影像處理 03 強度轉換與空間濾波

教師:許閔傑、蕭兆翔

助教:莊媞涵

大綱

複習　索引、仿射

- 強度轉換函數：
  - 對比度拉伸（Contrast Stretching）
  - 負片轉換（Negative Transformation）
  - Gamma變換（Power-Law Transformation）
  - 直方圖處理(Histogram Processing)

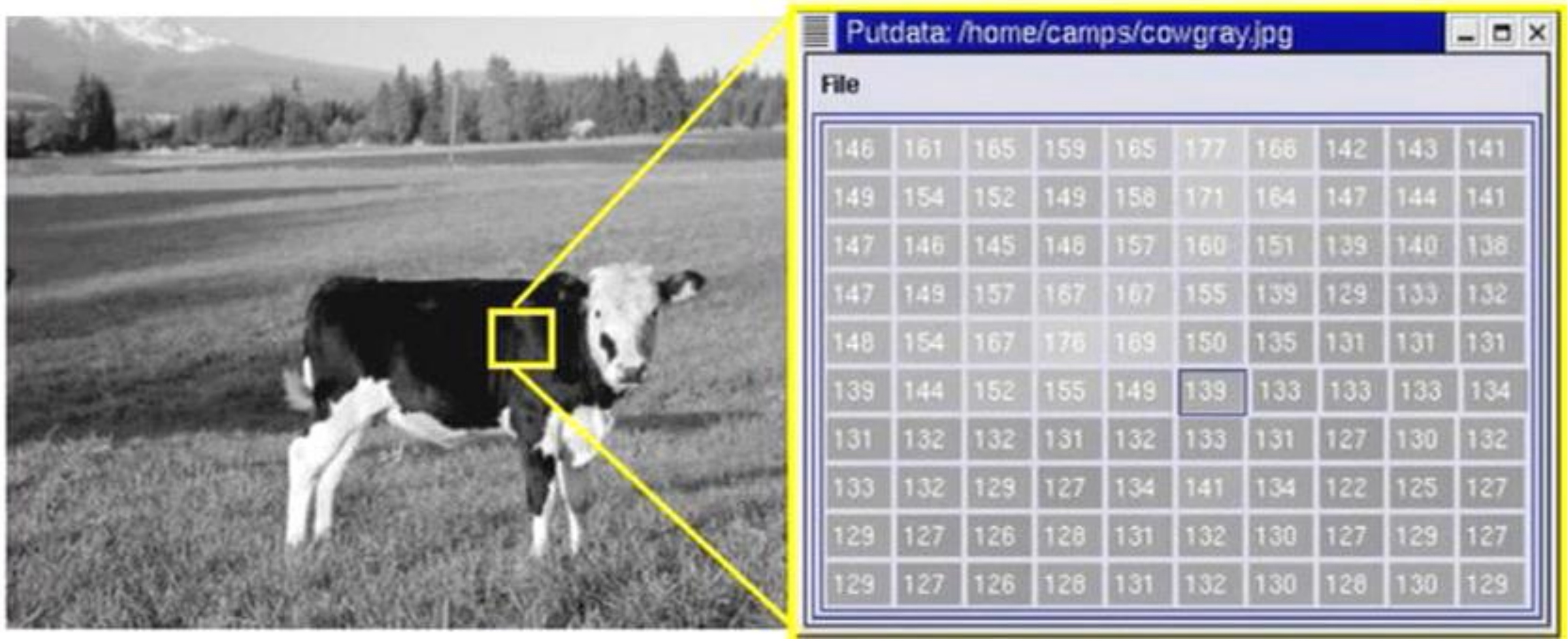
- 空間濾波基礎：
  - 卷積與相關操作（Convolution and Correlation）
  - （低通）均值濾波器（Mean Filter）
  - （低通）中值濾波器（Median Filter）
  - （低通）高斯濾波器（Gaussian Filter）sinc
  - （高通） Sobel 和 Laplacian 邊緣檢測

強度(Intensity)

■ 灰階影像(grayscale image)

二維的函數f(*x*,*y*)，其中x、y為空間座標，f的大小就稱為這張影像在該點的強度(intensity)或灰階(gray level)

➢ 每個影像原素有特定的位置與值，稱為畫素、像素(pixel)。



f(200,350) = 139

(200,350)：空間座標

139　：影像強度

八位元(8Bit) 灰階影像的強度

- 灰階影像f(*x*,*y*):
  影像在某個點 (x, y) 的值代表該點的 **強度值**。
  灰階影像中，強度最小值代表「黑」，強度最大值代表「白」。

- 8-bit 灰階影像：2^8=256 ，從「黑」到「白」，共 256 個值。

3.1 強度轉換函數

強度轉換函數T (intensity transformation)

函數輸入值(r) : 像素值 函數輸出值(s) : 經轉換後像素值

$$g(x, y) = T[f(x, y)]$$

$$s = T(r)$$

- 目的

對一張輸入影像中的「每個像素」，利用T，將像素值做調整，例如:對比強化、二值化....

強度負轉換(負片)

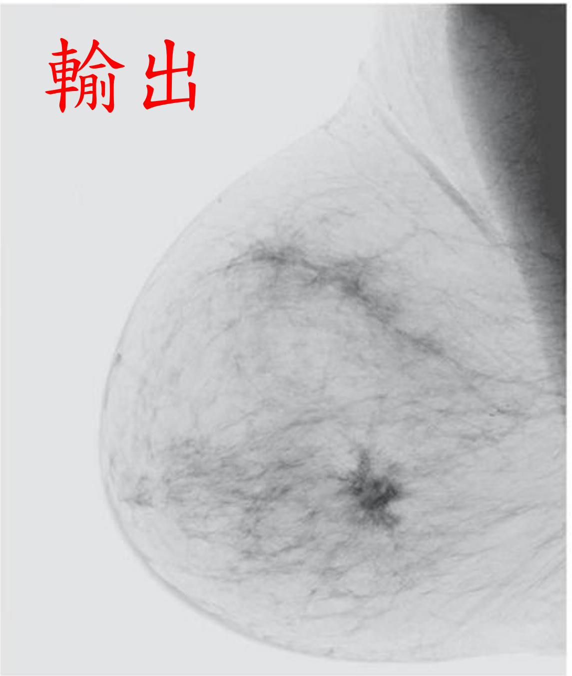
- 負轉換 (negative transformation)

將灰階強度反轉，以八位元灰階影像為例(強度最大值=255)

乳房X光照片

$s = T(r)$

$s = 255-r$



強度對數轉換

■ 對數轉換 (log transformation)

原因:對顯示器而言，輸出最暗、最量對比度階層的能力有限。影像中，強度最大值的像素，會決定「白色」的像素值。

八位元灰階影像

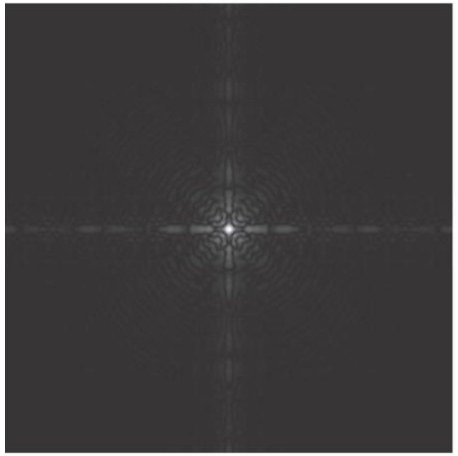
$r = 0 \sim 255$

灰階值：[0，1，2，3...253，254，255]

傅立葉頻譜影像

(Fourier Spectrum):

$r = 0 \sim 1.5 \times 10^6$

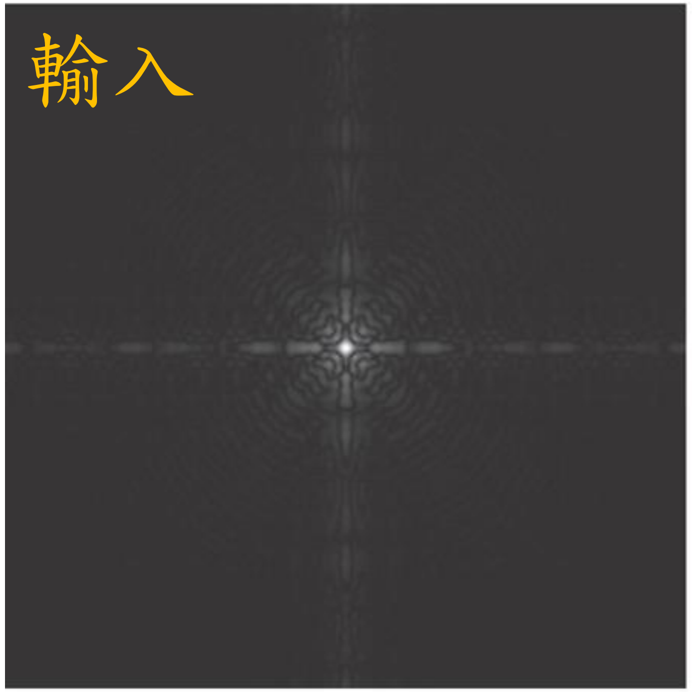


強度對數轉換

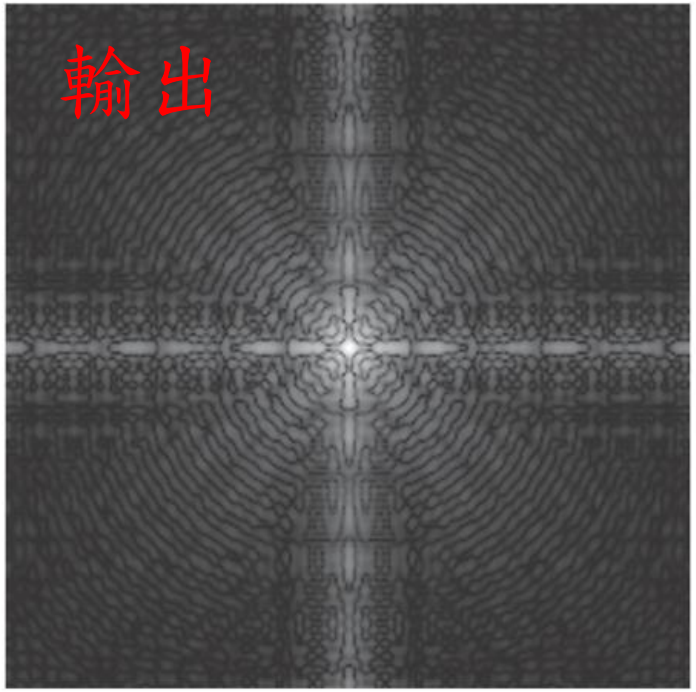
- 對數轉換 (log transformation) $s = c\log(1+r)$

取log目的:減少強度階層，以便輸出比較好的對比效果

傅立葉
頻譜影像



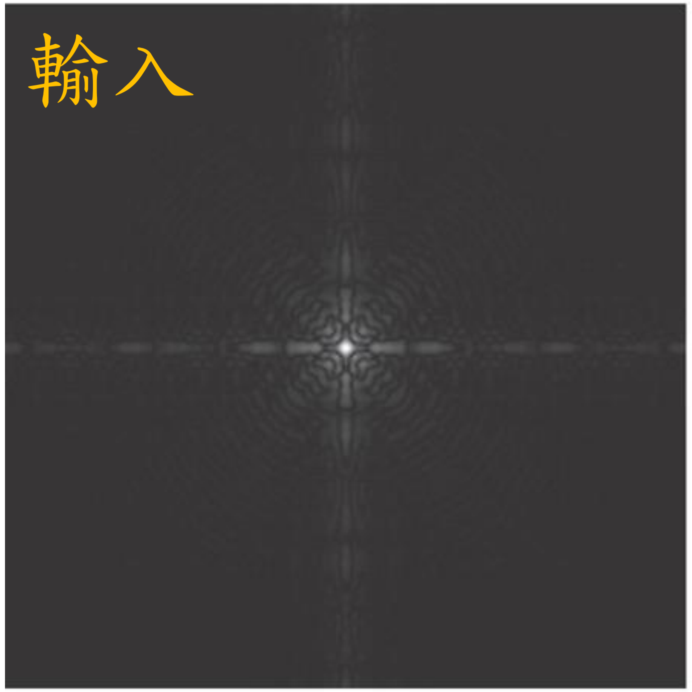
s = T(r)
s = log(1+r)

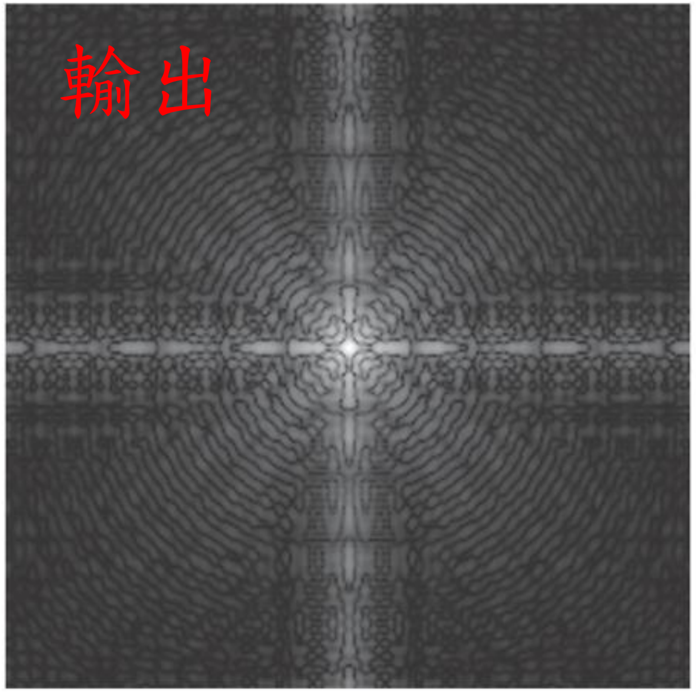


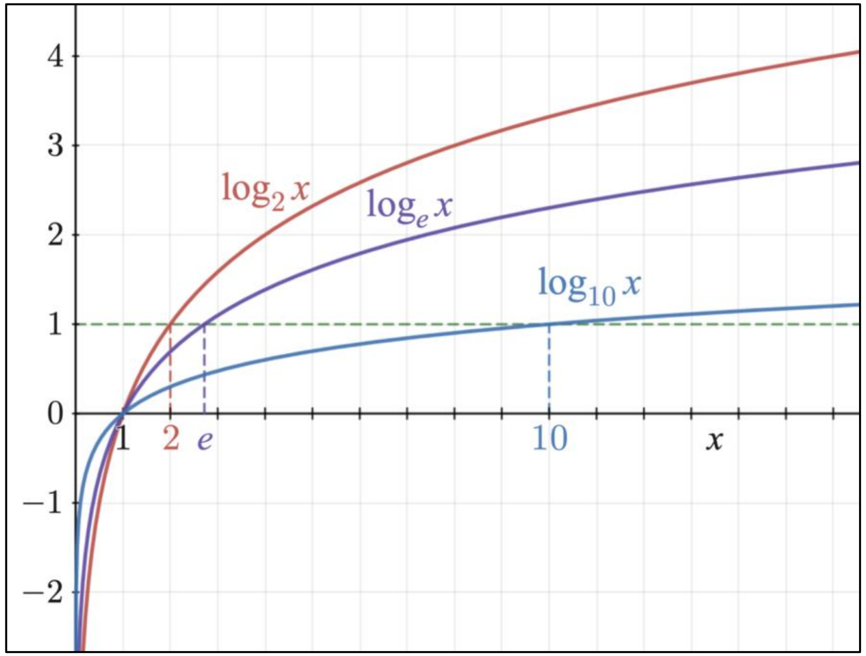
強度對數轉換

- 對數轉換 (log transformation)

s = log(1+r)







$r = 0 \sim 1.5\times10^6$

$\mathrm{Log}(1+r) = 0 \sim 6.2$

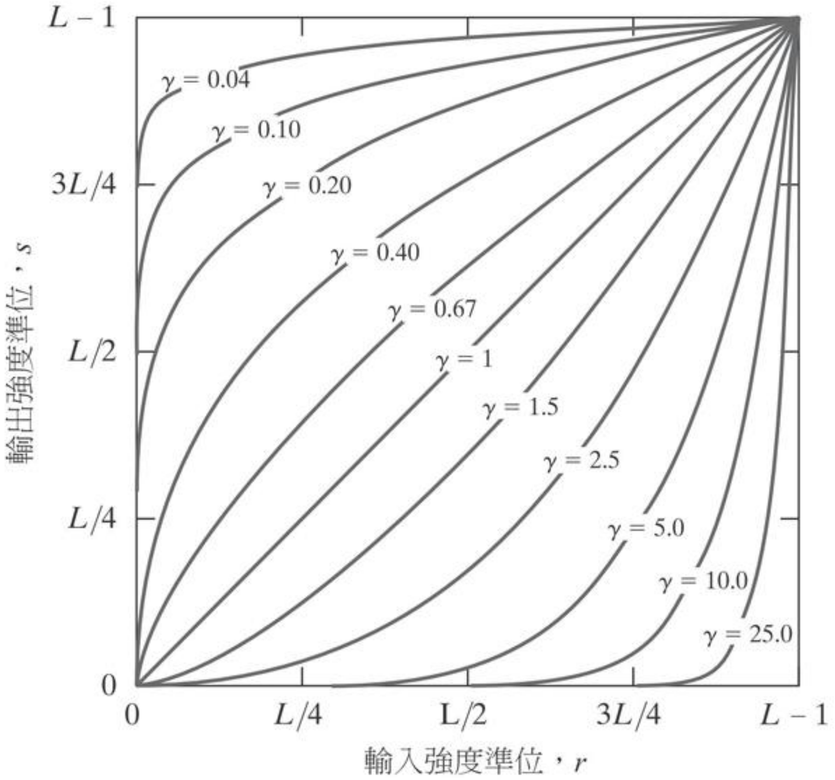
為啥不用log(r)?

