MATERI 2

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS

Setelah menyelesaikan pertemuan ini mahasiswa diharapkan :

- Mengetahui definisi Matriks
- Dapat mencari invers dan transpos matriks
- Dapat menyelesaikan Sistem Persamaan Linier dengan menggunakan invers matriks

Matriks & Operasinya

Bab 1.3

Matriks:

1. Suatu kumpulan nilai bentuk empat-persegi-panjang
2. Terdiri dari baris-baris dan kolom-kolom
3. Tiap nilai dalam matriks disebut entri; cara menyebutkan entri adalah dengan subskrip / indeks (baris, kolom)

Contoh:

Matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ **semua entri:** ***real***

Matriks A terdiri dari 2 baris dan 3 kolom

$A_{1,1} = 1$ $A_{1,2} = 5$ $A_{1,2} = 9$

$A_{2,1} = 7$ $A_{2,2} = 3$ $A_{2,3} = 0$

Definisi-definisi:

1. **Matriks A = matriks B jika ukuran baris A & baris B dan ukuran kolom A & kolom B sama; dan entri $A_{i,j}$ = entri $B_{i,j}$**

2. **$C = A \pm B$, maka $C_{i,j} = A_{i,j} \pm B_{i,j}$**

3. **M = cA (c = *real* / skalar), maka $M_{i,j} = cA_{i,j}$**

4. **Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah matriks-matriks berukuran sama, dan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ adalah bilangan-bilangan skalar, maka $c_1 A_1 + c_2 A_2 + \ldots + c_n A_n$ disebut kombinasi linier dari $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dengan koefisien $c_1, c_2, \ldots, c_n$.**

5. **Suatu matriks dapat di-partisi menjadi beberapa submatriks dengan "menarik" garis horisontal dan/atau garis vertikal.**

Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \qquad A_{11} \qquad & \qquad A_{21} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right) \\ \begin{array}{cc} \qquad A_{21} \qquad & \qquad A_{22} \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right) & \begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{array} \end{array}$$

Definisi-definisi (lanjutan):

6. **Matriks A dikalikan dengan matriks B; syaratnya adalah banyaknya kolom A = banyaknya baris B.**

   Catatan: perhatikan bahwa perkalian matriks (kedua matriks bujursangkar dengan ukuran sama) tidak komutatif ($AB \neq BA$)

   Contoh: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

   $AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$ $BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

   kesimpulan : $AB \neq BA$

7. **Transpos(A) = matriks A dengan baris-kolom ditukar tempatnya**

8. **Trace(A) = jumlah semua entri diagonal $A = A_{11} + A_{22} + \ldots + A_{nn}$**

Sifat perkalian matriks:

A matriks bujur sangkar, maka

1. $(A^r)(A^s) = A^{(r+s)}$
2. $(A^r)^s = A^{(rs)}$

Sifat-sifat matriks transpos:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(kA)^T = k\,(A^T)$
3. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Matriks-matriks khusus:

1. Matriks O = matriks nol; semua entrinya nol
2. Matriks I_n = matriks identitas berukuran (n x n);

   semua entri diagonalnya = 1, entri lain = 0
3. Matriks (vektor) baris adalah matriks dengan 1 baris.
4. Matriks (vektor) kolom adalah matriks dengan 1 kolom.

<u>Teorema:</u> A, B, C merepresentasikan matriks

a, b merepresentasikan bilangan skalar

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A(BC) = (AB)C$
4. $A(B \pm C) = AB \pm AC$
5. $(B \pm C)A = BA \pm CA$
6. $a(B \pm C) = aB \pm aC$
7. $(a \pm b)C = aC \pm bC$
8. $a(bC) = (ab)C$
9. $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Teorema: A, O merepresentasikan matriks

O adalah matriks nol (semua entrinya = nol)

1. A + O = O + A = A
2. A – A = O
3. O – A = – A
4. AO = O; OA = O

Teorema:

A adalah matriks bujur sangkar berukuran (n x n)

R adalah bentuk eselon-baris-tereduksi dari A.

Maka R berisi (satu/lebih) baris dengan entri nol seluruhnya, atau R adalah matriks identitas I_n.

