UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Realna funkcija dve realne promenljive – definicija, osobine, lokalne ekstremumi

Lekcija 06

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 06

REALNA FUNKCIJA DVE REALNE PROMENLJIVE – DEFINICIJA, OSOBINE, LOKALNE EKSTREMUMI

www.metropolitan.ac.rs

Uvod

UVOD

U ovoj lekciji ćemo se baviti realnim funkcijama dve realne promenljive.

Uočimo ceo racionalan algebarski izraz $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Ako posmatramo jednakostraničan trougao čija je stranica dužine x, tada važi da je $P(x)=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ površina tog trougla. Domen funkcije $P(x)$ je skup pozitivnih realnih brojeva, jer x predstavlja dužinu stranice. Funkcija $P(x)$ je realna funkcija jedne realne promenljive.

Uočimo, sada, ceo racionalan algebarski izraz x^2+2xy. Ako posmatramo pravilnu četvorostranu piramidu gde je x dužina osnovice te piramide, a y dužina bočne visine (apoteme), tada $P(x,y)=x^2+2xy$, predstavlja površinu te piramide. U ovom slučaju, površina $P(x,y)$ je realna funkcija dve realne promenljive za koje važi da je $x>0$ i $y>0$.

Iz prethodnog vidimo da se slično realnim funkcijama jedne realne promenljive mogu posmatrati i realne funkcije više realnih promenljivih. Mnoge pojave u prirodnim i tehničkim naukama opisuju se ovakvim funkcijama.

U ovoj lekciji ćemo se baviti realnim funkcijama dve realne promenljive, a sve izloženo važi i za realne funkcije sa tri ili više realnih promenljivih.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Pojam funkcije dve promenljive

DEFINICIJA I GRAFIK FUNKCIJE DVE PROMENLJIVE

Funkcija dve promenljive, isto kao i funkcija jedne promenljive, može biti zadana u eksplicitnom, parametarskom obliku, ili u implicitnom obliku.

Definicija. Realna funkcija dve realne promenljive je bilo koje pravilo ili zakon po kome se svakom uređenom paru (x, y) iz nekog skupa $A \subseteq \mathbb{R}^2$ pridružuje tačno jedan broj $z \in B \subseteq \mathbb{R}$.

Napomena. Ubuduće ćemo realnu funkciju dve realne promenljive kraće zvati funkcija dve promenljive.

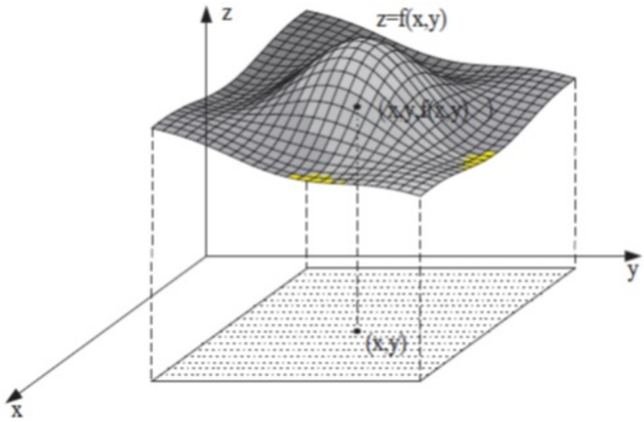
Skup A se naziva domen funkcije ili oblast definisanosti funkcije, a skup B se naziva skup vrednosti ili kodomen funkcije. Vrednosti x i y se nazivaju nezavisno promenljive (ili argumenti), a vrednost z se naziva zavisno promenljiva.

Funkciju dve promenljive u eksplicitnom obliku zapisujemo sa $z = f(x, y)$. Ona može biti data u parametarskom, kao i u implicitnom obliku, o čemu će biti reči kasnije.

Oblast definisanosti funkcije dve promenljive je skup tačaka $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koje $z = f(x, y)$ može da se odredi. Ovde važe iste napomene u vezi sa oblašću definisanosti kao i kod funkcije jedne promenljive.

Grafik generisan realnom funkcijom dve realne promenljive (videti sliku) predstavlja skup tačaka u $\mathbb{R}^3$ dat sa

$$\Gamma_f = \{\big(x, y, f(x, y)\big) \mid (x, y) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$



Slika 1.1 Grafik realne funkcije dve realne promenljive [Izvor: Autor].

U našem razmatranju isključivo ćemo se baviti funkcijama koje će za grafik imati neprekidnu, ili na malom delu prekidnu površ.

Napomena. Na način kako je definisana funkcije dve promenljive, analogno se može definisati i funkciju tri ili više promenljivih.

PRIMER

Određivanje domena funkcije dve promenljive.

Odrediti domene sledećih funkcija:

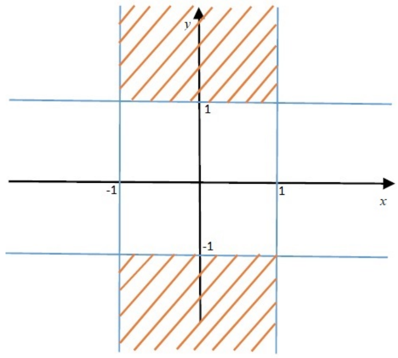
$$a)\ z = x^2 + y^2 + 2x - 1, \qquad b)\ z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1},$$
$$c)\ z = \ln(4 - x^2 - y^2), \qquad d)\ z = \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 + y^2}}.$$

Rešenje.

a) U ovom slučaju nema nikakvih ograničenja, pa je domen $\mathbb{R}^2$.

b) Zbog korena parnog reda neophodno je da bude $1 - x^2 \geq 0$ i $y^2 - 1 \geq 0$. Tada je domen ove funkcije skup

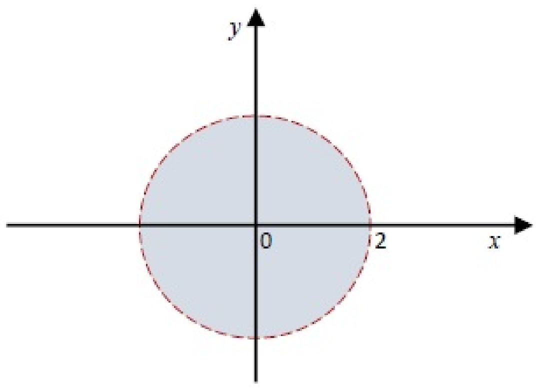
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1] \wedge y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\right\}.$$



Slika 1.2 Domen funkcije $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$ [Izvor: Autor].

c) Zbog logaritamske funkcije mora biti $4 - x^2 - y^2 > 0,$ tj. $x^2 + y^2 < 4$. Dakle, domen ove funkcije je unutrašnjost kruga $x^2 + y^2 = 4,$ bez kružnice, tj.

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}.$$



Slika 1.3 Domen funkcije $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$ [Izvor: Autor].

d) Kako imamo koren neparnog reda, zbog njega nema nikakvih ograničenja i jedino ograničenje je $x^2 + y^2 \neq 0,$ tj.

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \wedge y \neq 0\}.$$

Dakle, domen funkcije su sve tačke iz ravni, bez koordinatnog početka, tj. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a - određivanje domena funkcije dve promenljive.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

DVODIMENZIONALNA OBLAST

Uvedeni su pojmovi: otvoren skup, povezan skup, granica, zatvorena oblast, ograničena oblast i neograničena oblast u prostoru $\mathbb{R}^2$.

Uvešćemo sada pojam dvodimenzionalne oblasti, koji nam je potreban za dalje izlaganje. Da bismo ga definisali, najpre, moramo definisati pojmove otvoreni skup i povezani skup u $\mathbb{R}^2$.

Definicija. U prostoru $\mathbb{R}^2$ za skup se kaže da je otvoren ako i samo ako se oko svake njegove tačke može opisati krug koji ceo pripada njemu.

Definicija. U prostoru $\mathbb{R}^2$ za skup se kaže da je povezan ako i samo ako je putno povezan.

Napomena. Neki skup je putno povezan ako svake dve njegove različite tačke možemo spojiti putem koji ceo pripada skupu (put je bilo koja neprekidna kriva u $\mathbb{R}^2$).

Definicija. Neki skup nazivamo oblast u $\mathbb{R}^2$ ili dvodimenzionalna oblast ako i samo je taj skup otvoren i povezan u prostoru $\mathbb{R}^2$,

Definicija. Tačka A se naziva granična tačka neke oblasti E ako i samo ako svaka okolina tačke A, pored tačaka iz oblasti E, sadrži i tačke koje ne pripadaju oblasti E.

Skup svih graničnih tačaka neke oblasti E nazivamo granica oblasti i označavamo ∂E.

Ako nekoj otvorenoj oblasti E pridružimo sve njene granične tačke dobijamo skup tačaka koje zovemo zatvorena oblast i nju označavamo sa $\overline{E}$ (tj. važi $\overline{E} = E \cup \partial E$).

Ako za datu oblast možemo naći krug konačnog poluprečnika, koji pokriva tu oblast, onda tu oblast nazivamo ograničena oblast. U suprotnom oblast nazivamo neograničena oblast.

Poglavlje 2

Granična vrednost funkcije dve promenljive

DEFINICIJA GRANIČNE VREDNOSTI

Za granične vrednosti funkcije dve ili više promenljivih važe analogni stavovi kao za granične vrednosti funkcije jedne promenljive.

Da bismo definisali graničnu vrednost funkcije dve promenljive potrebno je, najpre, definisati pojam okoline tačke $A(x_0, y_0)$.

Definicija. Proizvoljan skup tačaka u ravni se naziva okolina tačke $A(x_0, y_0)$ ako i samo ako sadrži unutrašnjost kruga sa centrom u tački A poluprečnika ε, gde je ε pozitivan broj.

Specijalno, unutrašnjost kruga sa centrom u tački A poluprečnika ε, zovemo $\varepsilon -$ okolinom tačke A . Označavaćemo je sa $U_\varepsilon(A)$.

Definicija. Broj b se naziva granična vrednost funkcije $z = f(x, y)$, kada $x \to x_0, y \to y_0$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji δ -okolina tačke $A(x_0, y_0)$ takva da za sve tačke iz te okoline, osim možda u tački A, važi nejednakost

$$\left|f(x, y) - b\right| < \varepsilon.$$

Tada pišemo

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = b, \quad \text{ili} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = b.$$

Analogno se može definisati i granična vrednost funkcije tri i više promenljivih.

Napomena. Ako granična vrednost funkcije dve promenljive postoji u nekoj tački, ona mora davati istu konačnu vrednost, bez obzira kako joj prilazimo. To znači da, ako želimo da dokažemo da granična vrednost u nekoj tački ne postoji, dovoljno je naći dva pravca po kojima prilazimo posmatranoj tački, a da pri tom dobijamo različite vrednosti posmatranih limesa (konačne ili beskonačne).

PRIMER 1

Određivanje granične vrednosti funkcije dve promenljive.

Ispitati da li postoje sledeće granične vrednosti:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$;

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$;

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^6-y^6}{x^3+y^3}$;

Rešenje. a) Posmatrana granična vrednost ne postoji u tački $(0,0)$. Naime, ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $x=0$ (tj. po $y-$ osi), tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-3y^2}{y^2} = -3,$$

a ako se približava po pravoj $y=0$ (tj. po $x-$ osi), onda je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

Dakle, posmatrana granična vrednost ne postoji u tački $(0,0)$.

b) Posmatrana granična vrednost ne postoji u tački $(0,0)$. Ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $y=2x$, tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{x^2+16x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{1+16x^2} = 0.$$

Međutim, ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po paraboli $y=\sqrt{x}$, tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, posmatrana granična vrednost ne postoji u tački $(0,0)$.

c) Posmatrana granična vrednost postoji, jer je

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6-y^6}{x^3+y^3} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^3-y^3)(x^3+y^3)}{x^3+y^3} = \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^3-y^3\right) = 0.\end{aligned}$$

PRIMER 2

Određivanje granične vrednosti funkcije primenom polarnih koordinata. Ona je pogodna za primenu kada se pod limesom javljaju funkcije koje sadrže kvadratne forme x^2+y^2.

Napomena. U situacijama kada se pod limesom javljaju funkcije koje sadrže kvadratne forme x^2+y^2, odnosno njihova uopštenja, takvi limesi se mogu rešavati uvođenjem polarnih koordinata $x=\rho\cos\theta$ i $y=\rho\sin\theta$, ili njihovih uopštenja, gde je $\rho>0$ i $\theta\in(0,2\pi]$. Na ovaj način se dobija granična vrednost samo po promenljivoj ρ kojom se prilazi tački u kojoj se ispituje granična vrednost, dok se veličinom θ "pokrivaju" svi pravci kojima se može prići toj tački.

Ispitati da li postoji granična vrednost

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{-(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2}.$$

Rešenje. Shodno prethodno rečenom, ovaj zadatak možemo rešiti na sledeći način

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{-(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{e^{-\rho}-1}{\rho}=-\lim_{\rho\to 0}\frac{e^{-\rho}-1}{-\rho}=-1,$$

gde imamo da, zbog $x\to 0$ i $y\to 0$, važi $\rho\to 0$, gde je $\theta\in(0,2\pi]$.

HAJNEOVA DEFINICIJA GRANIČNE VREDNOSTI

Hajneova definicija se koristi za utvrđivanje nepostojanja granične vrednosti funkcije u datoj tački.

Prethodno data definicija granična vrednosti funkcije dve promenljive je poznata kao okolinska ili Košijeva definicija. Pored nje može se uvesti i Hajneova definicija granične vrednosti preko nizova. Ta definicija je analogna onoj koju smo uveli prilikom definisanja granične vrednosti funkcije jedne promenljive.

Definicija. Važi da $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=b$ ako i samo ako za niz $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$, kada $n\to\infty$, važi da $f(x_n,y_n)\to b$, kada $n\to\infty$.

Napomena. Hajneova i Košijeva definicija granične vrednosti su ekvivalentne.

