MATERI 09



TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS

Setelah menyelesaikan pertemuan ini mahasiswa diharapkan :

- Dapat mengetahui apakah suatu vektor bebas linier atau tak bebas linier
- Dapat mencari basis dari suatu SPL



Independensi Linier Basis & Dimensi



Kombinasi Linier (k.l): w k.l.
$$S = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_r\}$$
 jika
$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + k_r v_r \qquad k_1, k_2, k_3,, k_r \text{ terdefinisi /ada nilainya}$$

Independensi Linier:

$$S = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_r\}$$

disebut himpunan bebas linier / tidak-bergantung linier (*linearly independent*) jika solusi Sistem Persamaan Linier Homogen

$$k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + k_3 \mathbf{v}_3 \dots + k_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

adalah solusi trivial
$$k_1, k_2, k_3, \ldots, k_r = 0$$

Independensi Linier:

$$S = \{v_1, v_2, v_3,, v_r\}$$

disebut himpunan bebas linier / tidak-bergantung linier (*linearly independent*) jika solusi Sistem Persamaan Linier Homogen

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 \dots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

adalah solusi <u>trivial</u> $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_r = 0$

Dependensi Linier:

$$S = \{v_1, v_2, v_3,, v_r\}$$

disebut himpunan tidak-bebas linier / bergantung linier (*linearly dependent*) jika solusi Sistem Persamaan Linier Homogen

$$k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + k_3 \mathbf{v}_3 \dots + k_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

adalah solusi non-trivial $k_1, k_2, k_3, \dots, k_r = \mathbf{0}$
$$\underline{\text{dan}} \text{ ada} \quad k_j \neq 0 \text{ (j = 1 .. r)}$$



<u>Diketahui</u>: himpunan $S = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_r\}$

<u>Ditanyakan:</u> apakah S *linearly independent* atau *linearly dependent*? Jawab:

- 1. Bentuk SPL Homogen $k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 \dots + k_r v_r = 0$
- 2. Tentukan solusinya
- 3. Jika solusinya <u>trivial</u> $k_1, k_2, k_3, \dots, k_r = 0$ maka S *linearly independent*
- 4. Jika solusinya <u>non-trivial</u> maka S *linearly dependent*



Contoh(1):

Tentukan apakah
$$u = (1,-2,3), v = (5,6,-1),$$

 $w = (3,2,1)$ saling bebas linier

Penyelesaian:

$$k_1 (1,-2,3) + k_2 (5,6,-1) + k_3 (3,2,1) = (0,0,0)$$

Didapatkan SPL:

$$k_1 + 5 k_2 + 3 k_3 = 0$$
 $-2k_1 + 6 k_2 + 2 k_3 = 0$
 $3k_1 - k_2 + k_3 = 0$



Dengan melakukan OBE, didapatkan matrik sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga didapatkan penyelesaian:

$$k_2 + 0.5 k_3 = 0$$

$$k_1 + 0.5 k_3 = 0$$

Jadi, andaikan k3 = t, maka k2 = -0.5 t dan k1 = -0.5 t \longrightarrow Punya banyak penyelesaian \longrightarrow tidak bebas linier



Contoh(2):

Tentukan apakah
$$u = (2,-1,0,3), v = (1,2,5,-1),$$

 $w = (7,-1,5,8)$ saling bebas linier

Penyelesaian:

Himpunan vektor tersebut tidak bebas linier karena 3u + v - w = 0



V adalah Ruang Vektor

$$S = \{ \ v_1, \ v_2, \ v_3, \ ..., \ \ v_n \ \} \ di \ mana \ v_1, \ v_2, \ v_3, \ ..., \ \ v_n \in V$$
 maka S disebut Basis dari V jika

- 1. S linearly independent
- 2. S merupakan rentang (span) dari V



Basis:

V adalah Ruang Vektor

$$S = \{\ v_1, \, v_2, \, v_3, \, ..., \ v_n\ \} \ di \ mana \ v_1, \, v_2, \, v_3, \, ..., \ v_n \in V$$
 maka S disebut Basis dari V jika

