MATERI 4

Vektor Dimensi 2 dan Dimensi 3

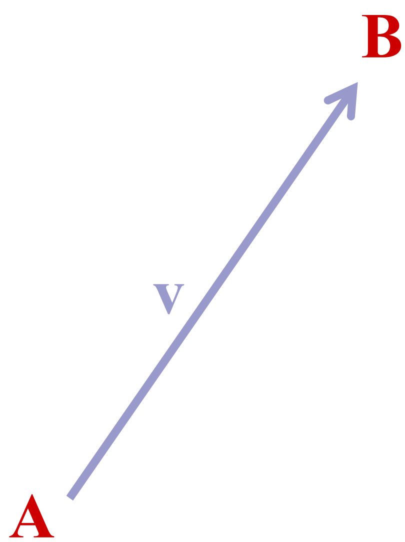
TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS

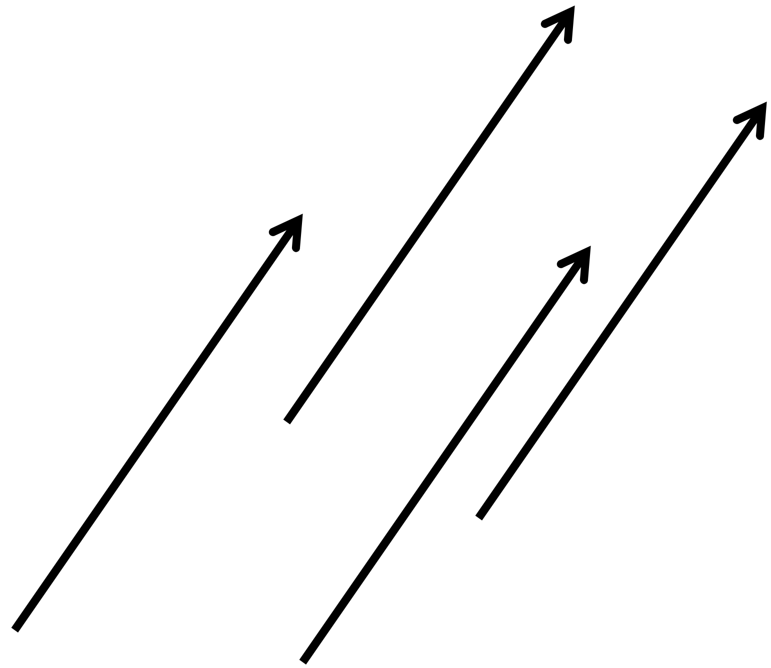
Setelah menyelesaikan pertemuan ini mahasiswa diharapkan :

- Mengetahui definisi Vektor Dimensi 2 dan 3
- Dapat menghitung perkalian dan jarak antara 2 vektor

Vektor di Ruang-2

Vektor di Ruang-3





vektor $\mathbf{v}$ = AB

A **disebut titik awal/inisial**

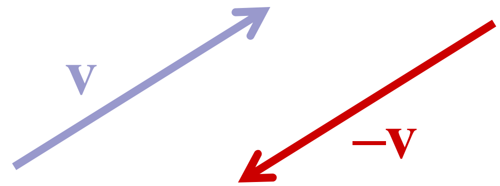
B **disebut titik akhir/terminal**

Vektor-vektor ekivalen

Dianggap sama

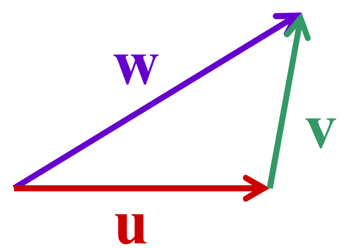
Panjang dan arahnya sama

Negasi sebuah vektor v → –v secara geometrik

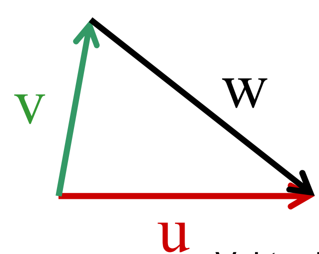


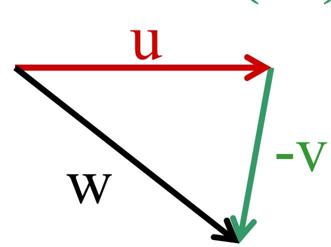
Panjang sama, arah berlawanan

Penjumlahan dua vektor: **w** = **u** + **v** secara geometrik

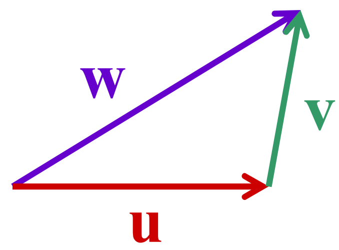


Selisih dua vektor: **w** = **u** – **v** sama dengan **w** = **u** + (–**v**)