Primer. Ispitati da li postoji granična vrednost

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}}.$$

Rešenje. Uočimo dva niza $(\frac{1}{n},\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ i $(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Za ova dva niza važi $(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\to(0,0)$, kada $n\to+\infty$ i $(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})\to(0,0)$, kada $n\to+\infty$. Tada imamo da je

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{1}{n}\right)^4}}=\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{\sqrt{2}}{n^2}}\to\frac{1}{\sqrt{2}},\ n\to+\infty.$$

S druge strane, imamo da je

$$f\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{1}{n}\right)^4}}=\frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{\sqrt{2}}{n^2}}\to-\frac{1}{\sqrt{2}},\ n\to+\infty.$$

Dakle, posmatrana granična vrednost ne postoji u tački $(0,0)$.

ODREĐIVANJE DVE UZASTOPNE GRANIČNE VREDNOSTI

Postojanje istovremene granične vrednosti neke funkcije dve promenljive u nekoj tački, ne mora povući postojanje uzastopnih graničnih vrednosti.

Oznaka $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ se koristi prilikom traženje istovremene granične vrednosti funkcije $z=f(x,y)$ u tački (a,b), tj. kada istovremeno $x\to a$ i $y\to b$, za $a,b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Istovremena granična vrednost se označava i sa $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to a}} f(x,y)$.

S druge strane, $\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f\left(x,y\right)\right)$ označava izračunavanje dva uzastopna limesa, gde se prvo određuje $\lim_{y\to b} f\left(x,y\right)$, dok je promenljiva x fiksirana. Nakon toga se od dobijenog rezultata, računa limes kada $x\to a$. Analogno važi za $\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f\left(x,y\right)\right)$.

Veza između ovih limesa je sledeća: ako postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l_1\in\mathbb{R}$ i ako za svako x postoji granična vrednost $\lim_{y\to b} f\left(x,y\right)$, tada postoji uzastopna granična vrednost $\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f\left(x,y\right)\right)=l_2\in\mathbb{R}$, pri čemu je $l_1=l_2$. Obrnuto ne mora da važi, što ćemo pokazati u narednom zadatku. Analogno važi za $\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f\left(x,y\right)\right)$.

Primer. Ako je $f\left(x,y\right)=\frac{x-y}{3x+2y}$, ispitati da li postoje sledeće uzastopne granične vrednosti $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f\left(x,y\right)\right)$ i $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f\left(x,y\right)\right)$? Da li postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Rešenje. Važi da je

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{3x+2y}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

S druge strane, imamo da je

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{3x+2y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{2y}=-\frac{1}{2}.$$

Ako se tačka (x, y) približava tački $(0, 0)$ po pravoj $y = 2x$, tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{3x+2y}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{7x}=-\frac{1}{7},$$

a ako se tačka (x, y) približava tački $(0, 0)$ po pravoj $y = x$, tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{3x+2y}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{2x}=0.$$

Dakle, granična vrednost u tački $(0, 0)$ ne postoji.

Poglavlje 3

Neprekidnost funkcije dve promenljive

DEFINICIJA NEPREKIDNOSTI

Uveden je pojam neprekidnosti funkcije u tački i pojam neprekidnosti funkcije na zatvorenoj oblasti.

Pojam neprekidnosti funkcija dve ili više promenljivih u tački se zadaje analogno kao i u slučaju funkcije jedne promenljive.

Definicija. Funkcija $z = f(x, y)$ je neprekidna u tački $A(x_0, y_0)$ ako je definisana u nekoj okolini ove tačke i ako je

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Za funkcije dve ili više promenljivih koje su neprekidne u nekoj tački važe analogni stavovi kao za funkcije jedne promenljive. Kod funkcije jedne promenljive smo neprekidnost posmatrali na intervalu, dok se kod funkcija dve ili više promenljivih posmatra neprekidnost funkcije u odgovarajućoj oblasti na analogan način i sa analognim stavovima.

Poznajući pojam dvodimenzionalne oblasti možemo definisati neprekidnosti funkcije na oblasti u $\mathbb{R}^2$.

Pri definisanju pojma neprekidnosti na zatvorenoj oblasti zahteva se neprekidnost u svakoj tački te oblasti, pri čemu se podrazumeva da je funkcija neprekidna u graničnoj tački A, ako je ispunjena jednakost

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

gde tačke (x, y) teže ka tački $A(x_0, y_0)$ po tačkama iz te oblasti.

Za funkcije neprekidne u ograničenoj zatvorenoj oblasti D važi da su u toj oblasti:

1. ograničene,

2. dostižu u toj oblasti najveću i najmanju vrednost,

3. dostižu u toj oblasti svaku vrednost između najveće i najmanje vrednosti.

PRIMERI

Provera neprekidnosti funkcije u tački.

Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Rešenje. Ova funkcija je neprekidna u svakoj tački ravni $\mathbb{R}^2$, osim možda u tački $(0,0)$. Proverimo šta se dešava u njoj. Za $x=y$ imamo da je

$$f(x,x)=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2},$$

dok za $x=-y$ važi

$$f(x,-x)=\frac{-x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2}.$$

Dakle,

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$$

ne postoji, pa je funkcija $f(x,y)$ prekidna u tački $(0,0)$.
Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Rešenje. Ova funkcija je neprekidna u svakoj tački ravni $\mathbb{R}^2$, osim možda u tački $(0,0)$. Kako važi

$$f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}=x\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}\quad \text{i} \quad 0\leq\frac{x^2}{x^2+y^2}\leq 1,$$

imamo da je

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} x\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}=0=f(0,0).$$

Poslednje važi, jer predstavlja proizvod beskonačno male veličine (to je x) i ograničene funkcije (to je $\frac{x^2}{x^2+y^2}$).
Dakle, posmatrana funkcija je neprekidna na celom $\mathbb{R}^2$.

VIDEO KLIP

Neprekidnost funkcije dve promenljive.

Poglavlje 4

Prvi parcijalni izvodi

TOTALNI PRIRAŠTAJ

Korišćenjem pojmova totalni priraštaj funkcije i parcijalni priraštaj funkcije po odgovarajućoj promenljivoj, mogu se uvesti pojmovi parcijalni izvod funkcije po odgovarajućoj promenljivoj.

Kao što smo rekli, pod pojmom funkcije dve promenljive definisane na $\mathcal{D}$ (što će najčešće biti oznaka za domen) podrazumevamo jednoznačno dodeljivanje

$$(x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

gde $(x, y) \in \mathcal{D}$.
Formulom (1) zadat je pojam navedene funkcije čije vrednosti na $\mathcal{D}$ se generišu pravilom f i ona može biti data u eksplicitnom, implicitnom ili parametarskom obliku. Mi ćemo u većini razmatranja koristiti eksplicitan oblik zadavanja, a analogne teorije postoje i za druga dva oblika.
Grafik generisan formulom (1) predstavlja skup tačaka u $\mathbb{R}^3$ dat sa

$$\Gamma_f = \Big\{ \big(x, y, f(x, y)\big) \mid (x, y) \in D \Big\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

U našem razmatranju isključivo ćemo se baviti funkcijama koje će za grafik imati neprekidnu, ili na malom delu prekidnu površ. Znači, ubuduće imamo posla sa funkcijama oblika

$$z = f(x, y), \quad \text{za } (x, y) \in \mathcal{D}\,.$$

Da ponovimo, kod ovakvih funkcija veličine x i y su nezavisne promenljive, a veličina z je zavisna realna promenljiva.
Neka je data oblast $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je data tačka $A = (a_1, a_2) \in \mathcal{D}$. Takođe, neka je na D data funkcija $z = f(x, y)$.

Definicija. Totalni priraštaj funkcije f u tački A (sa priraštajima argumenata Δx i Δy), u oznaci Δf, je veličina

$$\Delta f = f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2)\,, \tag{2}$$

gde su Δx i Δy realne veličine različite od nule.

U slučaju kada u (2) važi da je:

1° $\Delta y = 0$ -- tada $\Delta f = f(a_1 + \Delta x, a_2) - f(a_1, a_2)$nazivamo parcijalnim priraštajem funkcije f u tački A po prvoj promenljivoj (po x) i označavamo sa $\Delta_x f$.

2° $\Delta x = 0$ -- tada $\Delta f = f(a_1, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2)$nazivamo parcijalnim priraštajem funkcije f u tački A po drugoj promenljivoj (po y) i označavamo sa $\Delta_y f$.

PARCIJALNI IZVODI FUNKCIJE DVE PROMENLJIVE

Parcijalni izvod neke funkcije može da postoji ili ne u $\mathbb{R}$ u $\pm\infty$.

Koristeći 1° i 2° kreirajmo sledeće granične vrednosti:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}, \tag{3.1}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}. \tag{3.2}$$

Granične vrednosti (3.1) i (3.2) mogu postojati ili ne u $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Ako su konačne, nazovamo ih parcijalni izvodi prvog reda funkcije f u tački $A \in \mathcal{D}$ po prvoj, odnosno po drugoj promenljivoj, respektivno. U tom slučaju koristimo jednu od sledećih oznaka

$$f'_x(x,y)\big|_A, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{ili} \quad f'_x(A),$$

$$f'_y(x,y)\big|_A, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \text{ili} \quad f'_y(A).$$

Za ova dva parcijalna izvoda prvog reda možemo kreirati funkcije tih parcijalnih izvoda

$$f'_x(x,y), \quad \text{za } (x,y) \in \mathcal{D},$$
$$f'_y(x,y), \quad \text{za } (x,y) \in \mathcal{D}.$$

Prethodno date funkcije su opet funkcije po promenljivim x i y.

NapomenaPraktično nalaženje funkcija koje su parcijalni izvodi početne funkcije se može uraditi na sledeći način:
- polaznu funkciju $f(x,y)$ diferenciramo samo po x (y smatramo konstantom) i time dobijemo $f'_x(x,y)$, za $(x,y) \in \mathcal{D}$,

- polaznu funkciju $f(x,y)$ diferenciramo samo po y (x smatramo konstantom) i time dobijemo $f'_y(x,y)$, za $(x,y) \in \mathcal{D}$.

PRIMER

Određivanje prvih parcijalnih izvoda.

Naći odgovarajuće parcijalne izvode funkcija:

$$a)\ z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \qquad b)\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ u tački } A(1,1).$$

Rešenje.

a)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{-x}{y^2}=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{-x}{y^2}=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

b)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Tada je: $z'_x(1,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $z'_y(1,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

PRVI PARCIJALNI IZVODI SLOŽENE FUNKCIJE

Pravilo za određivanje prvih parcijalnih izvoda u situaciji kada funkcija složena. Analogno pravilo smo dali i prilikom određivanje prvog izvoda funkcije jedne promenljive.

Funkcije više promenljivih mogu biti složene, pa tako ako je $z=f(u,v)$ funkcija od u i v, pri čemu su $u=u(x,y)$ i $v=v(x,y)$ funkcije od x i y, onda je z složena funkcija od x i y

$$z=f(u(x,y),v(x,y))=g(x,y)$$

a njeni parcijalni izvodi po x i y se dobijaju kao

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Parcijalni izvodi višeg reda

DRUGI PARCIJALNI IZVODI

Parcijalni izvodi drugog reda se dobijaju traženjem parcijalnih izvoda od parcijalnih izvoda prvog reda.

Za funkciju f u tački $A \in D$ možemo formirati parcijalne izvode drugog reda po jednoj, odnosno po drugoj promenljivoj na sledeći način: neka su date izvodne funkcije parcijalnih izvoda prvog reda funkcije $z = f(x, \quad y), \quad (x, \quad y) \in D$ sa

$f'_x(x, y), \qquad f'_y(x, y), \qquad (x, y) \in D.$

Za njih je moguće (ponaosob) potražiti parcijalne izvode prvog reda u tački $A \in D$ (ako su za to obezbeđeni uslovi) i time dobijamo:

$$\left.\left(f'_x(x, y)\right)'_x\right|_A, \left.\left(f'_x(x, y)\right)'_y\right|_A, \left.\left(f'_y(x, y)\right)'_x\right|_A, \left.\left(f'_y(x, y)\right)'_y\right|_A,$$

gde je $A = (a1, a2) \in D$.

Standardne oznake za prethodno date parcijalne izvode su:

$$\left.f''_{xx}(x, y)\right|_A, \left.f''_{xy}(x, y)\right|_A, \left.f''_{yx}(x, y)\right|_A, \left.f''_{yy}(x, y)\right|_A$$

ili

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Takodje, umesto oznaka

$$\left.f''_{xx}(x, y)\right|_A, \left.f''_{yy}(x, y)\right|_A$$

mogu se koristiti i oznake

$$\left.f''_{x^2}(x, y)\right|_A, \left.f''_{y^2}(x, y)\right|_A.$$

Parcijalni izvodi $\left.f''_{xy}(x, y)\right|_A$ i $\left.f''_{yx}(x, y)\right|_A$ se nazivaju mešoviti parcijalni izvodi drugog reda.

Umesto oznaka

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

mogu se koristiti i oznake:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Napomena. Od posmatrane funkcije f (ako su obezbedjeni uslovi) možemo kreirati i parcijalne izvode k-tog reda ($k \geq 3$), na analogan način kao što smo formirali parcijalne izvode drugog reda. Oznake za takve parcijalne izvode i rasudjivanje o njima je potpuno analogno sa oznakama i rasudjivanjem kao kod parcijalnih izvoda drugog reda. Parcijalnih izvoda k-tog reda ima 2^k.

PRIMER

Određivanje drugih parcijalnih izvoda.

Odrediti druge parcijalne izvode funkcije:

$$z = \frac{x^2}{2-y}$$

Rešenje. Prvi parcijalni izvodi su:

$$z_x' = \left(\frac{x^2}{2-y}\right)_x' = \frac{2x}{2-y} \quad \wedge\ z_y' = \left(\frac{x^2}{2-y}\right)_y' = \frac{x^2}{(2-y)^2}.$$

Drugi parcijalni izvodi su:

$$z_{xx}'' = \left(z_x'\right)_x' = \left(\frac{2x}{2-y}\right)_x' = \frac{2}{2-y}$$

$$z_{xy}'' = \left(z_x'\right)_y' = \left(\frac{2x}{2-y}\right)_y' = \frac{2x}{(2-y)^2}$$

$$z_{yx}'' = \left(z_y'\right)_x' = \left(\frac{x^2}{2-y}\right)_x' = \frac{2x}{(2-y)^2}$$

$$z_{yy}'' = \left(z_y'\right)_y' = \left(\frac{x^2}{(2-y)^2}\right)_y' = \frac{2x^2}{(2-y)^3}$$

Primećujemo da je $z_{xy}'' = z_{yx}''$ što važi uvek kada su parcijalni izvodi neprekidne funkcije.