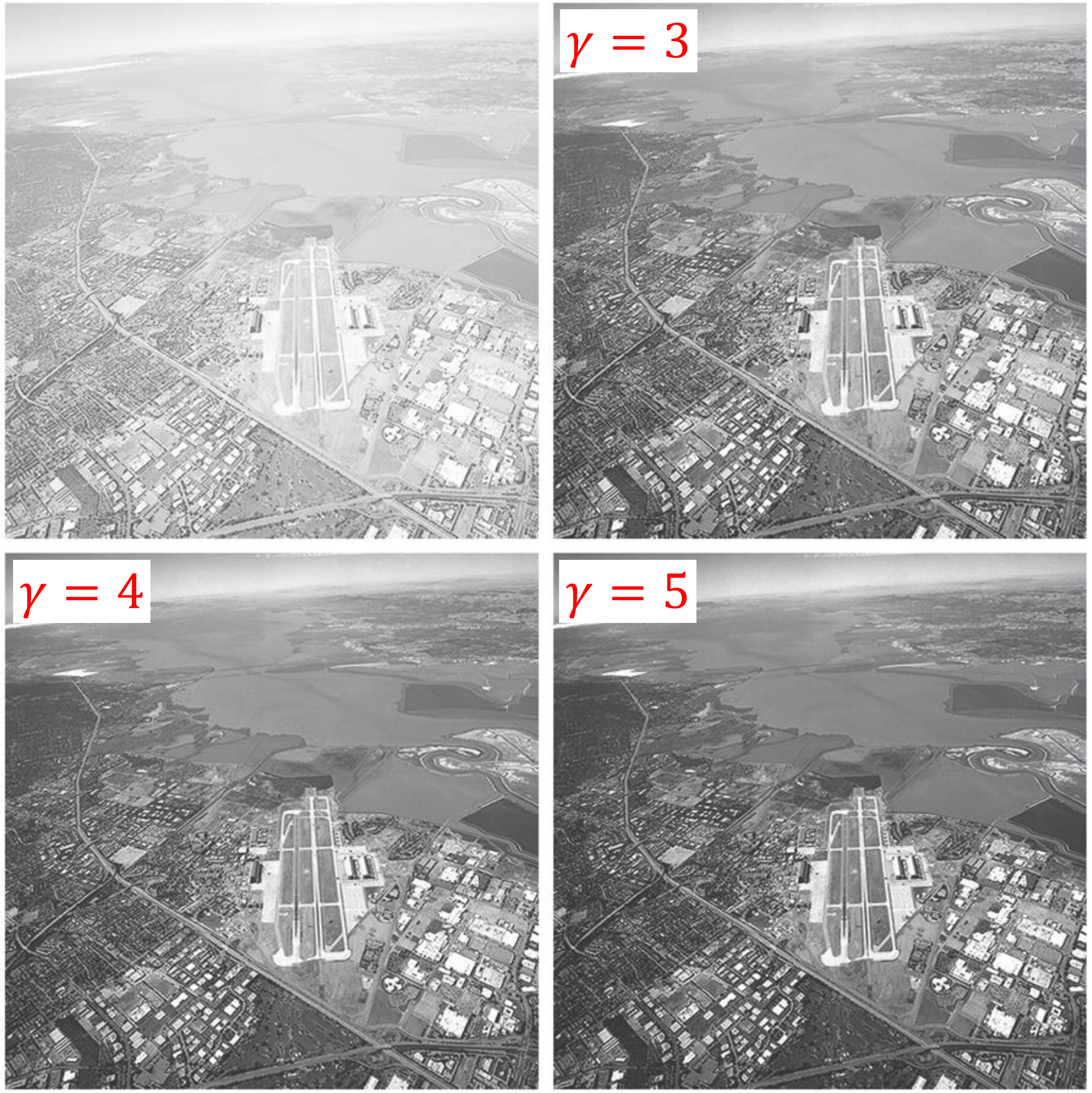
$\log(0) = -\infty$

空拍照片 使用Gamma矯正

$$s = cr^{\gamma}$$

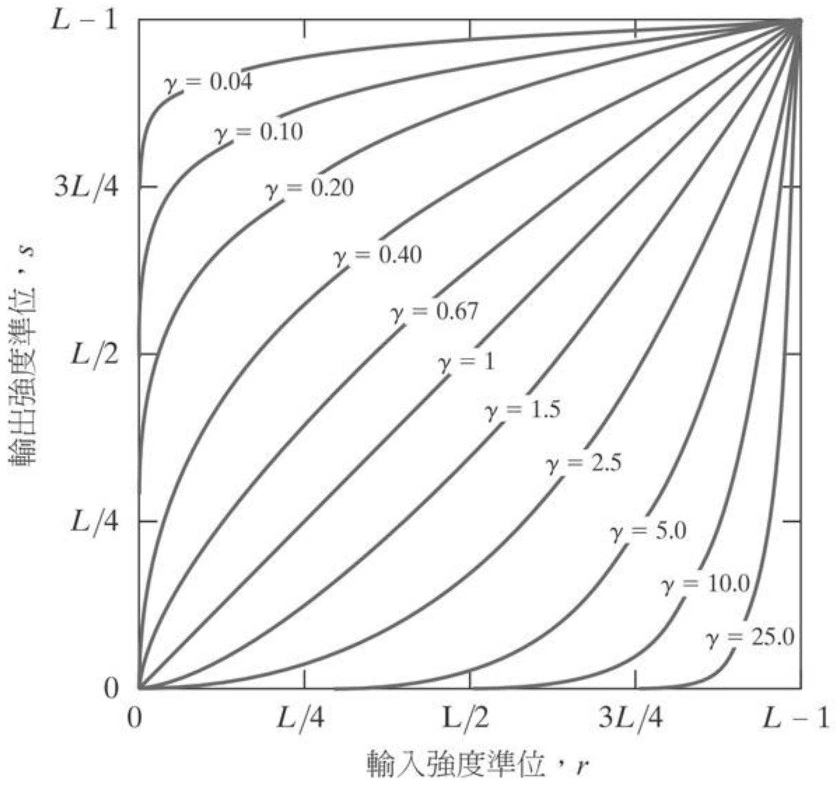
$\gamma > 1$， 更暗

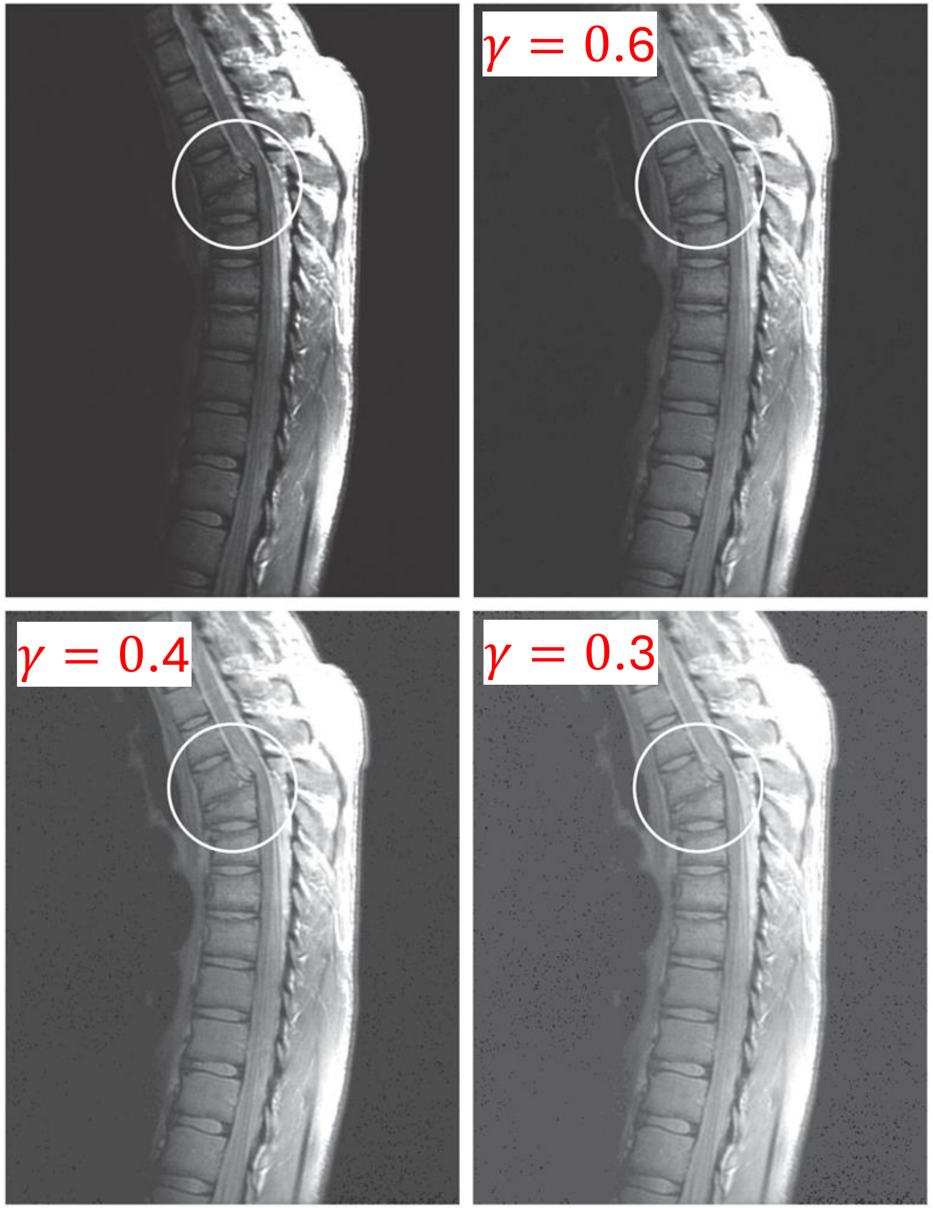




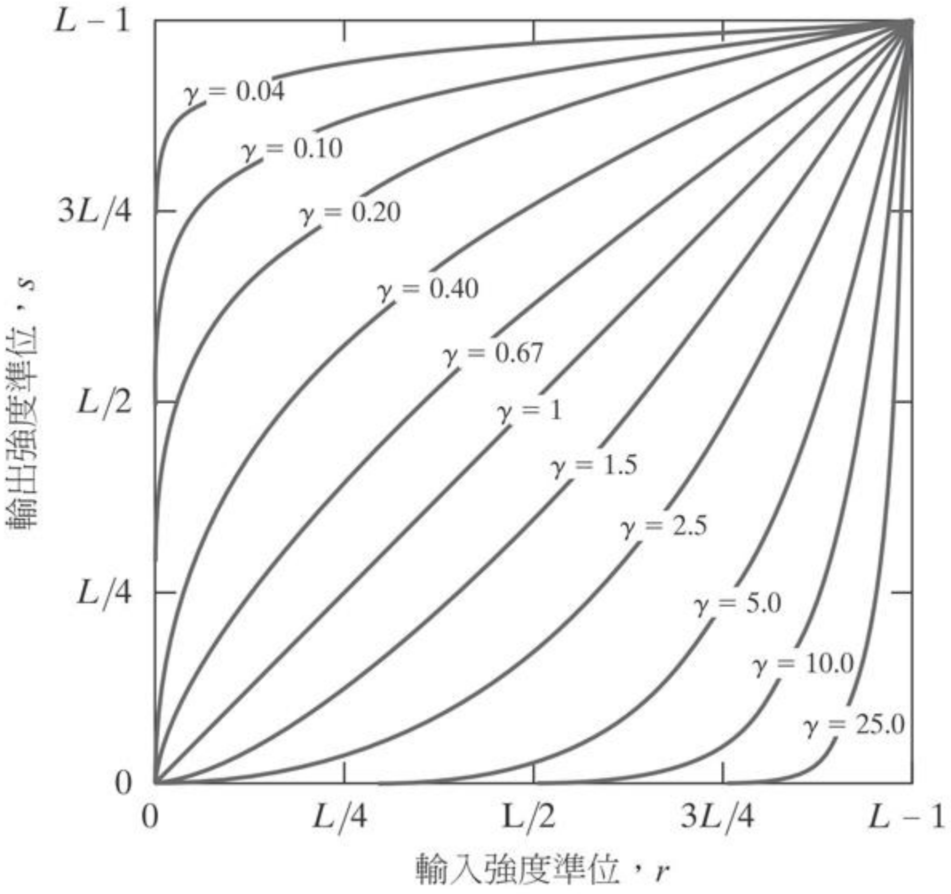
核磁共振(MRI)影像 使用Gamma矯正

γ<1 ， 更亮

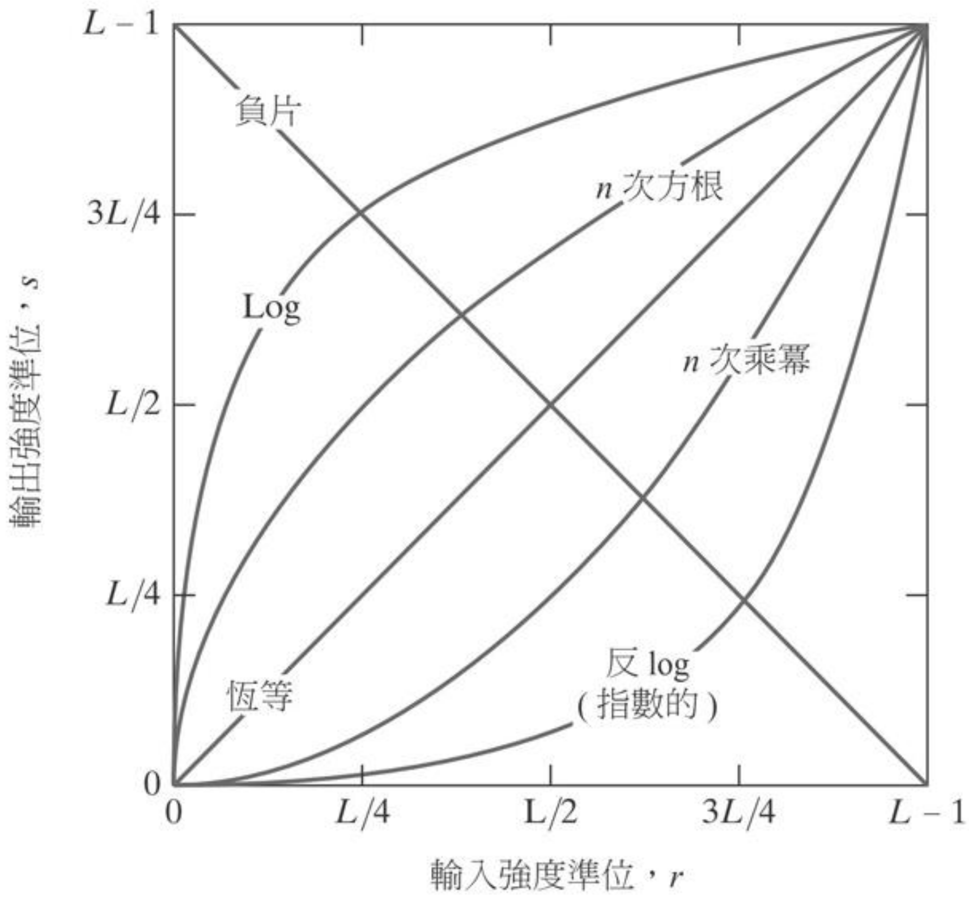




比較各個強度轉換函數



L − 1
3L/4
L/2
L/4
0
γ = 0.04
γ = 0.10
γ = 0.20
γ = 0.40
γ = 0.67
γ = 1
γ = 1.5
γ = 2.5
γ = 5.0
γ = 10.0
γ = 25.0
0
L/4
L/2
3L/4
L − 1
輸出強度準位，s
輸入強度準位，r