Penjumlahan dua vektor: w = u + v



Cara analitik:

Vektor-vektor **u**, **v**, **w** di Ruang-2 atau Ruang-3

Ruang-2: $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$; $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$; $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2)$$

$$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

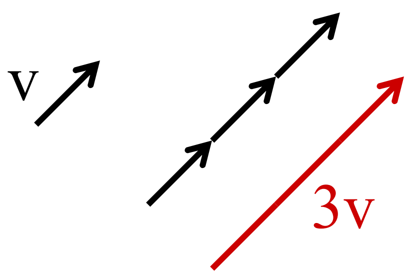
$$w_1 = u_1 + v_1$$

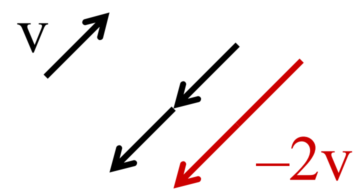
$$w_2 = u_2 + v_2$$

Perkalian vektor dengan skalar (bilangan nyata/*real number*)

$$w = k\, v \quad ; k = \text{skalar}$$

secara geometrik:





Perkalian vektor dengan skalar (bilangan nyata/*real number*)

$$\mathbf{w} = k\,\mathbf{v} \;\; ; \; k = \text{skalar}$$

Cara analitik:

Di Ruang-2: $\mathbf{w} = k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2)$

$$(w_1, w_2) = (kv_1, kv_2)$$

$$w_1 = kv_1$$

$$w_2 = kv_2$$

Koordinat Cartesius:

$\mathbf{P_1 = (x_1, y_1)}$ **dan** $\mathbf{P_2 = (x_2, y_2)}$

$\mathbf{P_1}$ dapat dianggap sebagai titik dengan koordinat (x_1, y_1)

atau sebagai vektor $\underline{OP_1}$ di Ruang-2 dengan komponen pertama x_1 dan komponen kedua y_1

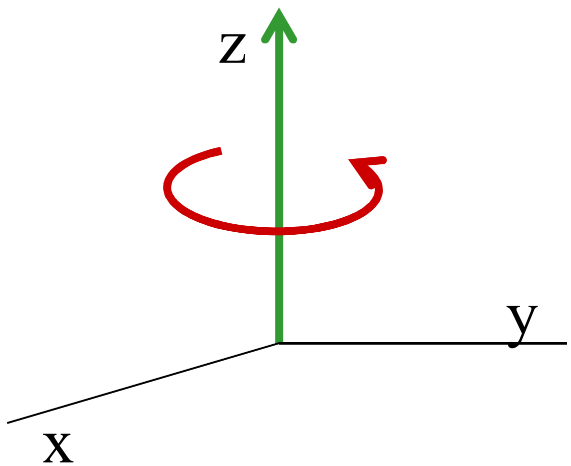
$\mathbf{P_2}$ dapat dianggap sebagai titik dengan koordinat (x_2, y_2)

atau sebagai vektor $\underline{OP_2}$ di Ruang-2 dengan komponen pertama x_2 dan komponen kedua y_2

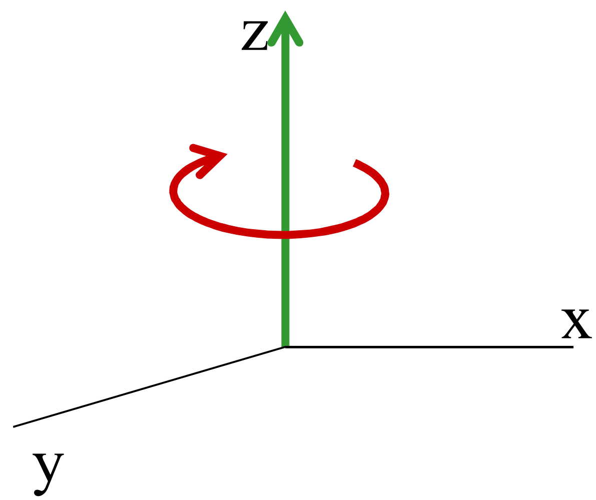
$$\boxed{\textbf{Vektor } \mathbf{P_1P_2 = OP_2 - OP_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)}}$$

