MATERI 8

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS

Setelah menyelesaikan pertemuan ini mahasiswa diharapkan :

- Dapat mengetahui definisi dan sifat-sifat dari ruang vektor
- Dapat mengetahui definisi dan sifat-sifat dari subruang vektor
- Dapat menghitung kombinasi linier dan span
- Dapat mengetahui contoh aplikasinya

Ruang Vektor

(bentuk Umum)

Ruang Vektor

V adalah himpunan tidak kosong

Didefinisikan 2 operasi terhadap obyek-obyek di V:

penjumlahan, notasi $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

perkalian skalar, notasi $k\mathbf{v}$

Catatan: perlu diingat bahwa

- penjumlahan tidak selalu seperti $(2, 1) + (1, 3) = (3, 4)$
- perkalian skalar tidak selalu seperti $5(2, 1) = (10, 5)$

Ruang Vektor

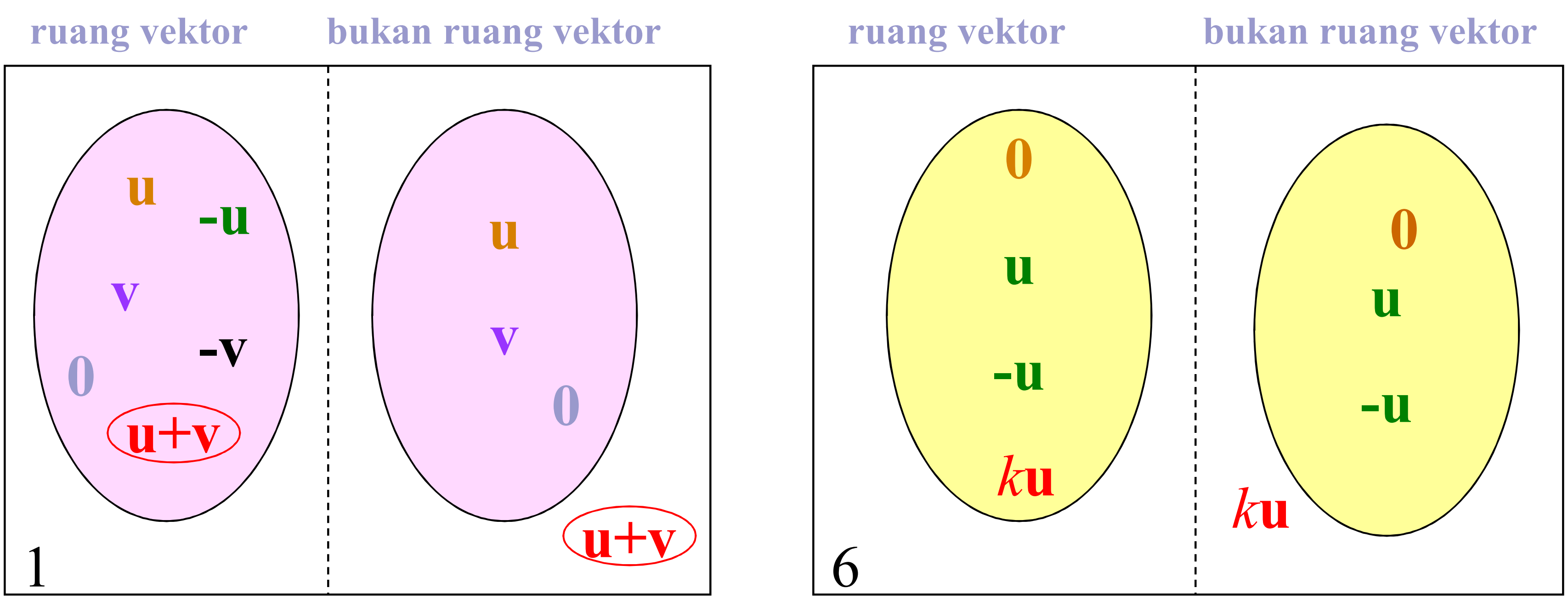
V disebut ruang vektor jika dipenuhi 10 (sepuluh) aksioma berikut:

