直接回答

- 根轨迹分析是研究LTI系统闭环极点随增益变化的图形方法，主要用于分析稳定性。
- 它帮助设计控制器，调整系统性能，如阻尼比和自然频率。
- 通过实例可以直观理解极点移动和系统行为。

什么是根轨迹分析？

根轨迹分析是一种在控制系统工程中使用的工具，展示LTI（线性时不变）系统的闭环极点如何随着某个参数（如增益 (K)）的变化而在复平面（s平面）中移动。它主要用于判断系统的稳定性，并帮助设计控制器以达到期望的动态性能，比如快速响应或减少振荡。

它是如何工作的？

通过绘制根轨迹图，我们可以：

- 找到系统在不同增益下的极点位置。
- 判断系统是否稳定（极点是否在左半平面）。
- 选择合适的增益，使系统达到所需的阻尼比和自然频率。

一个简单实例

考虑系统 ($G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)}$)：

- 当 ($K = 0$) 时，极点在 ($s = 0, -1, -3$)。
- 随着 (K) 增加，极点开始移动，根轨迹显示它们如何趋向渐近线。
- 在 ($K = 12$) 时，根轨迹触及虚轴，系统可能变得不稳定。

通过这种方式，我们可以直观地看到增益变化对系统稳定性的影响。

详细报告

引言

LTI（Linear Time-Invariant）系统的根轨迹分析是一种经典的控制系统分析方法，广泛应用于工程领域。它通过图形化方式展示系统的闭环极点随参数变化的轨迹，帮助工程师分析系统的稳定性并设计控制器。本报告将详细解释根轨迹分析的定义、目的、构造步骤，并通过实例展示其应用。

根轨迹分析的理论基础

根轨迹分析的核心是研究闭环传递函数的极点位置如何随系统参数（如增益 (K)）的变化而移动。闭环传递函数通常由开环传递函数 ($G(s)H(s)$) 和反馈增益组成，其特征方程为 ($1 + G(s)H(s) = 0$)。根轨迹满足以下条件：

- **角度条件**：($\angle G(s)H(s) = 180^\circ$)（或 ($\pi$) 弧度）。
- **幅度条件**：($|G(s)H(s)| = 1$)。

其主要目的是：

- 确定系统的稳定性：如果所有闭环极点位于左半复平面，系统是稳定的。

- 设计控制器：通过调整增益 (K)，使极点位于期望位置，优化系统的动态性能，如阻尼比 (\zeta) 和自然频率 (\omega_n)。

根轨迹的构造步骤

以下是构造根轨迹的详细步骤，基于 Construction of Root Locus | GeeksforGeeks：

步骤编号	描述
1	写出特征方程 (1 + G(s)H(s) = 0)，找到开环极点和零点，在s平面中标注。根轨迹从极点开始（(K=0)），到零点或无穷远结束（(K=\infty)）。
2	确定分支数 (N)：若极点数 (P >) 零点数 (Z)，则 (N = P)；若 (P < Z)，则 (N = Z)；若 (P = Z)，则 (N = P = Z)。
3	确定实轴上的根轨迹：若点右侧的极点和零点总数为奇数，则该段实轴上存在根轨迹。
4	找到分离点和汇合点：通过求解 (\frac{dK}{ds} = 0)，其中 (K = -1/G(s)H(s)) 的导数为零。
5	找到质心（渐近线交点）：计算公式为 (x = (\sum \text{极点实部} - \sum \text{零点实部}) / (P - Z))）。
6	找到渐近线角度：(\theta = \frac{(2m+1)180^\circ}{P-Z})，其中 (m = 0, 1, 2, \ldots, P-Z-1)。
7	找到与虚轴的交点：使用鲁棒性准则（如Routh-Hurwitz准则）或直接求解。
8	计算离开角（对于复数极点）：(\phi_d = 180^\circ - (\phi_p - \phi_z))。
9	计算到达角（对于复数零点）：(\phi_a = 180^\circ + (\phi_p - \phi_z))。

实例分析

以下通过两个实例详细讲解根轨迹分析的过程。

实例1：(G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)})

- **步骤1：极点和零点**
  - 极点：(s = 0, -1, -3)（3个极点）。
  - 零点：无。
- **步骤2：分支数**
  - 分支数 (N = P = 3)。
- **步骤3：实轴上的根轨迹**
  - 检查实轴各段：
    - ((-\infty, -3))：右侧3个极点（奇数），存在根轨迹。
    - ((-3, -1))：右侧2个极点（偶数），不存在。
    - ((-1, 0))：右侧1个极点（奇数），存在。
    - ((0, +\infty))：右侧0个（偶数），不存在。
  - 因此，根轨迹存在于 ((-\infty, -3)) 和 ((-1, 0))。
- **步骤4：分离点**
  - 特征方程：(K = -s(s+1)(s+3))。
  - 求 (\frac{dK}{ds} = 0)，解得 (s = -0.45, -2.21)，取 (s = -0.45)（忽略虚数解）。