STAV O JEDNAKOSTI MEŠOVITIH PARCIJALNIH IZVODA DRUGOG REDA

Pomenuta neprekidnost u prethodnom stavu nije najširi uslov da bi važila prethodna jednakost, ali za naše potrebe ovaj stav će biti dovoljan.

Mešoviti parcijalni izvodi drugog reda neke funkcije $z = f(x, y)$ u nekoj tački A ne moraju biti jednaki u opštem slučaju. Za naš dalji rad će biti od interesa kada su oni jednaki. O tome govori naredni stav.

Stav. Neka je data funkcija $z = f(x, y)$ na oblasti $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka ova funkcija na $\mathcal{D}$ ima parcijalne izvode prvog i drugog reda. Uočimo tačku $A(a_1, a_2) \in D$ i pretpostavimo da su $f''_{xy}(x, y)$ i $f''_{yx}(x, y)$ neprekidni (kao funkcije) na nekom krugu sa centrom u tački A pozitivnog poluprečnika koji ceo pripada oblasti $\mathcal{D}$.
Tada je

$$f''_{xy}(A) = f''_{yx}(A)$$

Napomena. Pomenuta neprekidnost u prethodnom stavu nije najširi uslov da bi važila prethodna jednakost, ali za naše potrebe ovaj stav će biti dovoljan.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 6

Lokalni ekstremi funkcije dve promenljive

STACIONARNE TAČKE

Stacionarne tačke funkcije dve promenljive se određuju iz sistema čije jednačine predstavljaju prvi parcijalni izvodi te funkcije izjednačeni sa nulom.

Neka je data funkcija $z = f(x, y)$ na oblasti $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$. Tada za tačku $M_1 = (x_1, y_1) \in \mathcal{D}$ kažemo da je lokalni minimum, ako postoji barem jedna njena ε -okolina, u oznaci $\mathcal{O}_1$, gde je $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{D}$, takva da je $f(x_1, y_1) \leq f(x, y)$, za svako $(x, y) \in \mathcal{O}_1$. Takođe, za tačku $M_2 = (x_2, y_2) \in \mathcal{D}$ kažemo da je lokalni maksimum, ako postoji barem jedna njena ε -okolina, u oznaci $\mathcal{O}_2$, gde je $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{D}$, takva da je $f(x_2, y_2) \geq f(x, y)$, za svako $(x, y) \in \mathcal{O}_2$. Tačke lokalnih minimuma i maksimuma se nazivaju i lokalni ekstremi funkcije f na $\mathcal{D}$.

U narednom razmatranju ćemo dati jedan postupak za određivanje tačaka lokalnih ekstrema posmatrane funkcije (ako ih ona uopšte ima).

Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definisana na oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Za tačku $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ kažemo da je stacionarna tačka funkcije f ako je rešenje sistema:

$$
\begin{aligned}
f'_x(x, y) &= 0\,, \\
f'_y(x, y) &= 0\,,
\end{aligned}
$$

na $\mathcal{D}$.

Skup rešenja prethodnog sistema označimo sa S. On može biti prazan ili neprazan.

Stav. Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definisana na oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je S skup stacionarnih tačaka za tu funkciju na $\mathcal{D}$. Tada svaka tačka lokalnog ekstrema funkcije na oblasti D pripada skupu S .

Napomena. Iz prethodnog stava možemo zaključiti da ako je $S = \varnothing$, tada funkcija f na $\mathcal{D}$ nema lokalne ekstreme. Međutim, on ne važi u suprotnom smeru. To znači da sve tačke koje pripadaju skupu S ne moraju biti lokalni ekstremi. Stoga se nameće pitanje, ako je skup S neprazan, kako ćemo od svih tačaka koje mu pripadaju, izdvojiti one koje su lokalni ekstremi i kako ćemo znati da li su one lokalni maksimumi ili minimumi. O tome govorimo u nastavku.

SILVESTEROVO PRAVILO

Primena ovog pravila omogućava jednostavno određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije dve promenljive. U slučaju da je $\gamma = 0$, ovo pravilo ne daje odgovor.

Naredno tvrđenje će nam omogućiti da iz skupa S izdvajamo one tačke koje predstavljaju lokalni maksimum ili minimum određene funkcije dve promenljive, uz pretpostavku da je skup S neprazan.

Stav (Silvesterovo pravilo) Neka je funkcija $z = f(x,y)$ definisan na $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je S skup njenih stacionarnih tačaka na $\mathcal{D}$ takav da je $S \neq \varnothing$. Dalje, neka je $M_0(x_0, y_0) \in S$. Takođe, neka je

$$f''_{x^2}(M_0) = A, \quad f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0) = B, \quad f''_{y^2}(M_0) = C.$$

Označimo sa $\gamma = A \cdot C - B^2$. Tada

a) ako je $\gamma > 0$ i $A > 0$, tačka M_0 je lokalni minimum funkcije f na D;

b) ako je $\gamma > 0$ i $A < 0$, tačka M_0 je lokalni maksimum funkcije f na D;

c) ako je $\gamma < 0$, funkcija f u tački M_0 nema lokalnih ekstrema;

d) ako je $\gamma = 0$, za tačku M_0 nemamo nikakav odgovor po pitanju lokalnih ekstrema.

Napomena. 1) Silvesterovo pravilo je veoma značajan rezultat. Postoji opšta verzija ovog pravila za realne funkcije od k realnih promenljivih $(k \geq 2)$, iskazana preko pojma pozitivno definitne forme o kome ovde neće biti reči.

2) Nedostatak ovog pravila je da u slučaju pod d) ne možemo dobiti odgovor o postojanju lokalnog ekstrema funkcije f u posmatranoj tački M_0 . Ovaj nedostatak možemo prevazići analizom znaka drugog diferencijala funkcije f u okolini te tačke M_0 o kome ćemo govoriti u nastavku.

PRIMER

Primena Silvesterovog kriterijuma za određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije.

Odrediti lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y.$$

Rešenje. Iz sistema

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 3 = 0,$$
$$f'_y(x,y) = 6y^2 - 6 = 0,$$

imamo da je $x^2 = 1$ i $y^2 = 1$, pa dobijamo četiri stacionarne tačke: $M_1(1,1)$, $M_2(-1,1)$, $M_3(1,-1)$, i $M_4(-1,-1)$. Odredimo, sada, druge parcijalne izvode, kako bismo proverili da li ove tačke jesu lokalni ekstremi

$$f''_{x^2} = 6x, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{y^2} = -12y.$$

Provera za tačku M_1.
Imamo da je $A = f''_{x^2}(M_1) = 6$, $B = f''_{xy}(M_1) = 0$ i $C = f''_{y^2}(M_1) = -12$. Na osnovu Silvesterovog kriterijuma imamo da je $\gamma = AC - B^2 = -72 < 0$, pa tačka M_1 nije lokalni ekstrem funkcije $f(x,y)$.

Provera za tačku M_2.
Imamo da je $A = f''_{x^2}(M_2) = -6$, $B = f''_{xy}(M_2) = 0$ i $C = f''_{y^2}(M_2) = -12$. Na osnovu Silvesterovog kriterijuma imamo da je $\gamma = AC - B^2 = 72 > 0$, pa tačka M_2 je lokalni maksimum jer je $A < 0$. Tada je $f_{max}(-1,1) = 6$.

Provera za tačku M_3.
Imamo da je $A = f''_{x^2}(M_3) = 6$, $B = f''_{xy}(M_3) = 0$ i $C = f''_{y^2}(M_3) = 12$. Na osnovu Silvesterovog kriterijuma imamo da je $\gamma = AC - B^2 = 72 > 0$, pa tačka M_3 je lokalni minimum jer je $A > 0$. Tada je $f_{min}(1,-1) = -6$.

Provera za tačku M_4.
Imamo da je $A = f''_{x^2}(M_4) = -6$, $B = f''_{xy}(M_4) = 0$ i $C = f''_{y^2}(M_4) = 12$. Na osnovu Silvesterovog kriterijuma imamo da je $\gamma = AC - B^2 = -72 < 0$, pa tačka M_4 nije lokalni ekstrem funkcije $f(x,y)$.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 7

Totalni diferencijal prvog reda

DIFERENCIJABILNOST FUNKCIJE U TAČKI

Kao i kod funkcije jedne promenljive diferencijabilnost funkcije u tački povlači i njenu neprekidnost u toj tački. Obrnuto ne mora da važi.

Neka je data funkcija $z = f(x, y)$ na $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Takođe, neka je $A(a_1, a_2) \in D$. Za funkciju f kažemo da je diferencijabilna u tački A ako je

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2) = \\ &= C \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \rho \cdot \alpha(t),\end{aligned}$$

gde je $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, a Δx i Δy su priraštaji argumenta x, odnosno y, tim redom, pri čemu su C i B dve realne fiksirane konstante i $\alpha(t) \to 0$, kada $t \to 0$.
Iz prethodne formule kojom se zadaje diferencijabilnost funkcije f u tački A, vidimo da kod funkcija dve (iil više) promenljivih nemamo jedinstvenu numeričku veličinu koja će predstavljati njen izvod u tački A, što je bio slučaj kod funkcije jedne promenljive, već za to imamo dva različita kandidata C i B .

Pojam diferencijabilnost funkcije dve promenljive (kao i funkcije jedne promenljive), ravnopravan je sa činjenicom da je grafik posmatrane funkcije u toj tački gladak i za to imamo sledeće geometrijsko tumačenje: za funkciju f u tački A važi prethodna formula ako i samo ako Γ_f u tački $(a_1, a_2), f(a_1, a_2))$ ima jedinstvenu tangentnu ravan. Prva dva sabirka na desnoj strani prethodne formule čine glavni ili linearni deo posmatranog totalnog priraštaja, a treći sabirak njegov zanemarljiv deo. U slučaju funkcije dve promenljive, kao i u slučaju funkcije jedne promenljive, svojstvo diferencijabilnosti dato prethodnom formulom povlači svojstvo neprekidnosti te funkcije u tački A. Obrnuto ne mora da važi.
Stav. Funkcija $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ je diferencijabilna u tački $A(a_1, a_2)$ ako i samo ako u prethodno datoj formuli važi da je

$$C = f'_x(a_1, a_2) \text{ i } B = f'_y(a_1, a_2).$$

Napomena. Na osnovu prethodnog stava možemo zaključiti da diferencijabilna funkcija f u tački A poseduje parcijalne izvode u toj tački. Obrnuto ne mora da važi.

U narednom stavu navodimo dovoljan uslov pod kojim će činjenice iz prethodne napomene i u obrnutom smeru da važe.

Stav. Neka je data funkcija $z = f(x, y), (x, y) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $A(a_1, a_2) \in \mathcal{D}$. Takođe, neka u tački A postoje parcijalni izvodi $f'_x(a_1, a_2)$ i $f'_y(a_1, a_2)$ i neka su neprekidni kao funkcije u tački $A(a_1, a_2)$ i neka su definisani na nekoj kružnoj okolini tačke A oblasti $\mathcal{D}$. Tada je funkcija f diferencijabilna u tački A.

NAPOMENE

Napomene u vezi sa diferencijabilnošću funkcije dve promenljive.

Napomena. Efektivno, redosled provere diferencijabilnosti funkcije dve promenjlive $y = f(x, y)$ u nekoj tački $M_0(x_0, y_0)$ bi bio sledeći:

1) odrede se parcijalni izvodi funkcije f u tački $M_0(x_0, y_0)$;

2) ako su oni neprekidni, funkcija je diferencijabilna u ovoj tački, a ako ovi izvodi ne postoje, tada funkcija nije diferencijabilna u njoj;

3) ako parcijalni izvodi postoje, a prekidni su funkcija može biti diferencijabilna. Tada treba proveriti da li totalni priraštaj funkcije f u tački $M(x_0, y_0)$ može da se predstavi na jedna od sledeća dva načina:

- $\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot h + f_y(x_0, y_0) \cdot g + o\left(\sqrt{h^2 + g^2}\right)$, kad $h \to 0$ i $g \to 0$, ili
- $\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot h + f_y(x_0, y_0) \cdot g + \alpha(h, g) \cdot h + \beta(h, g) \cdot g$, kad $h \to 0$ i $g \to 0$,

Napomena. Govorili smo za funkciju jedne promenljive, da kada određujemo njene lokalne ekstreme, može se desiti da ona nije diferencijabilna u nekoj tački svog domena. Takva tačka je takođe stacionarna tačka (ili kritična tačka) i ona može biti lokalni ekstrem funkcije. Analogno važi i za funkciju dve ili više promenljivih. U ovom slučaju za proveru se ne može koristi Silvesterov kriterijum. To ilustrujemo narednim promerom.

PRIMER

Određivanje lokalnih ekstrema funkcije u slučajevima kada funkcija nije diferencijabilna.

Odrediti lokalne ekstremume funkcije

$$f(x, y) = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}.$$

Rešenje. Primetimo, najpre, da je domen ove funkcije cela realna ravan $\mathbb{R}^2$. Dalje, važi da je

$$f_x' = \frac{-2x}{3(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad f_y' = \frac{-2y}{3(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}},$$

pri čemu je $x^2 + y^2 \neq 0,$ tj. $(x, y) \neq (0, 0).$ Za dobijanje stacionarnih tačaka treba rešiti sistem $\begin{cases} f_x'(x, y) = 0, \\ f_y'(x, y) = 0 \end{cases}$ koji ima jedinstveno rešenje tačku $(0, 0).$ Kako se ova tačka nalazi u domenu funkcije, ona predstavlja jedinu stacionarnu tačku funkcije f. Međutim, ova funkcija ne ispunjava uslov $(x,y)\neq(0,0)$. Dakle, treba da proverimo da li je funkcija f diferencijabilna u ovoj tački. Parcijalne izvode funkcije f u tački (0,0) tražimo po definiciji

$$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{2-h^{\frac{2}{3}}-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}=\begin{cases}-\infty, & h\to 0-\\ +\infty, & h\to 0+\end{cases},$$

tj. u tački $(0,0)$ ne postoje parcijalni izvodi, pa funkcija f tačka $(0,0)$ nije diferencijabilna.

