컴퓨터 그래픽스
7. 3차원 그래픽스의 투영 및 뷰잉

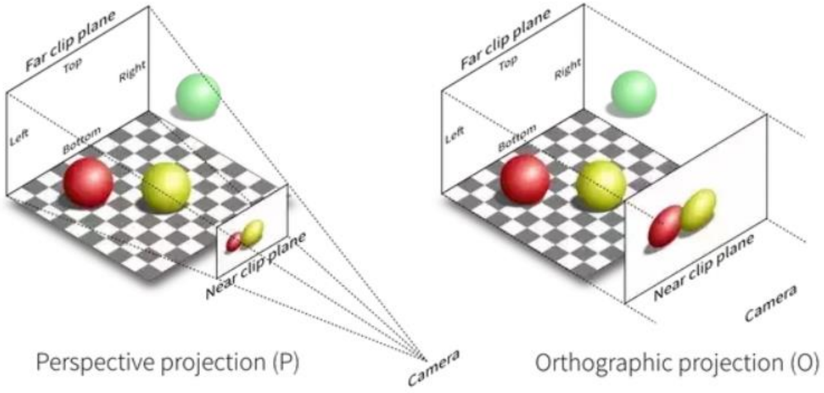
2024년 2학기

학습 내용

- **3차원 그래픽스의 투영 및 뷰잉**
  - 투영
  - 뷰잉 변환

투영 (Projection)

- **투영**
  - 3차원 공간상의 그래픽 개체를 2차원 평면에 표현하여 그래픽 화면을 만들어 내는 과정
  - 투영의 종류
    - 평행 투영(Parallel Projection)
      - 출력면에 수평선의 선을 따라 물체 표면의 점들을 투영하는 방법
      - 객체들간의 상대적인 크기 정보가 보존된다.
      - 다른 view에 따라 물체의 다른 2차원 view를 얻을 수 있다.
    - 원근 투영 (Perspective Projection)
      - 공간상의 객체와 투영 중심점 (view point)를 연결하여 투영
      - 투영면과 시점이 먼 객체는 작게, 가까운 객체는 크게
      - 현실적인 결과



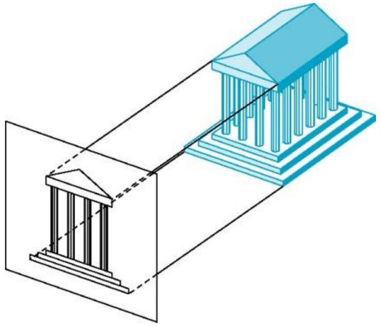
Perspective projection (P)
Orthographic projection (O)

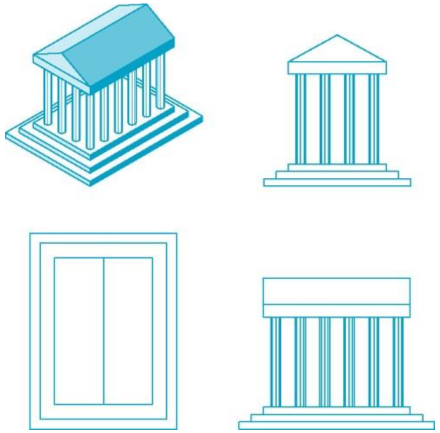
투영: 평행 투영

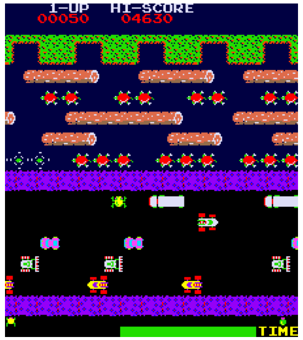
- **평행 투영 (Parallel Projection)**
  - 직각 투영 (Orthographic Projection)
    - 투영방향과 투영면이 직각을 이루는 경우
    - 임의의 점 $P(x, y, z) \rightarrow P'(x_p, y_p, z_p)$
      - 투영면이 xy 평면이라면, $x_p = x$ $y_p = y$ $z_p = 0$

      - Front view (z 값 삭제): 입면도, 정면도
      - Rear view (z 값 삭제) 후면도
      - Side view (x 값 삭제): 측면도
      - Top view (y 값 삭제): 평면도

      - 엔지니어링, 건축에서 많이 사용한다 (길이와 각도가 정확하다)

