MATERI 3

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS

Setelah menyelesaikan pertemuan ini mahasiswa diharapkan :

- Dapat menghitung determinan
- Dapat menyelesaikan Sistem Persamaan Linier dengan menggunakan determinan

DETERMINAN

Bab 2.1-2.4

Fungsi Determinan

contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Det(A)} = 3(-2) - 1.4 = -10$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} + & + & + \end{array} \\ B = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{array} \\ & \begin{array}{ccc} - & - & - \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{Det(B)} = (45+84+96) - (105+(-48)+(-72)) = 240$$

Landasan Teori Fungsi Determinan

Permutasi:

Perhatikan himpunan *integer* { 1, 2, 3, …, n }.

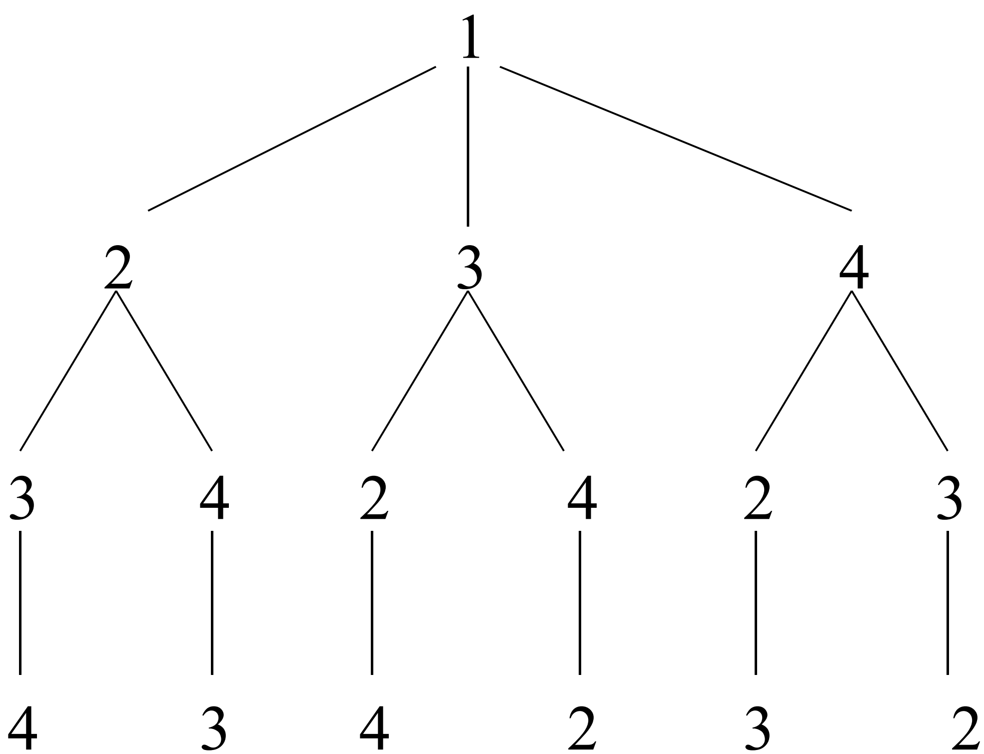
Susunan ke-n *integer* ini dengan urutan tertentu (tidak ada *integer* yang dihapus dan tidak ada *integer* yang diulang) disebut permutasi.

Contoh: himpunan S = { 1, 2, 3, 4 }; ada 24 permutasi dari S

(1, 2, 3, 4)	**(2, 1, 3, 4)**	**(3, 1, 2, 4)**	**(4, 1, 2, 3)**
(1, 2, 4, 3)	**(2, 1, 4, 3)**	**(3, 1, 4, 2)**	**(4, 1, 3, 2)**
(1, 3, 2, 4)	**(2, 3, 1, 4)**	**(3, 2, 1, 4)**	**(4, 2, 1, 3)**
(1, 3, 4, 2)	**(2, 3, 4, 1)**	**(3, 2, 4, 1)**	**(4, 2, 3, 1)**
(1, 4, 2, 3)	**(2, 4, 1, 3)**	**(3, 4, 1, 2)**	**(4, 3, 1, 2)**
(1, 4, 3, 2)	**(2, 4, 3, 1)**	**(3, 4, 2, 1)**	**(4, 3, 2, 1)**

Pohon permutasi: contoh pohon dengan “akar” *integer* 1

(buat sendiri pohon permutasi dengan “akar” 2, 3, 4)



Permutasi himpunan integer {1, 2, 3, …, n}:

Susunan elemen-elemen integer ini dengan urutan tertentu; tidak ada integer yang dihapus dan tidak ada integer yang diulang ($j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$)

Inversi dalam permutasi ($j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$) terjadi jika integer yang lebih besar mendahului integer yang lebih kecil.