Međutim, važi da je

$$f(x,y)=2-\sqrt[3]{x^2+y^2}3\leq 2=f(0,0),$$

za svako $x,y\in\mathbb{R}$, pa je tačka $(0,0)$ lokalni maksimum funkcije.

TOTALNI DIFERENCIJAL PRVOG REDA U TAČKI

Iz pojma diferencijabilnosti funkcije u tački možemo izvesti pojam totalnog diferencijala u tački.

Iz formule

$$\Delta f=f(a_1+\Delta x,a_2+\Delta y)-f(a_1,a_2)=C\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\rho\cdot\alpha(t),$$

uočimo glavni deo

$$df=f'_x(a_1,a_2)\cdot\Delta x+f'_y(a_1,a_2)\cdot\Delta y.$$

On se naziva totalni diferencijal prvog reda funkcije f u tački A.

Važi da je $\Delta x=dx$ i $\Delta y=dy$, gde su dx i dy diferencijali funkcija $x=g(x)$ i $y=h(y)$ jedne realne promenljive (nezavisno po x i po y), pa totalni diferencijal prvog reda može zapisati i u obliku

$$df=f'_x(a_1,a_2)\cdot dx+f'_y(a_1,a_2)\cdot dy.$$

Poglavlje 8

Totalni diferencijal višeg reda

TOTALNI DIFERENCIJAL DRUGOG REDA

Totalni diferencijal drugog reda se koristi za odrešivanje lokalnih ekstrema.

Posmatrajmo ponovo formulu

$$df = f'_x(a_1, a_2) \cdot dx + f'_y(a_1, a_2) \cdot dy.$$

Možemo smatrati da je df funkcija dve nezavisne promenljive sa domenom u $\mathcal{D}$ i ponovo potražiti totalni diferencijal u tački A. Na taj način dobijemo totalni diferencijal drugog reda funkcije f u tački A, koji označavamo sa d^2f. Tada je

$$\begin{aligned} d^2f &= (df)'_x dx + (df)'_y dy = \\ &= (f''_{xx}dx + f''_{yx}dy)dx + (f''_{xy}dx + f''_{yy}dy)dy = \\ &= f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy}(dx)(dy) + f''_{yy}(dy)^2. \end{aligned}$$

Obično se $(dx)^2$ označava sa dx^2 i $(dy)^2$ sa dy^2, pa prethodno možemo zapisati

$$d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2.$$

Kao što smo već rekli drugi totalni diferencijal funkcije igra važnu ulogu prilikom određivanja da li je neka stacionarna tačka $M_0(x_0, y_0) \in S$ lokalni ekstrem, kada u Silvesterovom pravilu za tu tačku dobijemo da je $\gamma = 0$. Naime, ako je totalni diferencijal drugog reda funkcije f u tački M_0, odnosno

$$d^2f(M_0) = f''_{xx}(M_0)\, dx^2 + 2f''_{xy}(M_0)\, dxdy + f''_{yy}(M_0)\, dy^2.$$

stalnog znaka, nezavisno od dx i dy imamo da:
1) za $d^2f(M_0) > 0$ funkcija u tački M_0 ima lokalni minimum,
2) za $d^2f(M_0) < 0$ funkcija u tački M_0 ima lokalni maksimum,
3) za $d^2f(M_0) = 0$ ne može se ništa zaključiti o lokalnim ekstremima u tački M_0 i analiziranje se mora proširiti na diferencijale višeg reda, o čemu ovde neće biti reči.
Ako je $d^2f(M_0)$ menja znak, zavisno od promene dx i dy , tada početna funkcija nema lokalni ekstrem u tački M_0. Uočimo da u prethodnoj formuli veličine $f''_{xx}(M_0)$, $f''_{xy}(M_0)$ i $f''_{yy}(M_0)$ predstavljaju tim redom veličine A, B i C iz Silvesterovog kriterijuma.

PRIMER

Određivanje lokalnih ekstrema funkcije analizom znaka drugog diferencijala funkcije u tački.

Odrediti lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y.$$

Rešenje. Iz sistema

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 3 = 0,$$
$$f'_y(x,y) = 6y^2 - 6 = 0,$$

imamo da je $x^2 = 1$ i $y^2 = 1$, pa dobijamo četiri stacionarne tačke: $M_1(1,1)$, $M_2(-1,1)$, $M_3(1,-1)$, i $M_4(-1,-1)$. Odredimo, sada, druge parcijalne izvode, kako bismo proverili da li ove tačke jesu lokalni ekstremi

$$f''_{x^2} = 6x, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{y^2} = -12y.$$

Provera za tačku M_1.
Imamo da je $f''_{x^2}(M_1) = 6$, $f''_{xy}(M_1) = 0$ i $f''_{y^2}(M_1) = -12$. Tada je

$$d^2f(M_1) = 6dx^2 - 12dy^2.$$

Ako je $dy = dx$ tada je $d^2f(M_1) = -6dx^2 < 0$, dok za $dy = \frac{1}{2}dx$ imamo $d^2f(M_1) = 3dx^2 > 0$. Kako je $d^2f(M_1)$ promenljivog znaka nema lokalnih ekstremnih vrednosti.
Provera za tačku M_2.
Imamo da je $f''_{x^2}(M_2) = -6$, $f''_{xy}(M_2) = 0$ i $f''_{y^2}(M_2) = -12$, pa je

$$d^2f(M_2) = -6dx^2 - 12dy^2 = -(6dx^2 + 12dy^2) < 0,$$

za $dx^2 + dy^2 \neq 0$, pa imamo lokalni maksimum. Tada je $f_{max}(-1,1) = 6$.
Provera za tačku M_3.
Imamo da je $f''_{x^2}(M_3) = 6$, $f''_{xy}(M_3) = 0$ i $f''_{y^2}(M_3) = 12$, pa je

$$d^2f(M_3) = 6dx^2 + 12dy^2 > 0,$$

za $dx^2 + dy^2 \neq 0$, pa imamo lokalni minimum. Tada je $f_{min}(1,-1) = -6$.
Provera za tačku M_4.
Imamo da je $f''_{x^2}(M_4) = -6$, $f''_{xy}(M_4) = 0$ i $f''_{y^2}(M_4) = 12$, pa je

$$d^2(M_4) = -6dx^2 + 12dy^2.$$

Ako je $dy = dx$ tada je $d^2f(M_4) = 6dx^2 > 0$, dok za $dy = \frac{1}{2}dx$ imamo $d^2f(M_4) = -3dx^2 < 0$. Kako je $d^2f(M_4)$ promenljivog znaka nema lokalnih ekstremnih vrednosti.

Poglavlje 9

Pokazna vežba

ZADATAK 1(5 MINUTA)

Određivanje domena.

Odrediti domen funkcije:

$f(x, y) = \frac{2}{x - y}$.

Rešenje:

Domen zadate funkcije je skup svih tačaka u ravni $\mathbb{R}^2$ koje zadovoljavaju uslov:

$x - y \neq 0$

tj. uslov se može zapisati kao

$x \neq y$

Skup tačaka koje ne zadovoljavaju navedeni uslov čini pravu $y = x$. Dakle, tada imamo:

$D = \left\{ \{x, y\} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\infty \leq x \leq \infty, y \neq x \right\}$.

ZADATAK 2 (10 MINUTA)

Određivanje domena funkcije dve promenljive

Odrediti domen funkcije

$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Rešenje: Domen zadate funkcije je skup svih tačaka u ravni $\mathbb{R}^2$ koje zadovoljavaju uslov da je potkorena veličina $1 - x^2 - y^2 \geq 0$.

Ovaj uslov se može zapisati kao:

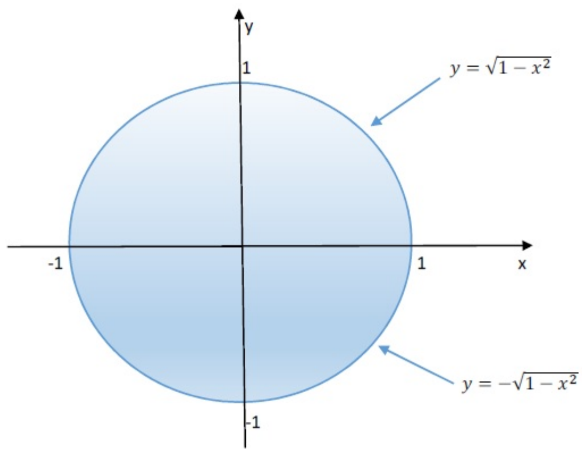
$x^2 + y^2 \leq 1$.

Skup tačaka koje zadovoljavaju navedeni uslov čini kružnicu $x^2 + y^2 = 1$ i njenu unutrašnjost tj.
$D = \left\{ \{x, y\} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$

Skup tačaka u ravni ograničen nekom krivom, pravom i krivom, nekim krivima ili pravama i krivima se u najvećem broju slučajeva može predstaviti i tako što se jednoj od promenljivih u jednačini te krive (ili krivih) i prave (ili pravih) odredete brojne granice u kojima se kreće, a drugoj promenljivoj su, tada, granice u kojima se kreće funkcionalne tj. zavise od ove prve pormenljive. Ponekad je posmatrani skup tačaka u ravni dobijen presekom više krivih ili pravih, pa se u tom slučaju posmatrani skupa tačaka u ravni može predstaviti kao unija više disjunktnih skupova skupova čija unija čini početni skup tačaka. Ovo razbijanje se vrši zbog toga što se se granice početnog skupa tačaka menjaju, jer su dobijene presekom više pravih ili krivih.

U ovom primeru to možemo zapisati na sledeći način (videti sliku):

$\mathrm{D} = \left\{\{\mathrm{x}, \mathrm{y}\} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \le \mathrm{x} \le 1,\ -\sqrt{1-\mathrm{x}^2} \le \mathrm{y} \le \sqrt{1-\mathrm{x}^2}\right\}.$



Slika 9.1 Grafičko predstavljanje domena funkcije [Izvor: Autor].

Svakako, predstavljanje je moglo ići tako što se y predstavlja kao u brojnim granicama, a x u funkcionalnim. Tada imamo:

$\mathrm{D} = \left\{\{\mathrm{x}, \mathrm{y}\} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \le \mathrm{y} \le 1,\ -\sqrt{1-\mathrm{y}^2} \le \mathrm{x} \le \sqrt{1-\mathrm{y}^2}\right\}.$

ZADATAK 3 (15 MINUTA)

Određivanje domena funkcije

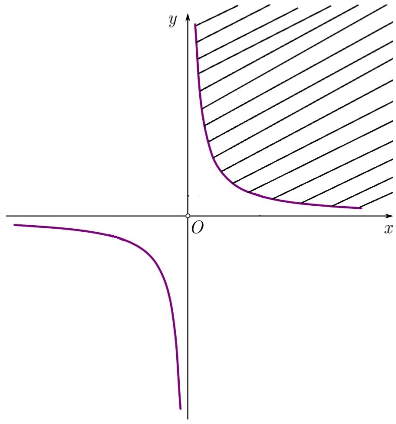
Odrediti domen funkcije

$$z = \sqrt{\ln x + \ln y}.$$

Rešenje. Zbog logaritamske funkcije važi $x > 0$ i $y > 0$, a zbog kvadratnog korena važi da je $\ln x + \ln y \geq 0$, tj. $\ln xy \geq 0$, tj. $xy \geq 1$. Ukupno, imamo da je $y \geq \frac{1}{x}$, za $x > 0$ i $y > 0$. Tada domen ove funkcije predstavlja skup

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \frac{1}{x} \wedge x > 0 \wedge y > 0\right\}.$$

Napomenimo da $xy = 1$ predstavlja jednačinu parabole čije su asimptote koordinatne ose u prvom i trećem kvadrantu. Na osnovu postavljenih uslova, domen funkcije predstavlja deo prvog kvadranta iznad parabole $y = \frac{1}{x}$, uključujući i nju kao graničnu liniju (videti sliku).



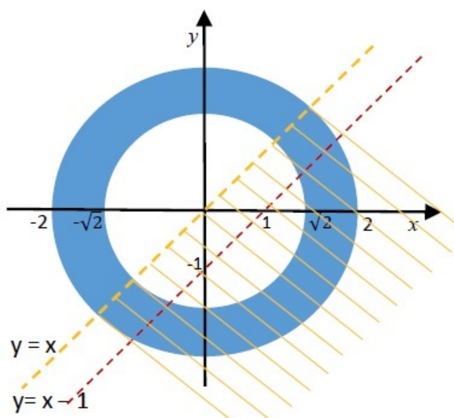
Slika 9.2 Domen funkcije $z = \sqrt{\ln x + \ln y}$ [Izvor: Autor].

Odrediti domen funkcije $z = \dfrac{\arcsin(x^2 + y^2 - 3)}{\ln(x - y)}$.

Rešenje. Domen inverzne trinometrijske funkcije $y = \arcsin x$ je $-1 \le x \le 1$, pa je u našem slučaju $-1 \le x^2 + y^2 - 3 \le 1$, odnosno $2 \le x^2 + y^2 \le 4$. Dalje, zbog logaritamske funkcije imamo da je $x - y > 0$, tj. $x > y$. Na kraju, važi da je $\ln(x - y) \ne 0$, tj. $x - y \ne 1$ odnosno $y \ne x - 1$. Tada je domen ove funkcije skup

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \le x^2 + y^2 \le 4 \land x > y \land y \ne x - 1\right\},$$

koji predstavlja deo ravni unutar kružnog prstena $2 \le x^2 + y^2 \le 4$ (obojen plavom bojom na datoj slici), koji se nalazi ispod prave $y = x$ (ne uključujući i nju), iz koga su izbačene tačke sa prave $y = x - 1$.



Slika 9.3 Domen funkcije $z = \dfrac{\arcsin(x^2 + y^2 - 3)}{\ln(x - y)}$ [Izvor: Autor].