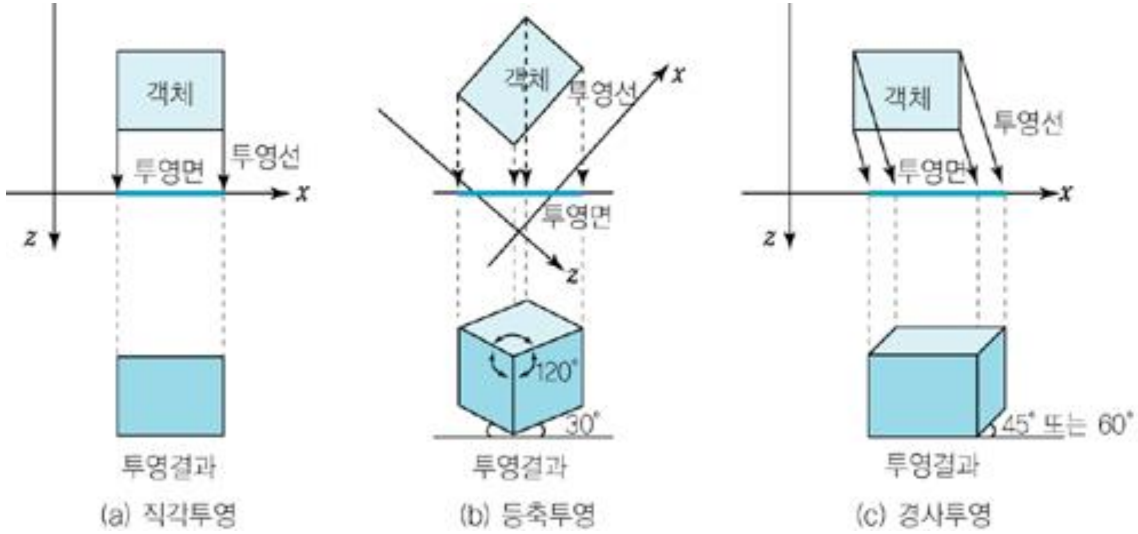






투영: 평행 투영

– 경사 투영(Oblique Projection)
  - 객체의 투영방향이 투영면과 수직이 아닌 일정한 각도를 이루는 경우
  - 2개의 각도로 정의
    – **각도 α (투영 각도):** 점 (x, y, z)과 경사투영의 점 $(x_p,\ y_p)$의 선, 점 (x, y, z)과 직각투영의 점 (x, y)의 선이 만드는 각도
    – **각도 ϕ:** 점 (x, y)와 점 $(x_p,\ y_p)$의 선과 투영면에 평행한 방향과의 각도

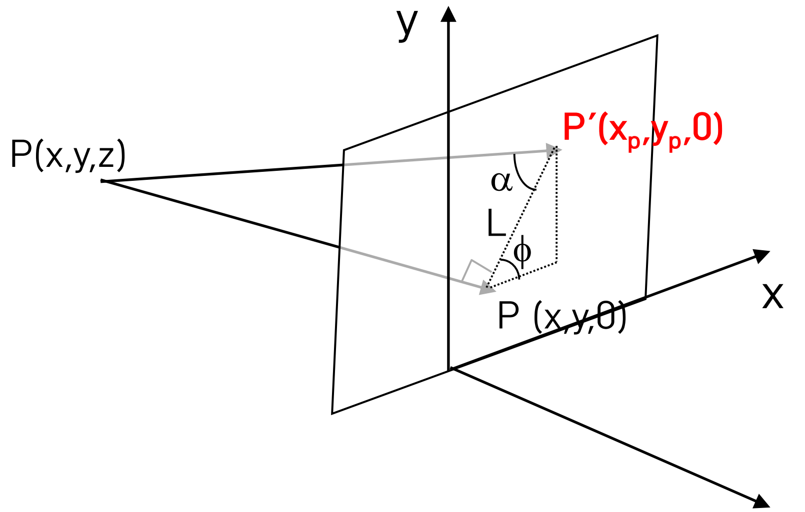


투영: 평행 투영

- 경사 투영에서
  - 투영면: z = 0인 xy 평면
  - 공간상의 점: P (x, y, z)
  - 경사 투영된 점: P' (x_p, y_p, z_p)
  - 투영면이 z=0이므로 P' = (x_p, y_p, 0)

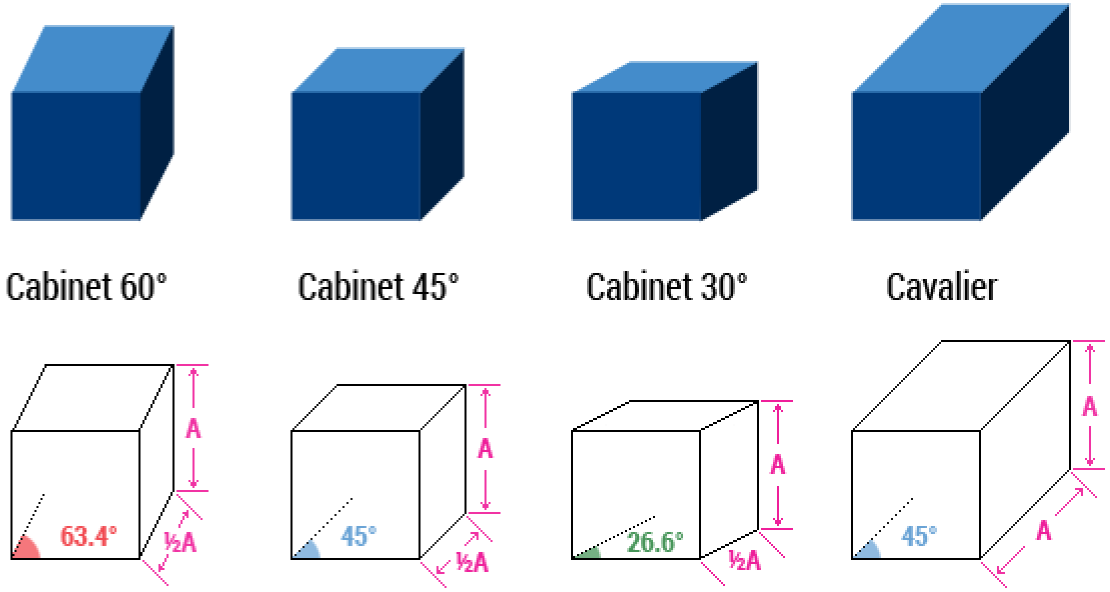
  - 투영선과 투영면의 각도: α (투영 각도)
  - 점P가 직각 투영된 점과 경사 투영된 점을 연결한 선분의 길이: L
  - L과 x축과 이루는 각도: ϕ
    - $\cos\phi = \frac{(x_p - x)}{L}$ → $x_p = x + L\cos\phi$
    - $\sin\phi = \frac{(y_p - y)}{L}$ → $y_p = y + L\sin\phi$
    - $\tan\alpha = \frac{z}{L}$ → $L = \frac{z}{\tan\alpha} = zL_1$

