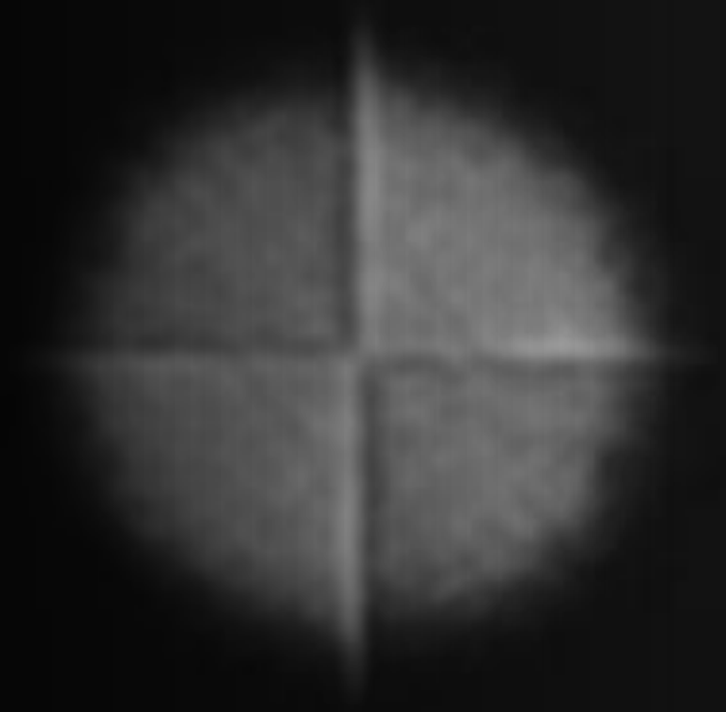
原圖

Resize 成原本的20%

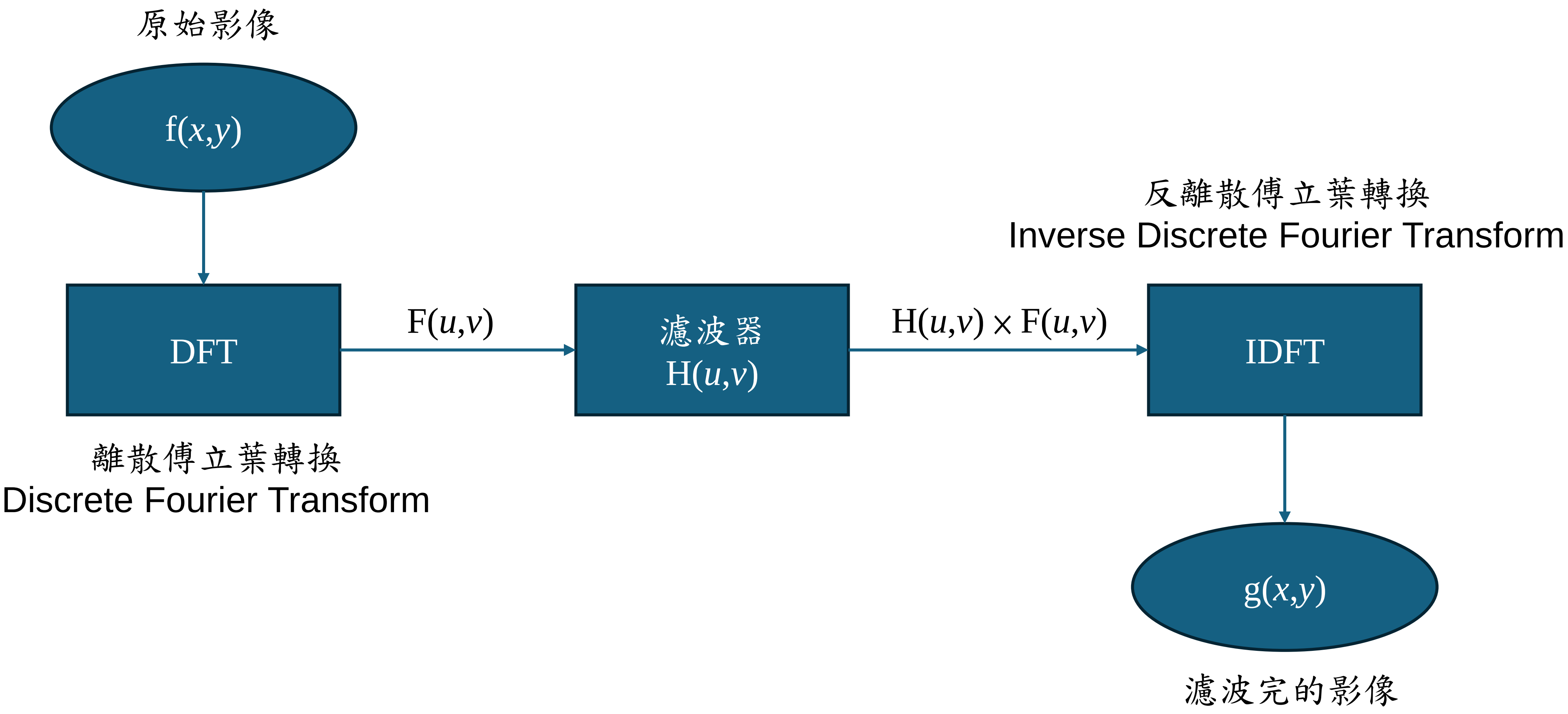
放大後

原本直線，出現摩爾紋(Moire pattern)

頻率濾波應用



頻率域濾波的基本步驟


原始影像
f(x,y)
DFT
離散傅立葉轉換
Discrete Fourier Transform
F(u,v)
濾波器
H(u,v)
H(u,v) × F(u,v)
反離散傅立葉轉換
Inverse Discrete Fourier Transform
IDFT
g(x,y)
濾波完的影像