ZADATAK 4 (15 MINUTA)

Ispitivanje postojanja granične vrednosti funkcije u određenoj tački.

Ispitati da li postoje sledeće granične vrednosti

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\sin(xy)}{y}$;

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,+\infty)} \dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$.

Rešenje. a) Uvedimo smenu $x=\rho\cos\theta$ i $y=\rho\sin\theta$, gde je $\rho>0$ i $\theta\in(0,2\pi]$. Tada, dobijamo da $\rho\to 0$, kada $(x,y)\to(0,0)$, dok je θ proizvoljan ugao, takav da je $\theta\in(0,2\pi]$. Nakon uvođenja smene, u polazni limes dobijamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2} = \cos\theta\sin\theta,$$

gde je $\theta\in(0,2\pi]$. Očigledno je da ćemo za različite vrednosti ugla θ dobijati određene vrednosti iz intervala $[-1,1]$. To znaći da granična vrednost posmatrane funkcije u tački $(0,0)$ ne postoji, jer kada prilazimo tački $(0,0)$ iz različitih pravaca (tj. za različite vrednosti ugla θ) dobijamo razne vrednosti iz intervala $[-1,1]$.

b) Možemo pisati $\dfrac{\sin(xy)}{y} = \dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot x$. Važi da je

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1,$$

gde smo uveli smenu $x\cdot y=t$, pri čemu $t\to 0$, kada $(x,y)\to(2,0)$.

Tada imamo

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}\cdot x = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{x\to 2} x = 2.$$

c) Za $x\neq 0$ i $y\neq 0$ imamo da je

$$\begin{aligned} 0 &< \left|\frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}\right| = \frac{|x^3+y^3|}{x^4+y^4} \leq \frac{|x^3|+|y^3|}{x^4+y^4} = \\ &= \frac{|x^3|}{x^4+y^4} + \frac{|y^3|}{x^4+y^4} \leq \\ &\leq \frac{|x^3|}{x^4} + \frac{|y^3|}{y^4} = \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \to 0, \text{ za } x\to+\infty, y\to+\infty. \end{aligned}$$

Tada je

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4} = 0.$$

ZADATAK 5 (5 MINUTA)

Primer neprekidne funkcije u tački $(0, 0)$.

Ispitati neprekidnost date funkcije f u tački $(0, 0)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \{x, y \neq \{0, 0 \\ 0, & \{x, y = \{0, 0 \end{cases}$$

Rešenje: Za $(x, y) \neq (0, 0)$ je

$$|f|x, y|| \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} = g(x, y) \to 0$$

kad $(x, y) \to (0, 0)$. Prema tome, $f(x, y) \to 0$ kada $(x, y) \to (0, 0)$.

Kako je $f(0, 0) = 0$ funkcija je neprekidna u tački $(0, 0)$.

ZADATAK 6 (5 MINUTA)

Ispitivanje neprekidnost funkcije u tački $(0, 0)$.

Ispitati neprekidnost date funkcije f u tački $(0, 0)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^2 - xy^4}{x^2 + y^4}, & \{x, y \neq \{0, 0 \\ 0, & \{x, y = \{0, 0 \end{cases}$$

Rešenje:

Za $(x, y) \neq (0, 0)$ je

$$|f|x, y|| = \left| \frac{yx^2}{x^2 + y^4} - \frac{xy^4}{x^2 + y^4} \right| \leq \frac{|yx^2|}{x^2 + y^4} + \frac{|xy^4|}{x^2 + y^4} \leq \frac{|yx^2|}{x^2} + \frac{|xy^4|}{y^4} = |y| + |x| \to 0$$

kada $(x, y) \to (0, 0)$.

Prema tome, $f(x, y) \to 0$ kada $(x, y) \to (0, 0)$.

Kako je $f(0, 0) = 0$ funkcija je neprekidna u tački $(0, 0)$.

ZADATAK 7 (5 MINUTA)

Ispitivanje neprekidnost funkcije - primena Leme o dva policajca.

Ispitati neprekidnost date funkcije f u tački $(0, 0)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3yx^2}{\sqrt{x^2 + y^4}} \sin \frac{1}{x^2 + y^4}, & \{x, y \neq \{0, 0 \\ 0, & \{x, y = \{0, 0 \end{cases}$$

Rešenje:

Za $(x, y) \neq (0, 0)$ je

$$|f|x, y|| \leq \frac{x^2|x - 3y|}{\sqrt{x^2 + y^4}} \leq \frac{x^2 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^4}}|x - 3y| = \sqrt{x^2 + y^4}|x - 3y| = g(x, y) \rightarrow 0$$

kad $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Prema tome, $f(x, y) \rightarrow 0$ kada $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Kako je $f(0, 0) = 0$ funkcija je neprekidna u tački $(0, 0)$.

Napomena: U ovom zadatku je korišćena nejednakost $\left|\sin \frac{1}{x^2 + y^4}\right| \leq 1$.

ZADATAK 8 (10 MINUTA)

Određivanje prvih parcijalnih izvoda stepenih, eksponecijalnih i racionanih funkcija.

Odrediti prve parcijalne izvode za sledeće funkcije:
$1)\ z = e^{x^2 + y^2 - 5xy + 3x};\quad 2)\ z = \frac{x + y}{x - y};\quad 3)\ z = x^y.$

Rešenje:

$$1)\ z_x' = \left(e^{x^2 + y^2 - 5xy + 3x}\right)_x' = e^{x^2 + y^2 - 5xy + 3x} \cdot \left(x^2 + y^2 - 5xy + 3x\right)_x' = e^{x^2 + y^2 - 5xy + 3x} \cdot (2x - 5y + 3)$$

$$z_y' = \left(e^{x^2 + y^2 - 5xy + 3x}\right)_y' = e^{x^2 + y^2 - 5xy + 3x} \cdot \left(x^2 + y^2 - 5xy + 3x\right)_y' = e^{x^2 + y^2 - 5xy + 3x} \cdot (2y - 5x)$$

$$2)\ z_x' = \left(\frac{x + y}{x - y}\right)_x' = \frac{(x + y)_x'(x - y) - (x + y)(x - y)_x'}{(x - y)^2} = \frac{x - y - x - y}{(x - y)^2} = \frac{-2y}{(x - y)^2}$$

$$z_y' = \left(\frac{x + y}{x - y}\right)_y' = \frac{(x + y)_y'(x - y) - (x + y)(x - y)_y'}{(x - y)^2} = \frac{x - y + x + y}{(x - y)^2} = \frac{2x}{(x - y)^2}$$

$$3)\ z_x' = \left(x^y\right)_x' = y \cdot x^{y - 1}$$

$$z_y' = \left(x^y\right)_y' = x^y \cdot \ln x$$

ZADATAK 9 (10 MINUTA)

Određivanje prvih parcijalnih izvoda logaritaskih, trigonometrijskih i skponencijalnih funkcija.

Odrediti prve parcijalne izvode za sledeće funkcije: $1\Big)\ \ z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$; $2\Big)\ \ z = x\sin y + xe^{\frac{y}{x}}$.

$$1\Bigg)\ \ z_x' = \left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)_x' = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$z_y' = \left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)_y' = \frac{\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$2\Bigg)\ \ z_x' = \left(x\sin y + xe^{\frac{y}{x}}\right)_x' = \sin y + e^{\frac{y}{x}} + xe^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{y}{-x^2} = \sin y + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}$$

$$z_y' = \left(x\sin y + xe^{\frac{y}{x}}\right)_y' = x\cos y + \ \ xe^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{y}{x} = x\cos y + e^{\frac{y}{x}}$$

ZADATAK 10 (5 MINUTA)

Određivanje drugih parcijalnih izvoda

Odrediti druge parcijalne izvode funkcija: $z = e^{xy^2} - x^2y^3$.

Rešenje: Prvi parcijalni izvodi su:

$$z_x' = \left(e^{xy^2} - x^2y^3\right)_x' = y^2e^{xy^2} - 2xy^3,$$

$$z_y' = \left(e^{xy^2} - x^2y^3\right)_y' = 2xye^{xy^2} - 3x^2y^2.$$

Drugi parcijalni izvodi su:

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(y^2 e^{xy^2} - 2xy^3\right)'_x = y^4 e^{xy^2} - 2y^3$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \left(z'_x\right)'_y = \left(y^2 e^{xy^2} - 2xy^3\right)'_y = 2ye^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2} - 6xy^2$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(2xye^{xy^2} - 3x^2y^2\right)'_y = 2xe^{xy^2} + 4x^2y^2e^{xy^2} - 6x^2y$$

ZADATAK 11 (10 MINUTA)

Određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije.

Naći lokalne ekstreme funkcije: $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$

Rešenje: Nađemo prve parcijalne izvode:

$$f'_x = \left(x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y\right)'_x = 2x + y - 3$$

$$f'_y = \left(x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y\right)'_y = x + 2y - 6$$

Rešimo sistem $f'_x = 0, \quad f'_y = 0$

$$2x + y - 3 = 0$$
$$x + 2y - 6 = 0$$

Rešenje sistema je $x = 0, \quad y = 3$ i to je stacionarna tačka funkcije. Da bismo ispitali da li je stacionarna tačka minimuna ili maksimuma (ili ni jedno ni drugo) potrebni su nam drugi parcijalni izvodi:

$$f''_{xx} = \left(f'_x\right)'_x = (2x + y - 3)'_x = 2$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \left(f'_x\right)'_y = (2x + y - 3)'_y = 1$$

$$f''_{yy} = \left(f'_y\right)'_y = (x + 2y - 6)'_y = 2$$

$A = f''_{xx}(0, 3) = 2, \qquad B = f''_{xy}(0, 3) = f''_{yx}(0, 3) = 1, \qquad C = f''_{yy}(0, 3) = 2,$

$\gamma = AC - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0 \;\; \text{i} \;\; A > 0.$

Na osnovu Silvesterovog kriterijuma dobijamo da funkcija ima lokalni minimum u tački (0,3).

$f_{min} = f(0, 3) = \;\; 0^2 + 0 \cdot 3 + 3^2 - 3 \cdot 0 - 6 \cdot 3 = -9.$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youttube-a: lokalne ekstremen vrednosti

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

ZADATAK 12 – 1. DEO (20 MINUTA)

Određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije – rešavanje sistema, određivanje stacionarne tačke i drugih parcijalnih izvoda.

Naći lokalne ekstreme funkcija: $f(x, y) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right)$.

Rešenje. Nađemo prve parcijalne izvode:

$$f_x' = \left(e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right)\right)_x' = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right) + e^{x-y} \cdot 2x = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2 + 2x\right)$$

$$f_y' = \left(e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right)\right)_y' = -e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right) + e^{x-y} \cdot (-4y) = e^{x-y}\left(-x^2 + 2y^2 - 4y\right)$$

Dobijamo sistem:

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 2y^2 + 2x = 0 \\ -x^2 + 2y^2 - 4y = 0 \end{aligned}\right\} +$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2y^2 + 2x = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2y^2 + 2x = 0 \\ x = 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4y^2 - 2y^2 + 4y = 0 \\ x = 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y(y+2) = 0 \\ x = 2y \end{aligned}$$

Rešenja sistema su: $x = 0, \quad y = 0$ i $x = -4, \quad y = -2$. Dakle, tačke $M(0, 0)$ и $N(-4, -2)$ su stacionarne tačke funkcije.

Drugi parcijalni izvodi

$$f_{xx}'' = \left(f_x'\right)_x' = \left(e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2 + 2x\right)\right)_x' = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2 + 2x\right) + e^{x-y}(2x+2) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2 + 4x + 2\right)$$

$$f_{xy}'' = f_{yx}'' = \left(f_x'\right)_y' = \left(e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2 + 2x\right)\right)_y' = -e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2 + 2x\right) + e^{x-y}(-4y) = -e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2 + 2x + 4y\right)$$

$$f''_{yy} = \left(f'_y\right)'_y = \left(e^{x-y}\left(-x^2+2y^2-4y\right)\right)'_y = -e^{x-y}\left(-x^2+2y^2-4y\right)+e^{x-y}(4y-4) = e^{x-y}\left(x^2-2y^2+8y-4\right)$$

ZADATAK 12 – 2. DEO

Određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije – primena Silvesterovog kriterijuma

Odredimo vrednosti drugih parcijalnih izvoda u tački M.

$$A = f''_{xx}(0,0) = e^{0-0}\left(0^2-2\cdot 0^2+4\cdot 0+2\right)=2, \qquad B = f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0) = 0, \qquad C = f''_{yy}(0,0) = -4.$$

$$\gamma = AC - B^2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8 < 0.$$

Zaključujemo da tačka $M(0,0)$ nije tačka ekstremuma.

Odredimo vrednosti drugih parcijalnih izvoda u tački N.

$$A = f''_{xx}(-4,-2) = e^{-4+2}\left((-4)^2-2\cdot(-2)^2+4\cdot(-4)+2\right) = -6e^{-2}$$

$$B = f''_{xy}(-4,-2) = f''_{yx}(-4,-2) = -e^{-4+2}\left((-4)^2-2\cdot(-2)^2+2\cdot(-4)+4\cdot(-2)\right) = 8e^{-2}$$

$$C = f''_{yy}(-4,-2) = e^{-4+2}\left((-4)^2-2\cdot(-2)^2+8\cdot(-2)-4\right) = -12e^{-2}$$

$$\gamma = AC - B^2 = (72-64)e^{-2} = 8e^{-2} > 0.$$

Kako je

$$A = f''_{xx}(-4,-2) = -6e^{-2} < 0,$$

zaključujemo da je tačka $N(-4,-2)$ tačka lokalnog maksimuma koji iznosi

$$f_{max} = f(-4,-2) = e^{-4+2}\left((-4)^2-2\cdot(-2)^2\right) = 8e^{-2}.$$

ZADATAK 13 – 1. DEO (20 MINUTA)

Određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije – rešavanje sistema, određivanje stacionarne tačke i određivanje drugih parcijalnih izvoda.

Odredi lokalne ekstremume zadate funkcije $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\left(x^2+2y^2\right)$.