  - $x_p = x + L\cos\phi = x + z\frac{\cos\phi}{\tan\alpha}$
  - $y_p = y + L\sin\phi = y + z\frac{\sin\phi}{\tan\alpha}$



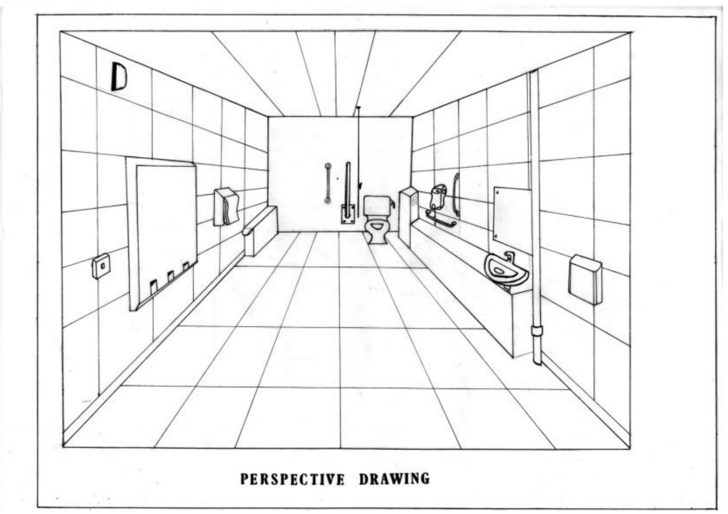
투영: 평행 투영

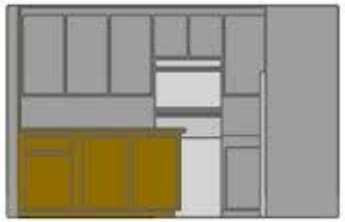
- 투영 각도 α에 대해서
  - α = 45' (tan α = 1) 인 경우: cavalier 투영
    - 투영면에 수직인 선들은 길이 변환이 없고, 정육면체의 깊이는 폭과 높이가 같은 길이로 투영된다.
  - α = 63.4' (tan α = 2)인 경우: cabinet 투영
    - 투영면과 수직인 선들은 그들 길이의 절반으로 투영되고 깊이가 폭과 높이의 절반으로 투영된다.

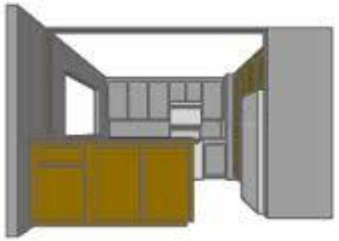


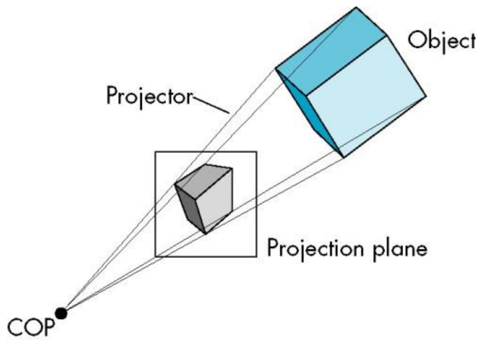
투영: 원근 투영

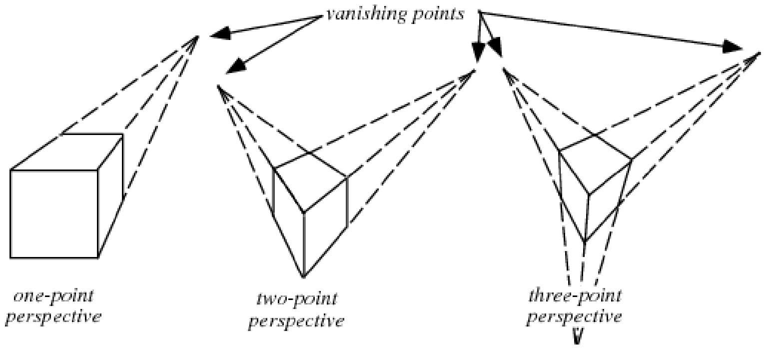
- Perspective Projection (원근 투영)
  - 객체와 투영중심점 (시점, view point)을 연결하여 투영 면에 2차원 객체를 만든다.
  - 투영면에서 멀리 떨어진 객체는 작게, 가까운 객체는 크게 나타나 현실감 있는 결과를 얻는다.