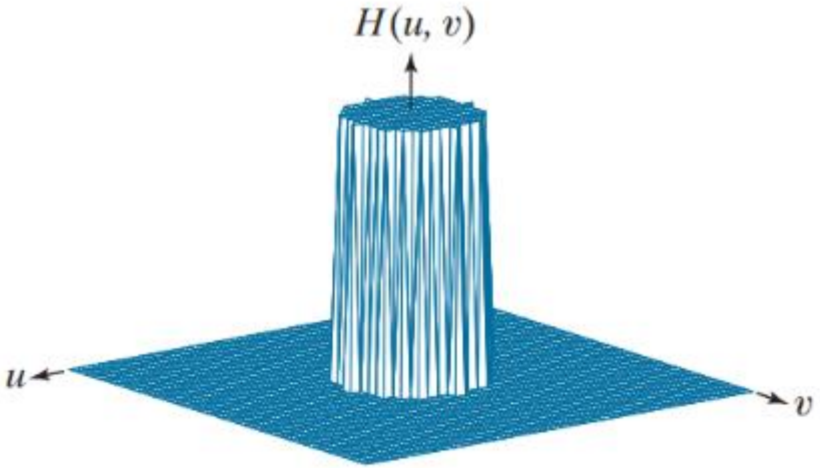
理想低通濾波器

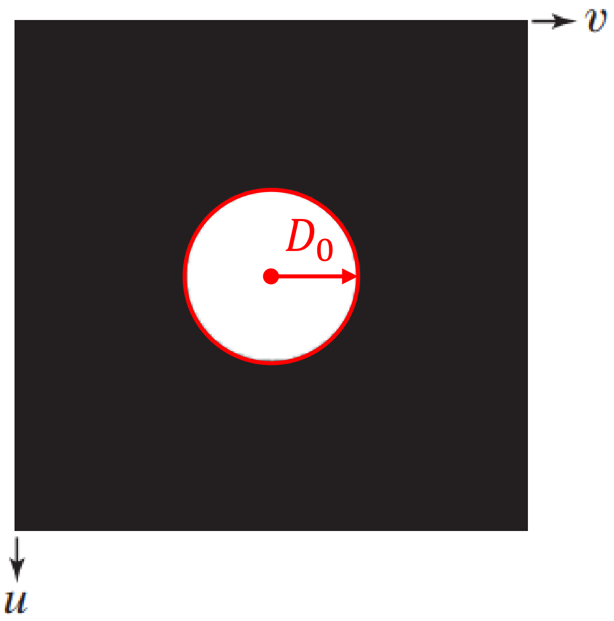
以原點為圓心半徑為 D_0 的圓圓內的低頻率訊號均會通過，然而圓外信號都會被截止。

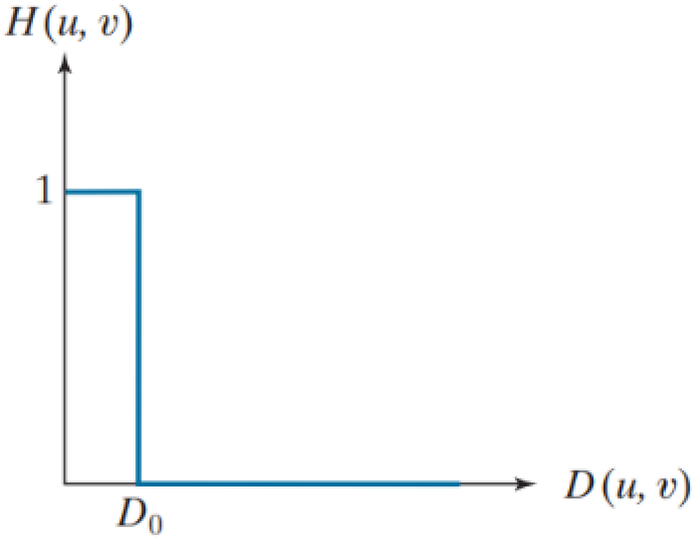
$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & ,若 D(u,v) \le D_0 \\ 0 & ,若 D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

$$D(u,v) = \sqrt{\left(u - \frac{P}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{Q}{2}\right)^2}$$

P=寬，Q=高





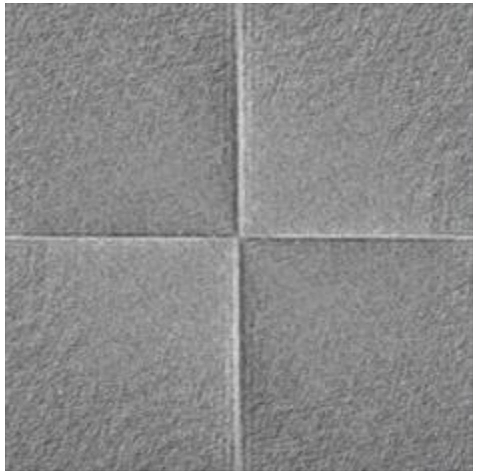


理想低通濾波器(1)

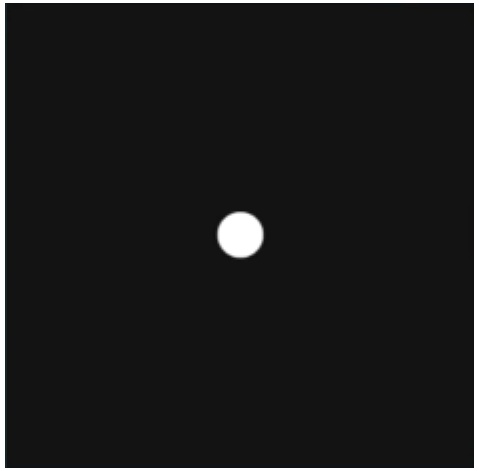
原圖

傅立葉

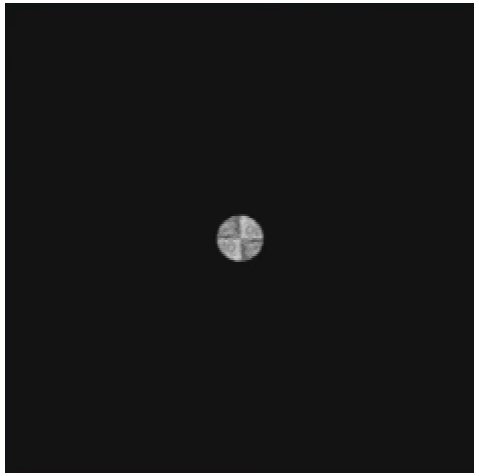
頻率域影像



頻率域遮罩



$D_0 = 50$



頻率域遮罩

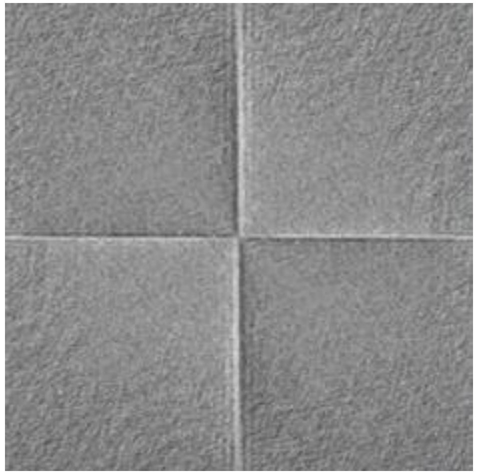
反傅立葉

影像變模糊

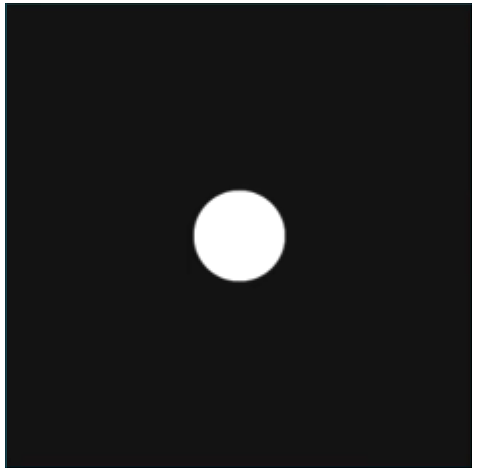
理想低通濾波器(2)

