MATERI 11

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS

Setelah menyelesaikan pertemuan ini mahasiswa diharapkan :

- Dapat menghitung matriks transisi dari suatu basis
- Dapat menghitung solusi least square suatu SPL

Penggantian Basis

Contoh 4:

Dua basis dari ruang vektor R^2

masing-masing $B = \{ u_1, u_2 \}$ **dan** $B' = \{ u_1', u_2' \}$

$u_1 = (1, 0)$ $\qquad u_1' = (1, 1)$

$u_2 = (0, 1)$ $\qquad u_2' = (2, 1)$

vektor $[v]_{B'} = (-3, 5)$ **jika dinyatakan dalam basis B'**

akan menjadi $[v]_B = (7, 2)$ **jika dinyatakan dalam basis B**

$$B' \xrightarrow[P]{} B \qquad \text{dan} \qquad [v]_B = P\,[v]_{B'}$$

Secara umum:

Dua basis dari ruang vektor R^2

masing-masing $B = \{ u_1, u_2 \}$ **dan** $B' = \{ u_1', u_2' \}$

Vektor u_1' dinyatakan dalam Basis B $= [u_1']_B = (a, b) = a u_1 + b u_2$ ……. (1)

Vektor u_2' dinyatakan dalam Basis B $= [u_2']_B = (c, d) = c u_1 + d u_2$ ……. (2)

Vektor v dinyatakan dalam Basis B' $= [v]_{B'} = (k_1, k_2) = k_1 u_1' + k_2 u_2'$ ……. (3)

Untuk menyatakan v dalam Basis B, disubstitusikan (1) dan (2) ke dalam (3)

$$
\begin{aligned}
[v]_{B'} = (k_1, k_2) = k_1 u_1' + k_2 u_2' &= k_1 (a u_1 + b u_2) + k_2 (c u_1 + d u_2) \\
&= (k_1 a u_1 + k_2 c u_1) + (k_1 b u_2 + k_2 d u_2) \\
&= (k_1 a + k_2 c) u_1 + (k_1 b + k_2 d) u_2
\end{aligned}
$$

Dari ruang vektor R^2

basis $B = \{ u_1, u_2 \}$ dan basis $B' = \{ u_1', u_2' \}$

$$[v]_{B'} = (k_1, k_2) = k_1u_1' + k_2u_2' = k_1(au_1 + bu_2) + k_2(cu_1 + du_2)$$

$$= (k_1au_1 + k_2cu_1) + (k_1bu_2 + k_2du_2)$$

$$= (k_1a + k_2c)u_1 + (k_1b + k_2d)u_2$$

$$[v]_B = (k_1a + k_2c)u_1 + (k_1b + k_2d)u_2$$

$$= (ak_1 + ck_2)u_1 + (bk_1 + dk_2)u_2$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} ak_1 + ck_2 \\ bk_1 + dk_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}}_{[v]_{B'}}$$

basis $B = \{ u_1, u_2 \}$ dan basis $B' = \{ u_1', u_2' \}$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} ak_1 + ck_2 \\ bk_1 + dk_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}}_{[v]_{B'}}$$

Vektor u_1' dinyatakan dalam **Basis B** $= [u_1']_B = (a, b) = a\mathbf{u_1} + b\mathbf{u_2}$ ……. (1)

Vektor u_2' dinyatakan dalam **Basis B** $= [u_2']_B = (c, d) = c\mathbf{u_1} + d\mathbf{u_2}$ ……. (2)

$$B' \xrightarrow[P]{} B$$

$$\boxed{P = \left([u_1']_B \;\vdots\; [u_2']_B \right)}$$

P = matriks transisi dari Basis B' ke Basis B

P^{-1} = matriks transisi dari Basis B ke Basis B'

$$B \rightarrow B' \qquad \boxed{P^{-1} = \left([\,u_1]_{B'} \;\vdots\; [\,u_2]_{B} \right)}$$

Contoh:

- Misalkan $B = (u_1,u_2)$ dan $B' = (u_1',u_2')$ dimana $u_1 = (1,0)$, $u_2 = (0,1)$, $u_1' = (1,1)$, $u_2' = (2,1)$

a. Temukan matriks transisi dari B' ke B
b. Temukan $[V]_B$ jika $[V]_{B'} =(-3,5)$

PENYELESAIAN :

a. $u_1' = u_1 + u_2$

$u_2' = 2u_1 + u_2$

sehingga

$$[u_1']_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dan [u_2']_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$maka\_transisi = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b.

$$[V]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

LEAST SQUARE

Diketahui SPL sebagai berikut :

$$X1 + X2 = 4$$
$$3X1 + X2 = 10$$
$$X1 + 3X2 = 5$$

Dua persamaan pertama didapatkan penyelesaian x1 = 3, x2 = 1 yang tidak memenuhi persamaan ketiga.

SPL tidak mempunyai jawab atau vektor $\bar{b} = (4 \quad 10 \quad 5)$ tidak terletak pada ruang kolom dari matriks koefisien.

LEAST SQUARE (Cont'd)

Misalkan SPL $\equiv A\bar{x} = \bar{b}$

Jawab terbaik suatu SPL tak punya jawab adalah vektor $\bar{x}$ di R^n sehingga nilai, $|A\bar{x} - \bar{b}|$ sekecil mungkin

Jawab ini juga disebut sebagai "**jawab kuadrat terkecil**"

Contoh(1) :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad A^t A \overline{\overline{x}} = A^t \bar{b}$$

$$\overline{p} = A \overline{\overline{x}} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 113 \\ 23 \end{bmatrix} = \left(\frac{34}{9} \quad \frac{181}{18} \quad \frac{91}{18} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 7 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 29 \end{bmatrix}$$

$$(A^t A)^{-1} = \frac{1}{72}\begin{bmatrix} 11 & -7 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{72}\cdot\begin{bmatrix} 11 & -7 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 39 \\ 29 \end{bmatrix} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 113 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{x}} = \left({}^{113}\!/_{26} \quad {}^{23}\!/_{26} \right) \longrightarrow \boxed{\text{JAWAB TERBAIK}}$$

Vektor proyeksi dari terhadap ruang kolom ialah:

$$\overline{p} = A\overline{\overline{x}} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}113\\ 23\end{bmatrix} = (\frac{34}{9}\quad \frac{181}{18}\quad \frac{91}{18})$$

Dengan demikian $\overline{p} = (\frac{34}{9}, \frac{181}{18}, \frac{91}{18})$

merupakan titik terdekat di ruang kolom,dengan

$$\overline{b} = (4, 10, 5)$$

Jarak keduanya: $\left|\overline{p}-\overline{b}\right|^2=(-\frac{2}{9})^2+(\frac{1}{18})^2+(\frac{1}{18})^2=\frac{1}{18}$

→ Merupakan jumlah kuadrat kesalahan jika diganti.

Contoh(2) :

Diketahui SPL sebagai berikut :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_1 \qquad - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 \qquad = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$$

Penyelesaian:

$$A^t A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -6 \\ 4 & 3 & -3 \\ -6 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^t \overline{b} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 21 \\ -21 \end{bmatrix}$$

$$A^t A \overline{\overline{x}} = A^t \overline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 4 & -6 \\ 4 & 3 & -3 \\ -6 & -3 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 21 \\ -21 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix} = (6 \quad 3 \quad 4)$$

$$\overline{p} = A \overline{\overline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$