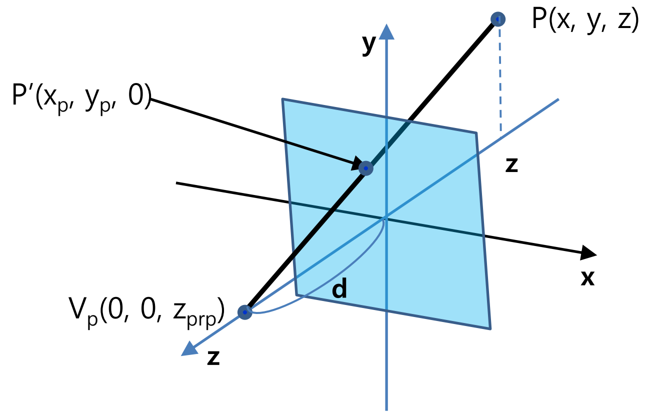


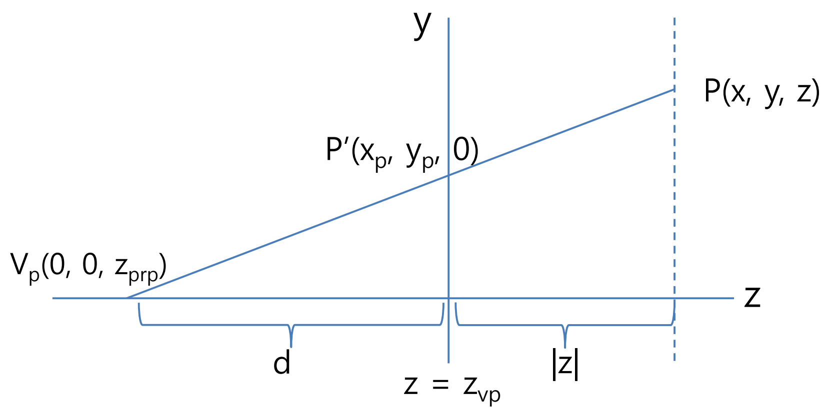


투영: 원근 투영

- Z축 위의 임의의 점 로 투영할 때
  - 투영 참조점: z_{prp} 투영 면: z_{vp}
- 점 P(x, y, z)을 z축에 따라 투영면 (z = 0)에 원근 투영시키면,
  - 투영점: $P'(x_p, y_p, z_{vp})$, 투영참조점: $(0, 0, z_{prp})$
    - $u = \dfrac{(z - z_{vp})}{(z - z_{prp})} = \dfrac{|z|}{|z| + d}$
      - |z|: (x, y, z)에서 투영면까지의 거리
      - d: 투영면에서 투영 참조점까지의 거리
  - 매개 변수 u : $0 \le u \le 1$ 의 값으로
    - $u = 0 \rightarrow u = \dfrac{|z|}{|z| + d} = 0 \rightarrow |z| = 0 \rightarrow P' = (x, y, z)$
    - $u = 1 \rightarrow u = \dfrac{|z|}{|z| + d} = 1 \rightarrow d = 0 \rightarrow P' = (0, 0, z_{prp})$
  - 매개변수 u를 사용하여
    - $x_p = (1-u)x_1 + ux_2 = x_1 - x_1u = x - x\dfrac{|z|}{|z| + d}$ $(x_1 = x, x_2 = 0)$
    - $y_p = (1-u)y_1 + uy_2 = y_1 - y_1u = y - y\dfrac{|z|}{|z| + d}$ $(y_1 = y, y_2 = 0)$

행렬로 나타내면,





뷰잉 변환

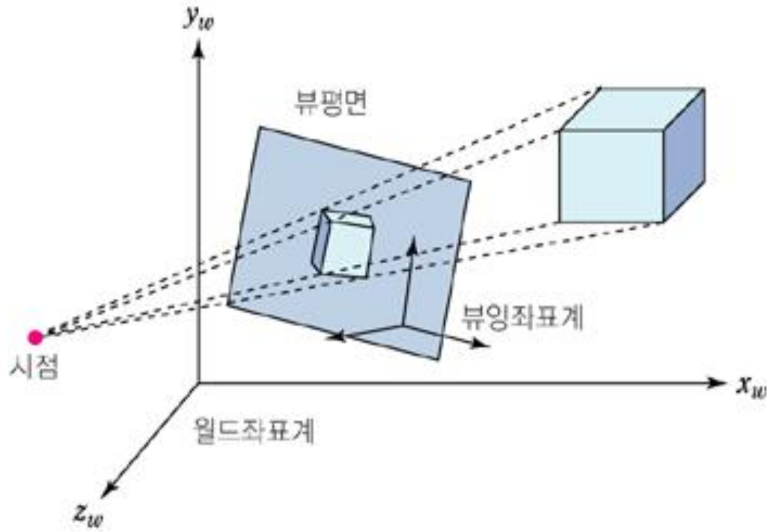
- **3차원 그래픽스의 뷰잉 과정**
  - 3차원 객체들을 하나의 좌표계로 통합한 후 투영되어 출력 화면에 나타나게 되는 과정