原圖

頻率域影像

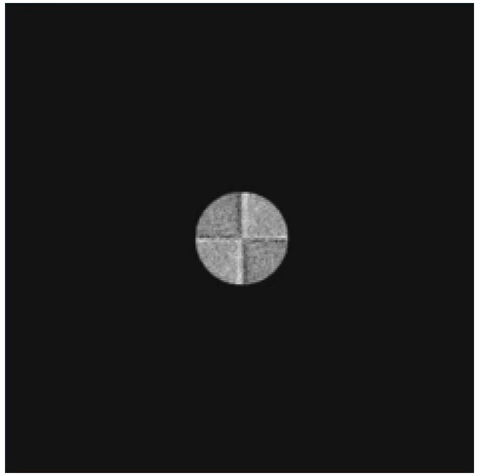


頻率域遮罩



更大

$D_0 = 100$

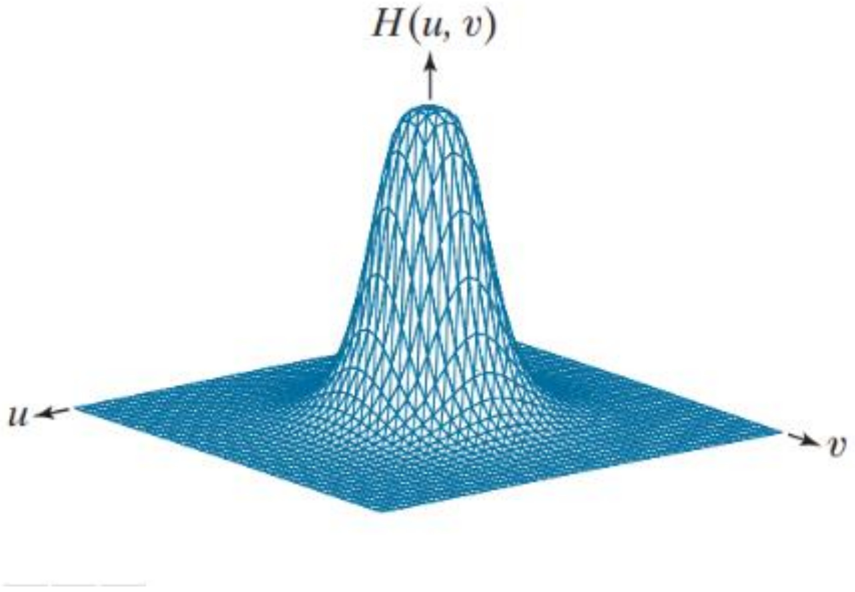


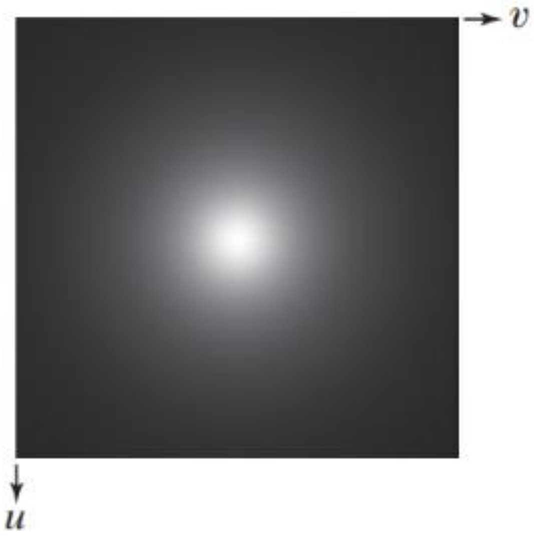
頻率域遮罩

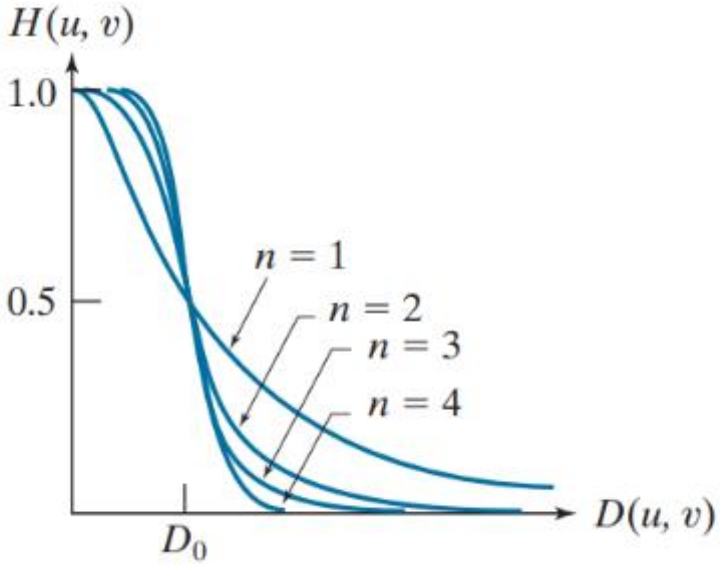
影像變模糊

巴特沃斯(Butterworth) 低通濾波器

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D(u,v)}{D_0}\right)^{2n}}$$



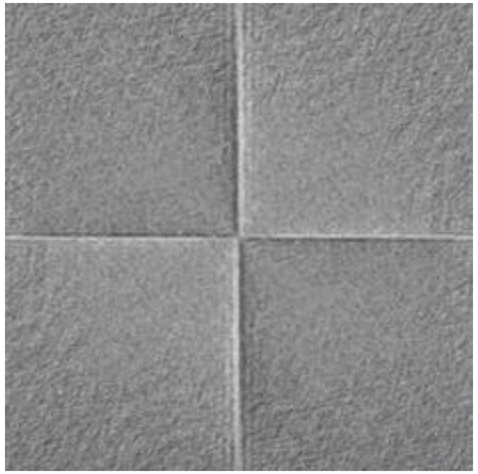




巴特沃斯低通濾波器(1)