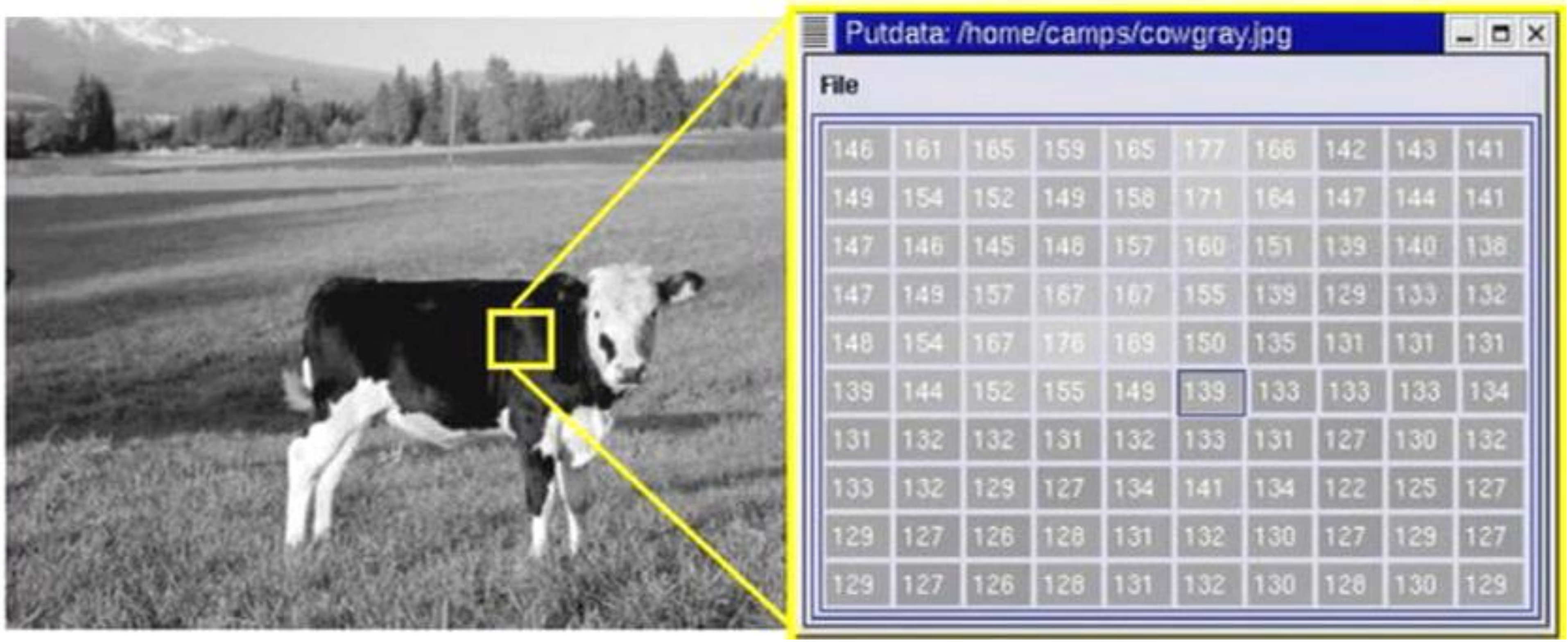


L − 1
3L/4
L/2
L/4
0
負片
n 次方根
Log
n 次乘冪
反 log
(指數的)
恆等
0
L/4
L/2
3L/4
L − 1
輸出強度準位，s
輸入強度準位，r

強度轉換函數 優缺點

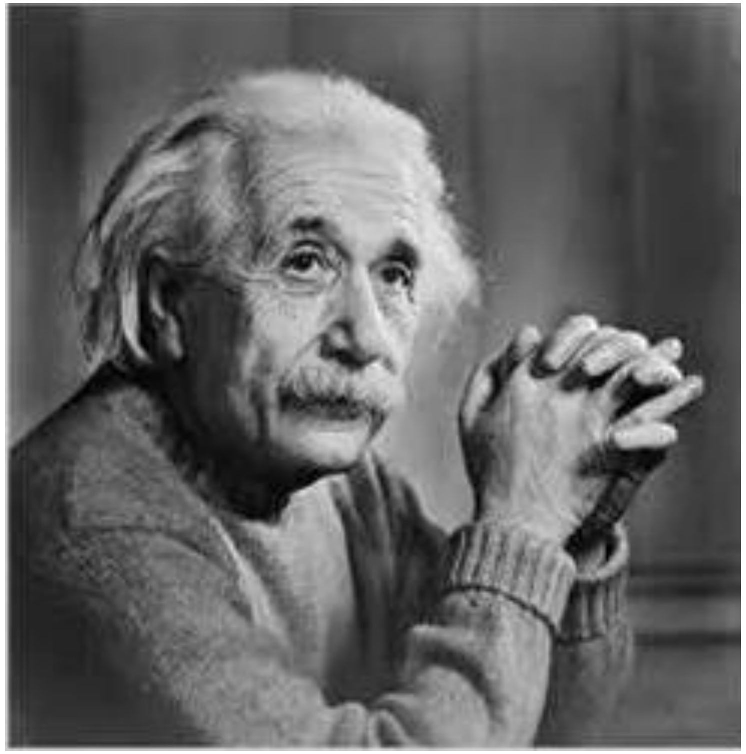
不考慮像素位置、特性，只看「像素值」

- 優點
  運算簡單
- 缺點
  效果有限

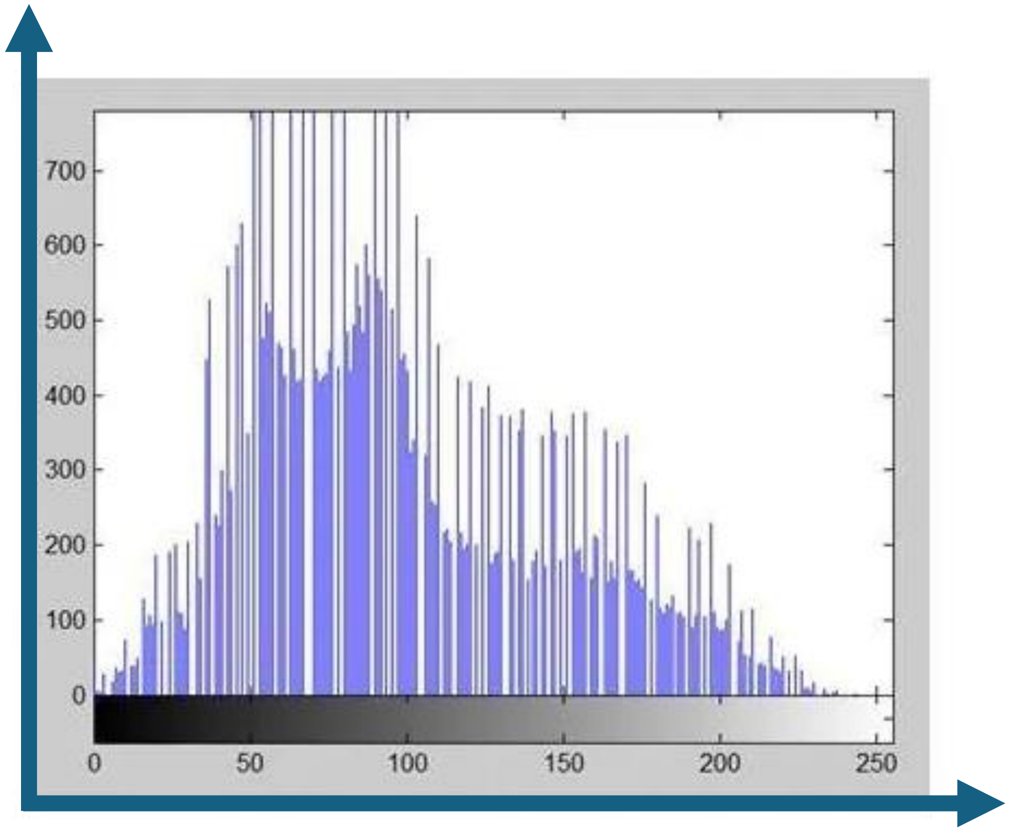


3.2 直方圖

- 數位影像的直方圖(Histogram)
  計算每一個像素質出現的次數，依此「次數」所繪製的統計圖。



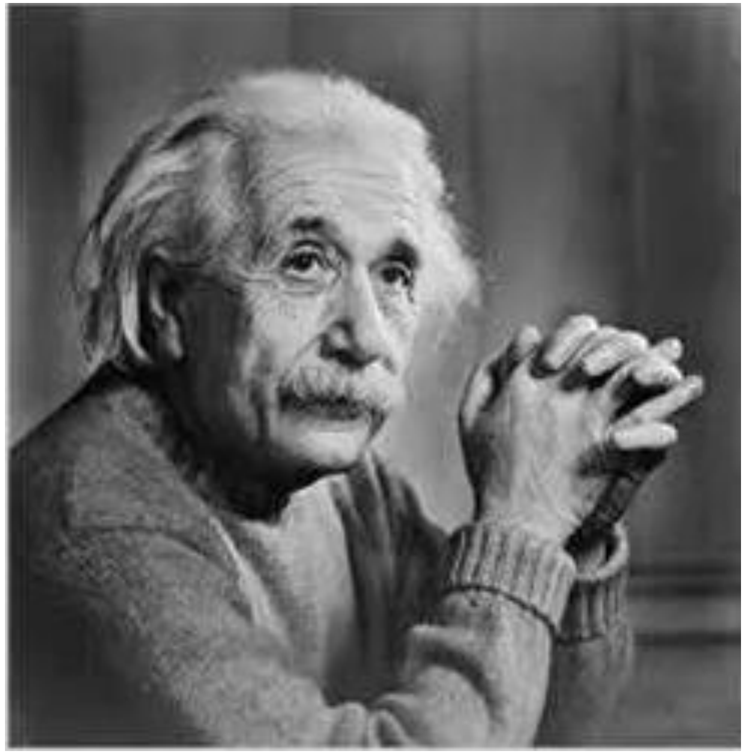
統計次數



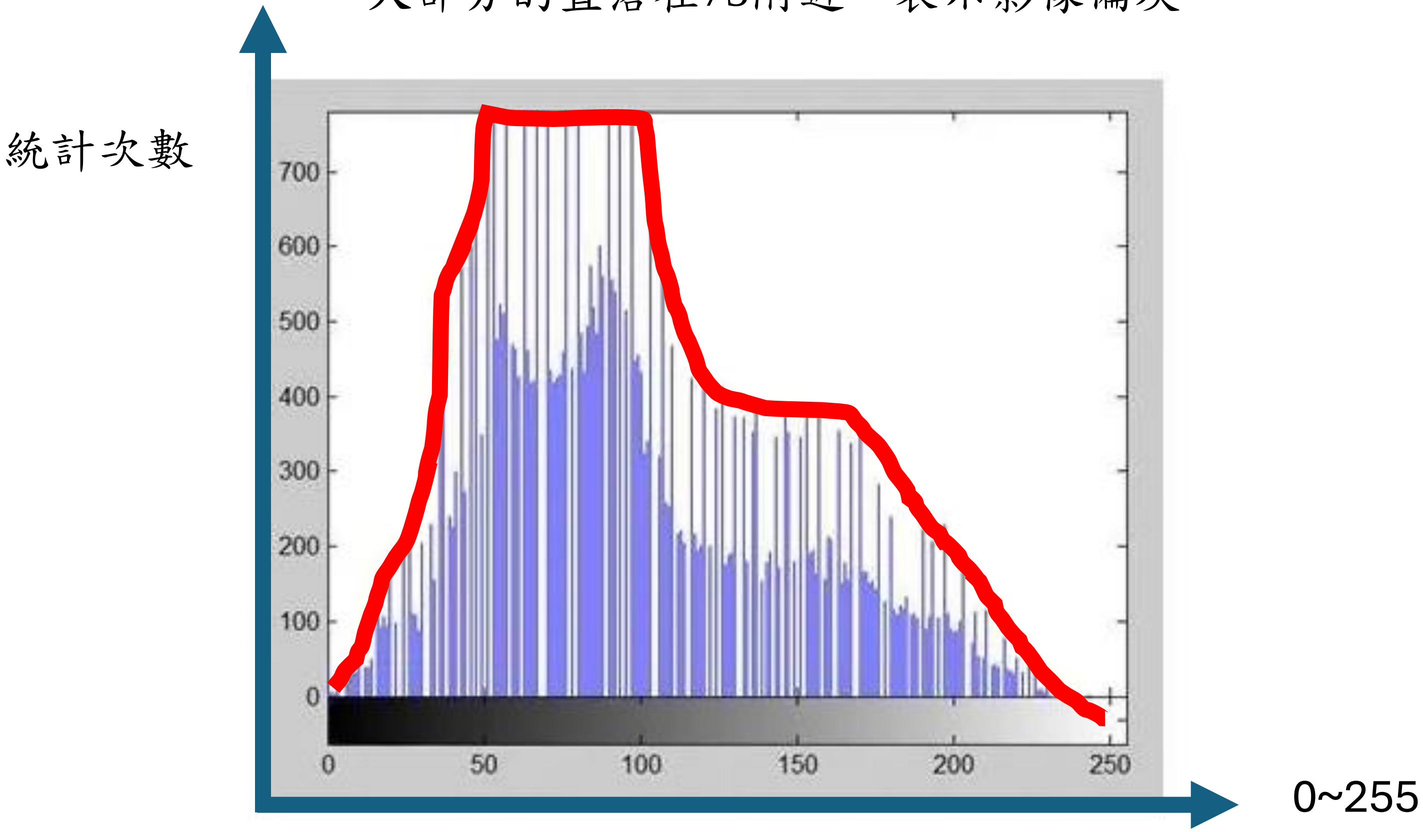
0~255

利用直方圖的好處

■ 快速給予我們統計分析的概念

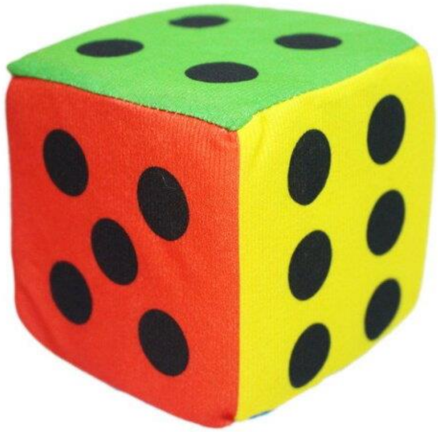


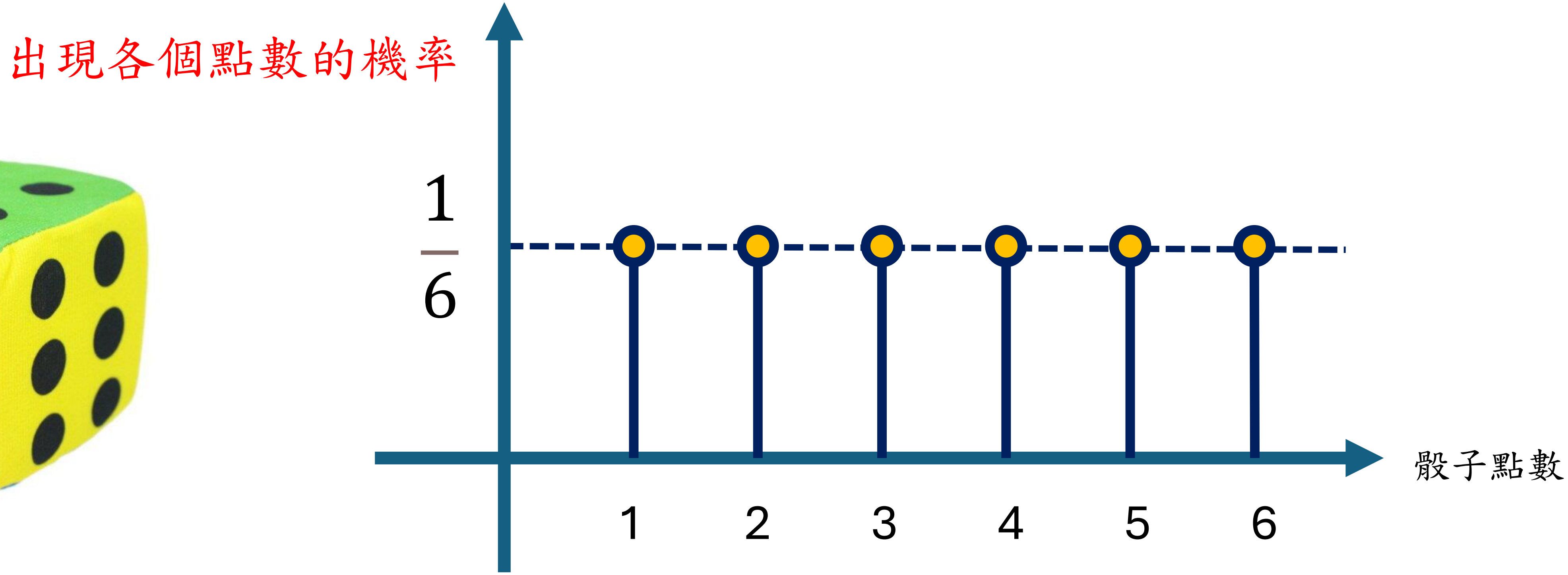
大部分的直落在75附近，表示影像偏灰



直方圖代表「機率分布」

- 機率質量函數(Probability mass function, PMF)
- 機率質量函數，代表離散隨機變數，在各特定取直上的機率
- 舉例「丟骰子」

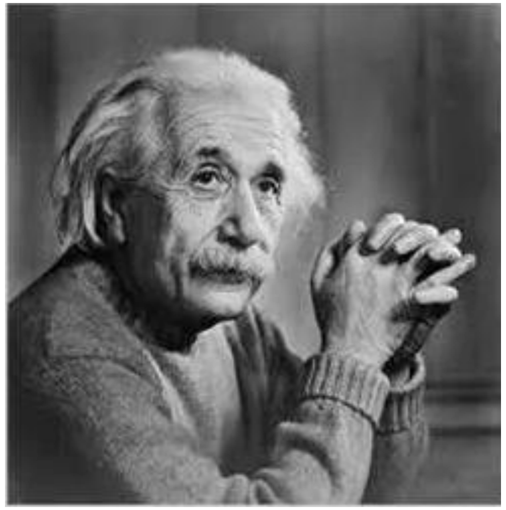


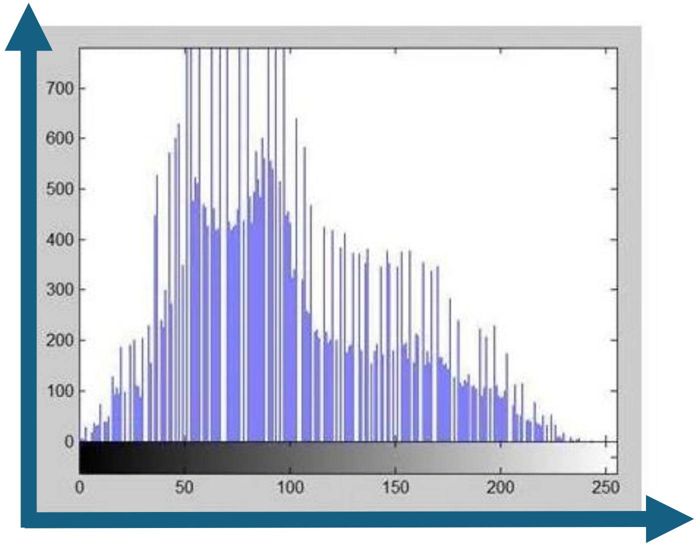


直方圖 vs. 機率質量函數

每個灰階值的像素個數

- 直方圖:



