HIMPUNAN

Bab 2.1, 2.2, 8.5

Tujuan Instruksional Khusus

- Memahami konsep himpunan (relasi antar himpunan, *power set* dan *cartesian product*)
- Memahami macam-macam operasi himpunan
- Memahami prinsip inklusi-eksklusi

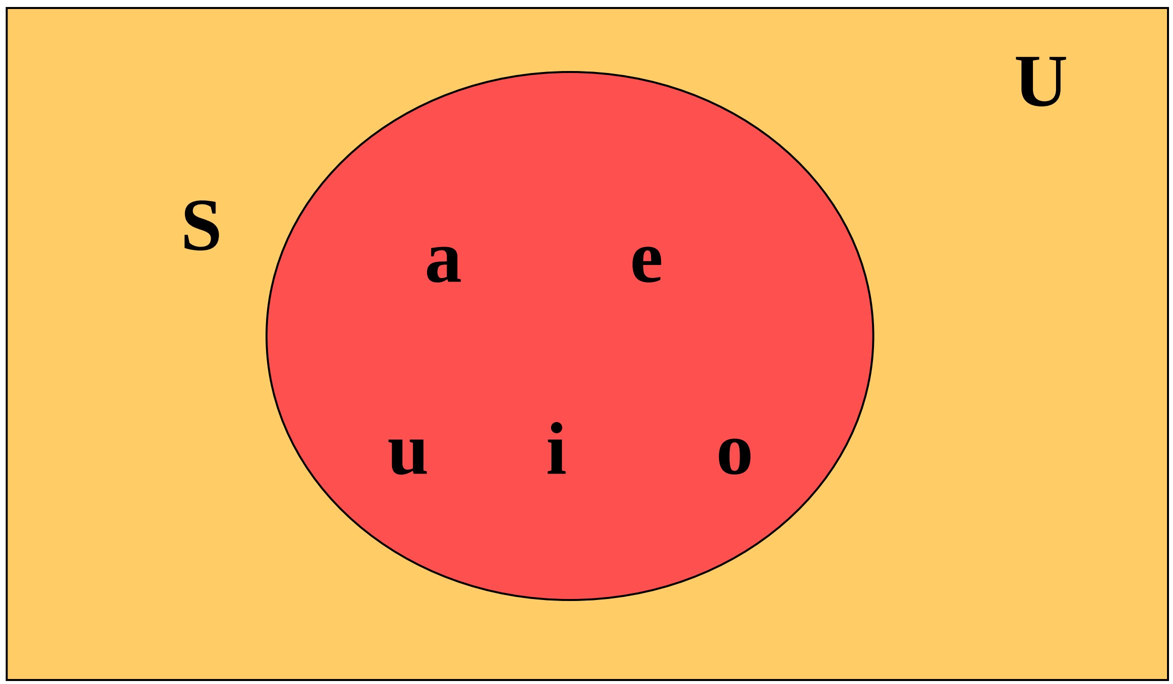
Definisi Himpunan

- Himpunan (*set*) adalah kumpulan obyek-obyek tidak urut (*unordered*)
- Obyek dalam himpunan disebut elemen atau anggota (*member*)
- Himpunan yang tidak berisi obyek disebut himpunan kosong (*empty set*)
- Universal set berisi semua obyek yang sedang dibahas
- Contoh : S = { a, e, i, o, u }

  U = himpunan semua huruf

Diagram Venn

- Salah satu cara merepresentasikan himpunan



Contoh

- N = { 0, 1, 2, 3, …. } = himpunan bilangan natural
- Z = { …, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …. } = himpunan bilangan bulat (*integer*)
- Z+ = { 1, 2, 3, …. } = himpunan *integer* positif
- Q = { p/q | p $\in$ Z, q $\in$ Z, q $\neq$ 0 } = himpunan bilangan rasional
- R = himpunan bilangan nyata (*real numbers*)