Rešenje: Određivanje stacionarnih tačaka

$$f_x' = 0$$
$$f_y' = 0$$

$$f_x' = e^{-x^2-y^2}(-2x)\left(x^2+2y^2\right) + e^{-x^2-y^2}\left(x^2+2y^2\right)(2x) = e^{-x^2-y^2}\cdot 2x\cdot\left(1-x^2-2y^2\right) = 0$$

$$f_y' = e^{-x^2-y^2}(-2y)\left(x^2+2y^2\right) + e^{-x^2-y^2}\left(x^2+2y^2\right)(4y) = e^{-x^2-y^2}\cdot 2y\cdot\left(2-x^2-2y^2\right) = 0$$

$$2x\cdot\left(1-x^2-2y^2\right) = 0 \qquad (1)$$

$$2y\cdot\left(2-x^2-2y^2\right) = 0 \qquad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \quad x=0 \quad \vee \quad 1-x^2-2y^2=0$$

$$(2) \Rightarrow \quad y=0 \quad \vee \quad 2-x^2-2y^2=0$$

I slučaj	II slučaj	III slučaj	IV slučaj
$x=0$	$x=0$	$y=0$	$x^2+2y^2=2$
$y=0$	$x^2+2y^2=2$	$x^2+2y^2=1$	$x^2+2y^2=1$
$S_1(0,0)$	$y=\pm 1$	$x=\pm 1$	nema rešenja
$S_2(0,-1)$	$S_4(-1,0)$		
$S_3(0,1)$	$S_5(1,0)$		

Odredimo druge parcijalne izvode

$$f_{xx}'' = e^{-x^2-y^2}\cdot 2x\cdot\left(1-x^2-2y^2\right)\cdot(2x) + e^{-x^2-y^2}\cdot 2\cdot\left(1-x^2-2y^2\right) + e^{-x^2-y^2}\cdot 2x\cdot(-2x)$$

$$f_{xy}'' = e^{-x^2-y^2}\cdot 2x\cdot\left(1-x^2-2y^2\right)\cdot(-2y) + e^{-x^2-y^2}\cdot 2x\cdot(-4y)$$

$$f_{yy}'' = e^{-x^2-y^2}\cdot 2y\cdot\left(2-x^2-2y^2\right)\cdot(-2y) + e^{-x^2-y^2}\cdot 2\cdot\left(2-x^2-2y^2\right) + e^{-x^2-y^2}\cdot 2y(-4y)$$

ZADATAK 13 – 2. DEO

Određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije – primena Silvesterovog kriterijuma.

Primenjujemo Silvesterov kriterijum:

Tačka $S_1(0,0)$

$A = 2, \quad B = 0, \quad C = 4$

$\gamma = 8 > 0.$

Kako je

$A = f''_{xx}(0, 0) = 2 > 0.$

Tačka $S_1(0, 0)$ je tačka lokalnog minimuma i $f_{min}(0, 0) = 0.$

Tačka $S_2(0, -1)$

$A = -2\frac{1}{e}, \quad B = 0, \quad C = -8\frac{1}{e},$

$\gamma = \frac{16}{e^2} > 0.$

Kako je

$A = f''_{xx}(0, -1) = -2\frac{1}{e} < 0.$

Tačka $S_2(0, -1)$ je tačka lokalnog maksimuma i $f_{max}(0, -1) = 2e^{-1}.$

Tačka $S_3(0, 1)$

$A = -2\frac{1}{e}, \quad B = 0, \quad C = -8\frac{1}{e},$

$\gamma = \frac{16}{e^2} > 0.$

Kako je

$A = f''_{xx}(0, -1) = -2\frac{1}{e} < 0.$

Tačka $S_3(0, 1)$ je tačka lokalnog maksimuma i $f_{max}(0, 1) = 2e^{-1}.$

Tačka $S_4(-1, 0)$

$A = -4\frac{1}{e}, \quad B = 0, \quad C = 2\frac{1}{e},$

$\gamma = \frac{-8}{e^2} < 0.$

Tačka $S_4(-1, 0)$ nije tačka lokalnog ekstremuma.

Tačka $S_5(1, 0)$

$A = -4\frac{1}{e}, \quad B = 0, \quad C = 2\frac{1}{e},$

$\gamma = \frac{-8}{e^2} < 0.$

Tačka $S_5(1, 0)$ nije tačka lokalnog ekstremuma.

Poglavlje 10

Zadaci za samostalni rad

ZADACI ZA VEŽBU - 1 DEO

Zadaci koje studenti treba da provežbaju.

Odrediti domen funkcije

$z = x - \sqrt{x^2 - y^2 - 5}$ rešenje: $x^2 - y^2 \geq 5$

Odrediti domen funkcije

$z = \frac{2}{y} + x^2 + 3\ln y - y - 6x + 9$ rešenje: $\{\{x, y\} : x \in R, \quad y > 0\}$

Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \{x, y = (0, 0) \end{cases}$$ rešenje: neprekidna

Dokazati da funkcija $z = \sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$ zadovoljava jednačinu $2x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

Izračunati vrednost parcijalnih izvoda prvog i drugog reda u tački $M(0, 0)$ funkcije $z = x\sin y - x^2y^3 + x - 3y\cos 2x - 1$.

rešenje: $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}(0, 0) = 0.$

$\mathbf{Zadatak}$ Odrediti prve i druge parcijane izvode sledećih funkcija:
a) $z = x^3 + y^3 - 3xy$
b) $z = \frac{x-y}{x+y}$
c) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$
d) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$
e) $z = x^y$

Vreme izrade: 1. 5 minuta; 2. 5 minuta; 3. 10 minuta; 4. 10 minuta; 5. 10 minuta; 6. 10 minuta; 7. a) do e) po 10 minuta

ZADACI ZA VEŽBU - 2 DEO

Zadaci koje studenti treba da dodatno provežbaju - određivanje lokalni ekstremi.

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

rešenje: $z_{min}\left(1, \frac{1}{2}\right) = 4$

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = \frac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.

rešenje: $z_{max}(1, -1) = \sqrt{3}$

Zadatak Data je funkcija $z(x, y) = -2x^2 - 4y^2 + 4x + 2y - 4xy - 12$. Odrediti lokalne ekstreme ove funkcije i vrednost funkcije u tim tačkama.

Rezultat. $z_{max}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{35}{2}$.

1. 15 minuta: 2. 15 minuta; 3. minuta

Zaključak za lekciju 04

REALNA FUNKCIJA DVE REALNE PROMENLJIVE

Domen, granična vrednost, neprekidnost, diferencijabilnost, parcijalni izvodi prvog i višeg reda, totalni diferencijal prvog i višeg reda, lokalni ekstremi funkcije dve promenljive.

U ovoj lekciji smo se upoznali sa realnom funkcijom dve realne promenljive, i ovladali pojmovima: granična vrednost, neprekidnosti, diferencijabilnosti, parcijalni izvodi prvog i višeg reda, totalni diferencijal prvog i višeg reda, lokalni ekstremumi, realne funkcije dve realne promenljive. Uvedeni pojmovi se mogu proširiti i analogno važe za funkciju od tri ili više promenljivih.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. Rale Nikolić, Nada Damljanović, Matematika 2 – zbirka zadataka, Fakultet tehničkih nauka, Čačak, 2016. godina
4. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.

UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Realna funkcija dve realne promenljive – Uslovni i apsolutni ekstremi. Implicitno zadata funkcija. Kanoničke jednačine površi drugog reda

Lekcija 07

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 07

REALNA FUNKCIJA DVE REALNE PROMENLJIVE – USLOVNI I APSOLUTNI EKSTREMI. IMPLICITNO ZADATA FUNKCIJA. KANONIČKE JEDNAČINE POVRŠI DRUGOG REDA

Uvod

UVOD

U ovoj lekciji ćemo se baviti realnim funkcijama dve realne promenljive.

U ovoj lekciji ćemo obraditi sledeće:

- Tejlorov polinom funkcije dve promenljive,
- Uslovni ekstremi funkcije dve promenljive,
- Apsolutni ekstremi – određivanje najmanje i najveće vrednost funkcije dve promenljive na zatvorenoj oblasti,
- Implicitno zadate funkcije,
- Tangentna ravan i normala površi,
- Kanoničke jednačine površi drugog reda.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Tejlorov polinom funkcije dve promenljive

TOTALNI DIFERENCIJAL n -TOG REDA

Pojam totalnog diferencijala se koristi prilikom definisanja Tejlorovog polinoma za realnu funkciju dve realne promenljive.

Pretpostavimo da je $z = f(x,y)$ realna funkcija dve promenljive definisana u nekoj $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Ako pretpostavimo da u toj oblasti posmatrana funkcija ima sve moguće parcijalne izvode, tada su svi oni neprekidni u oblasti D, pa funkcija u posmatranoj oblasti ima sve moguće diferencijale $d^n f, n = 0,1,2,\ldots$ Stoga, za prozvoljnu fiksiranu tačku $M(x_0,y_0) \in D$ i prozvoljnu tačku $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, možemo da uočimo n-ti diferencijal u tački M , u oznaci $d^n f(M), n = 0,1,2,\ldots$ definisan sa

$$d^0 f(M) = f(M),$$

$$d^1 f(M) = f'_x(M)(x-x_0) + f'_y(M)(y-y_0),$$

$$d^2 f(M) = f''_{xx}(M)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(M)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{yy}(M)(y-y_0)^2,$$

$$\vdots$$

$$d^n f(M) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n)}_{\underbrace{x\ldots x}_{n-k}\underbrace{y\ldots y}_{k}}(M)(x-x_0)^{n-k}(y-y_0)^k.$$

Kako je D otvoren skup tačaka i tačka $M_1(x_1,y_1) \in D$, postoji neko $\varepsilon > 0$, tako da cela okolina

$$U_\varepsilon(M_1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x - {x_1}^2 + y - {y_1}^2} < \varepsilon\right\}$$

sadržana u oblasti D . Dalje, za proizvoljne tačke $P(x_1,y_1$) i $Q(x_2$, y_2) u ravni $\mathbb{R}^2$ označimo sa (P,Q) otvorenu duž koja spaja te tačke i definišimo je na sledeći način

$$(P,Q) = \{(x_1,y_1) + t\cdot(x_2-x_1,y_2-y_1) \mid 0 < t < 1\}.$$

TEJLOROV POLINOM

Datim stavom se uvodi Tejlorova formula za funkciju dve promenljive.

Stav. Ako funkcija $z = f(x,y)$ ima sve potrebne parcijalne izvode na oblasti D, tačka $M_0(x_0,y_0) \in D$ i tačka $M(x,y) \in U_\varepsilon(M_0)$, tada postoji izvesna tačka A na otvorenoj duži ($M_0M)$, takva da važi

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(M_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(A)}{(n+1)!}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$.

Pritom, za svako $n = 0,1,2,\ldots$ imamo da je

$$d^{n+1} f(A) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1)}_{\underbrace{x\ldots x}_{n+1-k}\underbrace{y\ldots y}_{k}}(A)(x-x_0)^{n+1-k}(y-y_0)^k.$$

Polinom stepena $n \in \mathbb{N}$ oblika

$$T_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(M_0)}{k!},$$

naziva se Tejlorov polinom n-tog stepena koji odgovara funkciji $z = f(x,y)$ i fiksiranoj tački $M_0(x_0,y_0) \in D$.

Može se uočiti da je

$$T_n(M_0) = f(x_0,y_0), \quad \frac{\partial T_n(M_0)}{\partial x} = f'_x(x_0,y_0), \quad \frac{\partial T_n(x,y)(M_0)}{\partial y} = f'_y(x_0,y_0), \ldots$$

ANALITIČKA FUNKCIJA

Sve elementarne funkcije dve promenljive su analitičke funkcije u svojim oblastima definisanosti, tako da se u praksi najčešće srećemo sa analitičkim funkcijama.

Kaže se da je funkcija $f(x,y)$ analitička funkcija u oblasti D ukoliko za bilo koju tačku $M_0(x_0,y_0) \in D$ postoji neka okolina $U_\varepsilon(M_0)$ takva da za proizvoljnu tačku $(x,y) \in U_\varepsilon(M_0)$ izraz $R_n(x,y) = f(x,y) - T_n(x,y) \to 0$, kada $n \to \infty$, tj. $T_n(x,y) \to f(x,y)$, kada $n \to \infty$. Prethodni uslov označava da se funkcija $z = f(x,y)$ u nekoj okolini tačke $M_0(x_0,y_0)$ može razviti u tzv. Tejlorov red, tj. da za svako $(x,y) \in U_\varepsilon(M_0)$ važi jednakost

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k f(M_0)}{k!}.$$

Dakle, po definiciji svaka funkcija dve promenljive $z = f(x,y)$ je analitička funkcija u nekoj oblasti D, ako se u nekoj okolini proizvoljne tačke $(x_0,y_0) \in D$ može razviti u red dat prethodnom formulom. Ako se posmatra tačka $M_0(0,0) \in D$, tada se odgovarajući Tejlorov red naziva Maklorenov red, a odgovarajući razvoj analitičke funkcije $z = f(x,y)$ u tački $M_0(0,0) \in D$ se naziva Maklorenov razvoj i on glasi

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k f(0,0)}{k!}.$$

PRIMER

Određivanje Tejlorovog polinoma.

Razviti funkciju $z = x^{y+2} (x > 0, x \neq 1)$ u okolini tačke $(1,3)$ u Tejlorov polinom drugog stepena.

Rešenje. Prvo ćemo odrediti parcijalne izvode funkcije $z = x^{y+2} (x > 0, x \neq 1)$ prvog i drugog reda. Tada imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y+2)x^{y+1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^{y+2} \ln x,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (y+2)(y+1)x^y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^{y+2} \ln^2 x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y+1}(1 + (y+2)\ln x),$$

pa dobijamo da je

$$f(1,3) = 1, \quad \frac{\partial f(1,3)}{\partial x} = 5, \quad \frac{\partial f(1,3)}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f(1,3)}{\partial x^2} = 20, \quad \frac{\partial^2 f(1,3)}{\partial x \partial y} = 1 \quad \frac{\partial^2 f(1,3)}{\partial y^2} = 0.$$

Tada Tejlorov polinom drugog reda glasi

$$x^{y+2} = 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + (x-1)(y-3) + R_2.$$

Veličina R_2 predstavlja grešku koja se čini prilikom razvoja početne funkcije u polinom.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 2

Uslovni ekstremi funkcije dve promenljive

LAGRANŽEV METOD MULTIPLIKATORA

Određivanje uslovnih ekstrema primenom Lagranževe metode je bazirano na znaku drugog diferencijala u tački koja je kandidat da u njoj bude lokalni ekstrem.

