# 1. Stability Margins

## 1.1. 分类

1. gain margain
2. phase margain

表征了一个系统对于干扰的 robustness

## 1.2. 例子

一个系统的开环传递函数是$G(j\omega)$, 其闭环传递函数是$\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} = G_{\mathrm{cl}(j\omega)}$

$$20\log|G_{\mathrm{cl}(j\omega)}| = 20\log|G(j\omega)| - 20\log|1+G(j\omega)|$$

前一个部分是开环传递函数的， 对于多余出来的部分$20\log|1+G(j\omega)|$.

对于对数函,$1+G(j\omega)\to 0$的时候,会变得不稳定。也就是越接近$|G(j\omega)| = 1, \angle G(j\omega) = -\pi$, 就越不稳定。

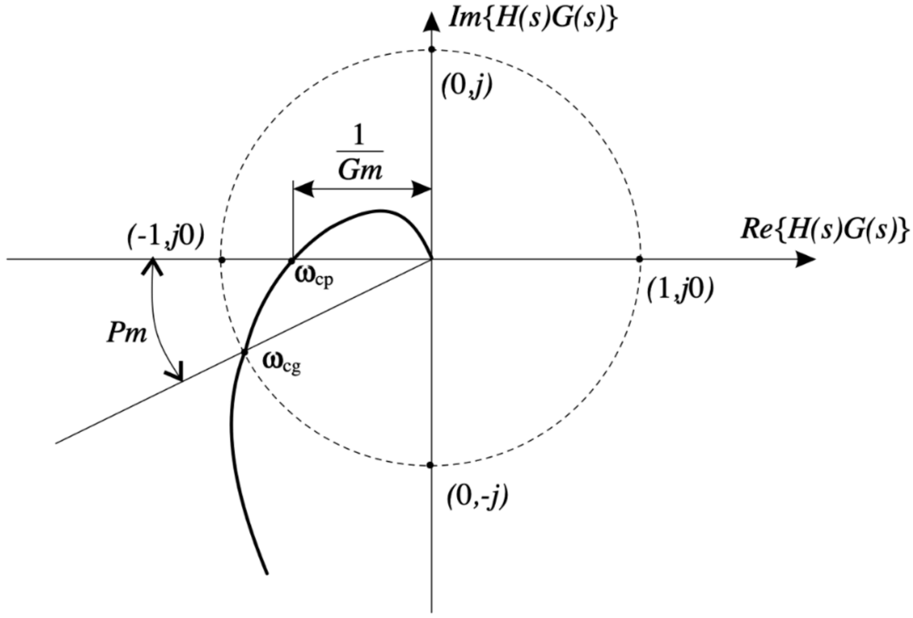
- phase margain

  在保持$|G(j\omega) = 1|$的情况下（对应的$\omega$叫做 gain crossover frequency），可以添加的额外相位滞后量，使系统达到闭环不稳定的边缘(距离$-\pi$的距离)。

  $$\Phi = \pi + \theta$$

- gain margain phase crossover frequency:保证$\angle G(j\omega) = -\pi$的$\omega$, 对于在这条下的幅度$\lambda$, phase margain 的定义是$\frac{1}{\lambda}$

  $$\mathrm{Gm}(\mathrm{dB}) = 20\log\frac{1}{|G(j\omega)H(j\omega)|}$$




如果没有对应的 crossover 频率，那么余量是未定义的。

- 该衡量方案只对开环稳定系统有效
- 大余量的系统虽然稳定，但是通常反应缓慢
- 一般情况下，好的 phase margain 对于好的 gain margain，反过来也一样

# 2. 频域的稳定性

对于一个简单减法反馈系统, $G(s)$是开环传递函数,$H(s)$是反馈路径的传递函数:

$$[I(s) - O(s)H(s)]G(s) = O(s)$$

闭环传递函数:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}$$

要得到极点，可以解方程:$1 + H(s)G(s) = 0$

## 2.1. Cauchy principle of argument

柯西幅角定理是复变函数论中的描述函数在复平面闭合曲面内的零点和极点数量关系的重要定理。 核心公式:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\tau}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z - P$$