Vektor-vektor di ruang-3

Aturan tangan kanan



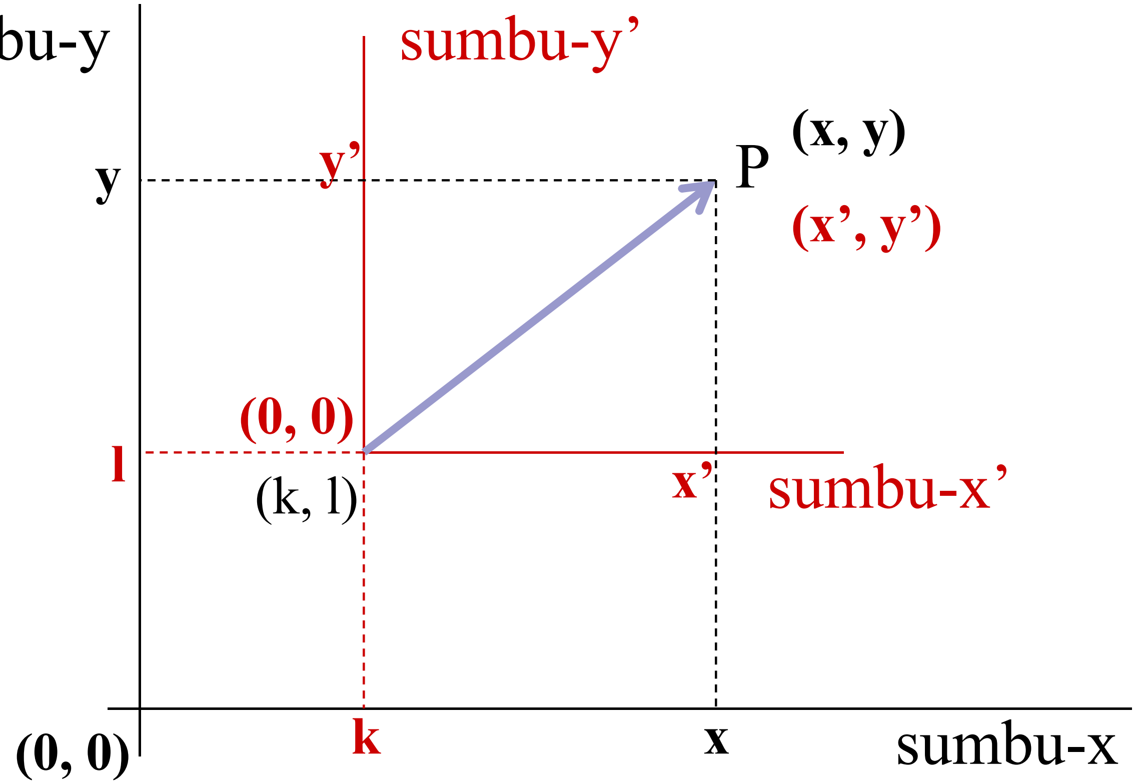
Aturan tangan-kiri



x : 4 jari   y : telapak tangan   z : ibu jari

Lihat bab 3.1. Gambar 11

Translasi



$$x' = x - k \qquad y' = y - l$$

Bab 3.2

Aritmatika vektor

Norma sebuah vektor

Aritmatika vektor di Ruang-2 dan Ruang-3

Teorema 3.2.1.: **u, v, w vektor-vektor di Ruang-2/Ruang-3**

***k*, *l* adalah skalar (bilangan *real*)**

- **u+v = v+u**
- **(u+v)+w = u+(v+w)**
- **u+0 = 0+u = u**
- **u+(-u) = (-u)+u = 0**
- ***k*(*l*u) = (*kl*)u**
- ***k*(u+v) = *k*u + *k*v**
- **(*k*+*l*)u = *k*u + *l*u**
- **1u = u**

Bukti teorema 3.2.1.:

