BAB 3

- Algorithms
- The Growth of Functions (D.A.A.)
- Complexity of Algorithms (D.A.A.)
- Integers and Division
- Integers and Algorithms
- Applications of Number Theory
- Matrices

INTEGERS AND DIVISION

Bab 3

Sub-bab 3.4

Tujuan Instruksional Khusus

- Memahami konsep integer dan division
- Memahami definisi matrik nol satu

Division

- Notasi :
  - a | b a habis <u>mem</u>bagi b (b habis <u>di</u>bagi a) *a divides b*
  - a $\nmid$ b a <u>tidak</u> habis membagi b (b <u>tidak</u> habis dibagi a, ada sisa)
- Contoh: 3 | 7 salah tetapi 3 | 12 benar
- Teorema: a, b, c adalah integer
  - Jika a | b dan a | c, maka a | (b+c)
  - Jika a | b, maka a | bc untuk sembarang integer c
  - Jika a | b dan b | c, maka a | c

Teorema

- $a \mid b$ dan $a \mid c$
  - $b = ma$ dan $c = na$
  - $b + c = ma + na = (m + n)a$
  - jadi $a \mid (b + c)$

- $a \mid b$ dan c sembarang integer
  - $b = ma$, $bc = (ma)c = (mc)a$
  - jadi $a \mid bc$

- $a \mid b$ dan $b \mid c$
  - $b = ma$, $c = pb = p(ma) = (pm)a$
  - jadi $a \mid c$

Corollary:

- $a \mid b$ dan $a \mid c \rightarrow a \mid mb + nc$

- **Bukti:**
  - $b = pa$
  - $c = qa$
  - $mb = (mp)a$
  - $nc = (nq)a$
  - $mb + nc = (mp + nq)a$
  - jadi $a \mid mb + nc$ (terbukti)

Primes (Bilangan Prima)

Bilangan integer positif p lebih besar daripada 1 disebut **bilangan prima** jika hanya mempunyai faktor pembagi 1 dan p.
Bilangan integer positif lebih besar daripada 1 dan bukan bilangan prima disebut ***composite***

Remarks : Bilangan integer n adalah composite jika dan hanya jika ada integer a sedemikian hingga $a|n$ dan $1 < a < n$

- Contoh:
  - Bilangan integer 7 hanya mempunya faktor pembagi 1 dan 7, dan bilangan integer 9 adalah *composite* karena habis dibagi dgn 3

Congruence

- Diketahui bahwa *a* dan *b* adalah integer, *m* adalah integer positif, maka dikatakan
  - ***a* congruent to *b* modulo *m***
  - jika (*a* – *b*) habis dibagi *m.*

- Notasinya : $\boldsymbol{a \equiv b \pmod{m}}$

- Contoh : $10 \equiv 2 \pmod{4}$

Teorema

Let m be a positive integer. If $a \equiv b \pmod{m}$ and $c \equiv d \pmod{m}$, then

$$a + c \equiv b + d \pmod{m} \qquad \text{and} \qquad ac \equiv bd \pmod{m}.$$

Proof: We use a direct proof. Because $a \equiv b \pmod{m}$ and $c \equiv d \pmod{m}$, by Theorem 4 there are integers s and t with $b = a + sm$ and $d = c + tm$. Hence,

$$b + d = (a + sm) + (c + tm) = (a + c) + m(s + t)$$

and

$$bd = (a + sm)(c + tm) = ac + m(at + cs + stm).$$

Hence,

$$a + c \equiv b + d \pmod{m} \qquad \text{and} \qquad ac \equiv bd \pmod{m}. \qquad \triangleleft$$

Teorema

- Contoh

Because $7 \equiv 2 \pmod 5$ and $11 \equiv 1 \pmod 5$, it follows from Theorem 5 that

$$18 = 7 + 11 \equiv 2 + 1 = 3 \pmod 5$$

and that

$$77 = 7 \cdot 11 \equiv 2 \cdot 1 = 2 \pmod 5.$$

MATRIKS

Bab 3

Sub-bab 3.8

Matriks nol-satu

- Definisi : merupakan matriks dengan entri-entri nol (0) atau satu (1)

- Operasi pada matriks nol-satu:
  - Join $A \vee B$ (berdasarkan operasi "OR")
  - Meet $A \wedge B$ (berdasarkan operasi "AND")
  - Perkalian Boolean $A \odot B$

Operasi pada matriks nol–satu

- $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ keduanya matriks m x n
  - Join $A \vee B$: $[A \vee B]_{i,j} = a_{ij} \vee b_{ij}$
  - Meet $A \wedge B$: $[A \wedge B]_{i,j} = a_{ij} \wedge b_{ij}$
  - Perkalian Boolean $A \odot B$
    - $A = [a_{ij}]$ matriks m x n
    - $B = [b_{ij}]$ matriks n x k
    - $C = [c_{ij}]$ matriks m x k $= A \odot B$
    - $c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee (a_{i3} \wedge b_{3j}) \vee \ldots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj})$

Contoh

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \odot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = A \odot B$$

	Kolom 1	Kolom 2	Kolom 3
$(\text{Baris } 1)^T$	$1 \wedge 1$ $0 \wedge 0$	$1 \wedge 1$ $0 \wedge 1$	$1 \wedge 0$ $0 \wedge 1$
$(\text{Baris } 2)^T$	$0 \wedge 1$ $1 \wedge 0$	$0 \wedge 1$ $1 \wedge 1$	$0 \wedge 0$ $1 \wedge 1$
$(\text{Baris } 3)^T$	$1 \wedge 1$ $0 \wedge 0$	$1 \wedge 1$ $0 \wedge 1$	$1 \wedge 0$ $0 \wedge 1$

Latihan

- Tentukan Boolean product dari A dan B, dimana:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pekerjaan Rumah

- Pada Buku Teks : Discrete Mathematics and Its Applications 6th, Kenneth H Rossen, McGraw-Hill
  - Hal. 208-210: No.5, 31, 32
  - Hal. 254-256: No. 24, 25, 29