Relasi Dua Himpunan

- A dan B merupakan himpunan
- $A = B$ ➔ jika dan hanya jika elemen-elemen A sama dengan elemen-elemen B
- $A \subseteq B$ (subset) ➔ jika dan hanya jika tiap elemen A adalah elemen B juga
  - $\forall x \, (x \in A \rightarrow x \in B)$
- Catatan: $\varnothing \subseteq A$ dan $A \subseteq A$
- $A \subset B$ (proper subset) ➔ jika $A \subseteq B$ dan $A \neq B$
- $|A| = n$ di mana A himpunan berhingga (*finite set*)
  - (Himpunan A berisi n obyek yang berbeda)
  - n disebut banyaknya anggota (*cardinality*) dari A

Power Set

- S adalah himpunan berhingga dengan n anggota
- Maka power set dari S –dinotasikan P(S)– adalah himpunan dari semua subset dari S dan $|P(S)| = 2^n$
- Contoh: S = { a, b, c}
  - P(S) = { ∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c} }

Cartesian Product

- *The Cartesian Product:*
  - A dan B adalah himpunan, maka $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
- Contoh :
  - A = { 1, 2 }
  - B = { p, q }
  - A X B = { (1, p), (1, q), (2, p), (2, q) } *ordered pairs*
  - Selanjutnya …
    - A X A X A = { (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2),(2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2) } *ordered triples*
  - Secara umum:
    - (a1, a2, a3, a4) *ordered quadruple*
    - (a1, a2, a3, a4, ….an) *ordered n-tuple*

Operasi Himpunan

- A dan B himpunan
- $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$
- $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$
- jika $A \cap B = \emptyset$ maka A dan B disebut *disjoint*
- $A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$
- $\overline{A} = \{ x \mid x \notin A\} = U - A$, di mana $U =$ *universal set*
- $A \oplus B = \{ x \mid x \in A \oplus x \in B \}$ $\oplus =$ *xor*

Contoh

- Buktikan hukum De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

- Bukti: $\overline{A \cap B} = \{ x \mid x \notin (A \cap B) \}$
- $= \{ x \mid \neg (x \in (A \cap B)) \}$
- $= \{ x \mid \neg ((x \in A) \wedge (x \in B)) \}$
- $= \{ x \mid (x \notin A) \vee (x \notin B) \}$
- $= \{ x \mid (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B}) \}$
- $= \{ x \mid x \in (\overline{A} \cup \overline{B}) \}$

Representasi komputer untuk himpunan

- U = *universal set* berhingga
- S = himpunan
- Maka $x \in S$ dinyatakan dengan bit "1" dan $x \notin S$ dinyatakan dengan bit "0"
- Contoh 1:
  - U = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 }
  - S = { 1, 3, 5, 7, 9 }
  - S direpresentasikan dengan 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0
- Contoh 2
  - U = { semua huruf kecil }
  - S = { a, e, i, o, u }
  - Representasinya: 10001 00010 00001 00000 10000 0

Prinsip inklusi-eksklusi

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

- $|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$

Contoh

- Dari survei terhadap 270 orang didapatkan hasil sbb.:
  - 64 suka *brussels sprouts*,
  - 94 suka *broccoli*,
  - 58 suka *cauliflower*,
  - 26 suka *brussels sprouts* dan *broccoli*,
  - 28 suka *brussels sprouts* dan *cauliflower*,
  - 22 suka *broccoli* dan *cauliflower*,
  - 14 suka ketiga jenis sayur tersebut.
- Berapa orang tidak suka makan semua jenis sayur yang disebutkan di atas ?

Jawaban

- A = {orang yang suka *brussels sprouts* }
- B = {orang yang suka *broccoli* }
- C = {orang yang suka *cauliflower* }
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
- $= 64 + 94 + 58 - 26 - 28 - 22 + 14 = 154$

- Jadi mereka yang <u>tidak</u> suka ketiga jenis sayur tersebut ada sebanyak 270 – 154 = 116 orang

Latihan

- Tentukan Power Set dari himpunan dibawah ini:
  - {a}
  - {a,b}
  - $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- Diketahui A={a,b,c,d} dan B={y,z}. Tentukan:
  - A X B
  - B X A
- Diketahui A={1,2,3,4,5} dan B={0,3,6}. Tentukan:
  - $A \cup B$
  - A – B
  - $A \cap B$
  - B – A

Pekerjaan Rumah

- Pada Buku Teks : Discrete Mathematics and Its Applications, Kenneth H Rossen, McGraw-Hill 7th edition
  - Exercise 2.3: 27
  - Exercise 8.5: 7, 9