- 모델링 변환: 모델좌표계의 3D 객체들을 월드좌표계로 가져옴
- 뷰잉 변환: 월드 좌표계에서 표현된 3D 객체들을 뷰잉 좌표계로 변환
- 투영 변환: 뷰잉 좌표계로 변환된 3D 객체들을 2차원 뷰평면에 투영
- 윈도우-뷰포트 변환: 투영 좌표계의 결과를 출력장치의 장치좌표계로 표현

뷰잉 변환

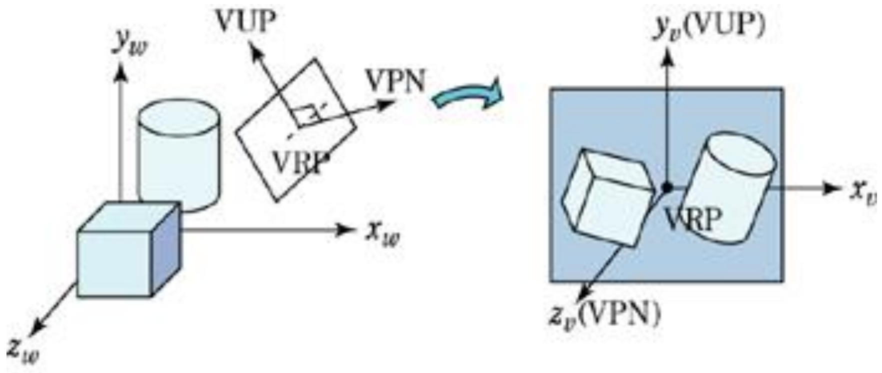
- **투영 과정을 용이하게 처리하기 위해 월드 좌표계를 뷰잉 좌표계로 변환**
  - 투영 방향은 z축 방향으로 한다.
  - 투영면은 z = 0 인 xy 평면으로 한다.

- **뷰잉 좌표계 설정**
  - 투영변환이 실행되기 위해서 지정해야할 요소들
    - 투영면 → 뷰 평면
    - 클리핑 공간 → 뷰 볼륨
    - 투영 종류에 따라 투영 방향 (투영 중심점)
  - 뷰잉 변환 단계에서 설정하는 뷰잉 좌표계를 이용



뷰잉 변환

- **뷰잉 좌표계는 뷰 평면의 축 벡터와 법선 벡터를 이용하여 설정**
  - 원점: 뷰 평면 상의 기준점 (카메라 위치) → VRP: View Reference Point
  - Normal Vector: z축에 해당 (바라보는 방향) → VPN: View Plane Normal Vector
  - Up Vector: y축에 해당 (카메라 각도) → VUP: View Up Vector
    - x축은 자동으로 결정

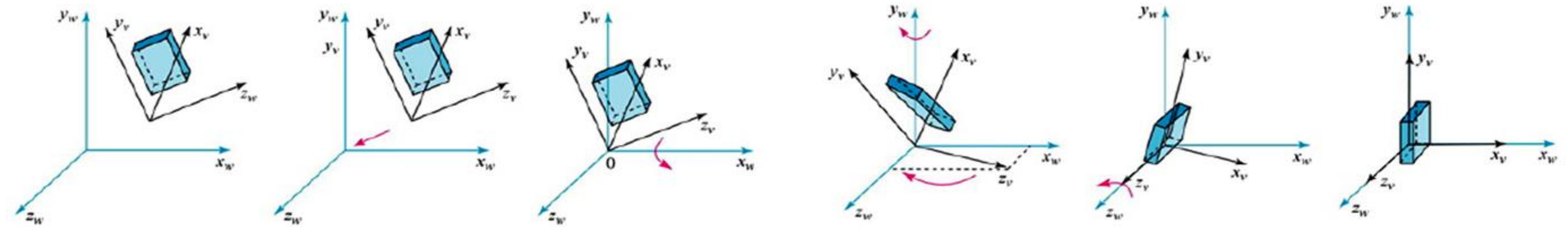


(a) 월드좌표계와 뷰평면 (b) 뷰평면에 나타난 객체

VRP: View Reference Point
VPN: View Plane Normal Vector
VUP: View Up Vector

좌표계 변환

- **월드 좌표계에서 뷰잉 좌표계로 변환**
  a. 뷰잉좌표계와 월드좌표계가 주어짐
  b. 뷰잉좌표계 원점을 월드좌표계 원점과 일치하도록 이동
  c. 월드좌표계의 x축을 중심으로 뷰잉좌표계의 z축을 회전
     → 뷰잉좌표계의 z축이 월드좌표계의 zx 평면에 위치
  d. 월드좌표계의 y축을 중심으로 뷰잉좌표계를 회전
     → 두 좌표계의 z축이 일치
  e. 월드좌표계의 z축을 중심으로 뷰잉좌표계를 회전
  f. 뷰잉좌표계와 월드 좌표계가 일치