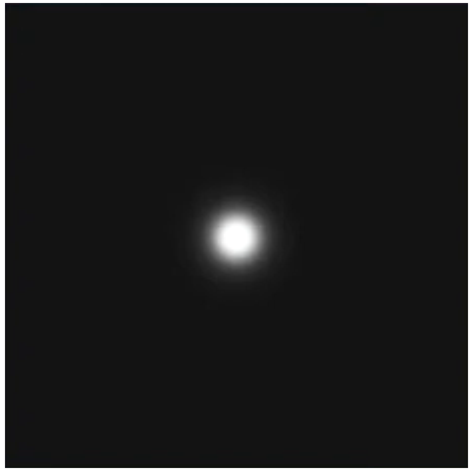
原圖

頻率域影像

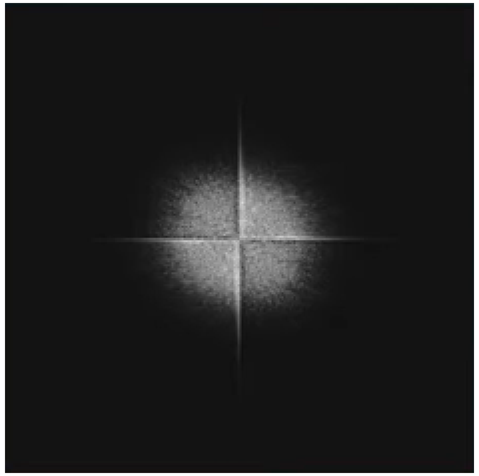


×

頻率域遮罩



D_0 =50



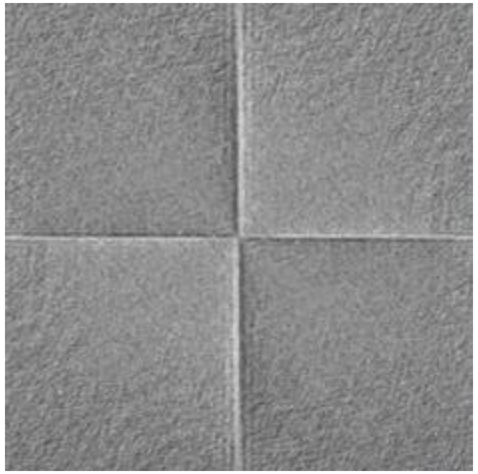
頻率域遮罩

影像變模糊

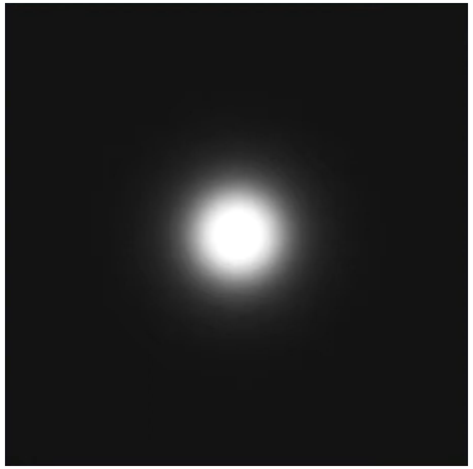
巴特沃斯低通濾波器(2)

原圖

頻率域影像

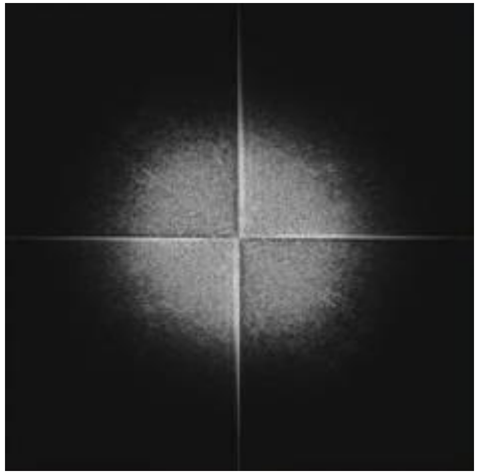


頻率域遮罩



更大

$D_0 = 100$



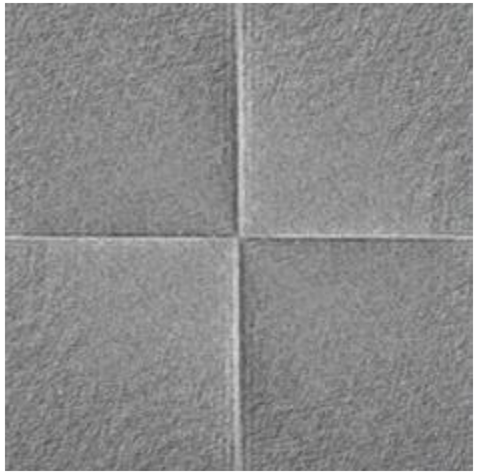
頻率域遮罩

影像變模糊

巴特沃斯低通濾波器(3)