Neka je funkcija $z = f(x,y)$ definisana na oblasti $E \subseteq \mathbb{R}^2$ i uočimo zatvorenu oblast $\overline{E} = E \cup \partial E$. Takođe, neka je implicitno zadata funkcija $\varphi(x,y) = 0$ u $\overline{E}$. Pretpostavimo da funkcija f ima neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda, kao i funkcija φ. Posmatrajmo sledeću funkciju

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y).$$

Funkcija F naziva se Lagranževa funkcija sa multiplikatorom λ i ona nam je osnov za izračunavanje uslovnih ekstrema funkcije f, pri datom uslovu $\varphi(x,y) = 0$ na datoj oblasti. Lagranževa funkcija zavisi od tri nepoznate i to x, y i λ. Veličina λ je novouvedena nepoznata koju nazivamo multiplikator. Određivanja uslovnih ekstrema funkcije f, pri uslovu $\varphi(x,y) = 0$ se svodi na određivanje lokalnih ekstrema funkcije F.

Prvo formirajmo sistem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0, \end{cases} \quad \text{odnosno} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo kandidate za uslovne ekstreme. Tada, za svaki od tih kandidata sprovedemo selekciju po pitanju analize znaka d^2F. U slučaju da je tačka $M(x_0, y_0, \lambda)$ lokalni ekstrem za F, tada je tačka $M(x_0, y_0)$ uslovnog ekstrema funkcije f pri uslovu $\varphi(x,y) = 0$ na $\overline{E}$. U zavisnosti od znaka drugog diferencijala u tački $M(x_0, y_0)$ za uslovni ekstrem imamo dve mogućnosti:

1° za $d^2F(M_0) > 0$ funkcija u tački M_0 ima uslovni minimum,

2° za $d^2F(M_0) < 0$ funkcija u tački M_0 ima uslovni maksimum.

Ponekad je potrebno odrediti dodatne veze između dx i dy diferencijacijom uslova $\varphi(x,y)=0$, kako bi se odredio znak drugog diferencijala u tački $M_0(x_0,y_0)$.

Napomena. Za $d^2F(M_0)=0$ ne može se ništa zaključiti ouslovnim ekstremima u tački M_0 i analiziranje se mora proširiti na diferencijale višeg reda, o čemu ovde neće biti reči.

Napomena. U slučaju da je funkcija f realna funkcija od tri ili više promenljivih, potpuno istom metodologijom možemo tražiti uslovne ekstreme. Pritom,možemo imati više od jednog uslova, pri čemu je njihov broj uvek manji od broja promenljivih u polaznoj funkciji.

PRIMER – 1. DEO

Određivanje uslovnih ekstrema primenom Lagranževe metode – određivanje stacionarnih tačaka i drugih parcijalnih izvoda.

Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije $f(x,y)=x\cdot y$, pri uslovu $x^2+y^2=2$.

Rešenje. Formirajmo Lagranževu funkciju

$$F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x^2+y^2-2).$$

Tada imamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}&=y+2\lambda x=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}&=x+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2&=2.\end{aligned}$$

Sada imamo da je

$$\left.\begin{aligned}y&=-2\lambda x,\\ x+2\lambda(-2\lambda x)&=0,\\ x^2+y^2&=2.\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\quad\left.\begin{aligned}y&=-2\lambda x,\\ x(1-4\lambda^2)&=0,\\ x^2+y^2&=2.\end{aligned}\right\}$$

Poslednji sistem se raspada na sledeća dva sistema:

$$\left.\begin{aligned}x&=0,\\ y&=0,\\ 0&=2.\end{aligned}\right\}\quad\vee\quad\left.\begin{aligned}y&=-2\lambda x,\\ (1-4\lambda^2)&=0,\\ x^2+y^2&=2.\end{aligned}\right\}$$

Prvi sistem je nemoguć, a iz druge jednačine drugog sistema dobijamo da je $\lambda_{1/2}=\pm\frac{1}{2}$.

<u>Za $\lambda=-\frac{1}{2}$</u> : iz prve jednačine poslednjeg sistema imamo da je $y=x$, i zamenom ovoga u trećoj jednačini dobijamo da je $x^2=1$, tj. $x=\pm1$. Tada dobijamo dve stacionarne tačke

$M_1(1,1)$ i $M_2(-1,-1)$ za $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ odnosno $M_1'\left(1,1,-\dfrac{1}{2}\right)$ i $M_2'\left(-1,-1,-\dfrac{1}{2}\right)$.

Za $\lambda=\dfrac{1}{2}$: iz prve jednačine poslednjeg sistema imamo da je $y=-x$, i zamenom ovoga u trećoj jednačini dobijamo da je $x^2=1$, tj. $x=\pm 1$. Tada dobijamo dve stacionarne tačke $M_3(1,-1)$ i $M_4(-1,1)$ za $\lambda=\dfrac{1}{2}$ odnosno $M_3'\left(1,-1,\dfrac{1}{2}\right)$ i $M_4'\left(-1,1,\dfrac{1}{2}\right)$.

Sada određujemo

$$F''_{x^2}=2\lambda,\quad F''_{xy}=1,\quad F''_{y^2}=2\lambda.$$

Dalje, imamo da je

$$d^2F=2\lambda dx^2+2dxdy+2\lambda dy^2.$$

PRIMER – 2. DEO

Određivanje uslovnih ekstrema primenom Lagranževe metode – diskusija da li dobijene stacionarne tačke jesu uslovni ekstremi.

U tačkama $M_1'\left(1,1,-\dfrac{1}{2}\right)$ i $M_2'\left(-1,-1,-\dfrac{1}{2}\right)$ imamo da je

$$d^2F(M_1')=d^2F(M_2')=-dx^2+2dxdy-dy^2=-(dx-dy)^2\le 0, \qquad (*)$$

odakle ne možemo izvesti zaključak o lokalnim ekstremnim vrednostima. Kako je $x^2+y^2=2$ imamo da je $2xdx+2ydy=0$, tj. $xdx+ydy=0$.

Za tačku $M_1(1,1)$ tada iz $xdx+ydy=0$ imamo $1\cdot dx+1\cdot dy=0$, tj. $dy=-dx\neq 0$. Ubacujući prethodno u $(*)$ imamo da je

$$d^2F(M_1')=-4dx^2<0,$$

Dakle, tačka $M_1(1,1)$ je lokalni uslovni maksimum funkcije $f(x,y)$.

Za tačku $M_2(-1,-1)$ tada iz $xdx+ydy=0$ imamo $(-1)\cdot dx+(-1)\cdot dy=0$, tj. $dy=-dx\neq 0$. Ubacujući prethodno u $(*)$ imamo da je

$$d^2F(M_2')=-4dx^2<0,$$

Dakle, tačka $M_2(-1,-1)$ je lokalni uslovni maksimum funkcije $f(x,y)$.
U tačkama $M_3'\left(1,-1,\dfrac{1}{2}\right)$ i $M_4'\left(-1,1,\dfrac{1}{2}\right)$ imamo da je

$$d^2F(M_3')=d^2F(M_4')=dx^2+2dxdy+dy^2=(dx+dy)^2\ge 0, \qquad (**)$$

odakle ne možemo izvesti zaključak o lokalnim ekstremnim vrednostima. Kako je $x^2+y^2=2$ imamo da je $2xdx+2ydy=0,$ tj. $xdx+ydy=0.$

Za tačku $M_3(1,-1)$ tada iz $xdx+ydy=0$ imamo $1\cdot dx+(-1)\cdot dy=0,$ tj. $dy=dx\neq 0.$ Ubacujući prethodno u $(**)$ imamo da je

$$d^2F(M_3')=4dx^2>0,$$

Dakle, tačka $M_3(1,-1)$ je lokalni uslovni minimum funkcije $f(x,y).$

Za tačku $M_4(-1,1)$ tada iz $xdx+ydy=0$ imamo $(-1)\cdot dx+1\cdot dy=0,$ tj. $dy=dx\neq 0.$ Ubacujući prethodno u $(**)$ imamo da je

$$d^2F(M_4')=4dx^2>0,$$

Dakle, tačka $M_4(-1,1)$ je lokalni uslovni minimum funkcije $f(x,y).$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

METOD ELIMINACIJE

U nekim situacijama određivanja uslovnih ekstrema funkcije dve promenljive se može svesti na određivanje lokalnih ekstrema funkcije jedne promenljive.

U nekim situacijama određivanja uslovnih ekstrema funkcije dve promenljive se može svesti na određivanje lokalnih ekstrema funkcije jedne promenljive. To je slučaj kada se iz datog uslova može jedna promenljiva izraziti preko one druge, a onda se njenom eliminacijom iz date funkcije, ova svodi na funkciju jedne promenljive. Prethodno rečeno ilustrujemo sledećim primerom.

Primer. Naći lokalne ekstreme funkcije $f(x,y)=2x^2+y^2,$ pri uslovu $x-y+4=0.$

Rešenje. Iz uslova $x-y+4=0$ imamo $y=x+4.$ Tada funkcija $f(x,y)=2x^2+y^2,$ posle eliminacije promenljive y iz nje postaje

$$f(x)=2x^2+(x+4)^2=3x^2+8x+16.$$

Sada, potražimo $f'(x) = 6x + 8$, pa je moguća lokalna ekstremna vrednost za $f'(x) = 0$ i to je tačka $x_0 = -\frac{4}{3}$. Kako je $f''(x) = 6 > 0$, posmatrana funkcija $f(x, y)$ ima lokalni minimum u tački $M_0\left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$, gde je $y_0 = x_0 + 4 = \frac{8}{3}$.

Napomena. Funkcija dve promenljive može imati najviše jedan uslov tako da se ovaj metod kod njih često primenjuje, pod uslovom da je moguće y eksplicitno izraziti u funkciji od x ili obrnuto.

Napomena. Primer koji smo rešavali Lagranževom metodom i gde je trebalo odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije $f(x, y) = x \cdot y$, pri uslovu $x^2 + y^2 = 2$ se takođe može rešavati metodom eliminacije. Tada treba voditi računa da iz $x^2 + y^2 = 2$ imamo da je $y = \pm\sqrt{2 - x^2}$, tako da u jednom slučaju treba odrediti lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x \cdot \sqrt{2 - x^2}$, a u drugom treba odrediti lokalne ekstreme funkcije $f(x) = -x \cdot \sqrt{2 - x^2}$.

Poglavlje 3

Apsolutni ekstremi

POSTUPAK ODREĐIVANJA APSOLUTNIH EKSTREMA NA ZATVORENOJ OBLASTI

Od lokalnih ekstrema unutar posmatrane oblasti i uslovnih ekstremima sa granice te oblasti bira se, najveća, odnosno najmanja vrednost.

Postupak određivanja apsolutnih ekstrema (najveću i najmanju vrednost) neke funkcije $z = f(x, y)$ u nekoj zatvorenoj oblasti $\overline{E} \subseteq \mathbb{R}^2$ ($\overline{E} = E \cup \partial E,$)je sledeći:

- Odredimo sve moguće stacionarne tačke funkcije $z = f(x, y)$ i izdvojimo one koje se nalaze unutar otvorene oblasti E i izračunamo vrednosti funkcije $z = f(x, y)$ u tako dobijenim tačkama.

- Posebno na granici te oblasti E (tj. na ∂E) , odredimo ekstremne vrednosti funkcije $z = f(x, y)$ i izračunamo vrednosti funkcije $z = f(x, y)$ u tako dobijenim tačkama – dakle, treba odrediti sve uslovne ekstreme funkcije $z = f(x, y)$, a uslov je da se oni nalazi na granici te oblasti koja je sastavljena od jedne ili više krivih oblika $\varphi(x, y) = 0,$

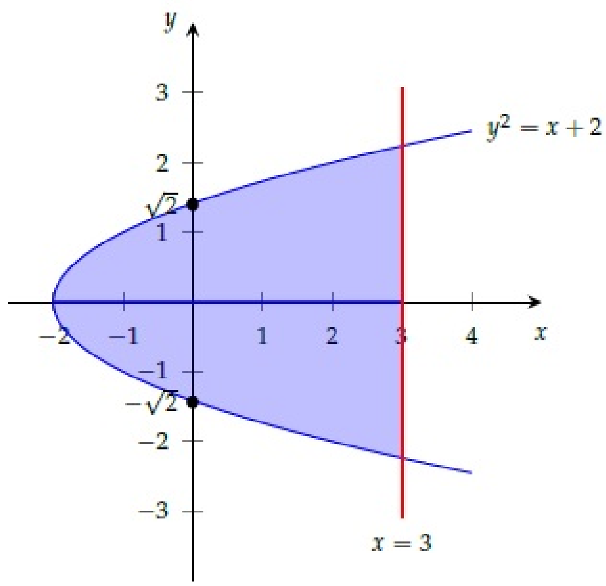
- Na kraju od svih ovako dobijenih vrednosti za funkciju $z = f(x, y)$, izdvojimo najveću, odnosnu najmanju vrednost funkcije na toj zatvorenoj oblasti $\overline{E}$. Svakako, takvih vrednosti može biti i više od jedne.

PRIMER – 1. DEO

Grafičko predstavljanje oblasti.

Odrediti najmanju i najveću vrednost funkcije $z(x, y) = 2y^2 - x^2 + 2x + 1$ na oblasti $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 2 \leq x \leq 3\}$.

$\mathbf{Rešenje.}$ Najpre ćemo grafički predstaviti zatvorenu oblast $\overline{E}$. Ona je ograničena kvadratnom parabolom $x = y^2 - 2$ i pravom $x = 3$. Zatvorena oblast $\overline{E}$ je šrafirana na datoj slici, koja uključuje i njenu granicu određenu delom parabolom $x = y^2 - 2$ (crvena linija na slici) i delom prave $x = 3$ (plava linija na slici).