1. Secara geometrik (digambarkan)
2. Secara analitik (dijabarkan)

Bukti secara analitik untuk teorema 3.2.1. di Ruang-3

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$; $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$; $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) \\
&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\
&= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \\
&= \mathbf{v} + \mathbf{u}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} + \mathbf{0} &= (u_1, u_2, u_3) + (0, 0, 0) \\
&= (u_1 + 0, u_2 + 0, u_3 + 0) \\
&= (0 + u_1, 0 + u_2, 0 + u_3) \\
&= \mathbf{0} + \mathbf{u} \\
&= (u_1, u_2, u_3) \\
&= \mathbf{u}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k(l\mathbf{u}) &= k\,(lu_1, lu_2, lu_3) \\
&= (klu_1, klu_2, klu_3) \\
&= kl(u_1, u_2, u_3) \\
&= kl\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= k((u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)) \\
&= k(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\
&= (ku_1 + kv_1, ku_2 + kv_2, ku_3 + kv_3) \\
&= (ku_1, ku_2, ku_3) + (kv_1, kv_2, kv_3) \\
&= k\mathbf{u} + k\mathbf{v}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(k + l)\,\mathbf{u} &= ((k+l)\,u_1, (k+l)\,u_2, (k+l)\,u_3) \\
&= (ku_1, ku_2, ku_3) + (lu_1, lu_2, lu_3) \\
&= k(u_1, u_2, u_3) + l(u_1, u_2, u_3) \\
&= k\mathbf{u} + l\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

<u>**Norma sebuah vektor:**</u>

(Untuk <u>sementara</u> norma bisa dianggap sebagai <u>panjang vektor</u>)

Ruang-2 : norma vektor $\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

Ruang-3 : norma vektor $\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

<u>**Vektor Satuan (*unit Vector*)**</u> : suatu vektor dengan norma 1

Jarak antara dua titik:

Ruang-2: vektor $\overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

jarak antara $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Ruang-3: vektor $\overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

jarak antara $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2) =$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Jika **u** adalah vektor dan k adalah skalar, maka

$$\text{norma } k\mathbf{u} = |\,k\,|\,\|\,\mathbf{u}\,\|$$

Contoh(1):

Cari norm dari v = (0,6,0)

Penyelesaian :

$$\|v\| = \sqrt{0^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6$$

Contoh(2):

Anggap v = (-1,2,5). Carilah semua skalar k sehingga norm kv = 4

Penyelesaian :

$$\|kv\| = 4$$

$$\sqrt{k^2 + 4k^2 + 25k^2} = 4$$

$$\sqrt{30k^2} = 4 \Rightarrow 30k^2 = 16 \Rightarrow k^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$

Contoh(3):

Carilah jarak antara

a. P1 = (3,4) dan P2 = (5,7)
b. P1 = (3,3,3) dan P2 = (6,0,3)

Penyelesaian :

a.

$$d = \sqrt{(5-3)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{13}$$

b.

$$d = \sqrt{(6-3)^2 + (0-3)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

Contoh(4):

a. Jika v adalah vektor tak nol, maka tunjukkan bahwa $\frac{1}{\|v\|}v$ merupakan vektor satuan

b. Gunakan penyelesaian dari a untuk menemukan vektor satuan yang mempunyai arah sama dengan v = (3,4)

c. Gunakan penyelesaian dari a untuk menemukan vektor satuan yang mempunyai arah berlawanan dengan v = (-2,3,-6)

Contoh(5):

Misalkan u = (2,-2,3), v = (1,-3,4), w = (3,6,-4). Tentukan hasil dari :

a. $\|u+v\|$

b. $\|-2u\|+2\|u\|$

b. $\frac{1}{\|w\|}w$

d. $\left\|\frac{1}{\|w\|}w\right\|$

POST TEST

1 a. Jika v adalah vektor tak nol, maka tunjukkan bahwa $\frac{1}{\|v\|}v$ merupakan vektor satuan

b. Gunakan penyelesaian dari a untuk menemukan vektor satuan yang mempunyai arah sama dengan v = (3,4)

c. Gunakan penyelesaian dari a untuk menemukan vektor satuan yang mempunyai arah berlawanan dengan v = (-2,3,-6)

2. Misalkan u = (2,-2,3), v = (1,-3,4), w = (3,6,-4). Tentukan hasil dari :

a. $\|u+v\|$ b . $\|-2u\|+2\|u\|$ c. $\frac{1}{\|w\|}w$ d. $\left\|\frac{1}{\|w\|}w\right\|$

3. Pada kubus ABCD.EFGH yang berusuk 2 cm, titik P terletak di perpanjangan DC dengan DC:DP = 1:3 dan Q terletak di perpanjangan EH dengan EQ:HQ = 2:1. Jarak titik P ke titik Q adalah… cm