$Z$和$P$按照重数计。

其中要求$f(z)$是一个在闭合曲线$\tau$内全纯函数(meromorphic function, 复可微, 允许有孤立奇点存在)。

积分方向取逆时针方向。

柯西幅角定理:逆时针围绕$\tau$转一圈,$F(s)$其幅角的变化是$(Z-P)2\pi$,$\tau$上无极点或者无极点。

## 2.2. Nyquist Stability Criterion(一种稳定性判据)

闭环传递函数的不稳定极点的数量等于开环传递函数的不稳定节点+$D(s)=1+H(s)G(s)$的 Nyquist plot 围绕原点的圈数。

> Nyquist判据是一种用于评估反馈控制系统稳定性的图形工具。它通过绘制开环传递函数 $G(s)$ 的Nyquist图（即 $G(j\omega)$ 的轨迹，$\omega$ 为频率），来判断闭环系统是否稳定。Nyquist图显示了系统在不同频率下的增益和相位响应，重点关注其是否围绕复平面中的点 $-1$ 环绕。
>
> **如何判断稳定性?**
>
> - **环绕数**：观察Nyquist图围绕点 $-1$ 的环绕次数 $N$（逆时针为正，顺时针为负）。
> - **开环极点**：确定开环系统 $G(s)$ 在右半平面（$\mathrm{Re}(s)>0$）中的不稳定极点数 $P$。
> - **稳定性条件**：闭环系统稳定当且仅当 $N+P=0$，即环绕数 $N=-P$。

保证系统的稳定的条件是闭环传递函数在右半平面的极点的数量为 0

- N:Nyquist 曲线顺时针包围(-1,j0)的圈数(瞬时针为正，逆时针为负)
- P:开环传递函数$G(s)H(s)$在右半平面的极点数
- Z:闭环传递函数在右半平面的极点数

$$N = Z - P$$

稳定意味着$Z=0$,$N=-P$

# 3. unity feedback system 和 non-unity feedback system 的区别

- unity:$H(s)=1$
- non-unity:$H(s)\neq 1$

# 4. 稳定区域和不稳定点(Stability Regions or Point of Instability)

## 4.1. 判断系统稳定性的方法

### 4.1.1. Routh-Hurwitz criterion

在控制系统中，劳斯准则（Routh-Hurwitz criterion）用于分析线性时不变系统的稳定性。特征方程为 $s^3 + 15s^2 + 50s + K = 0$。你提供的劳斯阵列如下：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 50 \\ s^2 & 15 & K \\ s^1 & \frac{750-K}{15} & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

通过劳斯阵列，我们发现当 $K = 750$ 时，系统处于**边际稳定**（marginally stable）状态。这是因为：

- 当 $K = 750$ 时，$s^1$ 行的元素为 $\frac{750-750}{15} = 0$，即该行全为零。
- 在劳斯准则中，某一行全为零表示系统存在纯虚根（即根位于虚轴上），这对应于**持续振荡**（sustained oscillations）或边际稳定性。

**为什么用 $15s^2 + K = 0$ 计算边缘频率？**

当劳斯阵列中出现全零行（这里是 $s^1$ 行）时，我们需要构建一个**辅助方程**（auxiliary equation）来求解纯虚根。辅助方程的构造规则是：

- **使用全零行的上一行系数。**
- 这里，全零行是 $s^1$ 行，其上一行是 $s^2$ 行，系数为 15 和 $K$。
- 因此，辅助方程为：$15s^2 + K = 0$.

这个辅助方程直接来源于劳斯阵列的结构，它描述了系统在边际稳定时的根（极点的虚部）。代入 $K = 750$：

$$15s^2 + 750 = 0$$

解方程：

$$s^2 = -\frac{750}{15} = -50 \quad \Rightarrow \quad s = \pm j\sqrt{50} = \pm j5\sqrt{2} \approx \pm j7.07$$