

CARA MEMBUKTIKAN *(Proof Methods)*

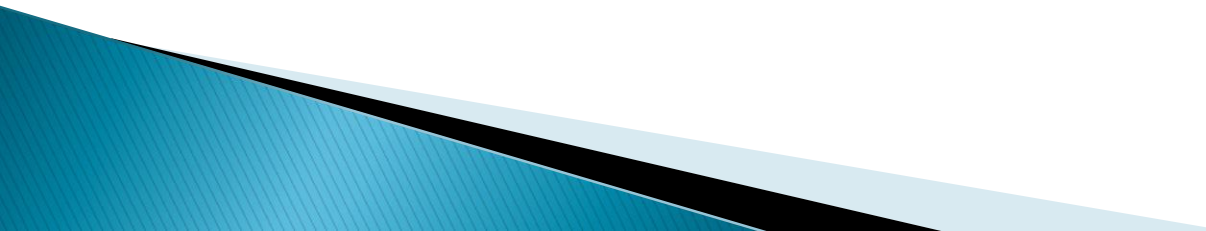
Bab 1

Sub-bab 1.7

Tujuan Instruksional Khusus

- ▶ Memahami tentang beberapa cara membuktikan
- ▶ Memahami tentang penggunaan metode pembuktian pada beberapa permasalahan

Membuktikan teorema berbentuk $p \rightarrow q$

1. Bukti langsung (*direct proof*)
 2. Bukti tidak langsung (*indirect proof*)
 3. Bukti hampa (*vacuous proof*)
 4. Bukti mudah (*trivial proof*)
 5. Bukti dengan kontradiksi (*proof by contradiction*)
 6. Bukti per kasus (*proof by cases*)
 7. Bukti pada ekuivalensi (*proof for equivalence*)
- 

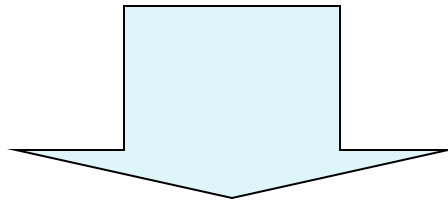
1. Bukti langsung (*direct proof*)

Perhatikan implikasi $p \rightarrow q$

Jika dapat ditunjukkan bahwa p bernilai BENAR dan q ternyata juga bernilai BENAR maka implikasi $p \rightarrow q$ terbukti bernilai BENAR

1. Bukti langsung (*direct proof*)

Buktikan teorema berikut dengan *direct proof* :
“Jika n *integer* gasal, maka n^2 *integer* gasal”



► Bukti:

- $n = 2k + 1$ *integer* gasal
 - $n^2 = (2k + 1)^2$
 - $= 4k^2 + 4k + 1$
 - $= 2(2k^2 + 2k) + 1$ (n^2 *integer* gasal)
- n *integer* gasal $\rightarrow n^2$ *integer* gasal (terbukti)

2. Bukti tak langsung (*indirect proof*)

Perhatikan implikasi $p \rightarrow q$

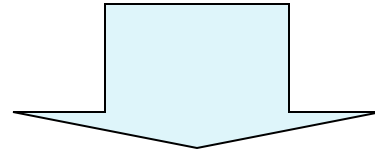
$p \rightarrow q$ *equivalent* dengan $\sim q \rightarrow \sim p$

Jika dapat ditunjukkan bahwa $\sim q$ bernilai BENAR dan $\sim p$ ternyata juga bernilai BENAR maka implikasi $p \rightarrow q$ terbukti bernilai BENAR

2. Bukti tak langsung (*indirect proof*)

Teorema:

“Jika $3n + 2$ gasal, maka n gasal”



► Ekuivalen dengan “jika n genap, maka $3n + 2$ genap”

► Bukti:

- $n = 2k$ (genap)
- $3n + 2 = 3(2k) + 2$
- $= 6k + 2$
- $= 2(3k) + 2$
- $= 2(3k + 1)$ (genap)
- jika n genap, maka $3n + 2$ genap
- jika $3n + 2$ gasal, maka n gasal (terbukti)

3. Bukti hampa (*vacuous proof*)

- ▶ Implikasi $p \rightarrow q$ mempunyai nilai kebenaran TRUE apabila **p** bernilai **FALSE**

- ▶ Contoh:

Buktikan “jika $n > 1$ maka $n^2 > n$, untuk $n = 0$ ”

- $p : 0 > 1$ (FALSE)
- Tanpa memperhatikan nilai q maka “teorema” terbukti

4. Bukti mudah (*trivial proof*)

- ▶ Implikasi $p \rightarrow q$ mempunyai nilai kebenaran TRUE apabila **q** bernilai **TRUE**
- ▶ Contoh:
 - “Buktikan jika $a \geq b$ maka $a^n \geq b^n$, untuk $n = 0$ ”
 - $q : a^0 \geq b^0$ (TRUE)
 - Tanpa memperhatikan nilai p maka “teorema” terbukti