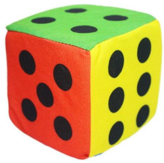


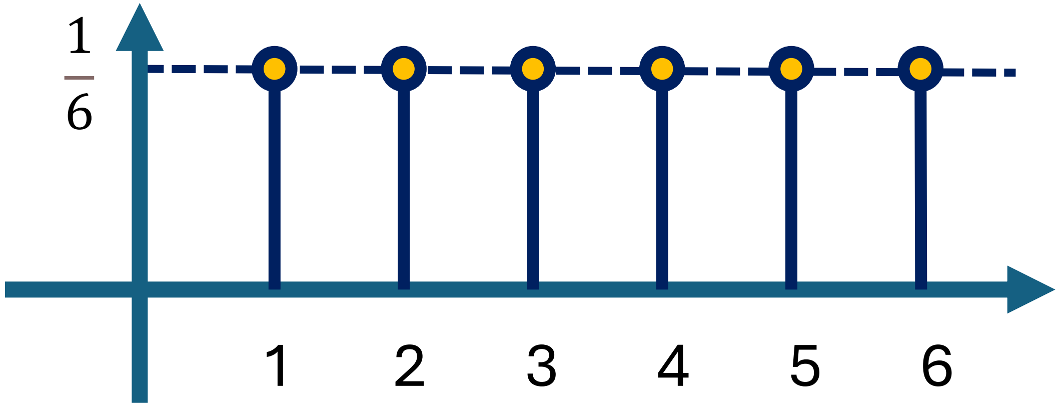
每個灰階的像素個數
———
影像總像素個數

出現各個點數的機率

- 機率質量函數:

「丟骰子」為例

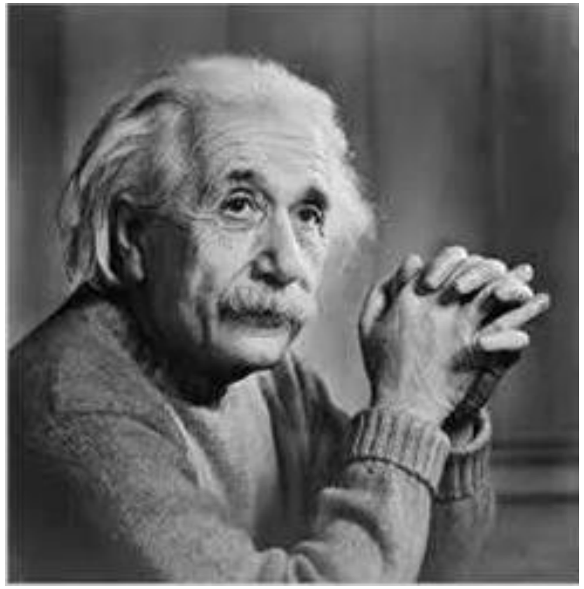


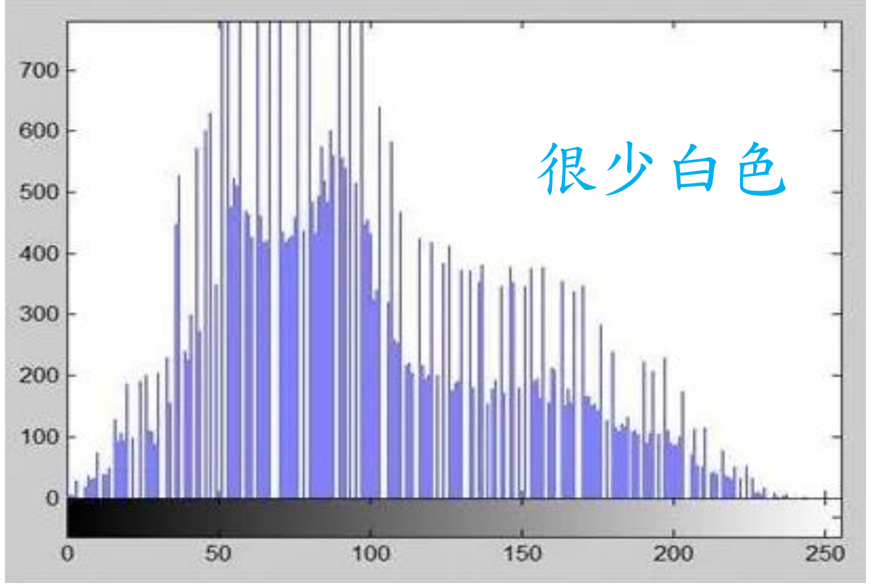


骰子點數

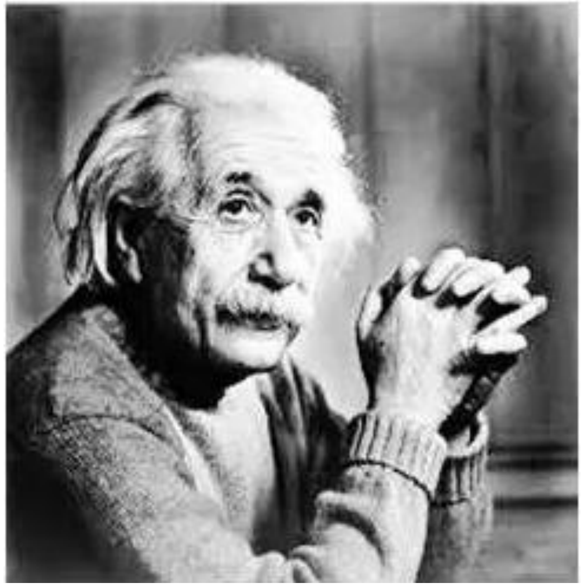
(等化前)直方圖 vs. (等化後)直方圖

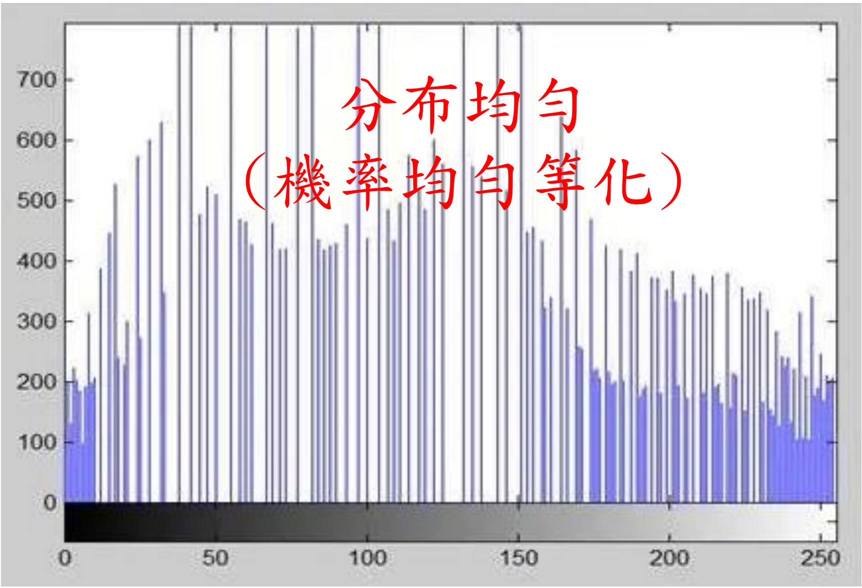
(等化前)





(等化後)



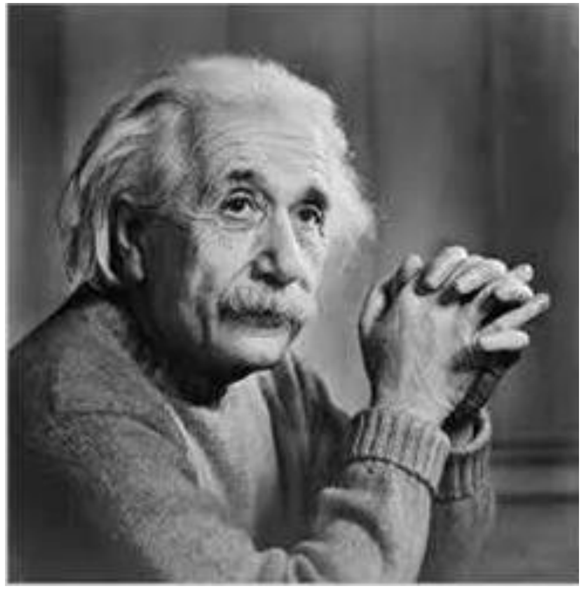


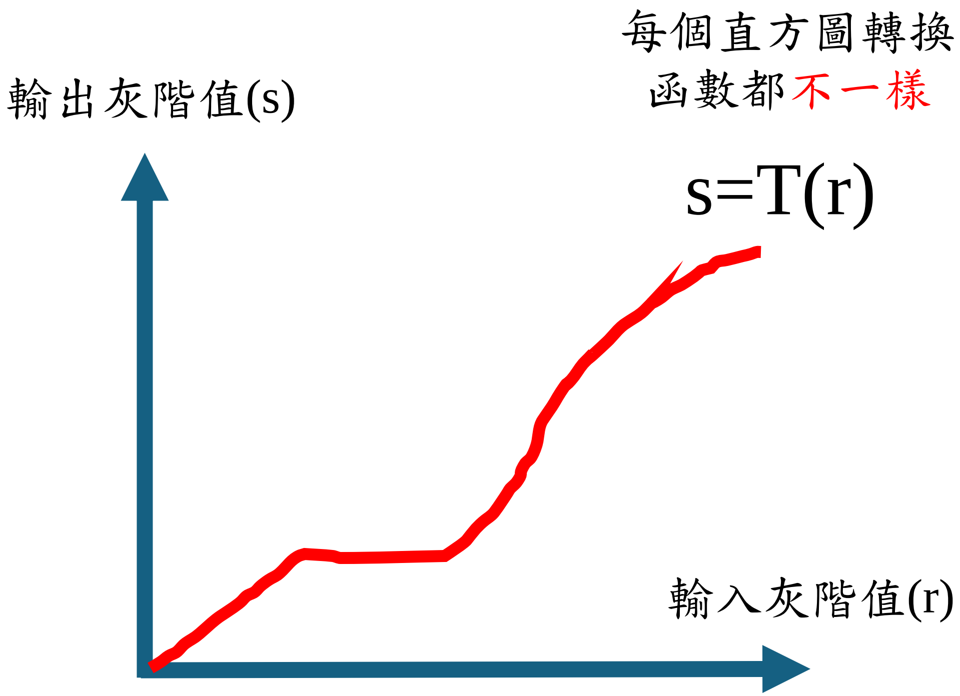
均匀等化

高對比度

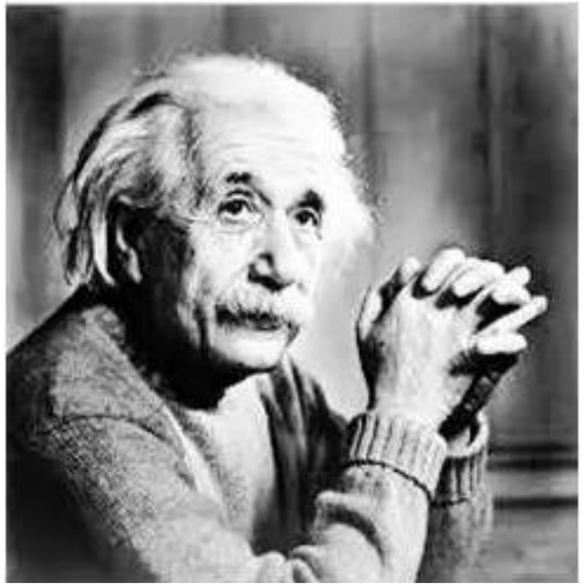
(直方圖等化) 強度轉換函數

■ 強度轉換函數: s=T(r)

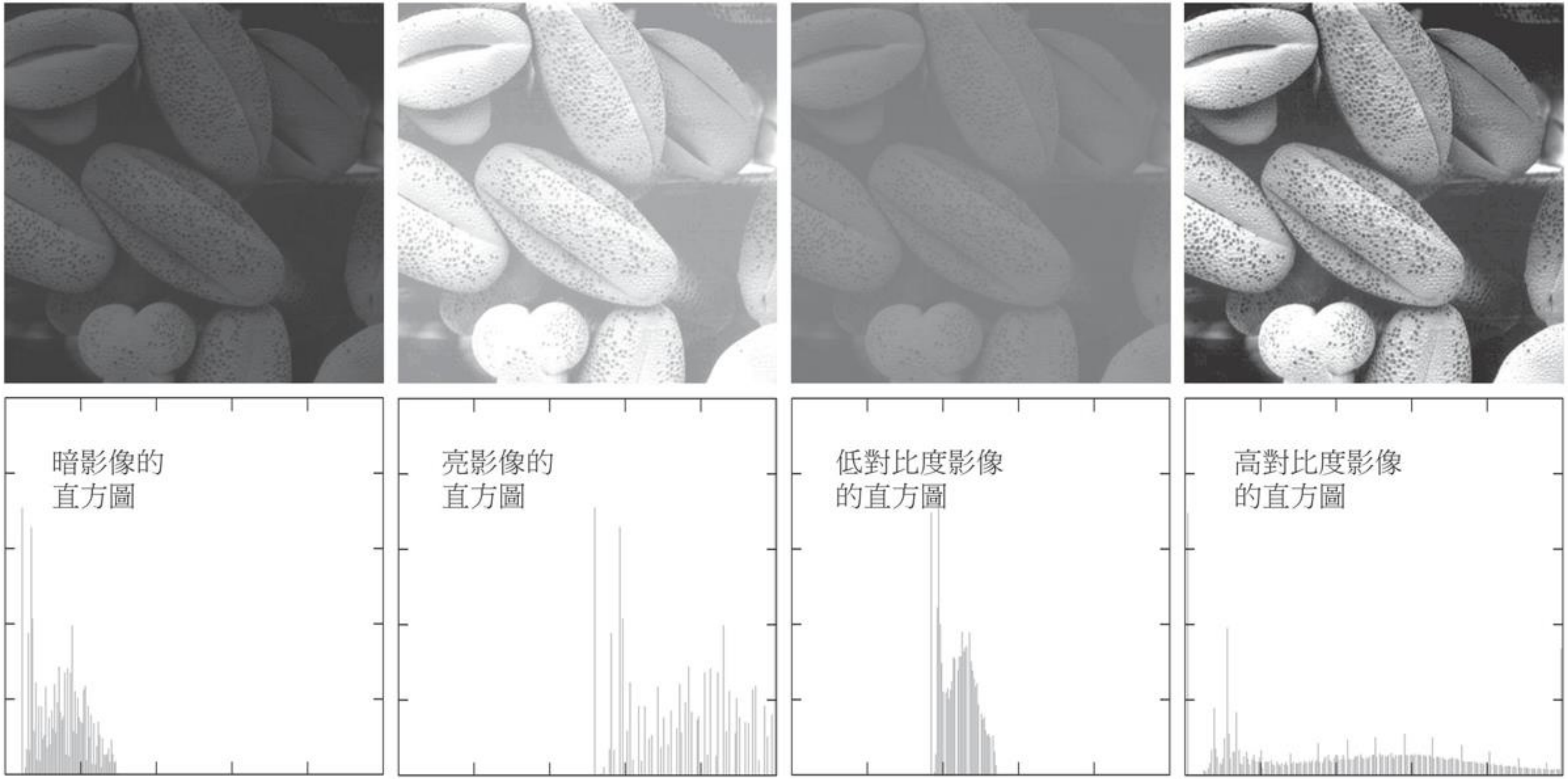




直方圖等化法



不同對比的照片



影像對比度強化的特性(1)