原圖

頻率域影像

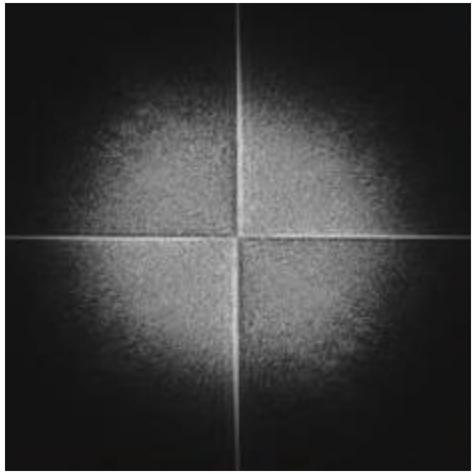


頻率域遮罩

再更大

$D_0 = 150$

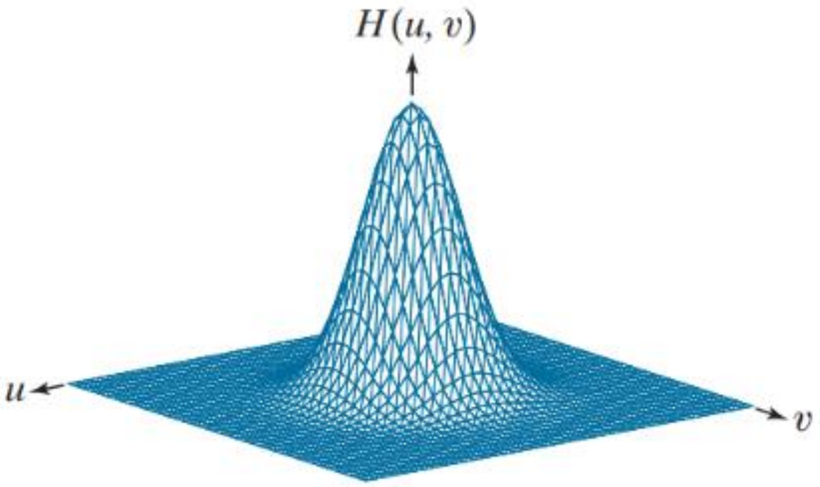
影像變模糊

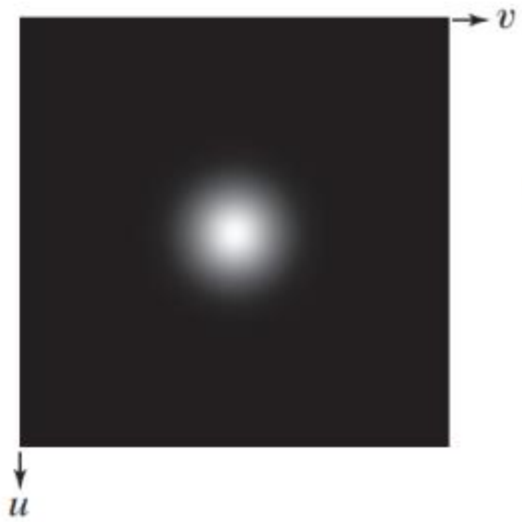


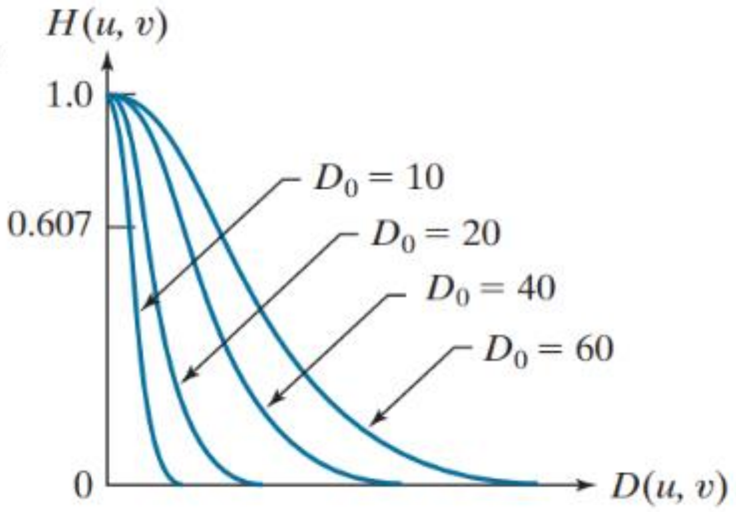
頻率域遮罩

高斯(Gaussian) 低通濾波器

$$H(u,v) = e^{-\frac{D(u,v)^2}{2D_0^2}}$$



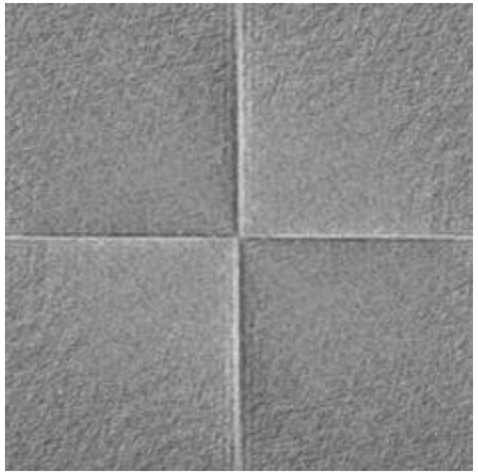




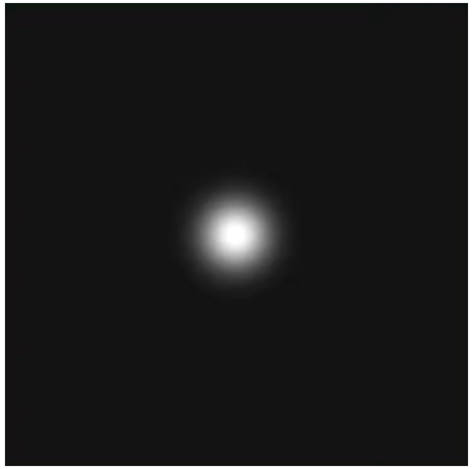
高斯低通濾波器(1)

原圖

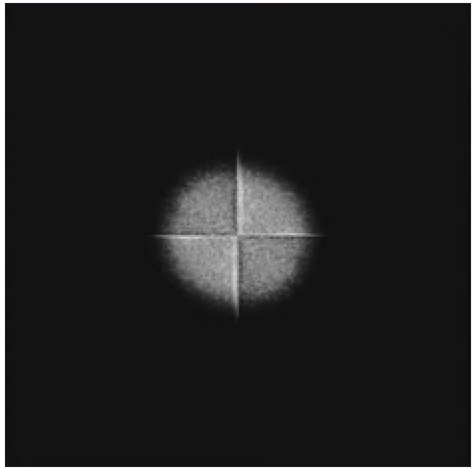
頻率域影像



頻率域遮罩



$D_0 = 50$



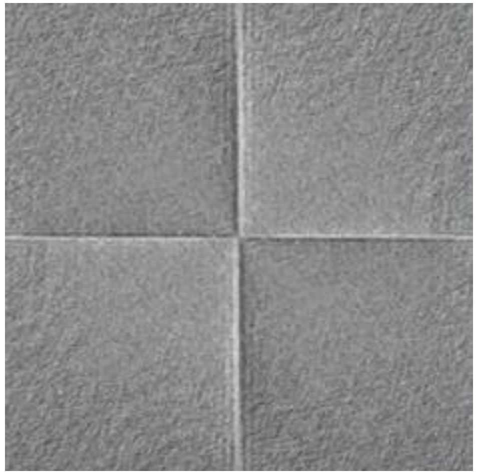
頻率域遮罩

影像變模糊

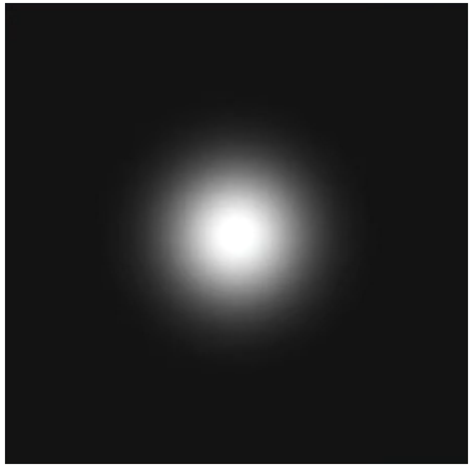
高斯低通濾波器(2)