1. Jika $u, v \in V$ maka $(u + v) \in V$
2. $u + v = v + u$
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$
4. Ada vektor nol $0 \in V$ sedemikian sehingga $0 + u = u + 0 = u$
5. Untuk tiap $u \in V$, ada vektor $-u \in V$ yang dinamakan negatif u sedemikian sehingga $u + (-u) = (-u) + u = 0$
6. Jika k adalah skalar dan $u \in V$, maka $ku \in V$
7. $k (u + v) = ku + kv$
8. $(k+m)u = ku + mu$
9. $k(mu) = (km) u$
10. $1u = u$

Ruang Vektor

perhatikan aksioma 1, 4, 5, 6 berikut:

1. Jika $u, v \in V$ maka $(u + v) \in V$
4. Ada vektor nol $0 \in V$ sedemikian sehingga $0 + u = u + 0 = u$
5. Untuk tiap $u \in V$, ada vektor $-u \in V$ yang dinamakan negatif u sedemikian sehingga $u + (-u) = (-u) + u = 0$
6. Jika k adalah skalar dan $u \in V$, maka $k\,u \in V$



Teorema 5.1.1:

V merupakan ruang vektor, $\mathbf{u} \in V$ dan k adalah skalar.

Maka

1) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
2) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$
3) $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$
4) Jika $k\mathbf{u} = \mathbf{0}$, maka $k = 0$ atau $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Contoh :

V = himpunan semua tripel bilangan nyata (x,y,z) dengan

operasi-operasi

penjumlahan : $(x, y, z) + (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z')$

perkalian skalar : $k(x, y, z) = (kx, y, z)$

Apakah V merupakan ruang vektor ?

penjumlahan : $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$

perkalian skalar : $k(x, y, z) = (kx, y, z)$

V disebut ruang vektor jika dipenuhi 10 aksioma berikut:

1. **Jika u, v $\in$ V maka (u + v) $\in$ V**

   jika* u, v *adalah tripel, maka* (u+v) *adalah tripel juga

2. **u + v = v + u**

   penjumlahan dua tripel, menurut aturan penjumlahan di atas, bersifat komutatif

   $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') = (x' + x, y' + y, z' + z)$

   $= (x', y', z') + (x, y, z)$

3. **u + (v + w) = (u + v) + w**

   sifat asosiatif

penjumlahan : $(x, y, z) + (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z')$

perkalian skalar : $k(x, y, z) = (kx, y, z)$

---

4. **Ada vektor nol 0 $\in$ V sedemikian sehingga 0 + u = u + 0 = u**

   vektor nol **0** = (0, 0, 0)

5. **Untuk tiap u $\in$ V, ada vektor –u $\in$ V yg dinamakan negatif u sedemikian sehingga u + (-u) =(-u) + u = 0**

   negasi dari vektor $(x, y, z) = (-x, -y, -z)$

6. **Jika k adalah skalar dan u $\in$ V, maka ku $\in$ V**

   jika k adalah skalar, maka **ku** ***adalah tripel***

penjumlahan : **(x, y, z) + (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z')**

perkalian skalar : **k(x, y, z) = (kx, y, z)**

---

7. **k(u + v) = ku + kv ?**

k ((x, y, z) + (x', y', z'))= k (x+x', y+y', z+z') = (k(x+x'), y+y', z+z')

= (kx, y, z) + (kx', y', z') = k(x, y, z) + k(x', y', z')

8. **(k + m)u = ku + mu ?**

(k + m)u =((k + m) x, y, z)

ku + mu = (kx, y, z) + (mx, y, z) = ((k + m) x, 2y, 2z)

ternyata (k + m)u $\neq$ ku + mu

Karena aksioma 8 gagal, maka V bukan ruang vektor

penjumlahan : $(x, y, z) + (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z')$

perkalian skalar : $k(x, y, z) = (kx, y, z)$

9. $k(mu) = (km)u$

   $k(mu) = k(mx, y, z) = (km\,x, y, z) = (km)u$

10. $1u = u$

    $1(x, y, z) = (1x, y, z) = (x, y, z)$

Bab 5.2

Sub-ruang

(*subspace*)

<u>Ruang Vektor</u>

Himpunan dengan operasi penjumlahan & perkalian skalar.

V disebut ruang vektor jika dipenuhi 10 (sepuluh) aksioma.