5. Bukti dengan kontradiksi (*proof by contradiction*)

Perhatikan implikasi $p \rightarrow q$

p dapat dibuktikan kebenarannya dengan cara kontradiksi melalui tahap sbb:

- ▶ Asumsikan hypotesis menjadi $\sim p$, sehingga implikasi menjadi $\sim p \rightarrow q$
- ▶ Cari pembuat kontradiksi dari konklusi yaitu $\sim q$, sehingga implikasi menjadi $\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)$
- ▶ Untuk mendapatkan implikasi yang benar maka $\sim p$ harus salah, oleh karena itu p terbukti **benar**

5. Bukti dengan kontradiksi (*proof by contradiction*)

Contoh : Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah irrasional

p : $\sqrt{2}$ adalah irrasional

Asumsikan $\sim p$ sehingga $\sqrt{2}$ adalah rasional

Dengan asumsi $\sqrt{2}$ adalah rasional maka

$\sqrt{2} = a/b$; q : a dan b adalah bilangan bulat yang tidak punya faktor sama

$$2 = a^2 / b^2$$

$2b^2 = a^2$, berarti a^2 genap sehingga a genap. Jika a genap $a = 2c$,
sehingga

$$2b^2 = 4c^2$$

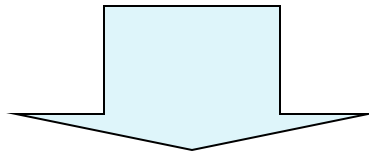
$b^2 = 2c^2$, berarti b^2 genap sehingga b genap

Karena a dan b genap maka a dan b memiliki faktor bersama yaitu 2.

Hasil ini adalah $\sim q$ yang merupakan kontradiksi dari q yang diasumsikan dari $\sim p$. Karena itu asumsi $\sim p$ salah sehingga p : $\sqrt{2}$ adalah irrasional adalah BENAR

5. Bukti dengan kontradiksi (*proof by contradiction*)

Teorema:
"jika n genap, maka $3n + 2$ genap"

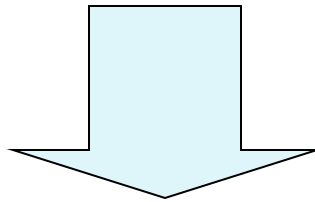


- ▶ Bukti: asumsikan **n ganjil**
 - $n = 2k+1$
 - $3n+2 = 3(2k+1) + 2$
 - $3n+2 = 2(3k+2) + 1$
 - $3n+2$ bernilai ganjil, kontradiksi dengan $3n+2$ genap
 - Sehingga Teorema terbukti benar

6. Bukti per kasus (*proof by cases*)

Buktikan teorema:

" $|xy| = |x| |y|$ untuk semua bilangan nyata"



► Bukti:

	x	y	 xy 	 x y
1	≥ 0	≥ 0	xy	xy
2	≥ 0	< 0	$-(xy)$	$x(-y)$
3	< 0	≥ 0	$-(xy)$	$(-x)y$
4	< 0	< 0	xy	$(-x)(-y)$

Contoh

Buktikan :

Jika n *integer* yang tidak habis dibagi 2 atau 3,
maka $n^2 - 1$ habis dibagi 24

Contoh

- ▶ Bukti : nyatakan $n = 6k + j$ di mana $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ dan $k = \textit{integer}$
 - $j = 0 \rightarrow n = 6k$ habis dibagi 2 atau 3
 - $j = 1 \rightarrow n = 6k + 1$ tidak habis dibagi 2 atau 3
 - $j = 2 \rightarrow n = 6k + 2$ habis dibagi 2
 - $j = 3 \rightarrow n = 6k + 3$ habis dibagi 3
 - $j = 4 \rightarrow n = 6k + 4$ habis dibagi 2
 - $j = 5 \rightarrow n = 6k + 5$ tidak habis dibagi 2 atau 3
 - selanjutnya ingat bahwa $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$

$$n = 6k + 1 \rightarrow (n + 1) (n - 1) = (6k + 2) (6k) = 2 (3k + 1) (6k)$$

jika $k = 2m$ maka $(3k + 1) = 6m + 1$, $6k = 12m$

$$\begin{aligned} (n + 1) (n - 1) &= 2 (3k + 1) (6k) = 2 (6m + 1) (12m) \\ &= 24 (6m + 1) (m) \end{aligned}$$