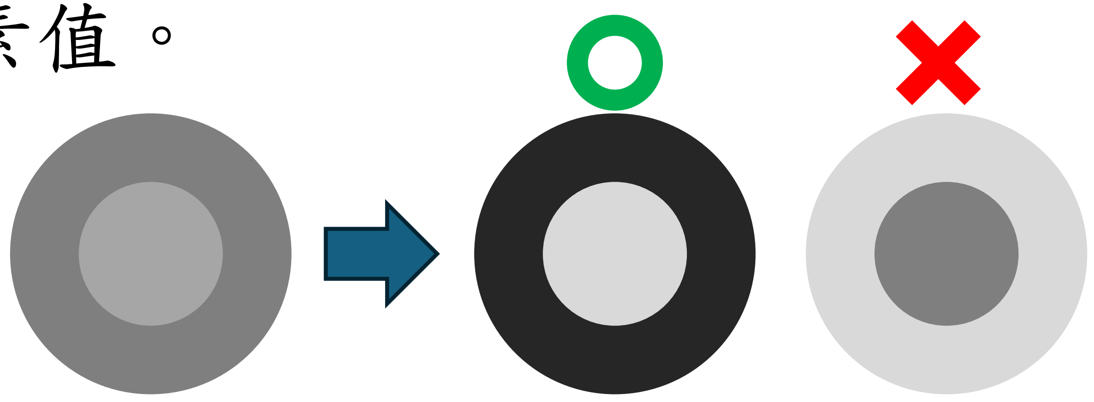
- **問題描述**

  給予一張輸入影像，找出一個「恰當的」強度轉換函數，使得輸出影像的對比度提高

- **轉換函數特性**

  輸入影像中，具有較大像素值的像素，經過轉換函數 s=T(r)，還是會輸出較大的像素值。

$$\text{If} \quad r_1 > r_2 \quad \Rightarrow \quad T(r_1) > T(r_2)$$



裡面亮外面暗　　保持裡面亮外面暗

影像對比度強化的特性(2)

■ 轉換函數特性

- ➢ 輸入影像中，具有較大像素值的像素，經過轉換函數 s=T(r)，還是會輸出較大的像素值。
- ➢ 此轉換函數是「多對一」函數。

If $r_1 \neq r_2$, $T(r_1) = T(r_2)$ 可以 (多對一)

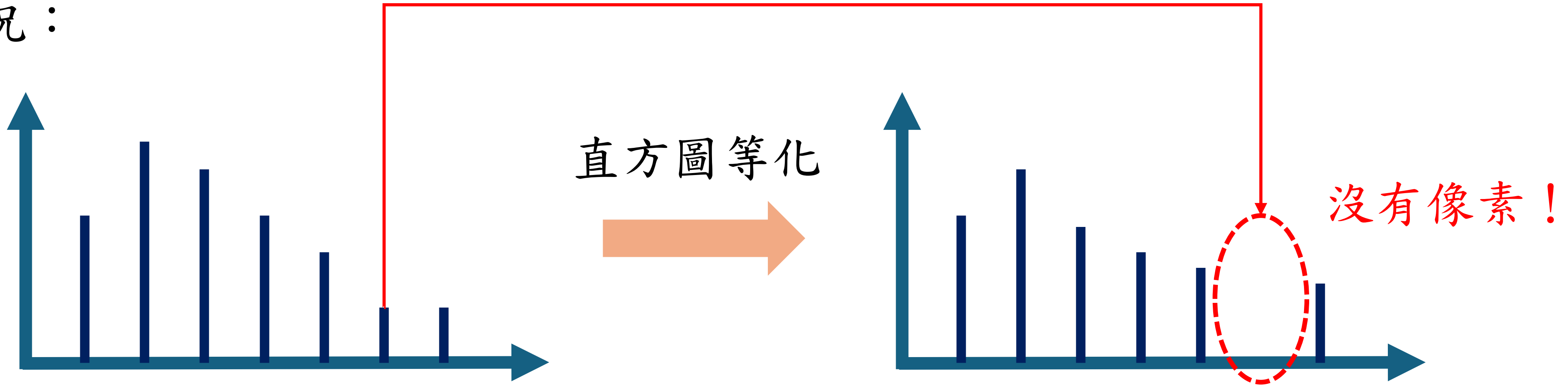
✖ If $r_1 = r_2$, $T(r_1) \neq T(r_2)$ 不可以！ (一對多)

影像對比度強化的特性(3)

■ 轉換函數特性

- 輸入影像中，具有較大像素值的像素，經過轉換函數 s=T(r)，還是會輸出較大的像素值。
- 此轉換函數是「多對一」函數。
- 影像經過此轉換函數，灰階資訊的流失「是必然的結果」。

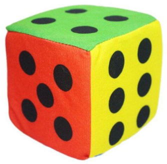
可能的情況：

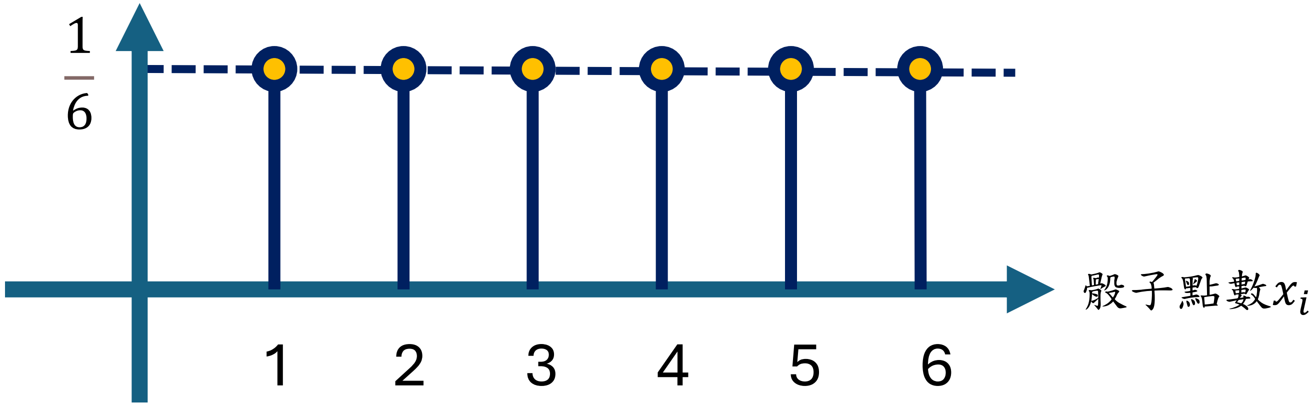


整理PMF、CDF

- 機率質量函數(PMF):

「丟骰子」為例





- 累積分佈函數(CDF, cumulative distribution function):

$$PMF(x_1) = \frac{1}{6}$$

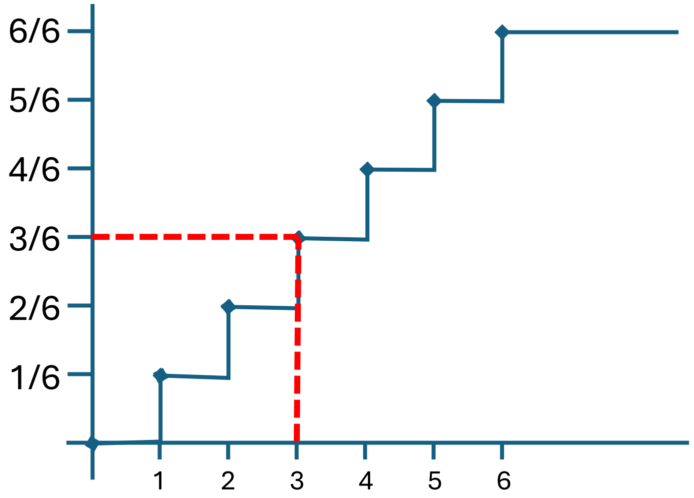
$$PMF(x_2) = \frac{1}{6}$$

$$\vdots$$

$$PMF(x_6) = \frac{1}{6}$$

$$CDF(x_k) = \sum_{i=1}^{k} PMF(x_i)$$

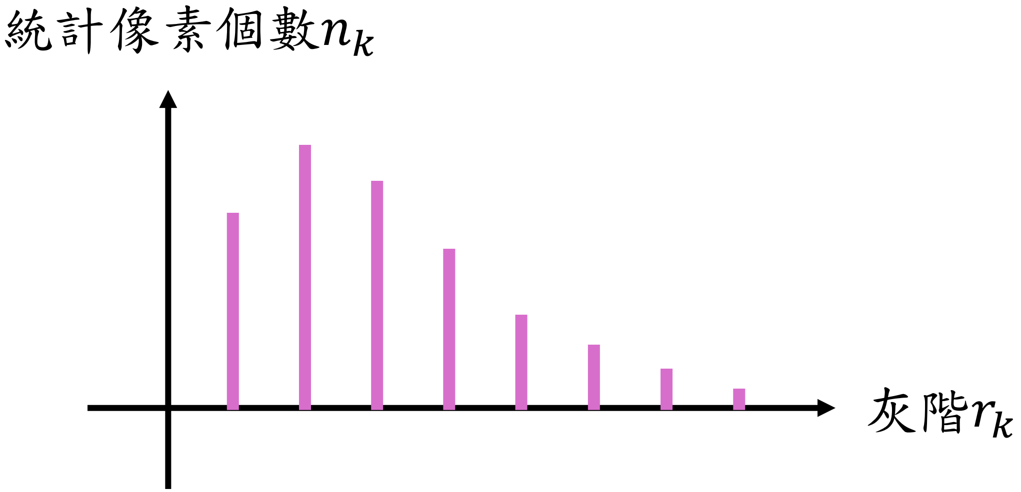
例題: $CDF(x_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$



直方圖等化例題(1)

- 假設有一張8階的64x64灰階影像，運用直方圖等化(HE)
- 找出轉換函數s=T(r)。

n_1= 750 ,n_2= 1023 ,n_3= 890 ,n_4= 656,
n_5= 329 ,n_6= 245 ,n_7= 122 ,n_8= 81



- 影像包含64x64=4096個像素。

$$CDF(r_8) = \sum_{i=1}^{8} PMF(r_i)$$

$$= n_1 + n_2 + \cdots n_8$$

$$= 4096$$

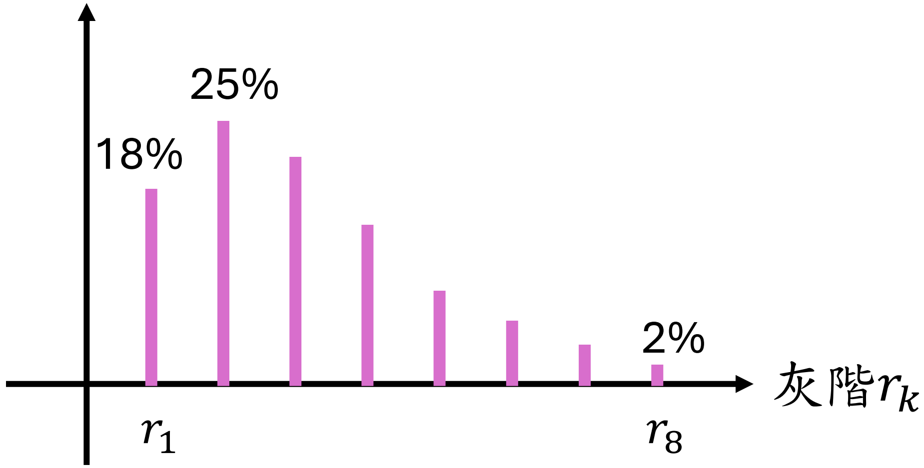
直方圖等化例題(1) 步驟一 計算PMF

$$PMF(r_k) = \frac{n_k}{\mathrm{N}}$$

n_1= 750 ,n_2= 1023 ,n_3= 890 ,n_4= 656,
n_5= 329 ,n_6= 245 ,n_7= 122 ,n_8= 81

$$PMF(r_1) = \frac{n_1}{\mathrm{N}} = \frac{750}{4096} = 0.18$$
$$PMF(r_2) = \frac{n_2}{\mathrm{N}} 0.25$$
$$PMF(r_3) = \frac{n_3}{\mathrm{N}} 0.21$$
$$PMF(r_4) = \frac{n_4}{\mathrm{N}} 0.16$$
$$PMF(r_5) = \frac{n_5}{\mathrm{N}} 0.08$$
$$PMF(r_6) = \frac{n_6}{\mathrm{N}} 0.06$$
$$PMF(r_7) = \frac{n_7}{\mathrm{N}} 0.03$$
$$PMF(r_8) = \frac{n_8}{\mathrm{N}} 0.02$$

- 灰階值為r_1的像素有750個
- 占總像素(4096)裡面的18%

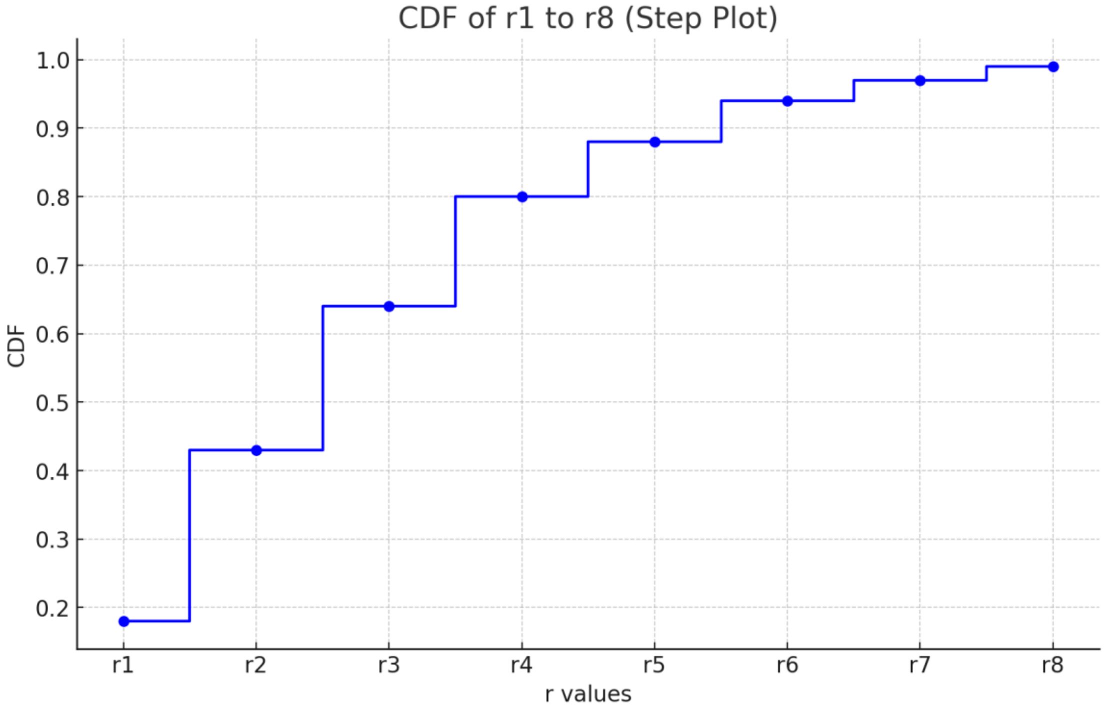


直方圖等化例題(1) 步驟二 計算CDF

$$CDF(r_k) = \sum_{i=1}^{k} PMF(r_i)$$

$PMF(r_1) = 0.18, PMF(r_2) = 0.25$
$PMF(r_3) = 0.21, PMF(r_4) = 0.16$
$PMF(r_5) = 0.08, PMF(r_6) = 0.06$
$PMF(r_7) = 0.03, PMF(r_8) = 0.02$

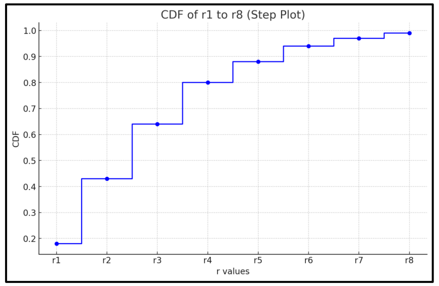
$CDF(r_1) = \sum_{i=1}^{1} PMF(r_i) = PMF(r_1) = 0.18$
$CDF(r_2) = \sum_{i=1}^{2} PMF(r_i) = PMF(r_1) + PMF(r_2) = 0.43$
$CDF(r_3) = \sum_{i=1}^{3} PMF(r_i) = 0.64$
$CDF(r_4) = \sum_{i=1}^{4} PMF(r_i) = 0.80$
$CDF(r_5) = \sum_{i=1}^{5} PMF(r_i) = 0.88$
$CDF(r_6) = \sum_{i=1}^{6} PMF(r_i) = 0.94$
$CDF(r_7) = \sum_{i=1}^{7} PMF(r_i) = 0.97$
$CDF(r_8) = \sum_{i=1}^{8} PMF(r_i) = 0.99$



直方圖等化例題(1) 步驟三 推導轉換公式

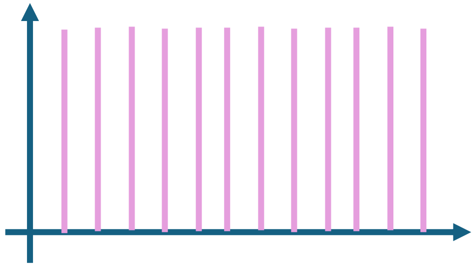
① $$s = T(r)$$ 轉換通式

② $$CDF(r_k) = \int_{r_{min}}^{r_k} P(\mathrm{r})\,\mathrm{d}r$$



CDF為PMF的累加

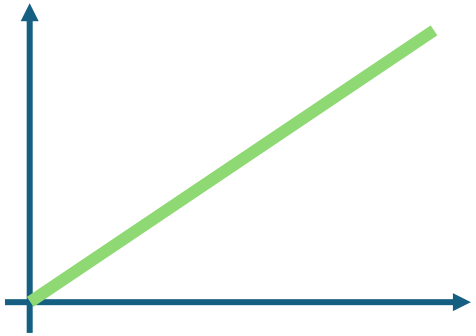
③ $$P(s_k) = \frac{1}{r_{max} - r_{min}}$$