Ruang Vektor

W disebut ruang vektor jika dipenuhi 10 (sepuluh) aksioma berikut:

1. **Jika u, v $\in$ W maka (u + v) $\in$ W** ***diketahui***
2. **u + v = v + u** ***(*)diwariskan dari ruang vektor V***
3. **u + (v + w) = (u + v) + w** **(*)**
4. **Ada vektor nol 0 $\in$ W sedemikian sehingga 0 + u = u + 0 = u**
5. **Untuk tiap u $\in$ W, ada vektor –u $\in$ W yang dinamakan negatif u sedemikian sehingga u + (– u) = (– u) + u = 0**
6. **Jika k adalah skalar dan u $\in$ W, maka ku $\in$ W** ***diketahui***
7. **k (u + v) = ku + kv** **(*)**
8. **(k+m)u = ku + mu** **(*)**
9. **k(mu) = (km) u** **(*)**
10. **1u = u** **(*)**

Ruang Vektor

W disebut ruang vektor jika dipenuhi 10 (sepuluh) aksioma berikut:

4. **Ada vektor nol $\mathbf{0} \in$ W sedemikian sehingga $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$**
5. **Untuk tiap u $\in$ W, ada vektor –u $\in$ W yang dinamakan negatif u sedemikian sehingga u + (– u) = (– u) + u = 0**

Bukti 4: k = 0, **u** $\in$ W $\rightarrow$ **ku** = **0** lihat Teorema 5.1.1.(a)

menurut 6: **Jika k adalah skalar dan u $\in$ W, maka ku $\in$ W**

maka vektor nol 0 $\in$ W

Bukti 5: k = **– 1** , **u** $\in$ W $\rightarrow$ **ku = (– 1) u = – u** lihat Teorema 5.1.1.(c)

menurut 6: **Jika k adalah skalar dan u $\in$ W, maka ku $\in$ W**

maka vektor negatif u, – u $\in$ W (berlaku untuk setiap vektor **u** $\in$ W)

Catatan: **u** + (– **u**) = (– **u**) + **u** = **0** benar, sifat yang diwariskan dari V

Contoh:

R^2 : ruang vektor di bawah operasi penjumlahan vektor & perkalian skalar

Sub-Ruang di R^2 : { (0, 0) } dan R^2 sendiri

R^3 : ruang vektor di bawah operasi penjumlahan vektor & perkalian skalar

Sub-Ruang di R^3: { (0, 0, 0) } dan R^3 sendiri

Sub-Ruang :

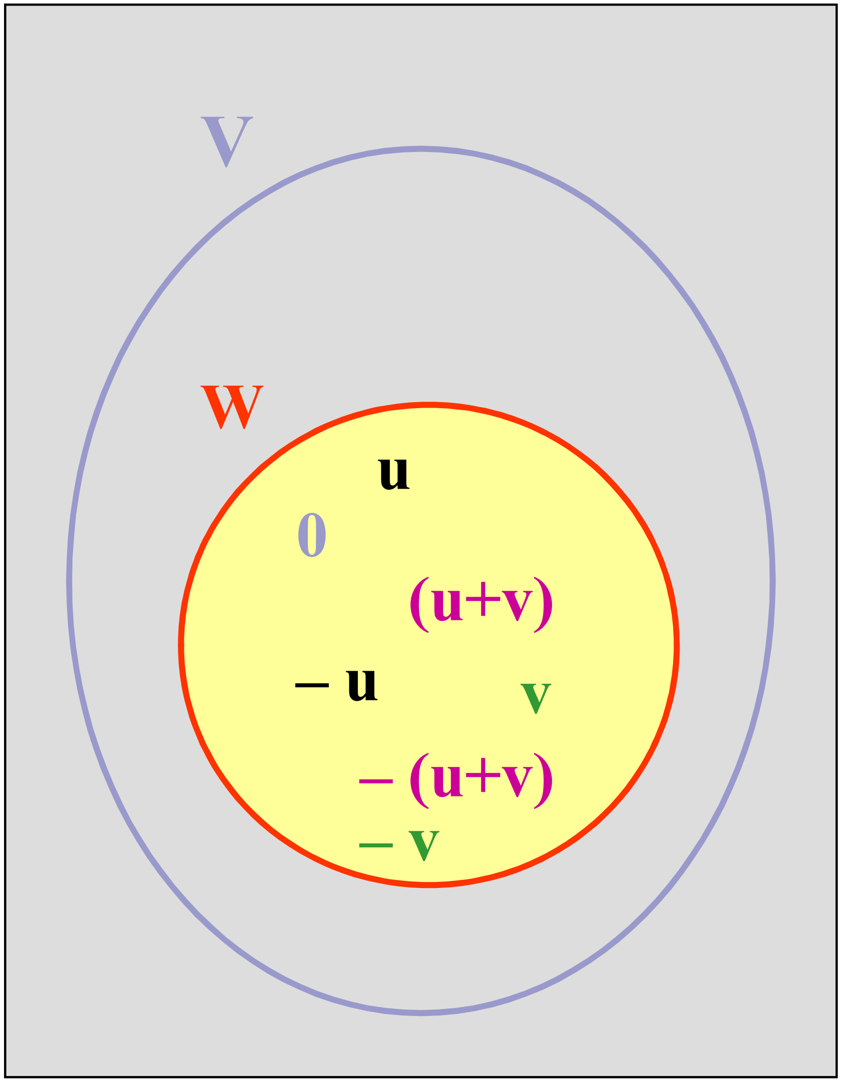
W merupakan subset dari V.