Contoh: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 9/8 \end{pmatrix}$

baris-1 x (1/2); baris-3 x (1/8)

Matriks Invers

Bab 1.4-1.6

Invers dari sebuah matriks:

A adalah matriks bujur sangkar

Jika AB = BA = I maka B adalah invers dari A dan A adalah invers dari B. (invers matriks A dinotasikan dengan A^{-1})

Jika B invers dari A dan C juga invers dari A maka B = C

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dan D = ad – bc ≠ 0, maka invers A dapat dihitung dengan

$$A^{-1} = (1/D) \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Sifat-sifat matriks Invers:

Matriks A, B adalah matriks-matriks invertibel

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. A^n invertibel dan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
3. (kA) adalah matriks invertibel dan $(kA)^{-1} = (1/k)\, A^{-1}$
4. A^T invertibel dan $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5. A dan B keduanya matriks invertibel, maka AB invertibel dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Algoritma untuk mencari invers sebuah matriks A (n x n)

ubah menjadi matrix identitas dengan menggunakan OBE.

Contoh:

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{matrix}}_{\text{matriks A}} \;\Bigg|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\text{matriks identitas I}}$$

$$\overbrace{\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 8\end{matrix}}^{\textbf{matriks A}} \;\left|\; \begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right.$$

dengan OBE dihasilkan

$$\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix} \;\left|\; \underbrace{\begin{matrix}-40 & 16 & 9\\ 13 & -5 & -3\\ 5 & -2 & -1\end{matrix}}_{\textbf{invers A}}\right.$$

$$
\overbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{matrix}}^{\textbf{matriks A}}
\quad\vdots\quad
\overbrace{\begin{matrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{matrix}}^{\textbf{invers A}}
$$

jika kedua matriks ini dikalikan, akan didapat

$$
\begin{pmatrix}
-40+26+15 & 16-10-6 & 9-6-3 \\
-80+65+15 & 32-25-6 & 18-15-3 \\
-40+0+40 & 16-0-16 & 9-0-8
\end{pmatrix}
$$

Aplikasi:

jika A = matrix (nxn) yang punya invers (invertible / dapat dibalik), maka dalam sebuah Sistem Persamaan Linier:

$$Ax = B \rightarrow x = A^{-1}B$$

Contoh :

dalam mendapatkan solusi dari Sistem Persamaan Linier

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1$$

$$x_1 \qquad + 8x_3 = 1$$

matriks A berisi koefisien-koefisien dari x_1, x_2, x_3

vektor x = (x_1, x_2, x_3) yang dicari

vektor B = $(1, 1, 1)^T$

Contoh:

Akan dicari solusi dari Ax = b, di mana

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solusi dari Ax = b adalah **x** sbb.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

<u>Cek:</u> apakah benar A**x** = **b** ?

$$\begin{pmatrix} \mathbf{-15 + 10 + 6} \\ \mathbf{-30 + 25 + 6} \\ \mathbf{-15 + 0 + 16} \end{pmatrix}$$

Matriks Elementer:

Matriks A(nxn) disebut elementer jika A dihasilkan dari matriks identitas I_n dengan <u>satu</u> Operasi Baris Elementer.

Contoh:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema:

A (nxn) matriks bujur sangkar.

Maka yang berikut ini ekivalen
(semuanya benar, atau semuanya salah)

1. **A invertibel**
2. **$Ax = 0$ punya solusi trivial saja**
3. **Bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah I_n**
4. **A dapat dinyatakan dalam perkalian matriks-matriks elementer**

Matriks-matriks dengan bentuk khusus

Bab 1.7

Matriks A(n × n) bujur sangkar, artinya banyaknya baris A sama dengan banyaknya kolom A.

Bentuk-bentuk khusus sebuah matriks bujur sangkar a. l. :

1. **Matriks diagonal D**
2. **Matriks segi-3 atas**
3. **Matriks segi-3 bawah**
4. **Matriks simetrik**

1. Matriks diagonal D: $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{3} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{n} \end{pmatrix}$$

2. Matriks segi-3 atas: $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

3. Matriks segi-3 bawah: $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}$$

4. Matriks simetrik: $a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}$$

Teorema:

1. Transpos dari matriks segi-3 bawah adalah matriks segi-3 atas; transpos dari matriks segi-3 atas adalah matriks segi-3 bawah.
2. Perkalian dua matriks segi-3 bawah menghasilkan matriks segi-3 bawah; perkalian dua matriks segi-3 atas menghasilkan matriks segi-3 atas.
3. Matriks segi-3 invertibel jika dan hanya jika semua entri diagonalnya <u>tidak</u> nol.
4. Invers dari matriks segi-3 bawah adalah matriks segi-3 bawah.
5. Invers dari matriks segi-3 atas adalah matriks segi-3 atas.

Teorema:

A dan B matriks simetrik, k adalah skalar

6. A^T simetrik
7. A + B simetrik dan A – B simetrik
8. Matriks kA simetrik
9. Jika A invertibel, maka A^{-1} simetrik

Teorema:

10. Jika A matriks invertibel, maka AA^T dan A^TA juga invertibel.