設定轉換後的直方圖都是等量

直方圖等化例題(1) 步驟三 推導轉換公式

④ $$\int_{r_{min}}^{r_k} P(\mathrm{r})\,\mathrm{dr} = \int_{s_{min}}^{s_k} \frac{1}{r_{max} - r_{min}}\,\mathrm{ds}$$



設定轉換後的CDF是等量增長

⑤ 將②式帶入④式左側，並計算右側 $$CDF(r_k) = \frac{s_k - s_{min}}{r_{max} - r_{min}}$$

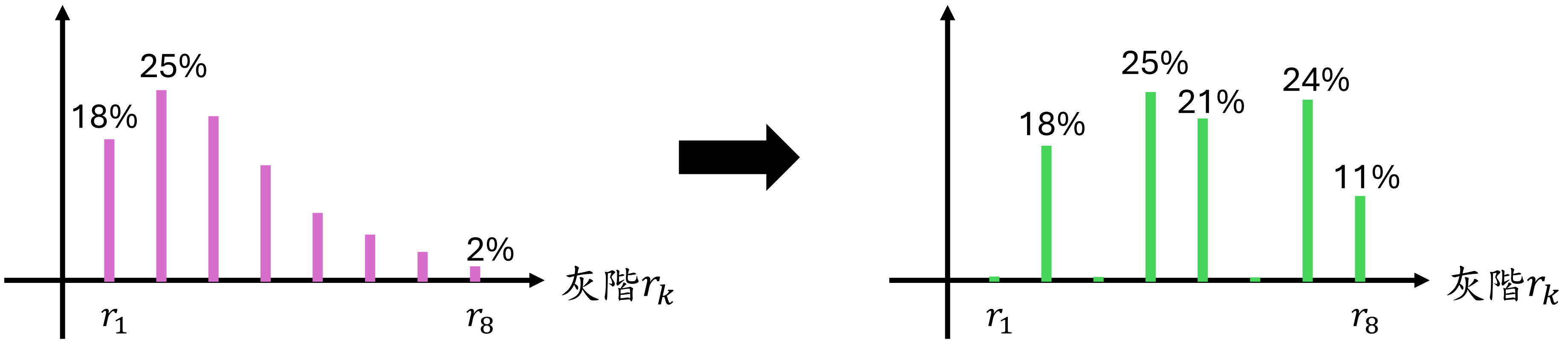
⑥ 移項整理得到 $$s_k = round(CDF(r_k) \times (r_{max} - r_{min}) + s_{min})$$

直方圖等化例題(1) 步驟三 計算s=T(r)

$$s_k = round(CDF(r_k) \times (r_{max} - r_{min}) + s_{min})$$

$$s_1 = round\left(CDF(r_1) \times (7-0)\right) = round(0.18 \times 7) = round(1.26) = 1$$
$$s_2 = round\left(CDF(r_2) \times (7-0)\right) = round(0.43 \times 7) = round(3.01) = 3$$
$$\vdots$$

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8
原始強度	0	1	2	3	4	5	6	7
轉換後強度	1	3	4	6	6	7	7	7



空間域影像定義

f:輸入影像 g:輸出影像

輸入影像f(x,y)，與四周數值，經某些**運算T**後得到輸出影像g(x,y)

空間域運算式: $g(x,y) = T[f(x,y)]$

空間濾波概念

空間域運算式:

$$g(x,y) = T[f(x,y)]$$

定義濾波遮罩(filter)大小，例如:3x3、 5x5、 7x7……

將濾波遮罩在輸入影像移動(左到右，上到下)，在每一點計算遮罩與涵蓋範圍的乘積和。

空間相關性(Correlation)運算

影像$f(x,y)$

f(x-1,y-1)	*f(x,y-1)*	*f(x+1,y-1)*
f(x-1,y)	*f(x,y)*	*f(x+1,y)*
f(x-1,y+1)	*f(x,y+1)*	*f(x+1,y+1)*

*

濾波器遮罩$w(s,t)$

W(-1,-1)	W(0,-1)	W(1,-1)
W(-1,0)	W(0,0)	W(1,0)
W(-1,1)	W(0,1)	W(1,1)

=

全部相加起來

f(x-1,y-1) · W(-1,-1)	+ *f(x,y-1)* · W(0,-1)	+ *f(x+1,y-1)* · W(1,-1)
+ *f(x-1,y)* · W(-1,0)	+ *f(x,y)* · W(0,0)	+ *f(x+1,y)* · W(1,0)
+ *f(x-1,y+1)* · W(-1,1)	+ *f(x,y+1)* · W(0,1)	+ *f(x+1,y+1)* · W(1,1)

$$g(x,y)=w(-1,-1)f(x-1,y-1)+w(-1,0)f(x-1,y)+\cdots+w(0,0)f(x,y)+\cdots+w(1,1)f(x+1,y+1)$$

空間相關性公式

$$g(x,y)=\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b} w(s,t)f(x+s,y+t)$$

$$g(x,y)=w(-1,-1)f(x-1,y-1)+w(-1,0)f(x-1,y)+\cdots$$
$$+w(0,0)f(x,y)+\cdots+w(1,1)f(x+1,y+1)$$

輸出 $\mathrm{g}(x,y)$

Sum(

$f(x-1,y-1)\cdot W(-1,-1)$	$f(x,y-1)\cdot W(0,-1)$	$f(x+1,y-1)\cdot W(1,-1)$
$f(x-1,y)\cdot W(-1,0)$	$f(x,y)\cdot W(0,0)$	$f(x+1,y)\cdot W(1,0)$
$f(x-1,y+1)\cdot W(-1,1)$	$f(x,y+1)\cdot W(0,1)$	$f(x+1,y+1)\cdot W(1,1)$

)

Example1:相關性運算

5x5 大小影像

1	1	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	0

*

3x3 kernel

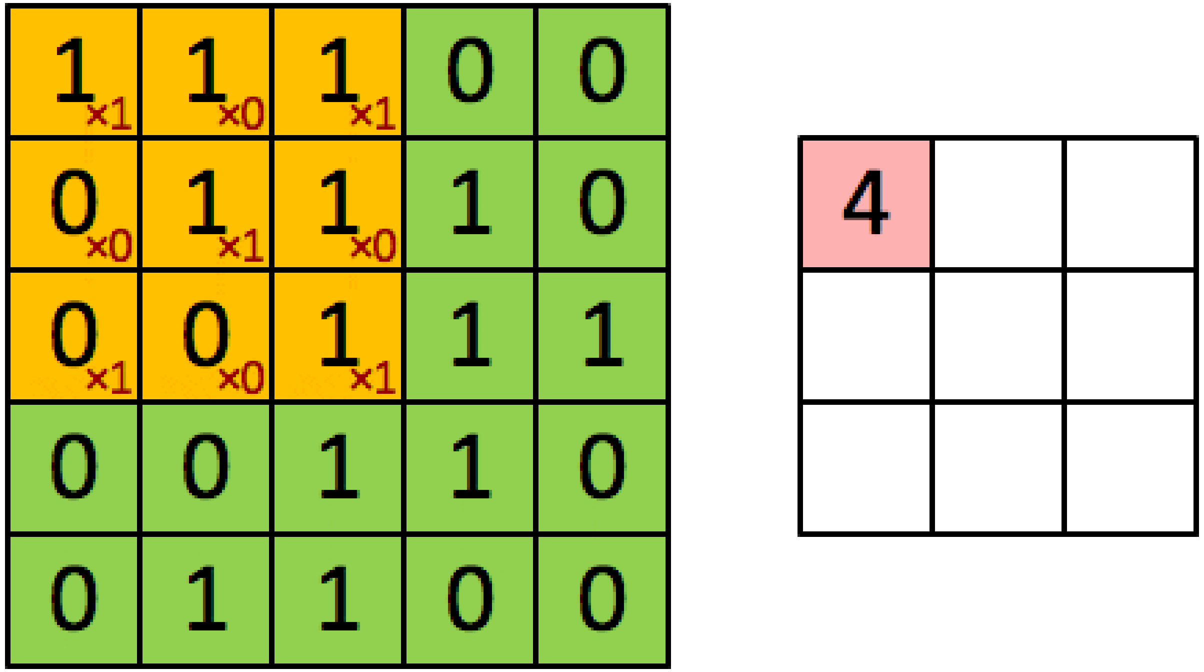
1	0	1
0	1	0
1	0	1

=

output

?	?	?
?	?	?
?	?	?

相關性運算 gif



Example1: 相關性運算 (解答)

5x5 大小影像

1	1	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	0

*

3x3 kernel

1	0	1
0	1	0
1	0	1

=

output

4	3	4
2	4	3
2	3	4

特徵圖反映了影像中斜線的特徵

1	1	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	0

1	0	1
0	1	0
1	0	1

特徵圖(Feature)

4	3	4
2	4	3
2	3	4

補空白Pad

影像

7	8	9
12	13	14
17	18	19

Padding影像

0	0	0	0	0
0	7	8	9	0
0	12	13	14	0
0	17	18	19	0
0	0	0	0	0

Kernel

1	0	0
0	1	0
0	0	1

可以運算了

0	0	0	0
0	7	8	9
0	12	13	14
0	17	18	19

濾波器名稱

書本常見的名稱：

- 濾波器（filter）
- 遮罩（mask）
- 核心（kernel）
- 模板（template）
- 窗（window）

卷積(Convolution)特性

性　質	卷　積	相關性
交換性的	$f \star g = g \star f$	—
結合性的	$f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$	—
分配性的	$f \star (g + h) = (f \star g) + (f \star h)$	$f \, ☆ \, (g + h) = (f \, ☆ \, g) + (f \, ☆ \, h)$

條件:在沒有邊界條件干擾的情況下才成立

- 交換性:不論它們的順序如何，卷積結果都是一樣的
- 結合性:無論先對哪兩個函數進行卷積，結果都是一樣的
- 分配性:卷積對於函數的加法是可以分配的

相關性(Correlation) vs. 卷積(Convolution)

相關性

$$(w \star f)(x, y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s, t) f(x + s, y + t)$$

卷積

$$(w \bigstar f)(x, y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s, t) f(x - s, y - t)$$

卷積(Convolution)特性(1):交換性

$$\boxed{f \star g = g \star f}$$

f

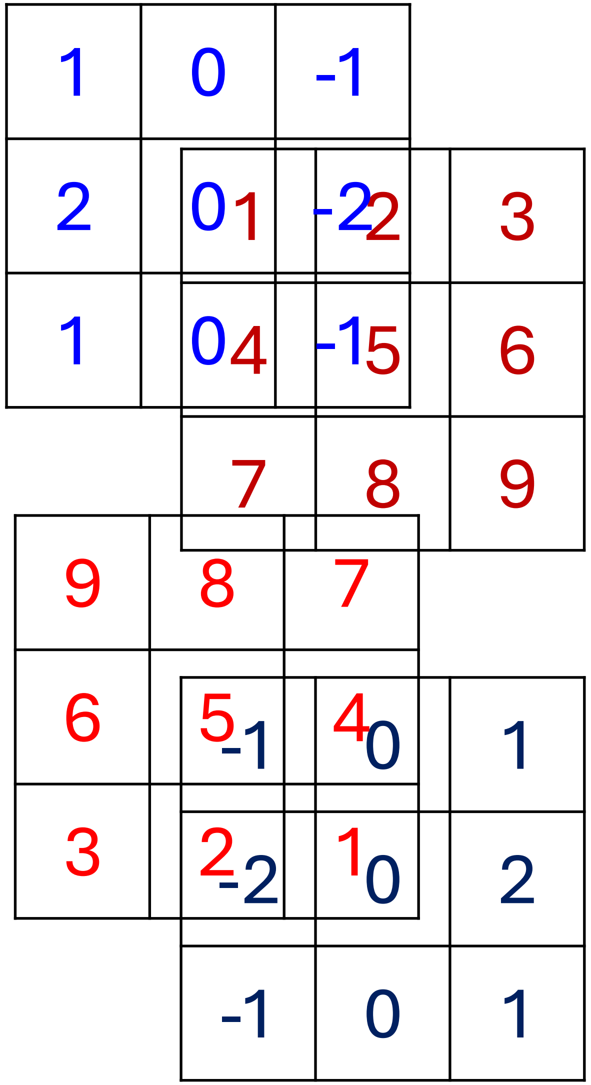
1	2	3
4	5	6
7	8	9

g

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

g'(翻轉)

1	0	-1
2	0	-2
1	0	-1



結果

-9	-6	9
-20	-8	20
-21	-6	21

g

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

f

1	2	3
4	5	6
7	8	9

f'(翻轉)

9	8	7
6	5	4
3	2	1

一樣

結果

-9	-6	9
-20	-8	20
-21	-6	21

卷積(Convolution)特性(2):結合性

$f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$

f	1	2	3

g	4	5	6

h	0	1	2

0	0	4	5	6	0	0

2	1	0

=

$g * h$	0	4	13	16	12

0	0	0	0	1	2	3	0	0	0	0

12	16	13	4	0

=

$f * (g * h)$	0	4	21	54	83	72	36

0	0	1	2	3	0	0

6	5	4

=

$f * g$	4	13	28	27	18

0	0	4	13	28	27	18	0	0

2	1	0

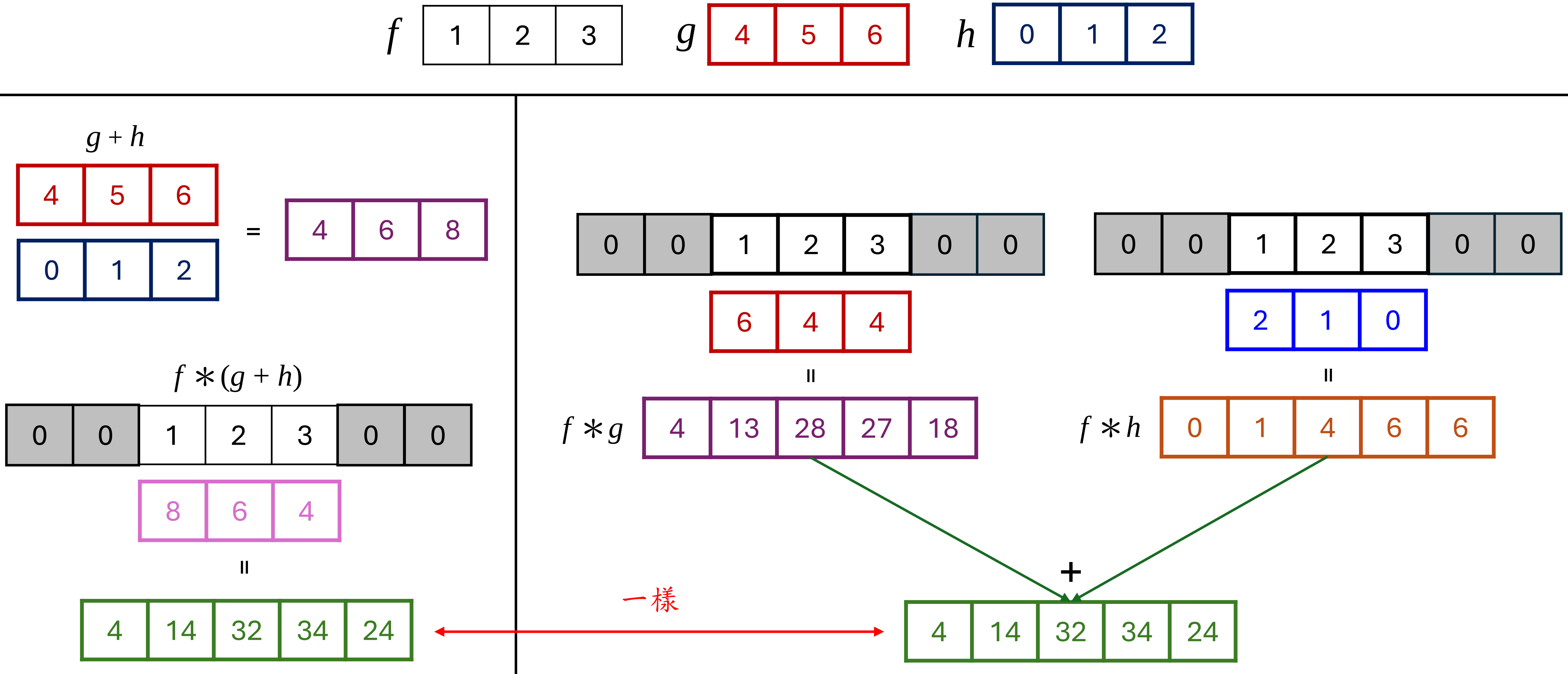
=

$(f * g) * h$	0	4	21	54	83	72	36

一樣

卷積(Convolution)特性(3):分配性

$$f \star (g+h) = (f \star g) + (f \star h)$$



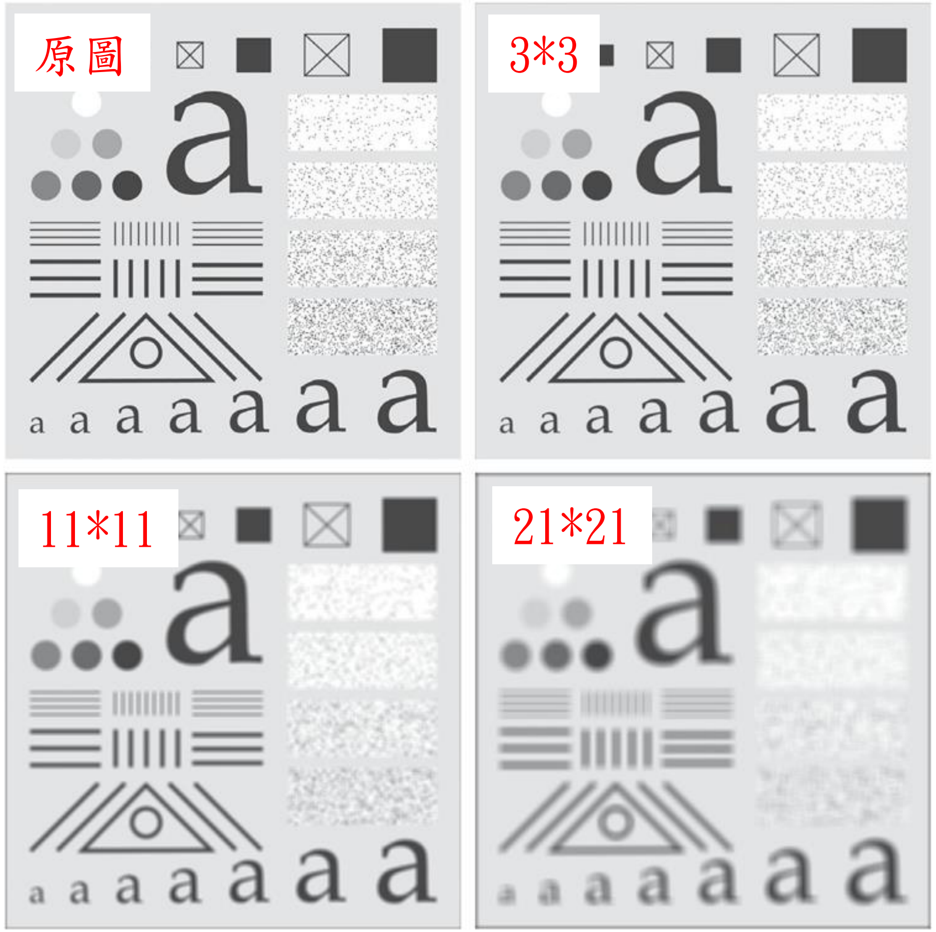
但是

卷積核的倒轉是一個數學必要步驟，但對於像邊緣檢測這樣的應用，卷積核本身的設計才是真正決定特徵提取效果的關鍵。卷積核倒轉並不是直接負責提取特徵，而是為了確保卷積運算的數學正確性。

