CARA MEMBUKTIKAN *(Proof Methods)*

Bab 1

Sub-bab 1.7

Tujuan Instruksional Khusus

- Memahami tentang beberapa cara membuktikan
- Memahami tentang penggunaan metode pembuktian pada beberapa permasalahan

Membuktikan teorema berbentuk $p \rightarrow q$

1. Bukti langsung (*direct proof*)
2. Bukti tidak langsung (*indirect proof*)
3. Bukti hampa (*vacuous proof*)
4. Bukti mudah (*trivial proof*)
5. Bukti dengan kontradiksi (*proof by contradiction*)
6. Bukti per kasus (*proof by cases*)
7. Bukti pada ekuivalensi (*proof for equivalence*)

1. Bukti langsung *(direct proof)*

Perhatikan implikasi **$p \rightarrow q$**

Jika dapat ditunjukkan bahwa p bernilai BENAR dan q ternyata juga bernilai BENAR maka implikasi **$p \rightarrow q$** terbukti bernilai BENAR

1. Bukti langsung *(direct proof)*

Buktikan teorema berikut dengan *direct proof* :
"Jika n *integer* gasal, maka n^2 *integer* gasal"

- Bukti:
  - $n = 2k + 1$ *integer* gasal
  - $n^2 = (2k + 1)^2$
  - $= 4k^2 + 4k + 1$
  - $= 2(2k^2 + 2k) + 1$ (n^2 *integer* gasal)
- n *integer* gasal $\rightarrow$ n^2 *integer* gasal (terbukti)

2. Bukti tak langsung (*indirect proof*)

Perhatikan implikasi **$p \rightarrow q$**

$p \rightarrow q$ *equivalent* dengan **$\sim q \rightarrow \sim p$**

Jika dapat ditunjukkan bahwa $\sim q$ bernilai BENAR dan $\sim p$ ternyata juga bernilai BENAR maka implikasi **$p \rightarrow q$** terbukti bernilai BENAR

2. Bukti tak langsung (*indirect proof*)

Teorema:
"Jika 3n + 2 gasal, maka n gasal"

- Ekivalen dengan "jika n genap, maka 3n + 2 genap"
- Bukti:
  - n = 2k (genap)
  - 3n + 2 = 3(2k) + 2
  - = 6k + 2
  - = 2 (3k) + 2
  - = 2 (3k +1) (genap)
  - jika n genap, maka 3n + 2 genap
  - jika 3n + 2 gasal, maka n gasal (terbukti)

3. Bukti hampa *(vacuous proof)*

- Implikasi $p \rightarrow q$ mempunyai nilai kebenaran TRUE apabila p bernilai FALSE
- Contoh:

  Buktikan "jika $n > 1$ maka $n^2 > n$, untuk $n = 0$"
  - $p : 0 > 1$ (FALSE)
  - Tanpa memperhatikan nilai q maka "teorema" terbukti

4. Bukti mudah (*trivial proof*)

- Implikasi $p \rightarrow q$ mempunyai nilai kebenaran TRUE apabila q bernilai TRUE
- Contoh:

  "Buktikan jika $a \geq b$ maka $a^n \geq b^n$, untuk $n = 0$"
  - $q : a^0 \geq b^0$ (TRUE)
  - Tanpa memperhatikan nilai p maka "teorema" terbukti

5. Bukti dengan kontradiksi (*proof by contradiction*)

Perhatikan implikasi $p \rightarrow q$

p dapat dibuktikan kebenarannya dengan cara kontradiksi melalui tahap sbb:

- Asumsikan hypotesis menjadi **~p**, sehingga implikasi menjadi $\sim p \rightarrow q$
- Cari pembuat kontradiksi dari konklusi yaitu **~q**, sehingga implikasi menjadi $\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)$
- Untuk mendapatkan implikasi yang benar maka **~p** harus salah, oleh karena itu **p** terbukti **benar**

5. Bukti dengan kontradiksi (*proof by contradiction*)

Contoh : Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah irrasional

p : $\sqrt{2}$ adalah irrasional
Asumsikan ~p sehingga $\sqrt{2}$ adalah rasional
Dengan asumsi $\sqrt{2}$ adalah rasional maka
$\sqrt{2} = a/b$; q : a dan b adalah bilangan bulat yang tidak punya faktor sama
$2 = a^2 / b^2$
$2b^2 = a^2$, berarti a^2 genap sehingga a genap. Jika a genap $a = 2c$, sehingga
$2b^2 = 4c^2$
$b^2 = 2c^2$, berarti b^2 genap sehingga b genap
Karena a dan b genap maka a dan b memiliki faktor bersama yaitu 2.
Hasil ini adalah ~q yang merupakan kontradiksi dari q yang diasumkan dari ~p. Karena itu asumsi ~p salah sehingga p : $\sqrt{2}$ adalah irrasional adalah BENAR

5. Bukti dengan kontradiksi (*proof by contradiction*)

Teorema:
"jika n genap, maka 3n + 2 genap"

- Bukti: asumsikan n gasal
  - n = 2k+1
  - 3n+2 = 3(2k+1) + 2
  - 3n+2 = 2(3k+2) + 1
  - 3n+2 bernilai gasal, kontradiksi dengan 3n+2 genap
  - Sehingga Teorema tebukti benar

6. Bukti per kasus (*proof by cases*)

Buktikan teorema:

"|xy| = |x| |y| untuk semua bilangan nyata"

- Bukti:

	x	**y**	**|xy|**	**|x| |y|**
1	≥ 0	≥ 0	xy	xy
2	≥ 0	< 0	-(xy)	x(-y)
3	< 0	≥ 0	-(xy)	(-x)y
4	< 0	< 0	xy	(-x)(-y)

Contoh

Buktikan :