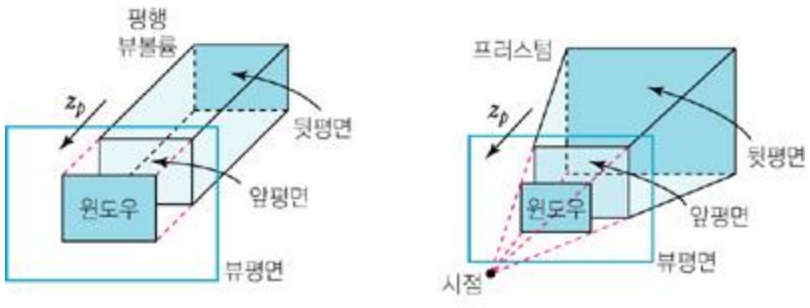
(a) 뷰잉좌표계와 월드좌표계의 위치 (b) 뷰잉좌표계를 이동 (c) 월드좌표계의 *x*축을 중심으로 뷰잉좌표계를 회전 (d) 월드좌표계의 *y*축을 중심으로 뷰잉좌표계를 회전 (e) 월드좌표계의 *z*축을 중심으로 뷰잉좌표계를 회전 (f) 일치된 두 좌표계

투영을 위한 변환

- **뷰평면의 윈도우 내에 투영되는 공간상의 일정영역**
  - 투영 변환에서 뷰평면의 윈도우에 투영되는 객체들은 3차원 공간에서 일정한 영역 내에 존재: 뷰볼륨
    - 평행 투영의 경우: 평행 뷰볼륨
    - 원근 투영의 경우: 프러스텀(Frustum) 뷰볼륨

  - 뷰볼륨을 직육면체 형태로 변환하여 직각투영을 이용하면, 투영과 클리핑이 간단해진다

  - 정규화된 뷰볼륨
    - 모든 좌표를 0과 1사이의 값으로 표현, 정육면체 형태
    - 장치 좌표계로의 변환 용이, 클리핑 과정이 매우 단순화



(a) 평행투영 (b) 원근투영

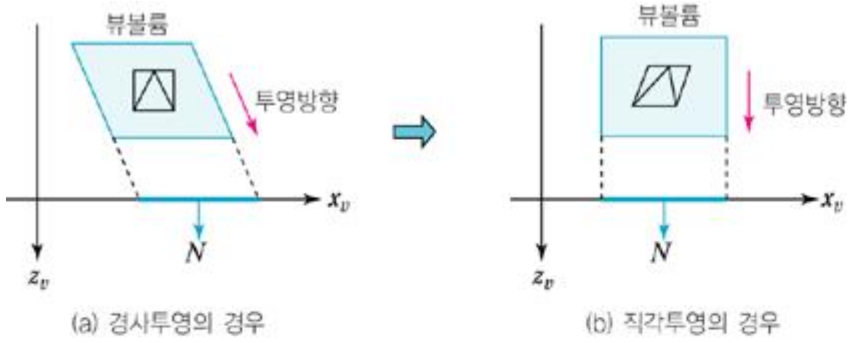
투영을 위한 변환

- **평행 투영의 변환 행렬**
  - 직각 투영
    - 투영면이 xy평면(z=0)인 경우
    - 공간상의 점 P(x, y, z)가 직각 투영된 점은 (x, y, 0)이 된다 즉,

$$P' = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = M_{ortho} \cdot P$$

투영을 위한 변환

- **평행 투영의 변환 행렬**
  - 경사 투영
    - 기울어진 형태의 뷰볼륨을 직육면체 형태로 **밀림 변환**



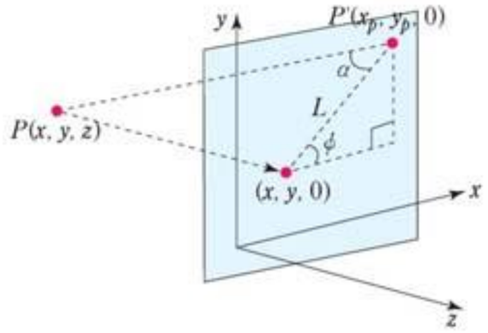
투영을 위한 변환

– 공간상의 점 P(x, y, z)가 경사 투영된 점 P´(x_p, y_p, 0)을 구하려면

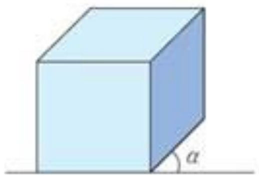
– 경사 각도 α와 투영길이 L로 정의
- L: 경사 투영점과 직각 투영점간의 거리
- ϕ : L과 x축과 이루는 각도