- 1. S linearly independent
- 2. S merupakan rentang (span) dari V

V disebut Ruang Vektor dengan dimensi berhingga (n)

Jika <u>tidak</u> bisa didefinisikan himpunan S (berhingga) yang dapat menjadi basis untuk V, maka V disebut berdimensi tak-hingga

Suatu Ruang Vektor bisa mempunyai lebih dari satu basis

Contoh: (lihat Example 3 halaman 246)

Dalam contoh ini ditunjukkan dua basis untuk R³

B = {
$$\mathbf{e}_1$$
, \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 } dan S = { \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 }
di mana $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$; $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$; $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$
 $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$; $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$; $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$

Bukti bahwa B adalah basis untuk R³. B disebut basis standar untuk R³.

B linearly independent?

$$\mathbf{k}_{1}\mathbf{e}_{1} + \mathbf{k}_{2}\mathbf{e}_{2} + \mathbf{k}_{3}\mathbf{e}_{3} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{k}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{c}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{c}_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{u} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}$$
 B linearly independent

B linearly independent

B merentang R³?

$$\mathbf{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 = u$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\mathbf{c_1} \\
\mathbf{c_2} \\
\mathbf{c_3}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\mathbf{x} \\
\mathbf{y} \\
\mathbf{z}
\end{pmatrix}$$

Bukti bahwa $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ juga basis R^3 bisa dibaca di buku.

Jadi benar bahwa B dan S adalah basis untuk R³

B = {
$$\mathbf{e}_1$$
, \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 } dan S = { \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 }
di mana $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$; $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$; $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$
 $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$; $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$; $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$

Koordinat sebuah vektor akan berbeda jika dinyatakan berdasarkan dua basis yang berbeda.

lihat Example 4 halaman 247

$$(5,-1,9)_{\rm B}$$
 "ekivalen" $(1,-1,2)_{\rm S}$
 $(11,31,7)_{\rm B}$ "ekivalen" $(-1,3,2)_{\rm S}$



Basis Untuk Ruang jawab SPL

Contoh:

Tentukan basis untuk ruang jawab dari SPL berikut:

$$X1 + 2X2 + 7X3 - 9X4 + 31X5 = 0$$

$$2X1 + 4X2 + 7X3 - 11X4 + 34X5 = 0$$

$$3X1 + 6X2 + 5X3 - 11X4 + 29x5 = 0$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & -9 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Variabel tak bebas x1 dan variabel bebas x3

$$x_2 = t_1$$

 $x_4 = t_2$
 $x_5 = t_3$
 $x_3 = t_2 - 4t_3$
 $x_1 = -2t_1 + 2t_2 - 3t_3$

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (-2t_1 + 2t_2 - 3t_3, t_1, t_2 - 4t_3, t_2, t_3)$$

= $t_1(-2,1,0,0,0) + t_2(2,0,1,1,0) + t_3(-3,0,-4,0,1)$



Sehingga didapatkan :



Dimensi:

V adalah Ruang Vektor

<u>Dimensi</u> dari V = n (banyaknya vektor di S)

Dari jawaban SPL soal sebelumnya:

$$\begin{bmatrix} \overline{u}_1 = (-2,1,0,0,0) \\ \overline{u}_2 = (2,0,1,1,0) \\ \overline{u}_3 = (-3,0,-4,0,1) \end{bmatrix}$$

Dimensi dari ruang jawab tersebut = 3 (karena terdiri dari 3 vektor)



Contoh(2):

tentukan dimensi dan basis dari SPL berikut :

$$2X1 + 2X2 - X3 + X5 = 0$$
 $-X1 - X2 + 2X3 - 3X4 + X5 = 0$
 $X1 + X2 - 2X3 - X5 = 0$
 $X3 + X4 + x5 = 0$

Penyelesaian:

dengan melakukan OBE dan lain-lain didapatkan penyelesaian : X1 = - s - t, X2 = s, X3 = -t, X4 = 0, X5 = t



Sehingga vektor penyelesaian bisa dituliskan :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dan \quad v = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} span \quad ruang \quad jawab$$

karena _ saling _ bebas _ linier _ maka _ merupakan _ basis dim ensi = 2