W disebut sub-ruang dari V jika dan hanya jika

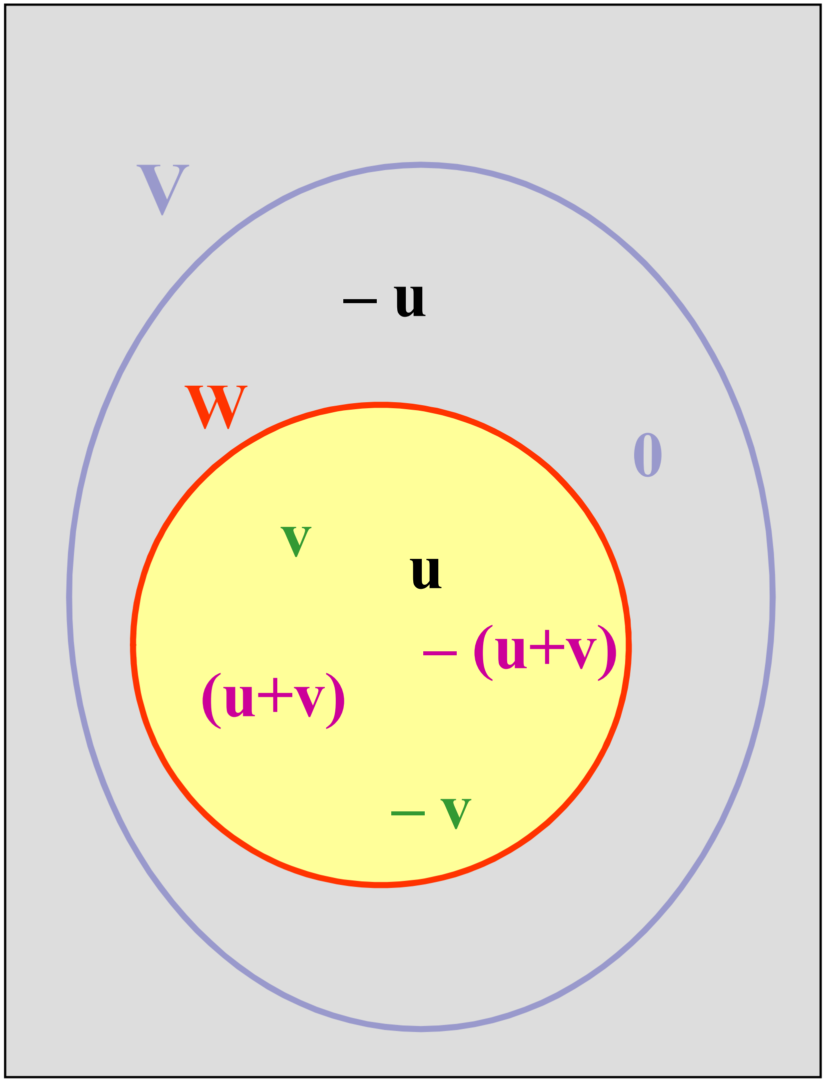
W adalah ruang vektor, di bawah operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan di V, artinya

1. **Jika $u, v \in W$ maka $(u + v) \in W$**

6. **Jika k adalah skalar dan $u \in W$, maka $ku \in W$**



W subspace V



W bukan subspace V

Teorema 5.2.1.:

W merupakan subset dari V.