- $\tan\alpha = \frac{z}{L}$ → $L = \frac{z}{\tan\alpha} = z\cot\alpha$

- $x_p = x + L\cos\alpha$
- $y_p = y + L\sin\alpha$



(a) 공간상의 한 점이 경사투영된 경우

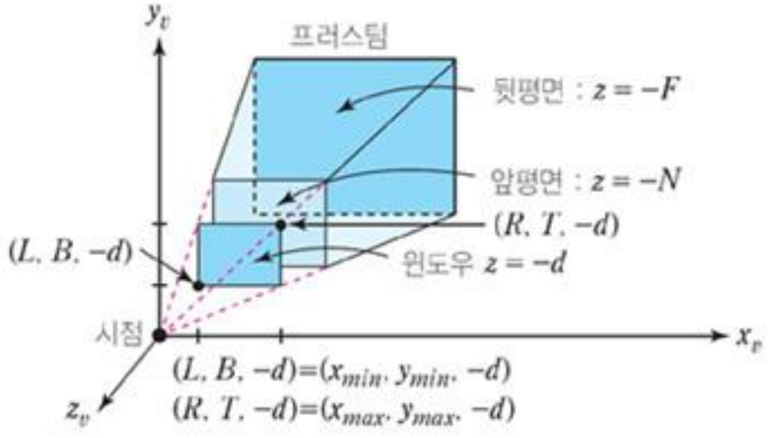


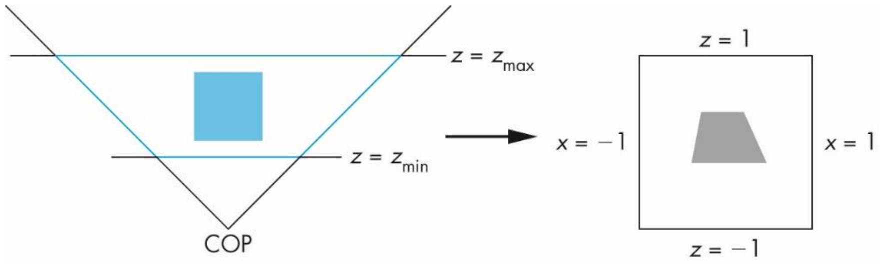
(b) 경사투영의 경우

$$P' = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cot\alpha\cos\phi & 0 \\ 0 & 1 & \cot\alpha\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = M_{obliq} \cdot P$$

투영을 위한 변환

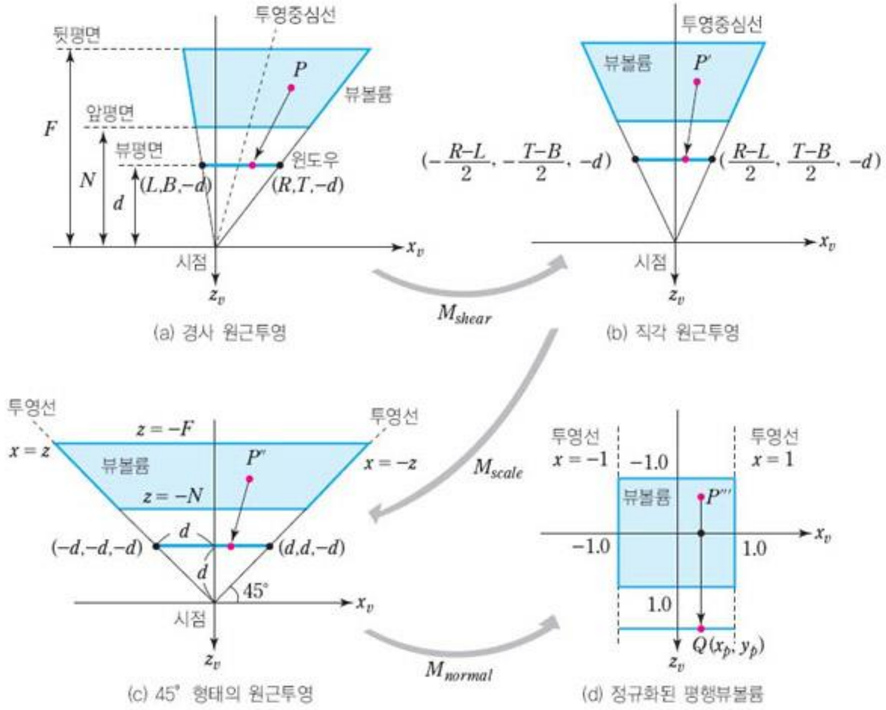
- **원근 투영의 변환 행렬**
  - 프러스텀을 직육면체 형태로 변환하여 직각투영 이용
    - 시점: 뷰잉 좌표계의 원점
    - 윈도우: 법선벡터는 z축 방향
    - 뷰평면 기준: left, right, top, bottom
      - d: 뷰 평면이 놓여진 z 값
    - 프러스텀 뒷 평면과 앞 평면: -F, -N





투영을 위한 변환

- 밀림변환과 신축변환을 수행
  - 과정 1: 경사원근투영을 직각원근투영의 뷰볼륨으로 변환
  - 과정 2: 직각원근투영의 뷰볼륨을 정육면체 형태로 변환
    - 45도 각도의 피라미드 형태의 뷰볼륨으로 변환
    - 피라미드 뷰볼륨을 정육면체 뷰볼륨으로 변환



투영을 위한 변환

- 과정 1: 밀림변환 적용 P 가 P' 으로 변환

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{R+L}{2d} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{T+B}{2d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = M_{shear} \cdot P$$