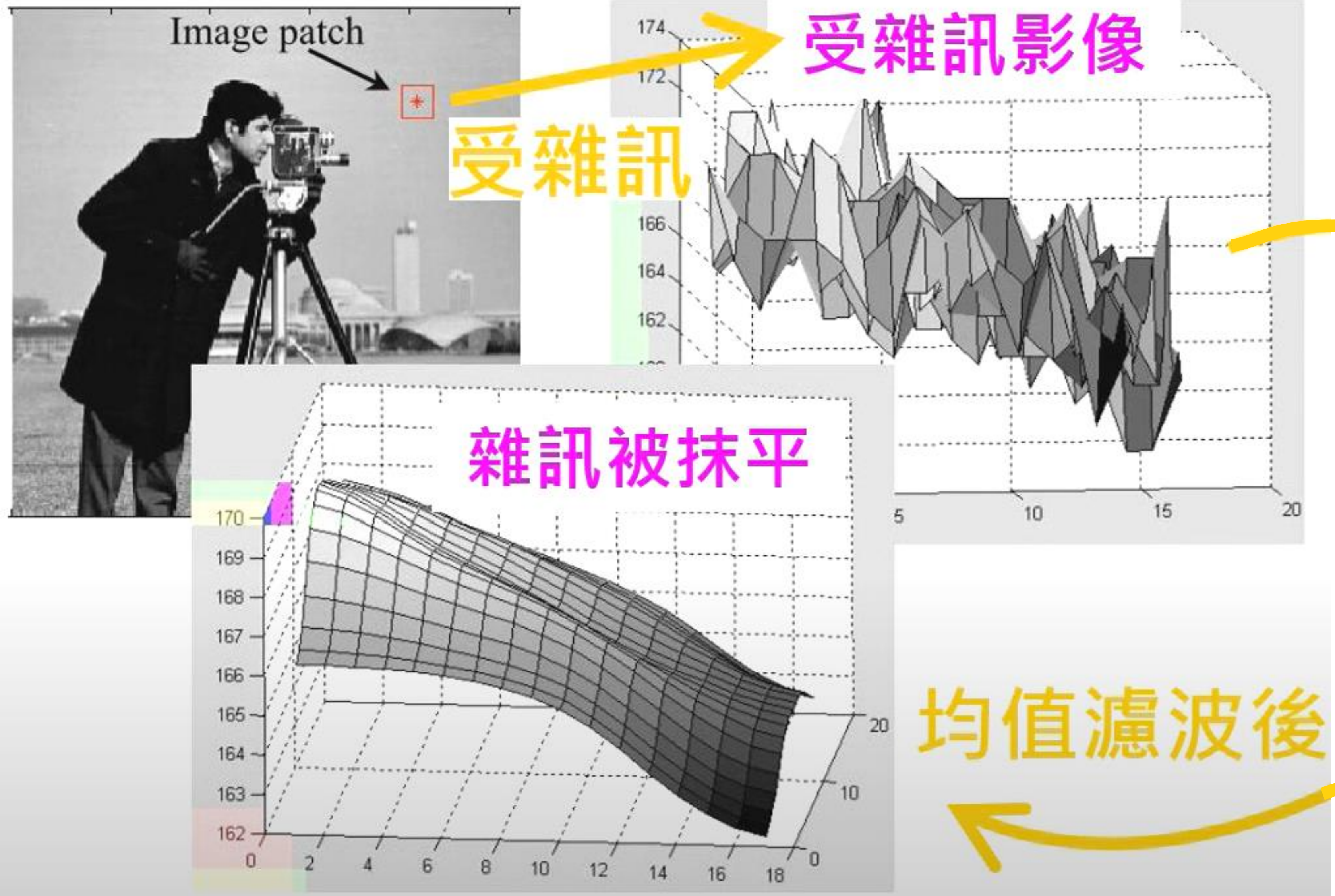
卷積核倒轉在訊號處理比較有用、影像處理還好。

空間-均值濾波(模糊)

$$\frac{1}{9} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

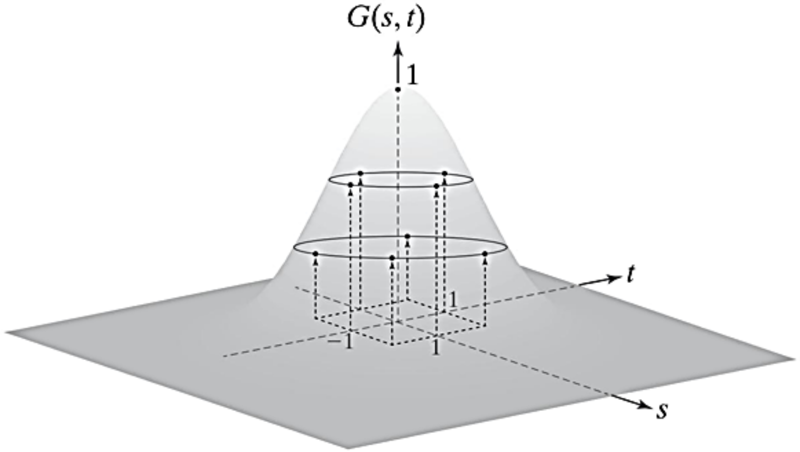


空間-均值濾波 (模糊)



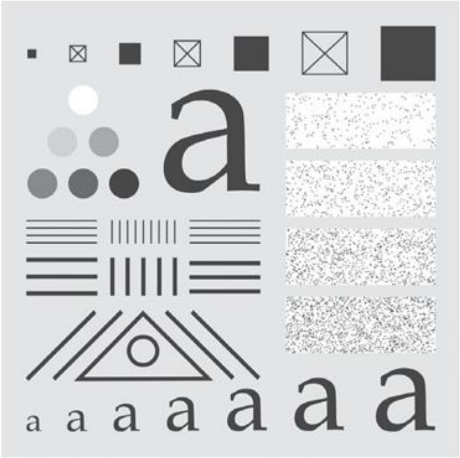
$$\frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

空間-高斯濾波 (模糊)

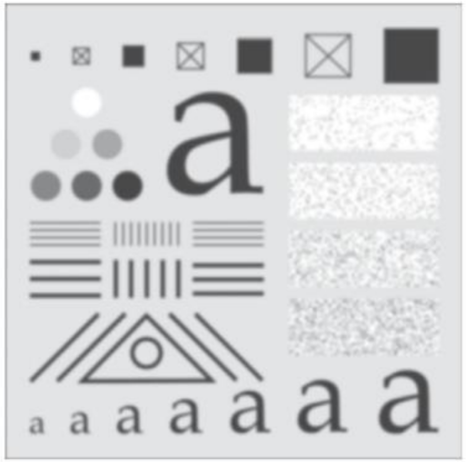


$\frac{1}{4.8976} \times$

0.3679	0.6065	0.3679
0.6065	1.0000	0.6065
0.3679	0.6065	0.3679



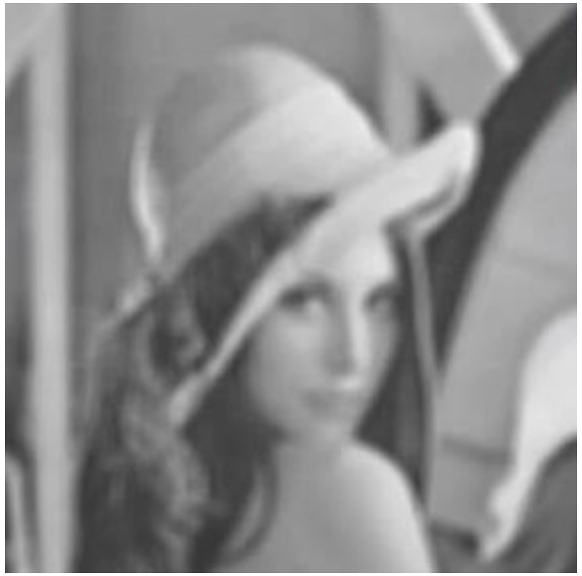
21x21 $\sigma = 3.5$



43x43 $\sigma = 7$

同樣都是7*7的遮罩

均值濾波



高斯濾波

較能保留原圖

空間-中值(Median)濾波 (去除胡椒超猛)

假設這是一個3*3的遮罩選取的範圍

6	2	0
3	97	4
19	3	10

6	2	0	3	97	4	19	3	10

sorting

0	2	3	3	4	6	10	15	97

*	*	*
*	4	*
*	*	*

原圖含有噪點

中值濾波

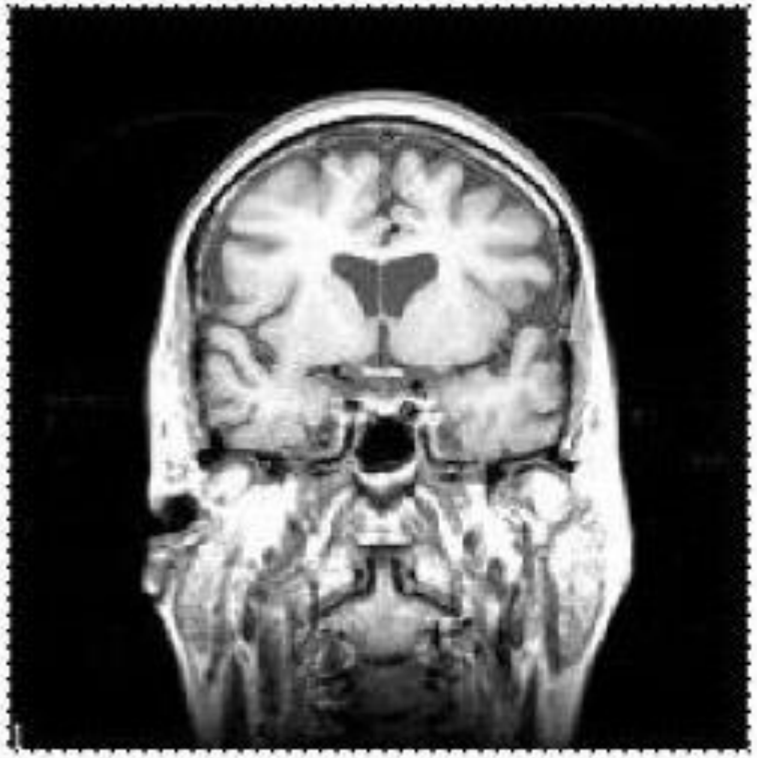
去除高頻噪點

均值濾波

空間-拉普拉斯運算子 (抓邊緣)

遮罩

0	1	0
1	−4	1
0	1	0



(A) Original MR image

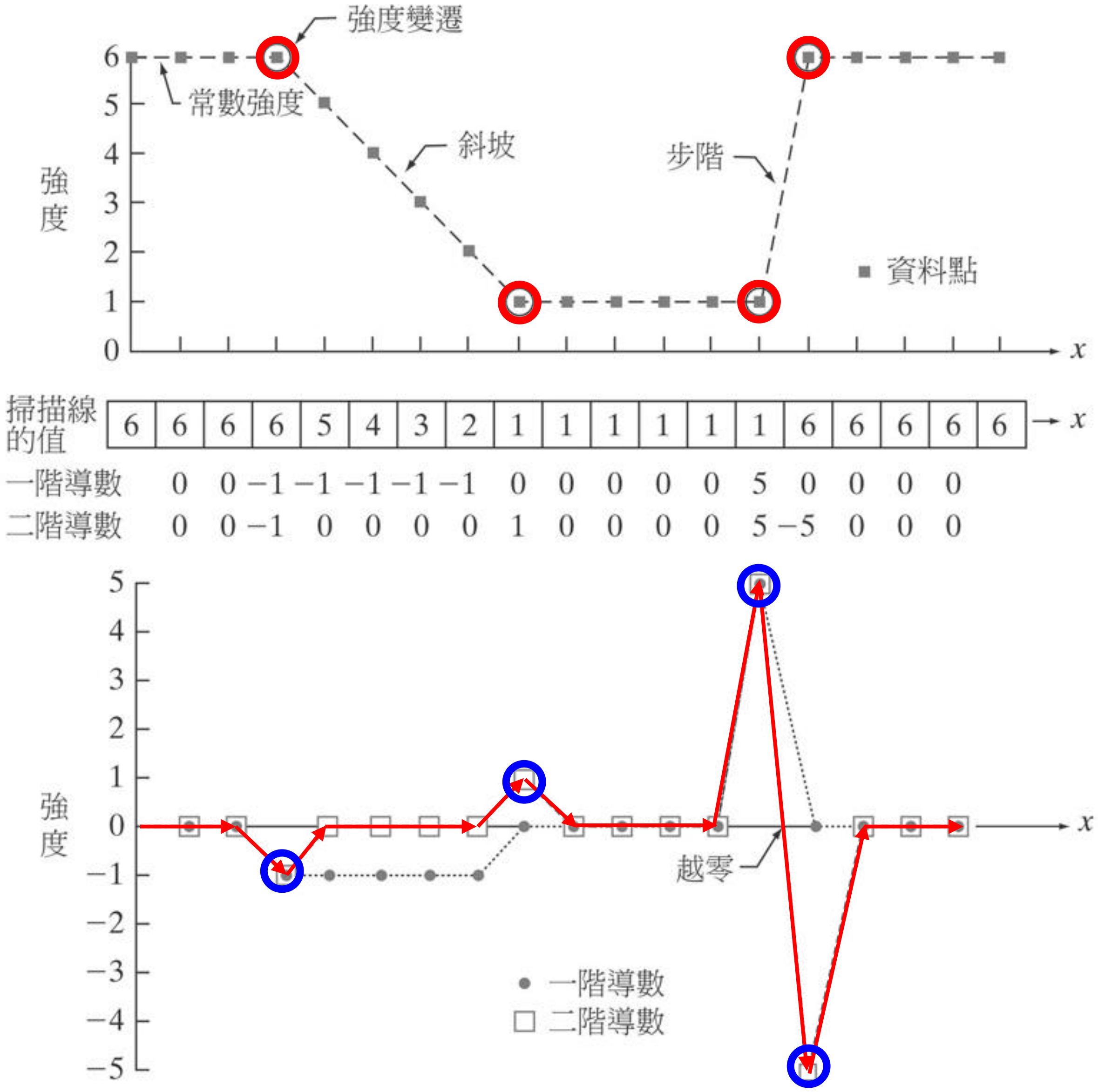
(B) Laplacian results

為啥用這個遮罩就可以抓邊緣?