原圖

頻率域影像

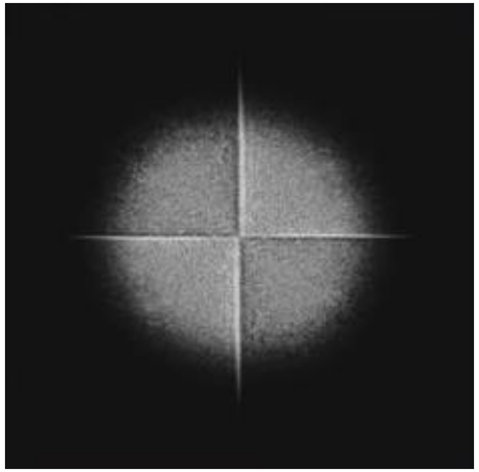


頻率域遮罩



更大

$D_0 = 100$



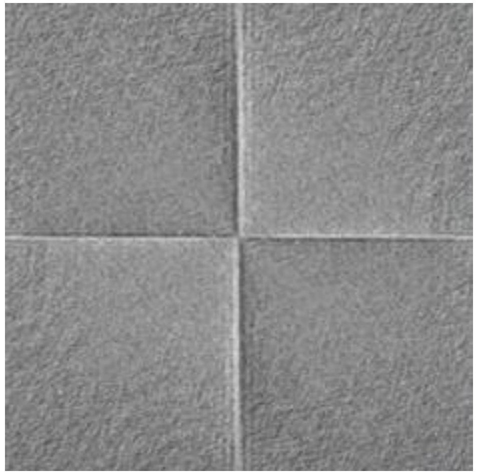
頻率域遮罩

影像變模糊

高斯低通濾波器(3)

原圖

頻率域影像



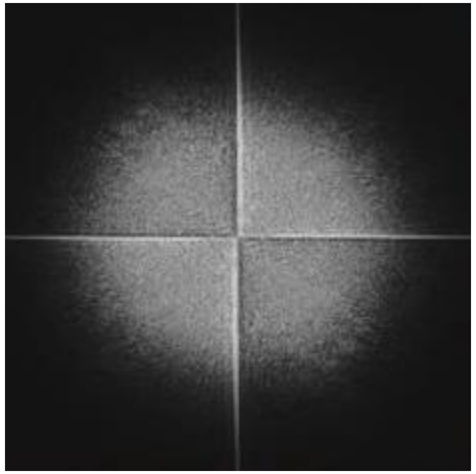
×

頻率域遮罩

再更大

$D_0 = 150$

影像變模糊



頻率域遮罩

比較各式低通濾波效果

理想低通

巴特沃斯低通

高斯低通

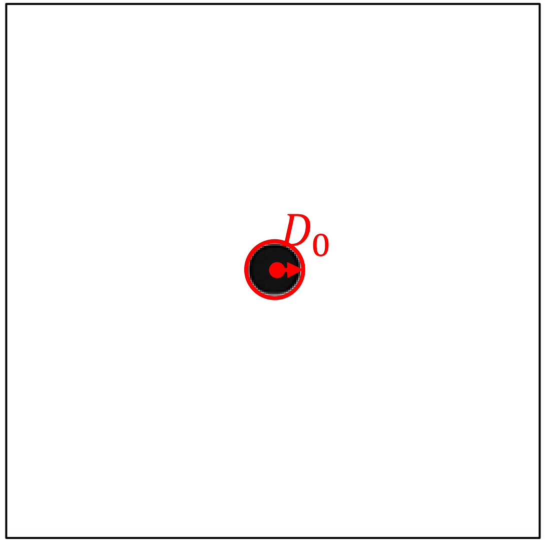
理想高通濾波器

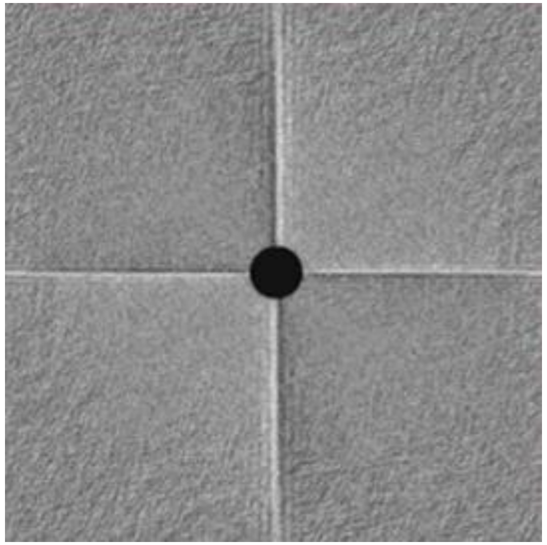
以原點為圓心半徑為 D_0 的圓
圓內的低頻率訊號均會被過濾，
然而圓外信號都會通過。

$$H(u,v)=\begin{cases}0 & ,\text{若} D(u,v)\le D_0\\ 1 & ,\text{若} D(u,v)>D_0\end{cases}$$

$$D(u,v)=\sqrt{\left(u-\frac{P}{2}\right)^2+\left(v-\frac{Q}{2}\right)^2}$$

P=寬 , Q=高

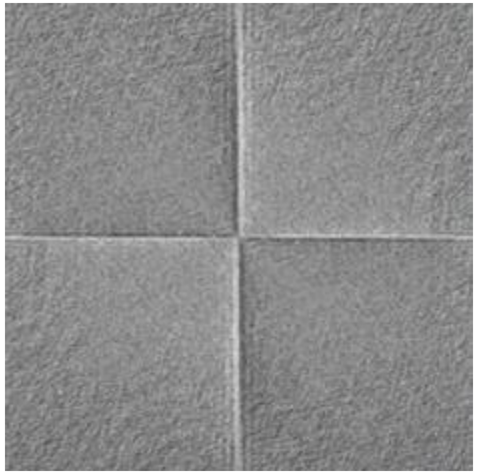




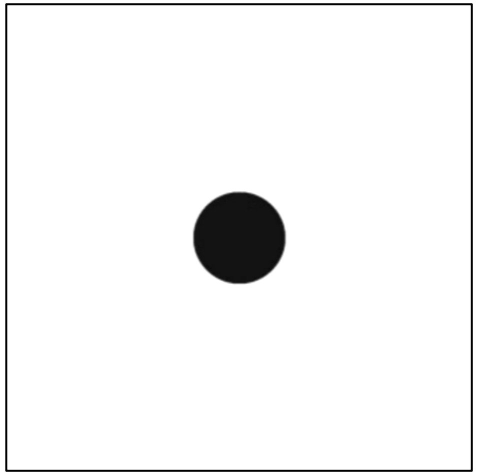
理想高通濾波器(1)