W disebut sub-ruang dari V jika dan hanya jika

1. **Jika $u, v \in W$ maka $(u + v) \in W$**

6. **Jika k adalah skalar dan $u \in W$, maka $ku \in W$**

Bukti: (1) diketahui : W subruang dari V

buktikan : 1 dan 6

(2) diketahui : 1 dan 6

buktikan : W subruang dari V

(artinya buktikan aksioma 1-10 dipenuhi di W)

Teorema 5.2.1.:

W merupakan subset dari V.

W disebut sub-ruang dari V jika dan hanya jika

1. **Jika u, $v \in W$ maka $(u + v) \in W$**
6. **Jika k adalah skalar dan $u \in W$, maka $ku \in W$**

Bukti: (1) diketahui : W subruang dari V

buktikan : 1 dan 6

bukti : karena W adalah sub-ruang V,

maka W sendiri adalah ruang vektor

aksioma 1-10 dipenuhi di W

jadi 1, 6 dipenuhi

Teorema 5.2.1.:

W merupakan subset dari V.

W disebut sub-ruang dari V jika dan hanya jika

1. **Jika $u, v \in W$ maka $(u + v) \in W$**
6. **Jika k adalah skalar dan $u \in W$, maka $ku \in W$**

Bukti: (2) diketahui : 1 dan 6

buktikan : W subruang dari V

(artinya buktikan aksioma 1-10 dipenuhi di W)

Contoh :

Misalkan W merupakan kumpulan vektor (x_1,x_2, x_3,x_4) di R^4 yang memenuhi persamaan $x_1.x_2 = 0$, apakah W merupakan subruang?

Ambil :

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= (1, 0, x_3, x_4) \\ \bar{v} &= (0, 1, y_3, y_4) \end{aligned}\right\} \bar{u} + \bar{v} = (1,1), \bar{v} = (0, 1, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$$

Bukan subruang sebab hasil perkalian komponen pertama dan kedua pada $\bar{u} + \bar{v} \neq 0$

Sub Ruang Hasil Jawaban SPL

Himpunan dari semua vektor yang merupakan jawaban dari sistem persamaan homogin merupakan subruang di R^n, dengan orde A adalah m x n.

Contoh :

Diberikan SPL homogin,

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 0 \\
x_1 + 4x_2 - 19x_3 + 10x_4 &= 0 \\
2x_1 + 5x_2 - 26x_3 + 11x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

Matriks Eselon-nya : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\}$ variable bebas, misal : *x*3 = *s* dan *x*4 = *t* → *x*2 = 4s – 3t dan
*x*1 = 3s + 2t

Jawaban dalam bentuk vektor : $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3s+2t \\ 4s-3t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\bar{\mathrm{x}} = s\bar{u} + t\bar{v}$

$\bar{\mathrm{u}} = (3,4,1,0)$ dan $\bar{\mathrm{v}} = (2,-3,0,1)$

Subruang dari jawaban SPL Homogin disebut *Ruang Jawab*.

Kombinasi Linier

(Linear Combination)

&

Rentang

(Span)

Definisi:

Vektor **w** disebut kombinasi linier dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ jika

$$\mathbf{w} = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + k_n \mathbf{v}_n$$

$k_1, k_2, \ldots, k_n$ adalah skalar

Teorema 5.2.3.:

Jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ merupakan himpunan vektor di V, maka

1. Himpunan dari semua kombinasi linier dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, disebut himpunan W, adalah ***subspace*** V
2. W adalah ***subspace*** terkecil yang berisi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$

Teorema 5.2.3.:

Jika $v_1, v_2, \ldots, v_r$ merupakan himpunan vektor di V, maka

1. Himpunan dari semua kombinasi linier dari $v_1, v_2, \ldots, v_r$, disebut himpunan W, adalah ***subspace*** V
2. W adalah ***subspace*** terkecil yang berisi $v_1, v_2, \ldots, v_r$

Bukti 1: W adalah subspace

jika $\mathbf{u}, v \in W$, maka $(\mathbf{u} + v) \in W$

Vektor $\mathbf{u}, v \in W$; k_i, c_i, a_i adalah skalar

$\mathbf{u} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots.. + c_r v_r$ kombinasi linier dari $v_1, v_2, \ldots, v_r$