- **步骤5：质心**
  - 质心 (x = \frac{0 + (-1) + (-3)}{3-0} = -1.33)。
- **步骤6：渐近线角度**
  - (\theta = \frac{(2m+1)180^\circ}{3})，(m = 0, 1, 2)：
    - (m=0)：(60^\circ)。
    - (m=1)：(180^\circ)。
    - (m=2)：(300^\circ)。
- **步骤7：虚轴交点**
  - 计算得 (K = 12) 时，交点为 (s = \pm 1.73j)。

通过以上步骤，可以绘制根轨迹图，显示极点从 (K=0) 的位置开始，随着 (K) 增加移动，最终趋向渐近线。

实例2：比较两个系统

考虑系统 (G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)}) 和 (G_2(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)(s+12)})，当增益 (K = 40) 时：

- 两个系统的闭环特征方程相同：(s^3 + 6s^2 + 45s + 40 = 0)。
- 闭环极点：(s = -1, -2.5 \pm j5.8)。

尽管特征方程相同，但它们的根轨迹不同：

- (G_1(s)) 的根轨迹较简单，无额外零点影响。
- (G_2(s)) 受零点 (s = -12) 影响，系统响应更复杂。

系统行为：

- (T_1(s))（基于 (G_1(s))）：类似于一阶系统，settling time 约4秒，无超调。
- (T_2(s))（基于 (G_2(s))）：更像二阶系统，响应更快，有振荡（阻尼比 (\zeta = 0.4)，自然频率 (\omega_n = 6.3) rad/s）。

这一实例强调，根轨迹分析关注极点，但零点对系统响应同样重要，设计时需综合考虑。

根轨迹分析的应用与局限

根轨迹分析在以下方面有重要应用：

- 稳定性分析：通过观察根轨迹是否进入右半平面判断系统稳定性。
- 控制器设计：设计PI、PD、PID等控制器，调整系统性能。
- 教育价值：帮助学生理解控制系统理论。

然而，它也有局限：

- 假设系统为二阶近似，可能不适用于高阶复杂系统。
- 需要验证最终设计，通过仿真检查是否满足目标。

结论

根轨迹分析是LTI系统分析和设计的重要工具，通过图形化方法直观展示系统动态行为。实例分析表明，它不仅能帮助确定稳定性，还能指导控制器设计，但需注意零点的影响和系统复杂性。

关键引用

- Root locus analysis definition and purpose
- Construction of Root Locus with examples
- Root Locus practical examples and pitfalls

怎么给实际轴分段?

当开环传递函数 (G(s)H(s)) 既有极点又有零点时，确定实轴上的根轨迹分段需要根据极点和零点的分布，结合根轨迹的角度条件进行分析。以下是详细的步骤和规则，辅以实例说明。

直接回答

实轴上的根轨迹分段规则：

- 对于实轴上的任意点 (s)，计算该点右侧的开环极点和零点的总数（实数部分大于 (s) 的极点和零点）。
- 如果总数为奇数，则该点属于根轨迹；如果为偶数，则不属于。
- 零点和极点的影响相反：极点贡献 (+180^\circ)，零点贡献 (-180^\circ)。角度条件要求总角度为 ((2k+1)180^\circ)，因此奇数个极点/零点满足条件。

详细分析与步骤

根轨迹的绘制基于特征方程 (1 + K G(s)H(s) = 0)，即 (G(s)H(s) = -1)。角度条件要求 (\angle G(s)H(s) = (2k+1)180^\circ)。对于实轴上的点，极点和零点的角度贡献如下：

- 实轴上的极点：若测试点 (s) 在极点右侧，角度为 (180^\circ)，左侧为 (0^\circ)。
- 实轴上的零点：若测试点 (s) 在零点右侧，角度为 (-180^\circ)，左侧为 (0^\circ)。

