PREDIKAT DAN QUANTIFIER

Bab 1

Sub Bab 1.4

Tujuan Instruksional Khusus

- Memahami tentang konsep predikat dan fungsi proposisi
- Memahami tentang proses *quantification* (penggunanaan quantifier pada proposisi)

Predikat dan Fungsi Proposisi

- Perhatikan pernyataan P(x), notasi simbolik dari $x > 5$
  - "> 5" disebut predikat
  - P disebut predikat
  - P(x) belum mempunyai nilai kebenaran selama x belum diketahui; disebut fungsi proposisi P untuk x
  - P(x) akan menjadi proposisi jika kepada x telah diberikan nilai tertentu kepadanya

$P(x) : x > 5$

- Akan menjadi proposisi jika x telah diberi nilai tertentu (x telah diikat dengan nilai tertentu)
- Nilai yang diberikan kepada x diambil dari himpunan nilai yang disebut semesta (*universe of discourse*) atau *domain*
- Dalam contoh di atas *domain* dapat berupa himpunan bilangan bulat

Quantifier

- Selain mengikat x dengan suatu nilai dari domain tertentu, x dapat juga diikat dengan quantifier
- Prosesnya disebut quantification
- Ada 3 macam quantifiers:
  - **Universal** quantifier ($\forall$)
  - **Existential** quantifier ($\exists$)
  - **Unique** quantifier ($\exists!$)

Universal Quantifier

P(x) : x > 5

- **∀x P(x)** di-bahasa-kan demikian: "*untuk semua nilai x dalam domain*, x > 5"
- **∀x P(x)** bernilai benar jika dan hanya jika P(x) bernilai benar untuk tiap x
- **∀x P(x)** bernilai salah jika dan hanya jika ada nilai x yang membuat P(x) bernilai salah
- Apakah nilai kebenaran dari **∀x P(x)** jika domain adalah
  - { 6, 7, 8 , 9 }
  - { 1..10 }
  - { … -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, … }

Existential Quantifier

P(x) : x > 5

- $\exists$ x P(x) di-bahasa-kan demikian: "untuk suatu nilai x dalam domain, x > 5"
- $\exists$ x P(x) bernilai benar jika dan hanya jika ada x (paling tidak satu) yang membuat P(x) benar.
- $\exists$ x P(x) bernilai salah jika dan hanya jika P(x) salah untuk tiap x.
- Apakah nilai kebenaran dari $\exists$ x P(x) jika domain adalah
  - { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 , 9 }
  - { 1..10 }
  - { … -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}

Unique Quantifier

P(x) : x > 5

- $\exists!$ x P(x) di-bahasa-kan demikian: “untuk tepat satu nilai x dalam domain, x > 5”
- Apakah nilai kebenaran dari $\exists!$ x P(x) jika domain adalah
  - { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
  - { 1..10 }
  - { … -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, … }

Variabel Terikat, Variabel Bebas, *Scope*

- Contoh 1: $P(x) : x > 5$
  - dalam proposisi $P(4)$, $\forall x\, P(x)$, $\exists x\, P(x)$
  - variabel **x** disebut **variabel terikat**
- Contoh 2: $P(x, y) : x + y > 5$
  - dalam $P(4, y)$ **y** disebut **variabel bebas**
  - dalam $\forall y\, P(x, y)$ **x** disebut **variabel bebas**
  - dalam $\exists x\, P(x, y)$ **y** disebut **variabel bebas**
- Contoh 3: $\exists x\, [P(x) \vee Q(x)] \wedge \forall x\, R(x)$
  - ***scope*** dari $\exists x$ adalah $[P(x) \vee Q(x)]$
  - ***scope*** dari $\forall x$ adalah $R(x)$

Negasi Dari Proposisi dengan Quantifier

TABLE 2 De Morgan's Laws for Quantifiers.

Negation	*Equivalent Statement*	*When Is Negation True?*	*When False?*
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	For every x, $P(x)$ is false.	There is an x for which $P(x)$ is true.
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	There is an x for which $P(x)$ is false.	$P(x)$ is true for every x.

Negasi Dari Proposisi Dengan *Quantifier*

- Contoh 1 :
  - $\sim \exists x\ P(x)$ Tidak ada mobil berwarna merah
  - $\forall x \sim P(x)$ Semua mobil tidak berwarna merah

- Contoh2 :
  - $\sim \forall x\ P(x)$ Tidak semua anak nakal
  - $\exists x \sim P(x)$ Ada anak yang tidak nakal

Proposisi dengan *Quantifier* yang lebih kompleks

- Anggap *domain* adalah himpunan bilangan nyata (*real numbers*)
  - $\forall x \, \forall y \, (x + y = y + x)$
  - $\forall x \, \exists y \, (x + y = 0)$
  - $\forall x \, \forall y \, ((x > y) \wedge (y < 0) \rightarrow xy < 0)$

Quantification pada dua variabel

Proposisi	TRUE	FALSE
∀x ∀y P(x, y) ∀y ∀x P(x, y)	P(x, y) benar untuk semua pasangan x dan y	Ada pasangan x dan y yang membuat P(x, y) salah
∀x ∃y P(x, y)	Untuk tiap x ada suatu y yang membuat P(x, y) benar	Ada x yang membuat P(x, y) salah untuk tiap y
∃x ∀y P(x, y)	Ada x yang membuat P(x, y) benar untuk tiap y	Untuk tiap x ada suatu y yang membuat P(x, y) salah
∃x ∃y P(x, y)	Ada pasangan x dan y yang membuat P(x, y) benar	P(x, y) salah untuk semua pasangan x dan y

PR Exercise 1.4 (Latihan)

1. Tentukan nilai kebenaran jika domain adalah semua bilangan integer dari statement berikut :
   - $\forall n(n+1 > n)$
   - $\exists n(n = -n)$
   - $\exists n(2n = 3n)$
   - $\forall n(n^2 \geq n)$
2. Terjemahkan statement berikut ini ke bhs inggris, dimana C(x) adalah “x is a comedian” dan F(x) adalah “ x is funny” , dan domainnya adalah semua orang.
   - $\forall x(C(x) \rightarrow F(x))$
   - $\exists x(C(x) \rightarrow F(x))$
   - $\forall x(C(x) \wedge F(x))$
   - $\exists x(C(x) \wedge F(x))$

PR Exercise 1.4 (Latihan)

3. Terjemahkan tiap statement berikut ke bentuk ekspresi logika menggunakan predikat, quantifier dan konektif.
   - No one is perfect
   - Not everyone is perfect
   - All your friends are perfect
   - One of your friends is perfect
   - Everyone is friend and is perfect
   - Not everybody is your friend or someone is not perfect

PR Exercise 1.4 (Latihan)

4. Tentukan nilai kebenaran dari tiap statement ini jika domain dari tiap variabel adalah semua bilangan real.
   - $\forall x \exists y (x^2 = y)$
   - $\exists y \forall x (xy = 0)$
   - $\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y (xy = 1))$
   - $\forall x \exists y (x + y = 1)$
   - $\forall x \forall y \exists z (z = (x + y)/2)$

Pekerjaan Rumah

- Pada Buku Teks : Discrete Mathematics and Its Applications, Kenneth H Rossen, McGraw-Hill 7th edition
  - Exercise 1.4: No. 15, 25
  - Exercise 1.5: No. 27, 28