- 과정 2: 신축변환 적용 P'가 P''로 변환

$$P'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2d}{R-L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2d}{T-B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = M_{scale} \cdot P'$$

- 과정 3: 정육면체 형태로 정규화 적용, P'' 이 P''' 으로 변환

$$P''' = \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F+N}{F-N} & -\frac{2FN}{F-N} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{pmatrix} = M_{normal} \cdot P''$$

- 따라서, 원근 투영 뷰볼륨의 전체 변환 과정은,

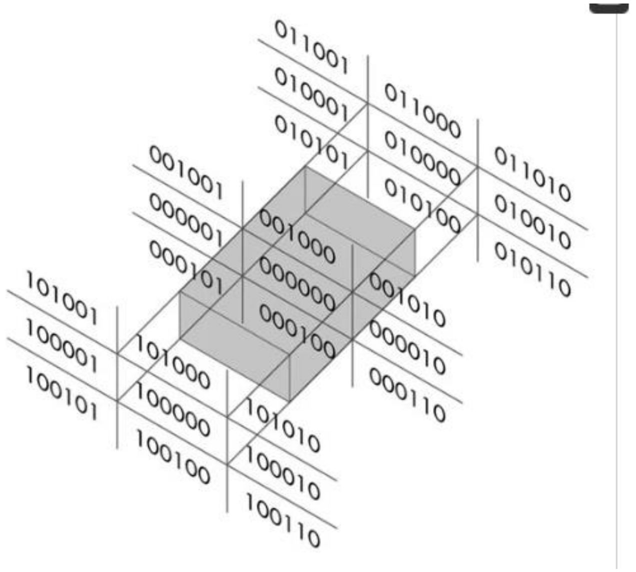
$$\begin{aligned} P''' &= M_{persp} \bullet P \\ &= M_{normal} \bullet M_{scale} \bullet M_{shear} \bullet P \end{aligned}$$

3D 클리핑 알고리즘

- 3D Cohen-Sutherland 라인 클리핑
  - 6비트 코드를 사용하여 선의 끝점을 분류한다

비트1 앞 (front)	비트 2 뒤 (behind)	비트 3 위 (above)	비트 4 아래 (below)	비트 5 오른쪽 (right)	비트 6 왼쪽 (left)

1) 양 끝 점이 모두 000000 이면 → 그린다
2) 양 끝점 중 한 개는 000000이고 다른 한 개는 0이 아니면 → 일부를 그린다.
3) 양 끝점이 모두 0이 아니고 AND 연산이 0이 아니면 → 안 그린다.
4) 양 끝점이 모두 0이 아니고 AND 연산이 0이면 → 클리핑



3D 클리핑 알고리즘

- **3D Liang-Barsky 선 클리핑 알고리즘**
  - 선의 시작점 (x0, y0, z0), 끝점: (x1, y1, z1)
  - 선의 매개변수 방정식

    $x = x0 + (x1 - x0)u$

    $y = y0 + (y1 - y0)u$

    $z = z0 + (z1 - z0)u$

    - 매개변수 t: $0 \le t \le 1$

  - 클리핑 조건은
    - $xmin \le x0 + (x1 - x0)u \le xmax$
    - $ymin \le y0 + (y1 - y0)u \le ymax$ ➔ $pk \cdot u \le qk$ (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)
    - $zmin \le z0 + (z1 - z0)u \le zmax$

$p1= -(x1 - x0)$, $q1= (x0 - xmin)$ (왼쪽 경계)

$p2= (x1 - x0)$, $q2= (xmax - x0)$ (오른쪽 경계)

$p3= -(y1 - y0)$, $q3= (y0 - ymin)$ (하단 경계)

$p4= (y1 - y0)$, $q4= (ymax - y0)$ (상단 경계)

$p5= - (z1 - z0)$, $q5= (z0 - zmin)$ (먼 쪽 경계)

$p6= (z1 - z0)$, $q6= (zmax - z0)$ (가까운 쪽 경계)

3D 클리핑 알고리즘

- pk = 0 → 선이 클리핑 영역에 평행
  - pk = 0, qk< 0 → 클리핑 영역 외부
  - pk = 0, qk > 0 → 클리핑 영역 내부
- pk < 0 → 선은 영역 외부에서 내부로 이동
- pk > 0 → 선은 내부에서 외부로 이동

pk < 0 ➔ u1 = max (0, $\frac{qk}{pk}$) (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)

pk > 0 ➔ u2 = min (1, $\frac{qk}{pk}$) (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)

1) u1 > u2 ➔ 선은 영역 외부에 있어 그리지 않는다.
2) u1 < u2 ➔ 일부가 영역 안에 있어서 u1과 u2를 사용하여 선의 새로운 끝점을 계산한다.

n_x0 = x0 + u1*dx   n_y0 = y0 + u1*dy   n_z0 = z0 + u1*dz

n_x1 = x0 + u2*dx   n_y1 = y0 + u2*dy   n_z1 = z0 + u2*dz

이번 주에는

- **투영**
  - 평행투영
  - 원근투영
- **뷰잉 변환**
  - 3차원 클리핑 알고리즘

- **다음에는**
  - 3차원 객체: 다각형
  - 스플라인