jika $k = 2m + 1$ maka $(3k + 1) = 6m + 4$, $6k = 12m + 6$

$$\begin{aligned} (n + 1) (n - 1) &= 2 (6m + 1) (12m) = 2 (6m + 4) (12m + 6) \\ &= 24 (3m + 2) (2m + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n = 6k + 5 &\rightarrow (n + 1)(n - 1) = (6k + 6)(6k + 4) \\
 &= 6(k + 1) \cdot 2(3k + 2) \\
 &= 12(k + 1)(3k + 2)
 \end{aligned}$$

jika $k = 2m$ maka $(k + 1) = 2m + 1$, $3k + 2 = 6m + 2$

$$\begin{aligned}
 (n + 1)(n - 1) &= 12(k + 1)(3k + 2) \\
 &= 12(2m + 1)(6m + 2) \\
 &= 24(2m + 1)(3m + 1)
 \end{aligned}$$

jika $k = 2m + 1$ maka $(k + 1) = 2m + 2$, $3k + 2 = 6m + 5$

$$\begin{aligned}
 (n + 1)(n - 1) &= 12(k + 1)(3k + 2) \\
 &= 12(2m + 2)(6m + 5) \\
 &= 24(m + 1)(6m + 5)
 \end{aligned}$$

- ▶ Jadi teorema :
- ▶ “Jika n *integer* yang tidak habis dibagi 2 atau 3, maka $n^2 - 1$ habis dibagi 24”
- ▶ terbukti

7. Bukti teorema berbentuk ekivalensi

- ▶ Bukti teorema berbentuk ekivalensi “ $p \leftrightarrow q$ ”
 - Buktikan $p \rightarrow q$
 - Buktikan $q \rightarrow p$

- ▶ Bukti teorema berbentuk “ p, q, r, s ekivalen”
 - Buktikan $p \rightarrow q$
 - Buktikan $q \rightarrow r$
 - Buktikan $r \rightarrow s$
 - Buktikan $s \rightarrow p$

Contoh 1

- ▶ Buktikan : “ Bilangan integer n adalah ganjil jika dan hanya jika n^2 adalah ganjil”
 - p : “ n adalah ganjil”
 - q : “ n^2 adalah ganjil”
- ▶ Dibuktikan $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$ adalah bernilai benar
- ▶ Pembuktian $p \rightarrow q$ sbb:
 - Asumsi : $n = 2k + 1$ (ganjil)
 - $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
 - n^2 adalah ganjil

Contoh 1

- ▶ Pembuktian $q \rightarrow p$ sbb:
 - Pembuktian dengan bukti tidak langsung
 n genap maka n^2 genap
 - Asumsi : $n = 2k$ (genap)
 - $n^2 = 4k^2$
 - $n^2 = 2(2k^2)$ (genap)
- Jadi jika n^2 ganjil maka n ganjil (terbukti)

Contoh 2

- ▶ Tunjukkan bahwa statemen dibawah ini ekuivalen:
 - p_1 : n is an even integer
 - p_2 : $n-1$ is an odd integer
 - p_3 : n^2 is an even integer
- ▶ Membuktikan bahwa $p_1 \rightarrow p_2$, $p_2 \rightarrow p_3$, dan $p_3 \rightarrow p_1$ adalah bernilai BENAR.
- ▶ Pembuktian $p_1 \rightarrow p_2$ (pembuktian langsung)
 - Asumsi $n = 2k$ (even)
 - $n-1 = 2k-1 = 2(k-1) + 1$ (odd)
 - terbukti

Contoh 2

- ▶ Pembuktian $p2 \rightarrow p3$ (pembuktian langsung)
 - Asumsi $n - 1 = 2k + 1$ (odd)
 - $n - 1 = 2k + 1 = 2k + 2$
 - $n^2 = (2k + 2)^2 = 4k^2 + 8k + 4 = 2(2k^2 + 4k + 2)$ (even)
 - Terbukti
- ▶ Pembuktian $p3 \rightarrow p1$ (pembuktian langsung)
 - Asumsi $n^2 = 4k^2$ (genap)
 - $n = \sqrt{4k^2} = 2k$ (genap)
 - Terbukti

Latihan

- ▶ 1. Buktikan “ if n is an integer and $n^3 + 5$ is odd, then n is even” dengan:
 - Bukti tidak langsung
 - Bukti dengan kontradiksi
- ▶ 2. Buktikan bahwa jumlah dari dua bilangan ganjil adalah bilangan genap
- ▶ 3. Tunjukkan bahwa tiga statemen dibawah ini adalah ekuivalen.
 - a is less than b
 - the average of a and b is greater than a
 - the average of a and b is less than b

Pekerjaan Rumah

- ▶ Pada Buku Teks : Discrete Mathematics and Its Applications, Kenneth H Rossen, McGraw–Hill 7th edition
 - ▶ Latihan 1.6 no: 6,9,11,12
 - ▶ Exercise 1.7: No. 4,5, 17
- 