MATERI 12

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS

Setelah menyelesaikan pertemuan ini mahasiswa diharapkan :

- Dapat menghitung eigen value dan eigen vektor suatu matriks
- Dapat mengetahui contoh aplikasi dari eigen value dan eigen vektor suatu matriks

eigenvalues eigenvectors

Definisi:

Matriks A (n×n); $\mathbf{x} \in R^n$ dan $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

maka λ disebut ***eigenvalue*** A, dan $\mathbf{x}$ disebut ***eigenvector*** dari A yang "berpasangan" dengan λ

Jika diketahui matriks A (n×n), bagaimana mencari ***eigenvalue(s)*** dari matriks A ?

1. Bentuk persamaan karakteristik determinan $(\lambda I - A) = 0$ (akan terbentuk persamaan derajat n)
2. Cari akar-akar persamaan karakteristik di atas, ada n akar; akar-akar ini merupakan ***eigenvalue(s)*** dari matriks A

Jika diketahui matriks A (n×n), bagaimana mencari *eigenvalue(s)* dari matriks A ?

1. **Bentuk persamaan karakteristik determinan (λI – A) = 0 (akan terbentuk persamaan derajat n)**
2. **Cari akar-akar persamaan karakteristik di atas, ada n akar; akar-akar ini merupakan *eigenvalue(s)* dari matriks A**

$$\text{Contoh: } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda-3 & 0-0 \\ 0-8 & \lambda+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-3 & 0 \\ -8 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}\,(\lambda I - A) = 0 \rightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 1) + 0 = 0$$

$$\text{maka } \lambda_1 = 3 \;\&\; \lambda_2 = -1$$

Definisi:

Matriks A (n×n); $\mathbf{x} \in R^n$ dan $\boxed{A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}}$

maka λ disebut ***eigenvalue*** A, dan $\mathbf{x}$ disebut ***eigenvector*** dari A yang "berpasangan" dengan λ

Jika diketahui matriks A (n×n), bagaimana mencari ***eigenvector(s)*** dari matriks A ?

Setelah ***eigenvalue*** λ_k dari matriks A diperoleh, maka ***eigenvector(s)*** $\mathbf{x}_k$ yang "berpasangan" dengan λ_k ditentukan dari persamaan $(\lambda I - A)\,\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$

Jika diketahui matriks A (n×n), bagaimana mencari ***eigenvector(s)*** dari matriks A ?

Setelah ***eigenvalue*** λ_k dari matriks A diperoleh, maka ***eigenvector*** x_k yang "berpasangan" dengan λ_k ditentukan dari persamaan $(\lambda I - A)\, x_k = \mathbf{0}$

Contoh: dari soal terdahulu $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 = \mathbf{3} \quad \& \quad \lambda_2 = \mathbf{-1}$

eigenvector x_1 : $(\lambda_1 I - A)\, x_1 = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad (3I - A)\, x_1 = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3-3} & \mathbf{0-0} \\ \mathbf{0-8} & \mathbf{3+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow x_{12} = 2x_{11} \\ \rightarrow x_{11} = skalar\ s \end{array}$$

eigenspace = himpunan eigenvector $x_1 = \{ (s,\ 2s) \}$

Jika diketahui matriks A (n×n), bagaimana mencari ***eigenvector(s)*** dari matriks A ?

Setelah ***eigenvalue*** λ_k dari matriks A diperoleh, maka ***eigenvector*** x_k yang "berpasangan" dengan λ_k ditentukan dari persamaan $(\lambda I - A)\, x_k = \mathbf{0}$

Contoh: dari soal terdahulu $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 3$ & $\lambda_2 = -1$

eigenvector x_2 : $(\lambda_2 I - A)\, x_2 = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad (-1\, I - A)\, x_2 = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{-1 - 3} & \mathbf{0 - 0} \\ \mathbf{0 - 8} & \mathbf{-1 + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow x_{21} = 0 \\ \rightarrow x_{22} = skalar\ s \end{array}$$

eigenspace = himpunan eigenvector $x_2 = \{ (0, \; s) \}$

Diagonalisasi:

Matriks A ($n \times n$)

akan dicari matriks P yang invertibel

sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ = matriks diagonal

Matriks A disebut *diagonalizable*

Matriks P disebut mendiagonalisasi (*diagonalizes*) matriks A

Teorema: Matriks A ($n \times n$)

Matriks A disebut ***diagonalizable*** $\leftrightarrow$ A memiliki n ***eigenvectors*** yang linearly independent

Algoritma untuk menentukan matriks P

Matriks A (n × n) ***diagonalizable***, maka langkah-langkah untuk menentukan P sbb.:

1. Bentuk fungsi karakteristik determinan ($\lambda I - A$) = 0
2. Tentukan ***eigenvalues*** dari A: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$
3. Tentukan ***eigenspaces*** yang berpasangan dengan ***eigenvalues*** $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ tersebut
4. Tentukan basis-basis dari ***eigenspaces*** di atas
5. Matriks P diperoleh dengan menuliskan basis-basis tersebut sebagai vektor kolom