原圖

頻率域影像

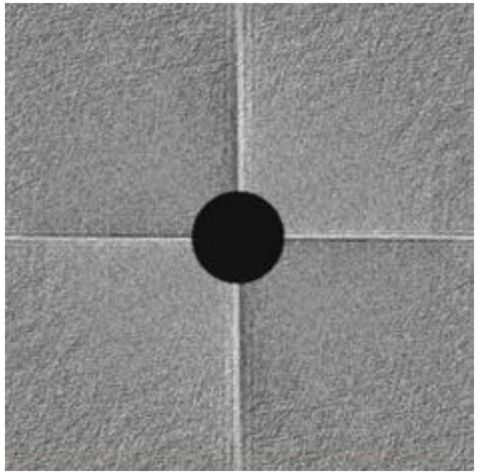


頻率域遮罩



$D_0 = 100$

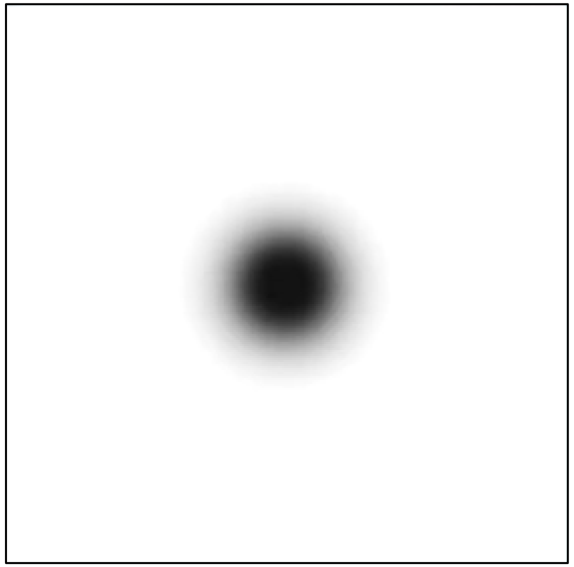
影像變模糊

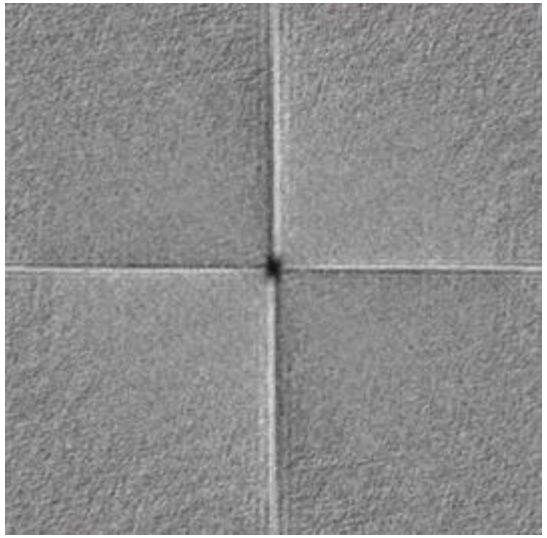


頻率域遮罩

巴特沃斯高通濾波器

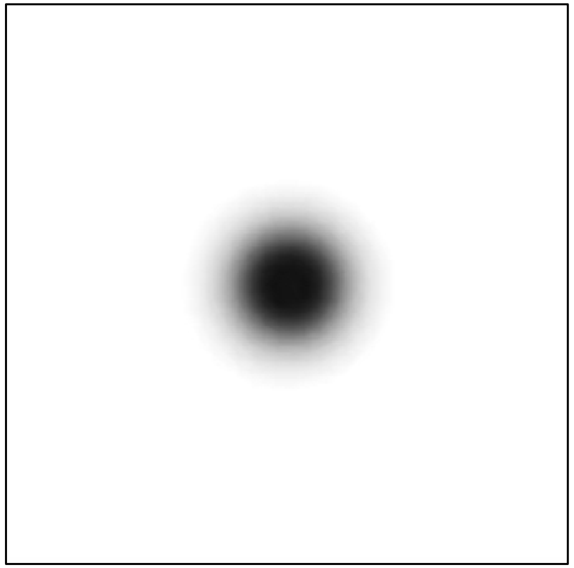
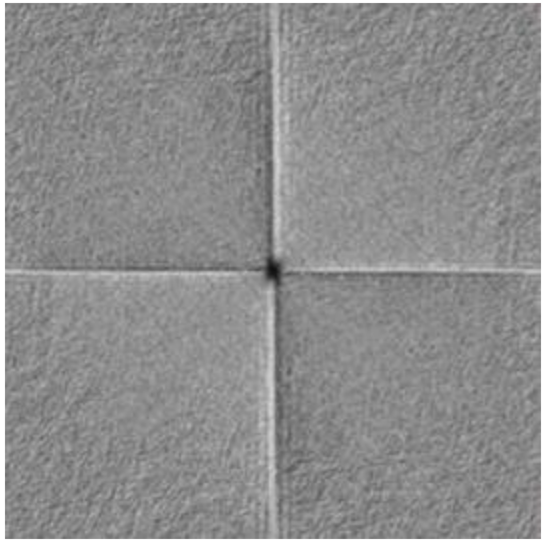
$$H(u,v) = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{D(u,v)}{D_0}\right)^{2n}}$$