空間-拉普拉斯運算子 (抓邊緣)

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

找出x方向變化的變化
找出y方向變化的變化



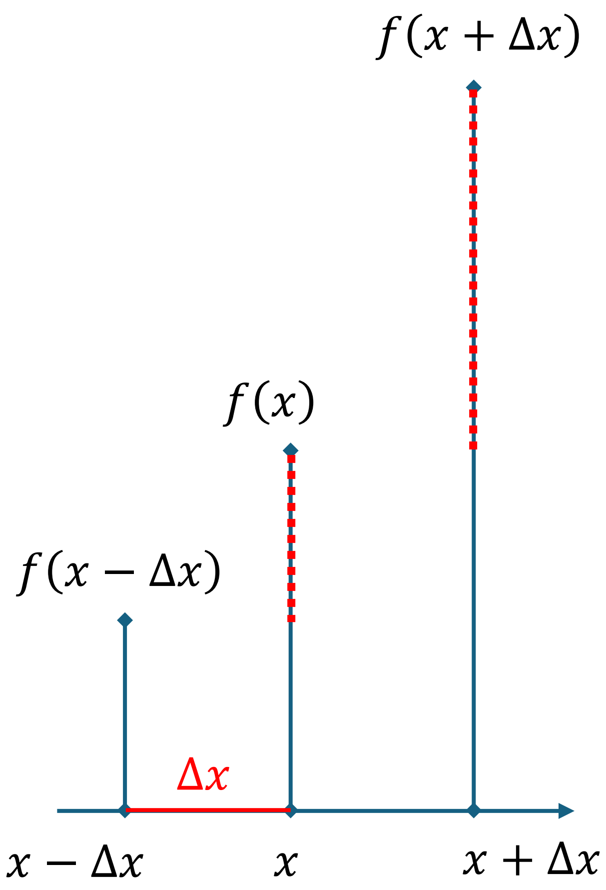
一階導數: 變化率
二階導數:變化率的變化率

空間-拉普拉斯運算子 (抓邊緣)

二皆導數:變化率的變化率

（無限時） $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

（有限時） $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \approx \frac{\overset{\text{前}}{f(x+\Delta x, y)} - \overset{\text{後}}{f(x,y)}}{\Delta x}$$



（一階）

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \approx \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x-\Delta x,y) \approx \frac{f(x,y)-f(x-\Delta x,y)}{\Delta x}$$

（二階）

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x-\Delta x,y) \approx \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x-\Delta x+\Delta x,y)-\frac{\partial}{\partial x} f(x-\Delta x,y)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)-\frac{\partial}{\partial x} f(x-\Delta x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x-\Delta x,y) \approx \frac{\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}-\frac{f(x,y)-f(x-\Delta x,y)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x-1,y) \approx f(x+1,y)+f(x-1,y)-2f(x,y)$$

空間-拉普拉斯運算子 (抓邊緣)

(x的)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \approx f(x+\Delta x) - f(x) - f(x) + f(x-\Delta x)$$
$$\approx f(x+1,y) + f(x-1,y) - 2f(x,y)$$

(y的)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \approx f(y+\Delta y) - f(y) - f(y) + f(y-\Delta y)$$
$$\approx f(x,y+1) + f(x,y-1) - 2f(x,y)$$

	x,y-1	
x-1,y	x,y	x+1,y
	x,y+1	

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

完成!!

(合併)

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx f(x+1,y) + f(x-1,y) - 2f(x,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1) - 2f(x,y)$$
$$\approx f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1) - 4f(x,y)$$

不同的Laplacian 遮罩

0	1	0
1	−4	1
0	1	0

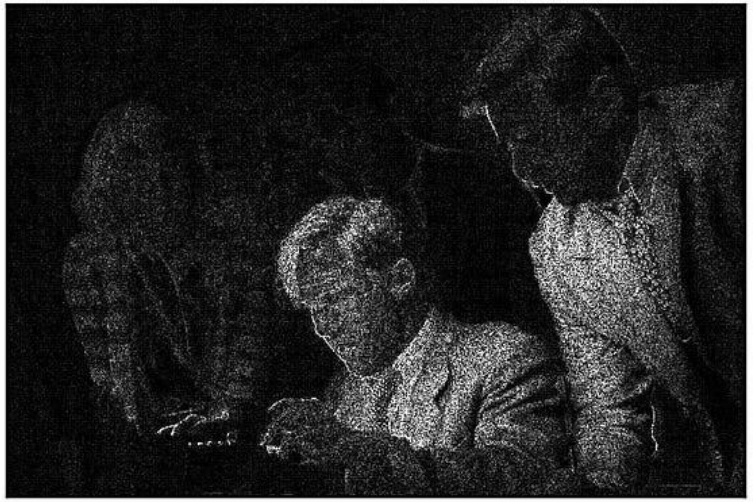
1	1	1
1	−8	1
1	1	1

0	−1	0
−1	4	−1
0	−1	0

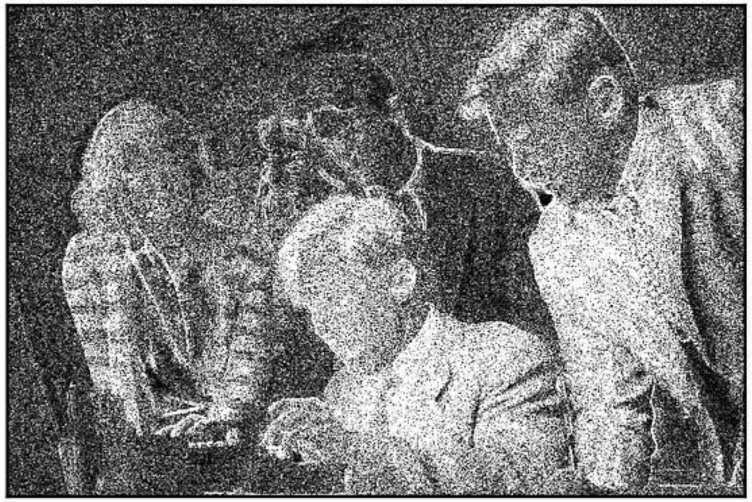
−1	−1	−1
−1	8	−1
−1	−1	−1

Input image

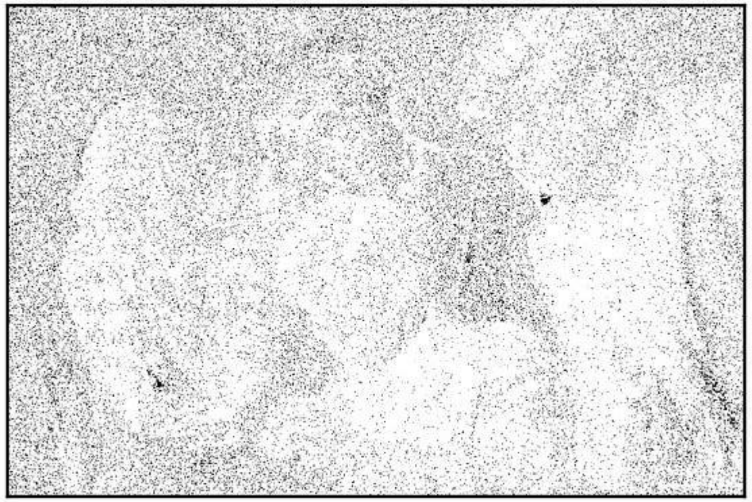
Result (mask size = 3)



Result (mask size = 5)

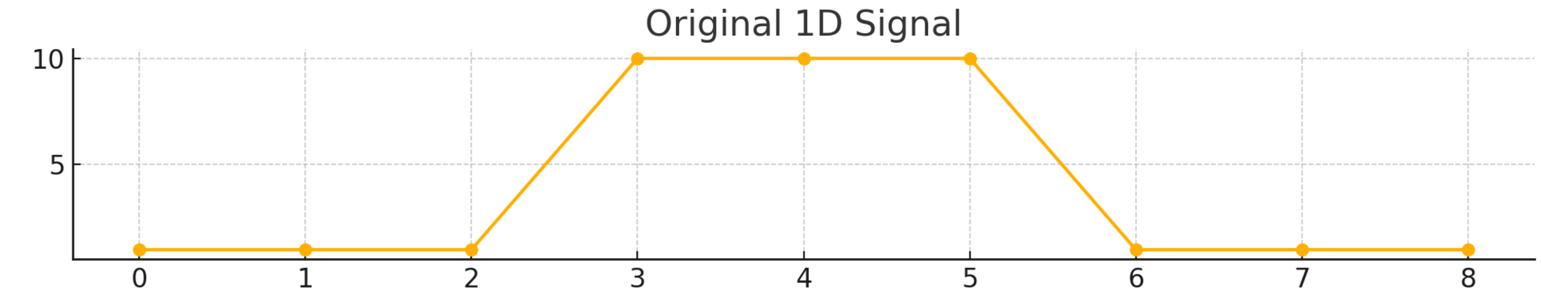


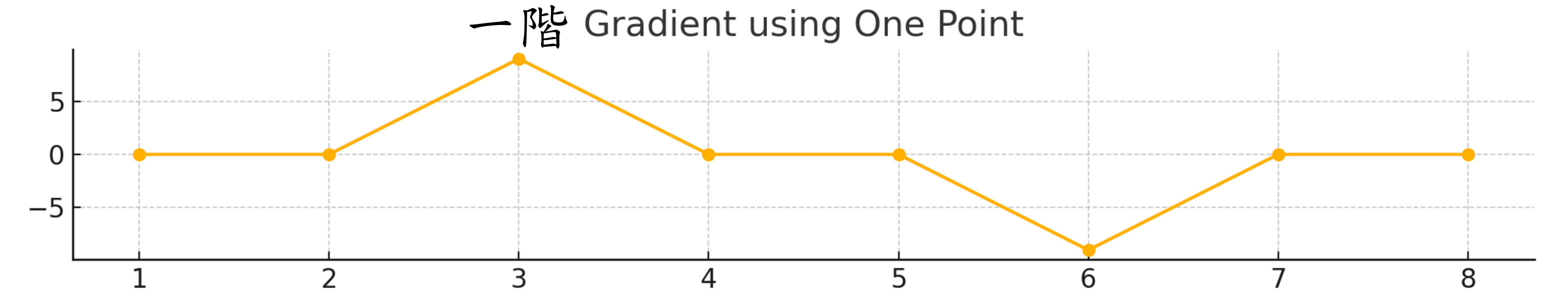
Result (mask size = 7)

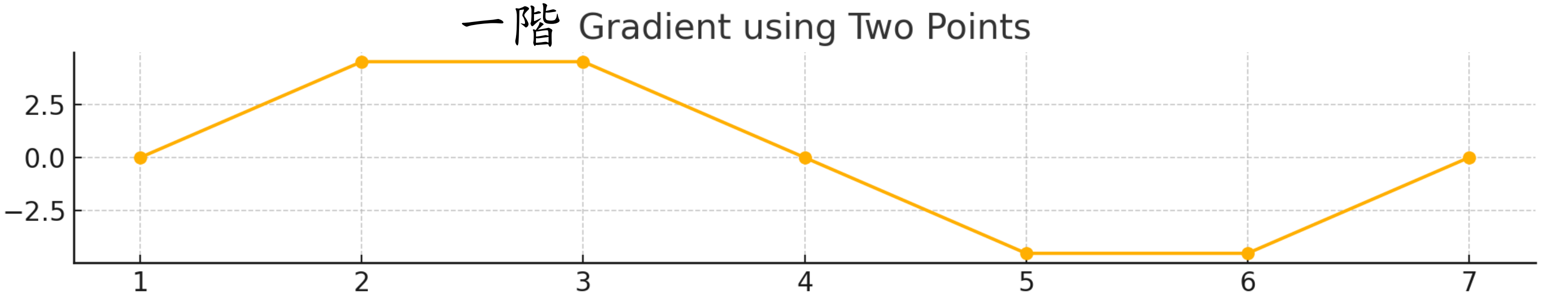


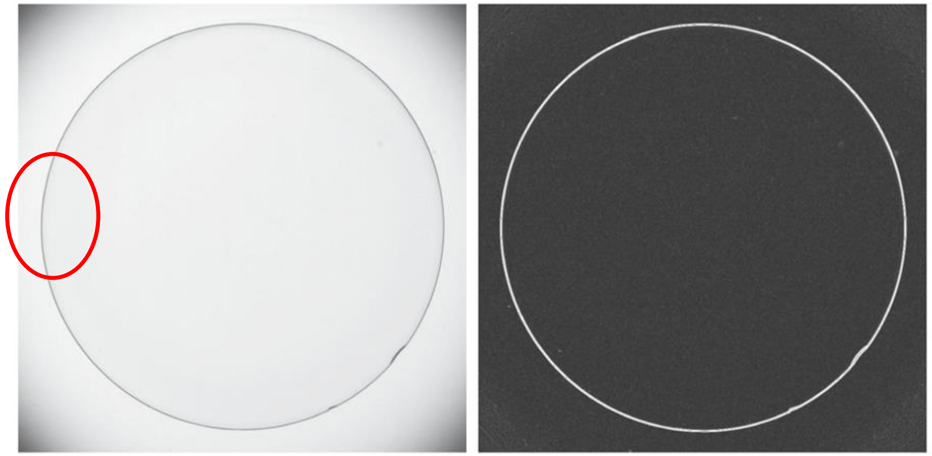
空間-Sobel運算子 (抓邊緣)

我二階導數有效果，那我一階導數不行嗎?









$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x-\Delta x, y)}{2\Delta x}$$

（改良版，使用兩個點）

空間-Sobel運算子 (抓邊緣)

$$G_x = \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x-\Delta x, y)}{2\Delta x}$$

$$\approx \frac{f(x+1, y) - f(x-1, y)}{2}$$

（乘權重2倍） $G_x = f(x+1, y) - f(x-1, y)$

0	0	0
-1	0	1
0	0	0

（但因為其他地方也有x的分量所以在加上去，並且原始位置放大權重）

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

尋找垂直邊緣

空間-Sobel運算子 (抓邊緣)

$$G_y = \frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y - \Delta y)}{2\Delta y}$$

$$\approx \frac{f(x, y + 1) - f(x, y - 1)}{2}$$

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

尋找水平邊緣

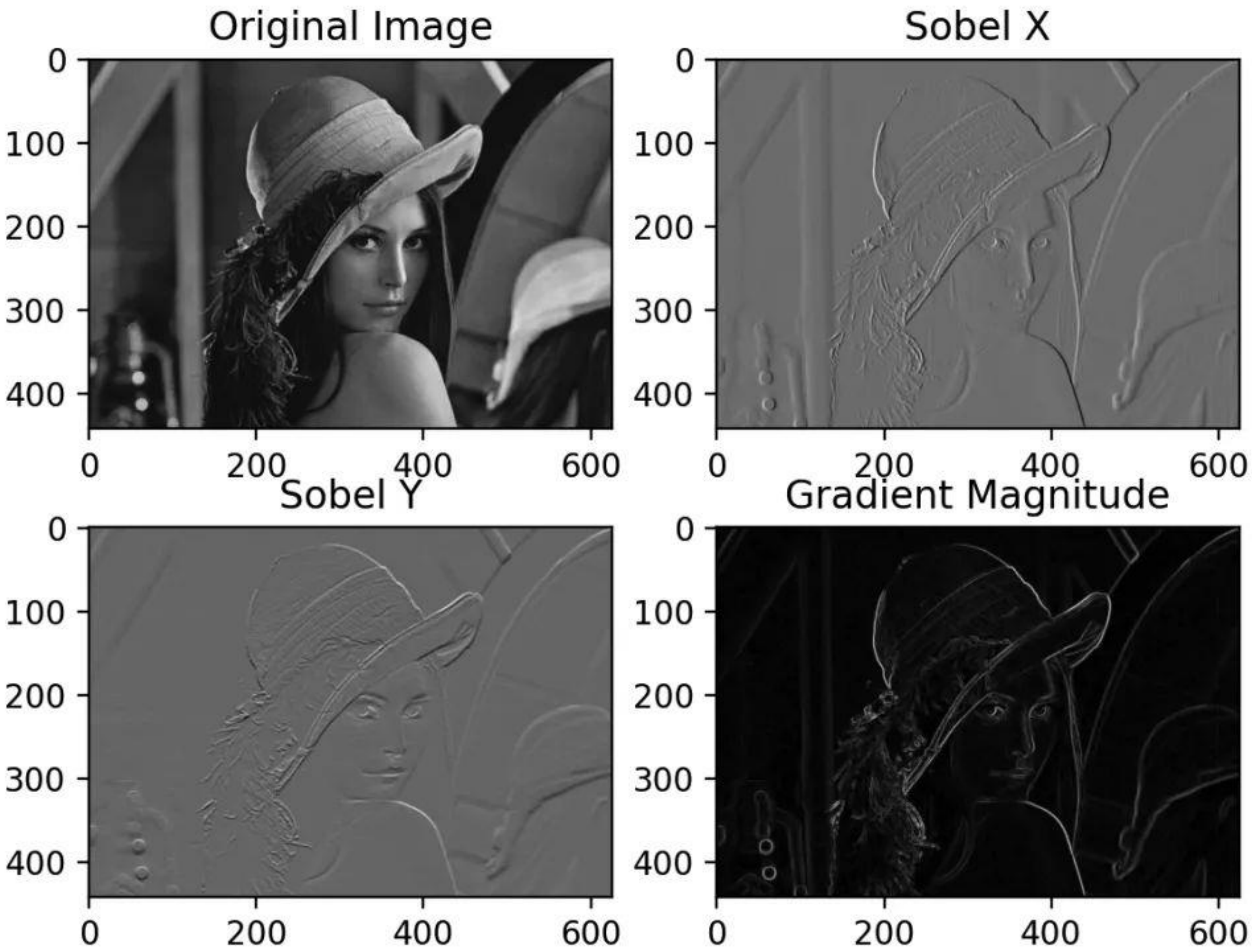
兩種使用方法:平方開根號、絕對值相加

更精準

$$M(x, y) = \|\nabla f\| = \text{mag}(\nabla f) = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$$

更快速

$$M(x, y) \approx |g_x| + |g_y|$$



尋找垂直邊緣

尋找水平邊緣