步骤：

1. **确定极点和零点**：
   - 列出开环传递函数 (G(s)H(s)) 的所有极点和零点。
   - 标记这些极点和零点在实轴上的位置。
2. **划分实轴**：
   - 以极点和零点的位置为界，将实轴分成若干段。
   - 例如，若极点在 (s = -3, -1)，零点在 (s = -2)，则实轴分段为：((-\infty, -3), (-3, -2), (-2, -1), (-1, +\infty))。
3. **检查每段是否在根轨迹上**：
   - 对于每段，选择一个测试点 (s)。
   - 计算该点右侧的极点数 (P_r) 和零点数 (Z_r)。
   - 总和 (N = P_r + Z_r)。若 (N) 为奇数，该段在根轨迹上；若为偶数，则不在。
4. **验证角度条件**：
   - 每个右侧极点贡献 (+180^\circ)，每个右侧零点贡献 (-180^\circ)。
   - 总角度为 ((P_r - Z_r) \cdot 180^\circ)。若结果为 ((2k+1)180^\circ)，则该段在根轨迹上。

实例讲解

考虑开环传递函数 (G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3)})：

- **极点**：(s = 0, -1, -3)（3 个极点）。
- **零点**：(s = -2)（1 个零点）。
- **分支数**：分支数 (N = \max(P, Z) = 3)。

步骤1：划分实轴

极点和零点在实轴上的位置为 (s = -3, -2, -1, 0)。实轴分段：

- ((-\infty, -3))
- ((-3, -2))
- ((-2, -1))
- ((-1, 0))
- ((0, +\infty))

步骤2：检查每段

对于每段，选择一个测试点，计算右侧的极点数 (P_r) 和零点数 (Z_r)，并判断 (P_r + Z_r) 是否为奇数。

段	测试点	右侧极点 ((s > \text{测试点}))	右侧零点	(P_r + Z_r)	是否在根轨迹上
((-\infty, -3))	-4	(s = -3, -1, 0) (3 个)	(s = -2) (1 个)	3 + 1 = 4	偶数，不在
((-3, -2))	-2.5	(s = -1, 0) (2 个)	(s = -2) (1 个)	2 + 1 = 3	奇数，在
((-2, -1))	-1.5	(s = -1, 0) (2 个)	无	2 + 0 = 2	偶数，不在
((-1, 0))	-0.5	(s = 0) (1 个)	无	1 + 0 = 1	奇数，在
((0, +\infty))	1	无	无	0 + 0 = 0	偶数，不在

步骤3：验证角度条件

以段 ((-3, -2))（测试点 (s = -2.5)）为例：

- 右侧极点 (s = -1, 0)：每个贡献 (+180^\circ)，共 (2 \times 180^\circ = 360^\circ)。
- 右侧零点 (s = -2)：贡献 (-180^\circ)。
- 总角度：(360^\circ - 180^\circ = 180^\circ)，满足 ((2k+1)180^\circ)（取 (k = 0)），确认该段在根轨迹上。

结果

根轨迹存在于实轴段：

- ((-3, -2))
- ((-1, 0))

MATLAB 验证

以下是 MATLAB 代码，用于绘制 (G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3)}) 的根轨迹，验证实轴分段结果：

```
% MATLAB script to plot the root locus for G(s)H(s) = K(s+2)/(s(s+1)(s+3))

% Clear workspace and command window
clear all;
clc;

% Define the transfer function
% Numerator: s+2
% Denominator: s(s+1)(s+3) = s^3 + 4s^2 + 3s
num = [1 2];            % Numerator coefficients (s+2)
den = [1 4 3 0];        % Denominator coefficients (s^3 + 4s^2 + 3s)

% Create transfer function
sys = tf(num, den);

% Plot root locus
figure;
rlocus(sys);             % Plot the root locus
grid on;                 % Add grid for better readability
title('Root Locus of G(s)H(s) = K(s+2)/(s(s+1)(s+3))');
xlabel('Real Axis');
ylabel('Imaginary Axis');

% Optional: Set axis limits for better visualization
axis([-5 1 -3 3]);
```

运行结果说明

- 运行后，根轨迹图将显示：
  - 极点 (s = 0, -1, -3) 为起点（标记为“×”）。
  - 零点 (s = -2) 为终点（标记为“O”）。
  - 实轴上的轨迹出现在 ((-3, -2)) 和 ((-1, 0))，与手动计算一致。
- 零点 (s = -2) 吸引了一条分支，其他分支趋向无穷远，渐近线由质心和角度决定。

注意事项

- **零点的影响**：零点会吸引根轨迹分支，改变轨迹形状，需特别注意零点位置。
- **复杂系统**：若有复数极点或零点，实轴分段仅考虑实轴上的极点和零点，复数部分影响其他轨迹形状。
- **验证工具**：MATLAB 的 `rlocus` 自动计算并绘制根轨迹，可用于验证手动计算结果。

通过上述步骤和实例，你可以准确判断实轴上的根轨迹分段，并通过 MATLAB 直观验证结果。 break point也可以通过(\frac{\partial G}{\partial s})计算。