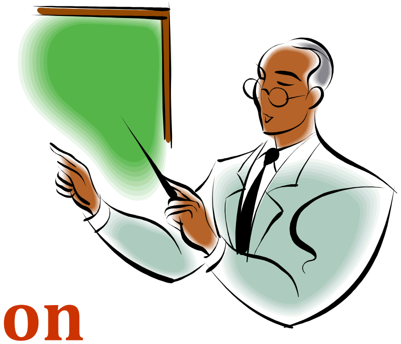
Bab 7

1. Recurrence Relations
2. Solving Recurrence Relations
3. Divide-and-Conquer Algorithms and Recurrence Relations
4. Generating Functions
5. Inclusion-Exclusion
6. Applications of Inclusion-Exclusion



Generating Function

Sub-bab 7.4

Definisi Generating Function

Generating Function adalah notasi yang digunakan untuk menyatakan baris.

Generating Function dari baris $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots$ adalah

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Generating Function dari baris berhingga $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ adalah

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Contoh

Tentukan Generating Function dari baris $\{a_k\}$ dengan:

a. $a_k = 3$ b. $a_k = k+1$ c. $a_k = 2^k$

Jawab:

a. $\sum_{k=0}^{\infty} 3x^k$ b. $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$ c. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$

Contoh

Bagaimanakah bentuk generating function dari baris
1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 ?

Jawab:

$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

$$G(x) = (1 - x^6)/(1 - x)$$

dimana $x \neq 1$.

Contoh

Bagaimanakah bentuk generating function dari baris
1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , ...?

Jawab:

$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$$

$$G(x) = \frac{1}{1 - x}$$

dimana $|x| < 1$.

Generating Function

Teorema 1

Jika $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ dan $g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, maka

$f(x)+g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)x^k$ dan $f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right)x^k$

Contoh Teorema

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right)x^k$$

Diberikan $f(x) = 1/(1-x)^2$, tentukan koefisien a_0, a_1, a_2, ...

pada bentuk $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

Jawab:

Dari contoh soal sebelumnya, $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(1-x)}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} 1\right)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$$

Definisi

Jika u adalah bilangan real dan k adalah integer non-negatif, maka koefisien extended binomial m didefinisikan dengan

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} u(u-1)\ldots(u-k+1)/k!; k > 0 \\ 1; k = 0 \end{cases}$$

$$\binom{u}{k} = C(u,k)$$, u>=k, u dan integer non-negatif

$$\binom{-u}{k} = (-1)^k C(u+k-1,k)$$

Contoh:

$$\binom{-2}{3} = \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!} = -4$$

$$\binom{1/2}{3} = \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)}{3!} = \frac{1}{16}$$

Generating Function

Teorema 2

$$(1+x)^u = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{u}{k} x^k$$

Tabel Generating Function (1)

TABLE 1 Useful Generating Functions.	
$G(x)$	a_k
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k = 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + x^n$	$C(n,k)$
$(1+ax)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^k x^k = 1 + C(n,1)ax + C(n,2)a^2x^2 + \cdots + a^n x^n$	$C(n,k)a^k$
$(1+x^r)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{rk} = 1 + C(n,1)x^r + C(n,2)x^{2r} + \cdots + x^{rn}$	$C(n,k/r)$ if $r \mid k$; 0 otherwise
$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$	1 if $k \le n$; 0 otherwise
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$	1
$\frac{1}{1-ax} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = 1 + ax + a^2x^2 + \cdots$	a^k
$\frac{1}{1-x^r} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{rk} = 1 + x^r + x^{2r} + \cdots$	1 if $r \mid k$; 0 otherwise

Tabel Generating Function (2)

TABLE 1 Useful Generating Functions.

