傅立叶变换

1. DTFT 的定义

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

1.1. 常见的变化

$$\delta[n] \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} 1$$

$$a^n u[n] \overset{\text{DTFT(0<a<1)}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

1.2. 性质

1.2.1. 线性性质

- 自变量:ω
- DTFT 结果的周期:2π
- 时移动:$x[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-j\omega n_0}X\left(e^{j\omega}\right)$
- 频移动:$e^{j\omega_0 n}x[n] \longleftrightarrow X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$

e.g 求$x[n] = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]$的 DTFT

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-0.5e^{-j\omega}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \longleftrightarrow \frac{e^{-j\omega}}{1-0.5e^{-j\omega}}$$ 注意:所有 n 都要替换成 n-1,别忘了那个指数

再乘以$\frac{5}{2}$就得到答案

1.2.2. 帕斯威尔定理(能量定理)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2\ d\omega$$

用频域的能量计算时域的能量

2. 傅立叶变化的性质

2.1. 复变函数基础

复数:$z=x+yj$

$$x=R_e(z)$$

$$y=I_m(z)$$

或者用极坐标表示

$$z=re^{j\theta}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

共轭:$z^*=x-yj$, $z^*=re^{-j\theta}$

2.2. DTFT 其他性质

- 取反

$$x[-n]\longleftrightarrow X^{e^{-j\omega}}$$

- 共轭:

$$x^*[n]\longleftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$$

$$FT[x(n)] = X(e^{j\omega}) \xleftrightarrow[\text{对称}]{(-n)\leftrightarrow(-j\omega)} FT[x(-n)] = X(e^{-j\omega})$$

$$FT[x^*(n)] = X^*(e^{-j\omega}) \xleftrightarrow[\text{反对称}]{(-n)\leftrightarrow(j\omega)} FT[x^*(-n)] = X^*(e^{j\omega})$$

2.2.1. 序列的共轭对称部分和共轭反对称部分

$$x_{e[n]} = \frac{1}{2}[x[n] + x^*[-n]]$$

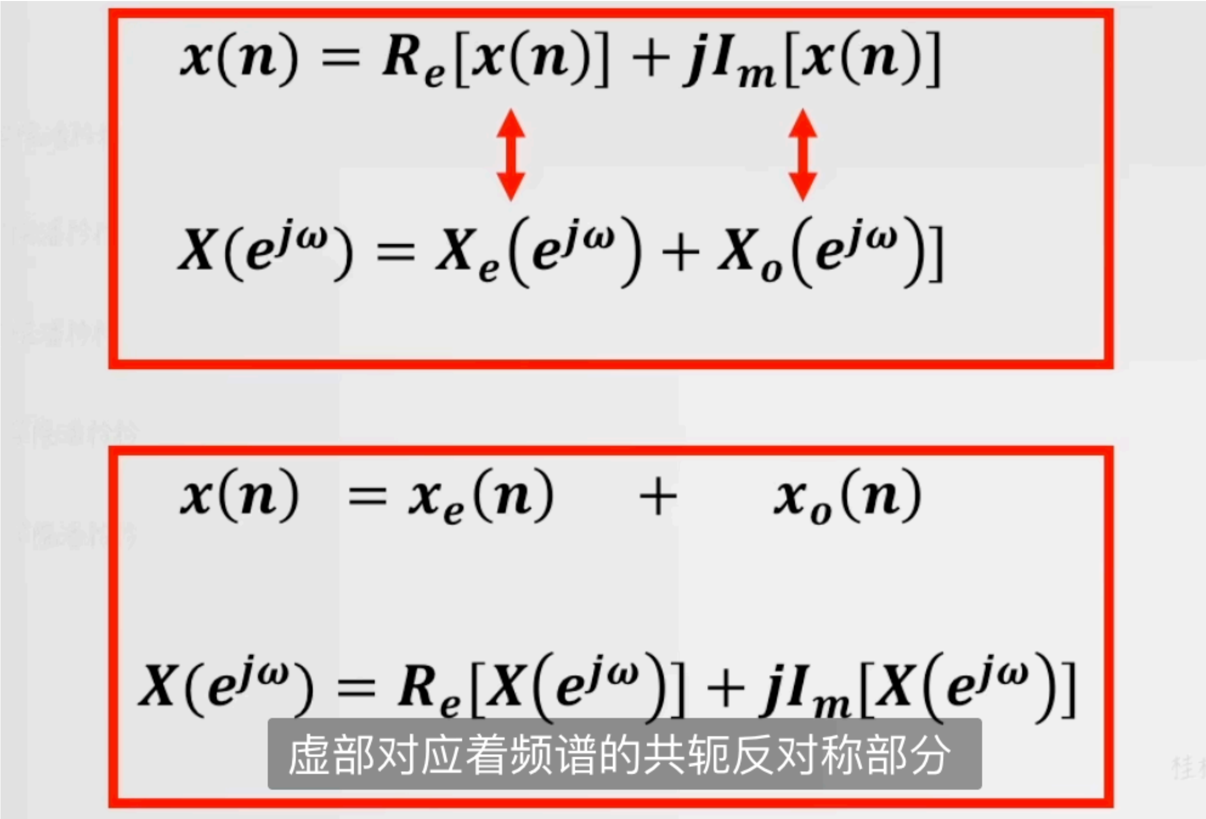
$$x_{o[n]} = \frac{1}{2}[x[n] - x^*[-n]]$$

- 两个部分的傅立叶变换

$$x_e[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})] = R_e[X(e^{j\omega})]$$

$$x_o[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})] = jI_m[X(e^{j\omega})]$$

1. 共轭对称部分的傅立叶变换对应总傅立叶变换的虚部，共轭反变换对称对应的是傅立叶变换的虚部部分
2. 原信号实部的傅立叶变换对应总变换的共轭对称部分，原信号的虚部的傅立叶变换对应总变换的共轭反对称部分



对于实信号，其共轭对称和共轭反对称就是偶分量和奇分量，所以其偶分量的傅立叶变换 对应总变换的实部，实部是关于ω的偶函数，类似的，奇部是关于ω的奇函数

实信号的傅立叶变换的幅度是ω的偶函数，幅角是关于ω的奇函数