Contoh:

dalam urutan (4, 2, 1, 3) terdapat 4 inversi: $4 > 2$, $4 > 1$, $4 > 3$, $2 > 1$

Suatu inversi disebut genap jika banyaknya inversi adalah 0, 2, 4, … (genap), dan disebut gasal jika banyaknya inversi adalah 1, 3, 5, … (gasal).

Dalam contoh di atas inversinya adalah 4 (genap).

Hasil kali elementer (*elementary product*):

Dalam sebuah matriks A (n x n) yang disebut hasil kali elementer

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{nj_n}$$

Catatan: **indeks baris : selalu urut 1, 2, 3, …, n**

indeks kolom: urutan permutasi $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$

Hasil kali elementer bertanda (*signed elementary product):*

Jika ($j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$) merupakan inversi

- genap, maka hasil kali elementer adalah positif
- gasal, maka hasil kali elementer adalah negatif

<u>Definisi (formal) DETERMINAN</u>:

Matriks A (n x n). Fungsi determinan, dinotasikan det(A), adalah <u>jumlah</u> <u>semua</u> hasil kali elementer bertanda.

<u>Contoh:</u> A (3 x 3); jumlah semua hasil kali elementer bertanda

adalah jumlah dari semua (6) elemen berikut ini:

$$+a_{11}a_{22}a_{33} \qquad -a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$+a_{12}a_{23}a_{31} \qquad -a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$+a_{13}a_{21}a_{32} \qquad -a_{13}a_{22}a_{31}$$

Bandingkan dengan cara perhitungan “non-formal”nya:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

$+\, a_{11}a_{22}a_{33}$ (inversi = 0)	$-\, a_{11}a_{23}a_{32}$ (inversi = 1)
$+\, a_{12}a_{23}a_{31}$ (inversi = 2)	$-\, a_{12}a_{21}a_{33}$ (inversi = 1)
$+\, a_{13}a_{21}a_{32}$ (inversi = 2)	$-\, a_{13}a_{22}a_{31}$ (inversi = 3)

Landasan Teori Fungsi Determinan

selesai

review:

1. Menghitung det(A) di mana A matriks (2x2) atau (3x3) cukup mudah.
2. Menghitung det(A) di mana A matriks (nxn) untuk semua n ≥ 2 secara umum dilakukan dengan menjumlahkan semua hasil kali elementer bertanda dari matriks A.

Cara lain untuk menghitung det(A), di mana A(nxn), adalah dengan

Reduksi Baris (Operasi Baris Elementer).

1. **Matriks A diubah menjadi matriks segi-3 atas (segi-3 bawah), matriks segi-3 ini disebut A'.**
2. **Det(A) = det(A') = hasil kali semua entri diagonal utama matriks A'.**

Teorema:

1. Bila A(n x n) matriks segitiga atas/bawah, maka Det(A) adalah ***hasil kali dari elemen-elemen diagonal utama.***

Contoh: $A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 7 & -3 \\ 0 & \mathbf{-3} & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{6} \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{Det}(A) = 2 \times (-3) \times 6 = -36$

Bukti:

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 7 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{cc} 2 & 7 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{array}$$

Secara umum: untuk A(3 x 3)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}$$

diagonal utama

$$\boxed{+\,a_{11}a_{22}a_{33}} \neq 0 \qquad -\,a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$+\,a_{12}a_{23}a_{31} \qquad -\,a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$+\,a_{13}a_{21}a_{32} \qquad -\,a_{13}a_{22}a_{31}$$

Teorema:

Matriks A (n x n), terhadap A dilakukan OBE

2. **Bila B berasal dari matriks A yang salah satu barisnya dikalikan dengan skalar k, maka det(B) = k × det(A)**
3. **Bila B berasal dari matriks A dengan menukar dua barisnya, maka det(B) = – det(A)**
4. **Bila B berasal dari matriks A dengan menambahkan kelipatan salah satu baris A pada baris lain, maka det(B) = det(A)**