高斯高通濾波器

$$H(u,v) = 1 - e^{-\frac{D(u,v)^2}{2D_0^2}}$$

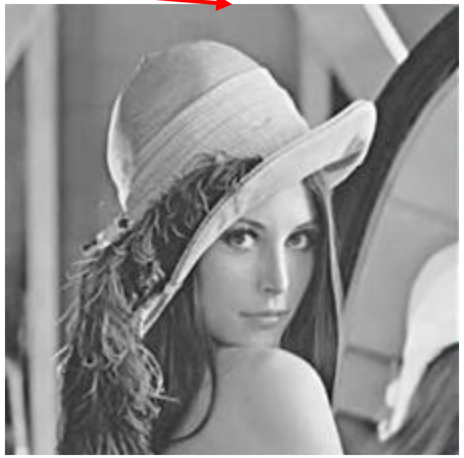

理想高通

巴特沃斯高通

高斯高通

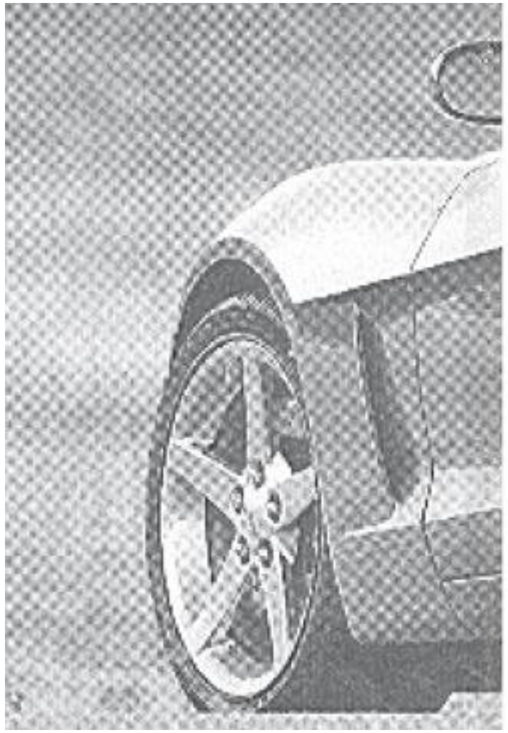
疊加原圖

(有點水波紋)

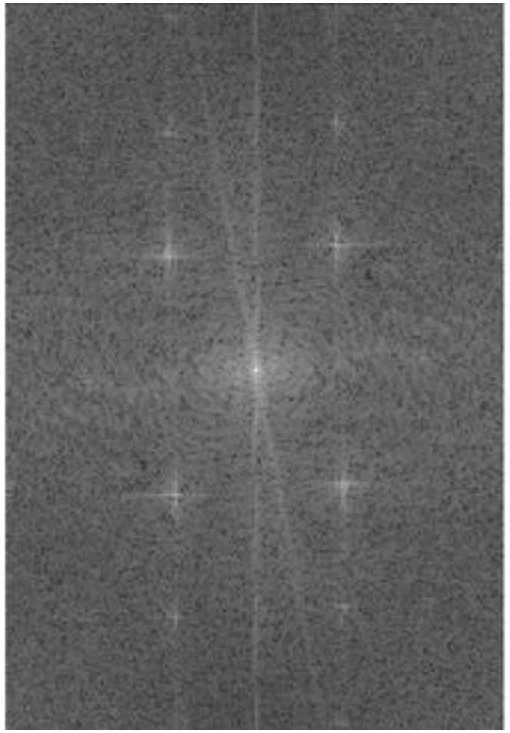


選擇性濾波

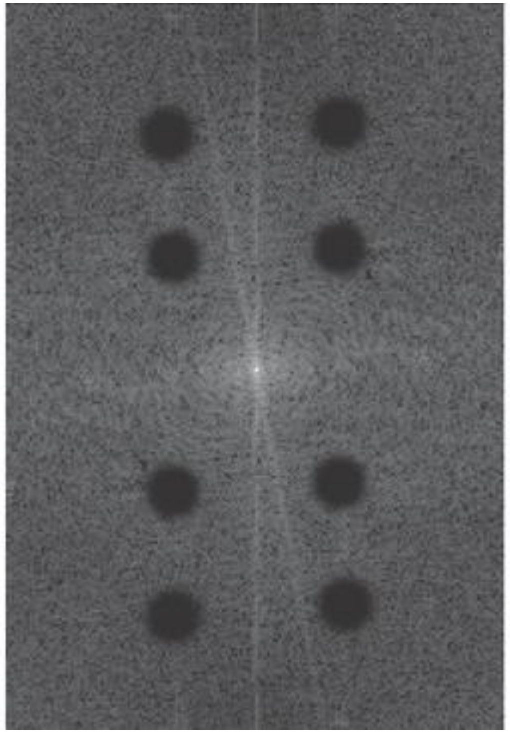
原圖



頻譜圖



把星星點都遮起來



反傳立葉後
可以看到格狀不見了

同態濾波

- 影像可被視為照度與反射率乘積。
- 照度（illumination）反映環境光線，通常為低頻成分。
- 反射率（reflectance）代表物體表面的細節，屬於高頻成分。

$$f(x,y) = i(x,y) \cdot r(x,y)$$

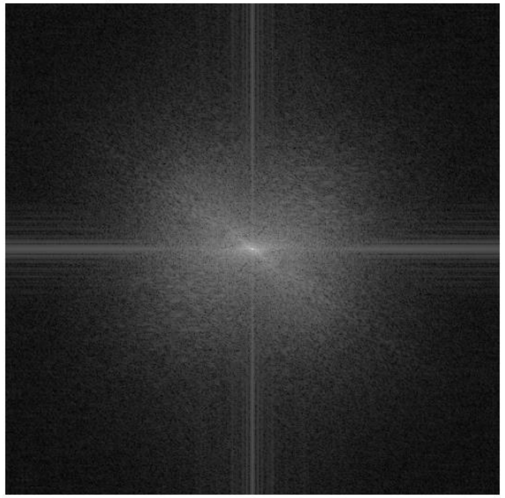
$$\mathcal{F}\{\log(f(x,y))\} = \mathcal{F}\{\log(i(x,y))\} + \mathcal{F}\{\log(r(x,y))\}$$

$$\mathrm{G}(u,v) = H(u,v) \cdot F(u,v)$$

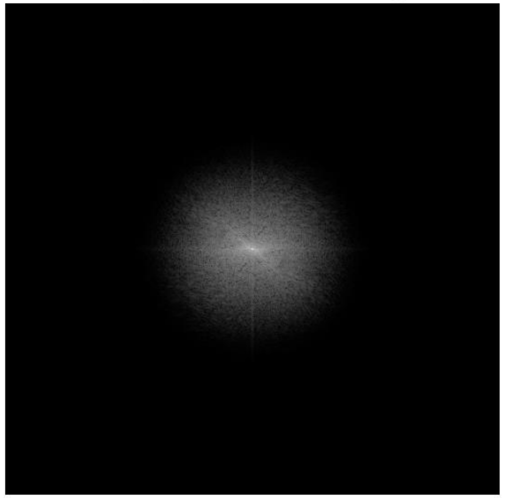
$$z(x,y) = \exp(\mathcal{F}^{-1}\{H(u,v) \cdot \mathcal{F}\{\log(f(x,y))\}\})$$

原圖

頻譜圖



同態濾波後頻譜



同態濾波後影像

抑制細節，增強光照