Diagonalisasi Ortogonal:

Matriks A ($n \times n$)

akan dicari matriks P yang ortogonal ($P^{-1} = P^T$)

sedemikian sehingga $P^{-1}AP = P^TAP$ = matriks diagonal

Matriks A disebut *orthogonally diagonalizable*

Matriks P disebut mendiagonalisasi secara ortogonal (*orthogonally diagonalizes*) matriks A

Algoritma untuk menentukan matriks P

Matriks A (n × n) ***orthogonally diagonalizable***, maka langkah-langkah untuk menentukan P sbb.:

1. Bentuk fungsi karakteristik determinan $(\lambda I - A) = 0$
2. Tentukan ***eigenvalues*** dari A: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$
3. Tentukan ***eigenspaces*** yang berpasangan dengan ***eigenvalues*** $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ tersebut
4. Tentukan basis-basis dari ***eigenspaces*** di atas
5. Aplikasikan metode Gram-Schmidt untuk mendapatkan basis-basis ortonormalnya
6. Matriks P diperoleh dengan menuliskan basis-basis hasil langkah 5 tersebut sebagai vektor kolom

Teorema:

Jika matriks A (n×n), maka yang berikut ini ekivalen

a) **Matriks A simetrik**

b) **Matriks A *orthogonallly diagonalizable***

c) **Matriks A memiliki n eigenvectors yang ortonormal**

Jika a) benar maka b) dan c) benar, dsb

Jika a) salah maka b) dan c) salah, dsb

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

determinan $(\lambda I - A) = 0 \;\rightarrow (\lambda - 2)^2 (\lambda - 8) = 0$

eigenvector x_1 : $(\lambda_1 I - A)\, x_1 = 0 \;\rightarrow (2I - A)\, x_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eigenspace (λ_1)

$$\left\{ \begin{pmatrix} -x_{12} - x_{13} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x_{12} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_{13} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

determinan $(\lambda I - A) = 0 \rightarrow (\lambda - 2)^2 (\lambda - 8) = 0$

eigenvector x_2 : $(\lambda_2 I - A)\, x_2 = \mathbf{0} \rightarrow (8I - A)\, x_2 = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eigenspace (λ_2)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_{23} \\ x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x_{23} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Basis eigenspace (λ_1)

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{dengan Gram-Schmidt \& normalisasi}} \left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$$

Basis eigenspace (λ_2)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{dengan Gram-Schmidt \& normalisasi}} \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$$

Maka matriks P yang *orthogonally diagonalizes* matriks (A) adalah

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Maka matriks P yang ***orthogonally diagonalizes*** **matriks (A) adalah**

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

CONTOH:

Sistem persamaan perpindahan penduduk,

$$C_{n+1} = 0,85C_n + 0,10S_n$$
$$S_{n+1} = 0,15C_n + 0,90S_n$$

untuk n ≥ 0

Dalam hal ini : $\bar{x}_n = \begin{bmatrix} C_n \\ S_n \end{bmatrix}$

Matriks transisinya : $A = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,10 \\ 0,15 & 0,90 \end{bmatrix}$

Persamaan karakteristik dari A :

Persamaan karakteristik dari A :

$$\left(\frac{17}{20}-\lambda\right)\left(\frac{9}{10}-\lambda\right)-\left(\frac{3}{20}\right)\left(\frac{1}{10}\right)=0;$$

$$(17-20\lambda)(9-10\lambda)-3=0$$

$$200\lambda^2-350\lambda+150=0$$

$$4\lambda^2-7\lambda+3=0$$

$$(\lambda-1)(4\lambda-3)=0\rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=0,75$$

*) Untuk λ1, pers. (A-λI)= 0

$$\begin{bmatrix} -0,15 & 0,10 \\ 0,15 & -0,10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \overline{x_1} = S\left(2,3\right),$$

*) Untuk λ2 = 0,75, pers. (A-λI)=0

$$\begin{bmatrix} 0,10 & 0,10 \\ 0,15 & 0,15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \overline{x}_2 = S\left(-1,1\right),$$

$$A = PDP^{-1}, P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

untuk k >>

$$\left(\frac{3}{4}\right)^k \approx 0$$

$$A^k = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{4}\right)^k \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Dengan k yang cukup besar,

$$\bar{x}_k = A^k \bar{x}_0 \approx \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_0 \\ S_0 \end{bmatrix} = \left(C_0 + S_0\right)\begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix}$$

- Untuk waktu yang lama (k >>) karena vector (0,4,0,6) dengan $\lambda=1$, pembagian penduduk antara kota dan pinggiran tidak mengalami perubahan lagi, yaitu menjadi 40% berada di kota dan 60% berada di pinggiran