$G(x)$	a_k
$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$	$k+1$
$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k = 1 + C(n,1)x + C(n+1,2)x^2 + \cdots$	$C(n+k-1,k) = C(n+k-1,n-1)$
$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)(-1)^k x^k = 1 - C(n,1)x + C(n+1,2)x^2 - \cdots$	$(-1)^k C(n+k-1,k) = (-1)^k C(n+k-1,n-1)$
$\frac{1}{(1-ax)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)a^k x^k = 1 + C(n,1)ax + C(n+1,2)a^2x^2 + \cdots$	$C(n+k-1,k)a^k = C(n+k-1,n-1)a^k$
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$1/k!$
$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$(-1)^{k+1}/k$

Menyelesaikan Recurrence Relation dengan Generating Function

Langkah menyelesaikan Recurrence Relation dengan GF

1. Ubah persamaan Generating Function $G(x)$ dari bentuk notasi sigma ke bentuk tanpa notasi sigma
2. Dekomposisi $G(x)$ dari bentuk pecahan biasa ke bentuk partial fraction (jika ada)
3. Kembalikan bentuk $G(x)$ dalam notasi sigma tunggal sehingga recurrence relation terpecahkan (bantuan tabel Generating Function)

Contoh 1

Selesaikan recurrence relation $a_k = 3a_{k-1}$ untuk k=1,2,3,...

dan i.c. $a_0 = 2$

Jawab:

1. Ubah persamaan Generating Function $G(x)$ dari bentuk notasi sigma ke bentuk tanpa notasi sigma

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$G(x) - a_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

$$G(x) - 2 = \sum_{k=1}^{\infty} 3a_{k-1} x^k$$

$$G(x) - 2 = 3x \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^{k-1}$$

$$G(x) - 2 = 3x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$G(x) - 2 = 3xG(x)$$

$$G(x) = \frac{2}{(1-3x)}$$

Contoh 1

2. Dekomposisi $G(x)$ dari bentuk pecahan biasa ke bentuk partial fraction (jika ada)
3. Kembalikan bentuk $G(x)$ dalam notasi sigma tunggal sehingga recurrence relation terpecahkan (bantuan tabel Generating Function)

$$G(x) = 2\frac{1}{(1-3x)}$$

$$G(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k$$

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2\cdot 3^k x^k$$

$$a_k = 2\cdot 3^k$$

Contoh 2

Selesaikan recurrence relation $a_k = 8a_{k-1} + 10^{k-1}$ dan i.c. $a_0 = 1$

Jawab:

1. Ubah persamaan Generating Function $G(x)$ dari bentuk notasi sigma ke bentuk tanpa notasi sigma

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$G(x) - a_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

$$G(x) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} 8a_{k-1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 10^{k-1} x^k$$

$$G(x) - 1 = 8x \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^{k-1} + x \sum_{k=1}^{\infty} 10^{k-1} x^{k-1}$$

$$G(x) - 1 = 8x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + x \sum_{k=0}^{\infty} 10^k x^k$$

$$G(x) - 1 = 8xG(x) + \frac{x}{1-10x}$$

$$(1-8x)G(x) = \frac{1-10x}{1-10x} + \frac{x}{1-10x}$$

$$G(x) = \frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)}$$

Contoh 2

2. Dekomposisi $G(x)$ dari bentuk pecahan biasa ke bentuk partial fraction (jika ada)

$$G(x) = \frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)}$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-8x)} + \frac{1}{(1-10x)}\right)$$

Contoh 2

3. Kembalikan bentuk $G(x)$ dalam notasi sigma tunggal sehingga recurrence relation terpecahkan (bantuan tabel Generating Function)

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-8x)} + \frac{1}{(1-10x)}\right)$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} 8^k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 10^k x^k\right)$$

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}(8^k + 10^k) x^k$$

$$a_k = \frac{1}{2}(8^k + 10^k)$$

TUGAS

- Pada Buku Teks : Discrete Mathematics and Its Applications, Kenneth H Rossen, McGraw-Hill 7th
- **Exercises** 8.4: 34,35