Teorema:

5. $\text{Det}(A) = \text{Det}(A^T)$

6. $\text{Det}(A) = 0$ bila

    - *Ada 2 baris / 2 kolom yang sebanding*
    - *Ada satu baris-nol / satu kolom-nol*

7. Jika A dan B matriks bujur sangkar berukuran sama, maka $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

8. Jika A, B, C matriks bujur sangkar berukuran sama, dan **baris ke-r** matriks C didapat dari penjumlahan **baris ke-r** matriks A dan **baris ke-r** matriks B, maka $\det(C) = \det(A) + \det(B)$

9. "*idem*" untuk **kolom**

Teorema:

10. Matriks A(nxn) invertibel jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$

11. Jika A matriks invertibel dengan invers A^{-1}, maka

$$\det(A^{-1}) = 1 / (\det(A))$$

12. Jika A matriks bujur sangkar ukuran nxn, maka $\det(kA) = k^n \det(A)$

13. Andaikan E adalah suatu matriks dasar nxn, maka :

    a. Jika E dihasilkan dari mengalikan suatu baris dari In dengan k, maka $\det(E) = k$

    b. Jika E dihasilkan dari mempertukarkan dua baris dari In, maka $\det(E) = -1$

    c. Jika E dihasilkan dari menambahkan suatu penggandaan satu baris dari In ke baris lainnya, maka $\det(E) = 1$

Contoh :

1.
$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (2)(-3)(6)(9)(4) = -1296$$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $A1 = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $A2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $A3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \det(A) = -2, \\ \det(A1) = 4\det(A) \\ \det(A2) = -\det(A) \\ \det(A3) = \det(A) \end{array}\right] \text{Mengapa ??}$$

3.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -18$$

Teorema:

Ada 7 pernyataan yang ekivalen (semua benar, atau semua salah), sebagai berikut:

1. **Matriks A invertibel (ada A^{-1})**
2. **SPL homogen $Ax = 0$ punya solusi trivial saja**
3. **Bentuk eselon baris terduksi matriks A adalah matriks I_n.**
4. **Matriks A dapat dinyatakan sebagai perkalian matriks-matriks elementer**
5. **SPL $Ax = b$ konsisten (ada solusi) untuk tiap matriks / vektor kolom b (nx1)**
6. **SPL $Ax = b$ punya <u>satu</u> solusi untuk tiap matriks b (n x 1)**
7. **$\text{Det}(A) \neq 0$**

Terminologi: A matriks (3 x 3)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Minor (a_{ij}) disingkat M_{ij}: determinan dari sub-matriks yang tersisa jika baris-i dan kolom-j dihapus dari matriks A

Cofactor (a_{ij}) disingkat C_{ij} : $(-1)^{i+j} M_{ij}$

Cofactor (a_{ij}) disingkat C_{ij} : $(-1)^{i+j}\ M_{ij}$

Adjoint(A) disingkat adj(A):

adalah matriks yang terbentuk dari transpose ***cofactors*** A

Teorema:

A matriks (nxn).

Det(A) dapat dihitung dengan **ekspansi *cofactor*** sepanjang salah satu **baris**, atau sepanjang salah satu **kolom** dari A.

Ekspansi sepanjang baris-i:

$$\text{Det }(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

Ekspansi sepanjang kolom-j:

$$\text{Det }(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

<u>Teorema:</u>

Jika A matriks invertibel, maka

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A)}$$

Aturan Cramer:

Solusi untuk Sistem Persamaan Linier **Ax = b** (**A** matriks koefisien (nxn) dan **b** vektor (nx1)) dapat ditentukan dengan :

$$\boxed{x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

di mana A_i adalah matriks A dengan menggantikan **kolom-i** dengan (vektor) **b**

Contoh :

Gunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan SPL berikut :

$$x + 2z = 6$$
$$-3x + 4y + 6z = 30$$
$$x - 2y + 3z = 8$$

Penyelesaian :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{16}{11}$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

Ruang Solusi dari Sistem Persamaan Linier $Ax = b$ dapat dicari dengan cara:

1. **Eliminasi-substitusi**
2. **Eliminasi Gauss & substitusi balik**
3. **Eliminasi Gauss-Jordan**
4. **Menentukan invers A^{-1}, lalu $x = A^{-1}b$**
5. **Aturan Cramer**