$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots.. + k_r v_r$ kombinasi linier dari $v_1, v_2, \ldots, v_r$

$$(\mathbf{u} + v) = (c_1 + k_1)v_1 + (c_2 + k_2)v_2 + \ldots.. + (c_r + k_r)v_r$$

$$= a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots.. + a_r v_r$$

kombinasi linier dari $v_1, v_2, \ldots, v_r$

Teorema 5.2.3.:

Jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ merupakan himpunan vektor di V, maka

1. Himpunan dari semua kombinasi linier dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, disebut himpunan W, adalah ***subspace*** V
2. W adalah ***subspace*** terkecil yang berisi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$

<u>Bukti 1:</u> W adalah subspace

jika $\mathbf{u} \in W$, maka $k\mathbf{u} \in W$

Vektor $\mathbf{u} \in W$; k, c_i, d_i adalah skalar

$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + c_r \mathbf{v}_r$ kombinasi linier dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$

$$k\mathbf{u} = kc_1 \mathbf{v}_1 + kc_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + kc_r \mathbf{v}_r$$

$$= d_1 \mathbf{v}_1 + d_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + d_r \mathbf{v}_r$$

kombinasi linier dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$

Contoh (1) :

Nyatakanlah (7,7,9,11) sebagai kombinasi linier dari (2,0,3,1), (4,1,3,2) dan (1,3,-1,3)

Jawab :

Tentukanlah s_1,s_2, dan s_3 yang memenuhi : $\overline{a} = s_1\overline{u_1} + s_2\overline{u_1} + s_3\overline{u_3}$

Dalam bentuk matriks dinyatakanlah sebagai :

$$s_1\begin{bmatrix}2\\0\\3\\1\end{bmatrix} + s_2\begin{bmatrix}4\\1\\3\\2\end{bmatrix} + s_3\begin{bmatrix}1\\3\\-1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\7\\9\\11\end{bmatrix}$$

ATAU

$$\begin{aligned}2s_1 + 4s_2 + s_3 &= 7\\ 4s_2 + 3s_3 &= 7\\ 3s_1 + 3s_2 - s_3 &= 9\\ s_1 + 2s_2 + 3s_3 &= 11\end{aligned}$$

Matriks lengkapnya :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

Matriks Eselonnya :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 13/2 & 39/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$s_3 = 3$, $s_2 = -2$, dan $s_1 = 6$

Dengan demikian dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari :

$$\overline{a} = 6\overline{u_1} - 2\overline{u_1} + 6\overline{u_3}$$

Contoh (2) :

Jika u = (1,2,-1) dan v = (6,4,2), tunjukkan bahwa w = (9,2,7) adalah kombinasi linier dari u dan v

Penyelesaian:

$(9,2,7) = k_1\ (1,2,-1) + k_2\ (6,4,2)$

SPL nya :

$$k_1 + 6\ k_2 = 9$$
$$2k_1 + 4\ k_2 = 2$$
$$-k_1 + 2\ k_2 = 7$$

Jika diselesaikan, didapatkan $k_1 = -3$ dan $k_2 = 2$

Rentang:

Diketahui suatu Ruang Vektor V

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ dan $S \subseteq V$

$W = \{\ \mathbf{x} \mid \mathbf{x}$ merupakan kombinasi linier vektor-vektor S

artinya: $\mathbf{x} = k_1\,\mathbf{v}_1 + k_2\,\mathbf{v}_2 + \ \ldots.. + k_n\,\mathbf{v}_r \quad \}$

maka S adalah rentang (***span***) W

Contoh (1):

Jika u = (1,0,0),v = (0,1,0),dan w = (0,0,1) membangun R^3 sebab setiap vektor (x,y,z) di R^3 dapat dinyatakan sebagai (x,y,z) = x + y + z

Contoh (2):

Tentukan apakah vektor-vektor berikut merupakan span di R3

- u = (2,2,2), v = (0,0,3), w = (0,1,1)
- u = (3,1,4), v = (2,-3,5), w = (5,-2,9)
- u = (3,1,4), v = (2,-3,5), w = (5,-2,9), z = (1,4,-1)