Jika n *integer* yang <u>tidak</u> habis dibagi 2 atau 3, maka $n^2 - 1$ habis dibagi 24

Contoh

- Bukti : nyatakan $n = 6k + j$ di mana $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ dan $k =$ *integer*
  - $j = 0 \rightarrow n = 6k$ habis dibagi 2 atau 3
  - $j = 1 \rightarrow n = 6k + 1$ tidak habis dibagi 2 atau 3
  - $j = 2 \rightarrow n = 6k + 2$ habis dibagi 2
  - $j = 3 \rightarrow n = 6k + 3$ habis dibagi 3
  - $j = 4 \rightarrow n = 6k + 4$ habis dibagi 2
  - $j = 5 \rightarrow n = 6k + 5$ tidak habis dibagi 2 atau 3
  - selanjutnya ingat bahwa $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$

$n = 6k + 1 \rightarrow (n + 1)(n - 1) = (6k + 2)(6k) = 2(3k + 1)(6k)$

jika $k = 2m$ maka $(3k + 1) = 6m + 1$, $6k = 12m$

$(n + 1)(n - 1) = 2(3k + 1)(6k) = 2(6m + 1)(12m)$

$= 24(6m + 1)(m)$

jika $k = 2m + 1$ maka $(3k + 1) = 6m + 4$, $6k = 12m + 6$

$(n + 1)(n - 1) = 2(6m + 1)(12m) = 2(6m + 4)(12m + 6)$

$= 24(3m + 2)(2m + 1)$

$n = 6k + 5 \;\rightarrow\; (n + 1)(n - 1) = (6k + 6)(6k + 4)$

$= 6(k + 1)\, 2(3k + 2)$

$= 12(k + 1)(3k + 2)$

jika $k = 2m$ maka $(k + 1) = 2m + 1$, $3k + 2 = 6m + 2$

$(n + 1)(n - 1) = 12(k + 1)(3k + 2)$

$= 12(2m + 1)(6m + 2)$

$= 24(2m + 1)(3m + 1)$

jika $k = 2m + 1$ maka $(k + 1) = 2m + 2$, $3k + 2 = 6m + 5$

$(n + 1)(n - 1) = 12(k + 1)(3k + 2)$

$= 12(2m + 2)(6m + 5)$

$= 24(m + 1)(6m + 5)$

- Jadi teorema :
- “Jika n *integer* yang <u>tidak</u> habis dibagi 2 atau 3, maka n2 – 1 habis dibagi 24”
- terbukti

7. Bukti teorema berbentuk ekivalensi

- Bukti teorema berbentuk ekivalensi “$p \leftrightarrow q$”
  - Buktikan $p \rightarrow q$
  - Buktikan $q \rightarrow p$

- Bukti teorema berbentuk “p, q, r, s ekivalen”
  - Buktikan $p \rightarrow q$
  - Buktikan $q \rightarrow r$
  - Buktikan $r \rightarrow s$
  - Buktikan $s \rightarrow p$

Contoh 1

- Buktikan : “ Bilangan integer n adalah ganjil jika dan hanya jika n^2 adalah ganjil”
  - p : “n adalah ganjil”
  - q : “n^2 adalah ganjil”
- Dibuktikan $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$ adalah bernilai benar
- Pembuktian $p \rightarrow q$ sbb:
  - Asumsi : $n = 2k + 1$ (ganjil)
  - $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
  - n^2 adalah ganjil

Contoh 1

- Pembuktian $q \rightarrow p$ sbb:
  - Pembuktian dengan bukti tidak langsung

  n genap maka n^2 genap
  - Asumsi : $n = 2k$ (genap)
  - $n^2 = 4k^2$
  - $n^2 = 2(2k^2)$ (genap)

  Jadi jika n^2 ganjil maka n ganjil (terbukti)

Contoh 2

- Tunjukkan bahwa statemen dibawah ini ekuivalen:
  - p1 : n is an even integer
  - p2 : n−1 is an odd integer
  - p3 : n^2 is an even integer
- Membuktikan bahwa p1 $\rightarrow$ p2, p2 $\rightarrow$ p3, dan p3 $\rightarrow$ p1 adalah bernilai BENAR.
- Pembuktian p1 $\rightarrow$ p2 (pembuktian langsung)
  - Asumsi $n = 2k$ (even)
  - $n-1 = 2k-1 = 2(k-1) + 1$ (odd)
  - terbukti

Contoh 2

- Pembuktian p2 $\rightarrow$ p3 (pembuktian langsung)
  - Asumsi n – 1 = 2k + 1 (odd)
  - n–1 = 2k + 1 = 2k + 2
  - $n^2 = (2k + 2)^2 = 4k^2 + 8k + 4 = 2(2k^2 + 4k + 2)$ (even)
  - Terbukti
- Pembuktian p3 $\rightarrow$ p1 (pembuktian langsung)
  - Asumsi $n^2 = 4k^2$ (genap)
  - $n = \sqrt{4k^2} = 2k$ (genap)
  - Terbukti

Latihan

- 1. Buktikan " if n is an integer and $n^3 + 5$ is odd, then n is even" dengan:
  - Bukti tidak langsung
  - Bukti dengan kontradiksi
- 2. Buktikan bahwa jumlah dari dua bilangan ganjil adalah bilangan genap
- 3. Tunjukkan bahwa tiga statemen dibawah ini adalah ekuivalen.
  - a is less than b
  - the average of a and b is greater than a
  - the average of a and b is less than b

Pekerjaan Rumah

- Pada Buku Teks : Discrete Mathematics and Its Applications, Kenneth H Rossen, McGraw-Hill 7th edition
- Latihan 1.6 no: 6,9,11,12
- Exercise 1.7: No. 4,5, 17