Slika 3.1 Grafički prikaz zatvorene oblasti na kojoj tražimo apsolutne ekstreme.

Zatvorenu oblast $\overline{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 - 2 \leq x \leq 3\}$ ćemo podeliti na otvorenu oblast $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 - 2 < x < 3\}$ i granicu oblasti $\partial E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 - 2 = x \wedge x = 3\}$.

PRIMER – 2. DEO

Određivanje apsolutnih ekstrema.

Odredimo, najpre, lokalne ekstremne vrednosti unutar otvorene oblasti E. Stoga je potrebno rešiti sistem

$$\begin{aligned} f'_x &= 0 \\ f'_y &= 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} -2x + 2 &= 0. \\ 4y &= 0. \end{aligned}$$

Dakle, stacionarna tačka je $S(1, 0)$. Ona se očigledno nalazi unutar otvorene oblasti E i važi $z(S) = 2$.

Granicu oblasti E, u oznaci ∂E, čine prava $x - 3 = 0$, kao i parabola $y^2 - x - 2 = 0$.

Najpre, ćemo odrediti uslovni ekstrem funkcije $z(x, y) = 2y^2 - x^2 + 2x + 1$, pri uslovu $x - 3 = 0$. Ovde ćemo primeniti metod eliminacije, jer je $x = 3$, pa treba odrediti lokalne ekstreme funkcije jedne promenljive $z(y) = 2y^2 - 2$. Sada je $z'(y) = 4y$, pa se lokalna ekstremna vrednost za poslednju funkciju postiže za $y = 0$, tj. lokalni ekstrem početne funkcije treba tražiti i u tački $A(3, 0)$. Tada je $z(A) = -2$.

Na kraju ćemo odrediti uslovni ekstrem funkcije $z(x, y) = 2y^2 - x^2 + 2x + 1$, pri uslovu $y^2 - x - 2 = 0$. Ovde ćemo, takođe, primeniti metod eliminacije. Ako uslov $x = y^2 - 2$ zamenimo u polaznoj funkciji ona postaje funkcija jedne promenljive $z(y) = -y^4 + 8y^2 - 7$. Lokalne ekstreme poslednje funkcije tražimo iz njenog prvog izvoda.

Tada dobijamo $z'(y)=-4y^3+16y=-4y(y^2-4)$. Dakle, mogući ekstremi se postižu za $y=0$ ili $y=2$ ili $y=-2$. Ovo znači da za moguće ekstreme početne funkcije treba uzeti u obzir tačke $B(-2,0), C(2,2)$ i $D(2,-2)$. Sada imamo da je $z(B)=-7, z(C)=z(D)=9$.

Dakle, najveća vrednost na zatvorenoj oblasti $\overline{E}$, postiže se u tačkama C i D, a najmanja u tački B.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 4

Implicitno zadate funkcije

UVOD

Implicitno zadate funkcije dve realne promenljive.

Kada smo govorili o realnim funkcijama jedne realne promenljive uveli smo pojam izvoda implicitno zadate funkcije jedne promenljive. Naime, ako je neka realna funkcija jedne realne promenljive zadata u implicitnom obliku $F(x, y) = 0$ i ako je funkcija $F(x, y)$ diferencijabilna u svim tačkama (x, y) neke oblasti $D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, tada se na osnovu teoreme o implicitnoj funkciji, izvodna funkcija $y'(x)$ može odrediti po formuli

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Izvodi višeg reda se mogu dobiti uzastopnim diferenciranjem prethodne formule.

Realna funkcija dve realne promenljive je zadata u implicitnom obliku, ako je zadata jednačinom $F(x, y, z) = 0$, pri čemu je $F(x, y, z)$ data funkcija tri promenljive u nekoj oblasti $D_3 \subseteq \mathbb{R}^3$. Da bi funkcija dve promenljive bila definisana na ovaj način na nekoj oblasti, potrebno je da u toj oblasti jednačina $F(x, y, z) = 0$ ima jednistveno rešenje po nezavisno promenljivoj.

Primer. Ako posmatramo sferu u prostoru $\mathbb{R}^3$, čiji je centar u koordinatnom početku i poluprečnik R, tada njena jednačina glasi $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.Razmotrimo, sada, broj rešenja ove jednačine po z. Imamo da je

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Svakako, u ovom slučaju mora da važi da je $x^2 + y^2 \le R^2$, tj. izbor tačaka (x, y) mora biti takav da je

$$(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le R^2\},$$

tj. tačke (x, y) se moraju izabrati tako da zadovoljavaju uslov $x^2 + y^2 < R^2$ (tj. da pripadaju unutrašnosti kruga) ili da zadovoljavaju uslov $x^2 + y^2 = R^2$ (tj. da se nalaze na kružnici). Za svaku tačku iz unutrašnosti kruga posmatrana jednačina ima po dva rešenja z_1 i z_2, od kojih je jedno pozitivno (na primer z_1) za koje važi $0 < z_1 < R$, a drugo negativno (na primer z_2) za koje važi $-R < z_2 < 0$. S druge strane, ako se tačka (x, y) izabere sa kružnice $x^2 + y^2 = R^2$, tada dobijamo jedinstveno rešenje $z = 0$. Dakle, da bismo jednačinom $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ implicitno definisali funkciju, potrebno je da uvedemo još neko dodatno ograničenje kako bi ona uvek imala jedinstveno rešenje. U ovom slučaju bismo mogli da stavimo da je $z \geq 0$ (ili analogno $z \leq 0$). Na ovaj način postižemo da jednom originalu (u ovom slučaju tački iz ravni) odgovara tačno jedna slika (u ovom slučaju broj).

STAV O IMPLICITNO ZADATOJ FUNKCIJI

Datim stavom se uvodi način zadavanja o funkcije u implicitnom obliku.

Stav. Pretpostavimo da je funkcija $F(x,y,z)$ diferencijabilna u oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^3$, izvod F'_z je neprekidan i različit od nule u celoj oblasti D. Neka je dalje D' projekcija oblasti D u $\mathbb{R}^2$. Tada, za proizvoljnu tačku (x_0, y_0, z_0) iz $\mathbb{R}^3$, postoji neko $\varepsilon > 0$, tako da u okolini $U_\varepsilon > (x_0, y_0)$ postoji jedinstvena diferencijabilna funkcija $z = f(x,y)$ takva da je $|f(x,y) - z_0| < \varepsilon$ i osim toga važi

$$F(x, y, f(x,y)) \equiv 0,$$

za proizvoljnu tačku $(x_1, y_1) \in U_\varepsilon(x_0, y_0)$.

Napomena. Za neku proizvoljnu oblast D iz $\mathbb{R}^3$, skup svih tačaka (x,y) iz $\mathbb{R}^2$, u oznaci D', takvih da postoji bar jedna realna vrednost z, takva da tačka $(x,y,z) \in D$, predstavlja takođe oblast u $\mathbb{R}^2$ i D' predstavlja projekciju oblasti D u prostor $\mathbb{R}^2$.

PRVI I DRUGI PARCIJALNI IZVODI

Postupak za određivanje prvih i drugih parcijalnih izvoda funkcije zadate implicitno.

Ako prepostavimo da jednačina $F(x,y,z) = 0$ zadovoljava uslove prethodne teoreme, tada njenim diferenciranjem po promenljivoj x dobijamo $F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0$odakle je

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}.$$

Slično, ako izvršimo diferenciranje po y dobijamo $F'_y + F'_z \cdot z'_y = 0$odakle je

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Dalje, odgovarajućim diferencijaranjem dobijamo

$$z''_{xx} = -\frac{(F''_{xx} + F''_{xz} \cdot z'_x) \cdot F'_z - (F''_{zx} + F''_{zz} \cdot z'_x) \cdot F'_x}{(F'_z)^2},$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = -\frac{(F''_{xy} + F''_{xz} \cdot z'_y) \cdot F'_z - (F''_{zy} + F''_{zz} \cdot z'_y) \cdot F'_x}{(F'_z)^2},$$

i

$$z''_{yy} = -\frac{(F''_{yy} + F''_{yz} \cdot z'_y) \cdot F'_z - (F''_{zy} + F''_{zz} \cdot z'_y) \cdot F'_y}{(F'_z)^2}.$$

Ako u prethodnim formulama izvršimo deljenje brojioca i imenioca sa F'_z, a zatim iskoristimo dobijene izraze za z'_x i z'_y, tada ove formule možemo zapisati na sledeći način

$$z''_{xx} = -\frac{F''_{xx} + 2F''_{xz} \cdot z'_x + F''_{zz} \cdot (z'_x)^2}{(F'_z)^3},$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = -\frac{F''_{xy} + F''_{xz} \cdot z'_y + F''_{zy} \cdot z'_x + F''_{zz} \cdot z'_x \cdot z'_y}{(F'_z)^2},$$

i

$$z''_{yy} = -\frac{F''_{yy} + 2F''_{yz} \cdot z'_y + F''_{zz}(\cdot z'_y)^2}{(F'_z)^2}.$$

Napomena. Diferencijal prvog i višeg reda se kod funkcija zadatih implicitnim jednačinama određuje na istovetan način kao i kod funkcija dve promenljive koje su zadate u eksplicitnom obliku. Takođe, određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti se sprovodi po istom postupku.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

4.1 Određivanja lokalnih ekstrema implicitno zadate funkcije

PRIMER – 1. DEO

Određivanje lokalnih ekstrema funkcije zadate implicitno – prvi parcijalni izvodi i stacionarne tačke.

Odrediti lokalne ekstreme funkcije $z^3 + z^2 y - x^2 - y^2 + 4x - 4 = 0, \;\; z \neq 0.$

Rešenje. Primenićemo Silvesterov kriterijum. Dakle, potrebno je odrediti prve parcijalne izvode, kako bismo našli stacionarne tačke. Ako izvršimo, najpre, diferenciranje polazne jednačine po x, dobijamo

$$3z^2 \cdot z'_x + 2zy \cdot z'_x - 2x + 4 = 0,$$

odakle dobijamo

$$z'_x = \frac{2x-4}{3z^2+2zy}(*).$$

Slično, ako potražimo prvi parcijalni izvod po y dobijamo

$$3z^2 \cdot z'_y + 2zy \cdot z'_y + z^2 - 2y = 0,$$

pa imamo

$$z'_y = \frac{2y-z^2}{3z^2+2zy}(**).$$

Stacionarne tačke se odredjuju iz sledećeg sistema

$$z'_x = 0 \wedge z'_y = 0 \wedge F(x,y,z) = 0,$$

tj.

$$\frac{2x-4}{3z^2+2zy} = 0 \wedge \frac{2y-z^2}{3z^2+2zy} = 0 \wedge z^3 + z^2y - x^2 - y^2 + 4x - 4 = 0.$$

Iz prve jednačine sistema dobijamo da je $x = 2$, a iz druge imamo da je $y = \frac{z^2}{2}$. Zamenom ovih vrednosti u treću jednačinu sistema, dobijamo

$$z^3 + \frac{z^4}{2} - 4 - \frac{z^4}{4} + 8 - 4 = 0, \quad z \neq 0,$$

tj.

$$\frac{z^4}{4} + z^3 = 0, \quad z \neq 0.$$

Odavde dobijamo da je $z = -4$. Dakle, stacionarna tačka je $S(2,8)$, pri čemu je $z(S) = -4$.

PRIMER – 2. DEO

Određivanje lokalnih ekstrema funkcije zadate implicitno – drugi parcijalni izvodi i primena Silvesterovog kriterijuma.

Sada treba odrediti druge parcijalne izvode polazne implicitno zadate funkcije kako bismo proverili, primenom Silvesterovog kriterijuma, da li je tačka S lokalni ekstrem. Diferenciranjem formule (*) po promenljivoj x , odnosno y dobijamo:

$$6zz'_x z'_x + 3z^2 z''_{x^2} + 2yz'_x z'_x + 2zyz''_{x^2} - 2 = 0,$$

odnosno

$$6zz'_y z'_x + 3z^2 z''_{xy} + 2yz'_y z'_x + 2zz'_x = 0,$$

tj.

$$z''_{x^2} = \frac{-6z - 2y \cdot {z'_x}^2 + 2}{3z^2 + 2yz}$$

$$z''_{xy} = \frac{-6z \cdot z'_y - 2y \cdot z'_y + 2z \cdot z'_x}{3z^2}.$$

S druge strane, ako diferenciramo formulu (**) po promenljivoj y dobijamo

$$6zz'_y z'_y + 3z^2 z''_{y^2} + 2yz'_y z'_y + 2zyz''_{y^2} - 2zz'_y - 2 = 0.$$

Odavde je

$$z''_{y^2} = \frac{-6z - 2y \cdot {z'_y}^2 - 4z \cdot z'_y + 2}{3z^2 + 2yz}.$$

Kako važi da je $z'_x(S) = z'_y(S) = 0$ i $z(S) = -4$, tada za tačku $S(2,8)$ imamo $A = z''_{x^2}(S) = -\frac{1}{8}, B = z''_{xy}(S) = 0,$ i $C = z''_{y^2}(S) = -\frac{1}{8}$.Konačno je

$$\gamma = A \cdot C - B^2 = \frac{1}{64} > 0 \quad \text{i} \quad A = -\frac{1}{8} < 0,$$

pa je tačka $S(2,8)$ na osnovu Silvesterovog kriterijuma tačka lokalnog maksimuma i $z_{max} = -4$.

Poglavlje 5

Kanoničke jednačine površi drugog reda

UVOD

Jednačina površi drugog reda koja se dobija transformacijom koordinatnog sistema u novi u kome ona ima najjednostavniji mogući oblik u smislu zapisa je kanonički oblik jednačine površi.

Pod površima drugog reda u $\mathbb{R}^3$ podrazumevaju se površi koji predstavljaju grafike realnih funkcija dve realne promenljive zadate implicitnom jednačinom

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

gde su $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J \in \mathbb{R}$ bar jedan od koeficijenata A , B ili C je različit od nule. Postoji postupak kojim se jednačina neke površi data prethodnom formulom prevodi na tzv. kanonički oblik jednačine površi drugog reda . Naime, rotacijama i translacijama koordinatnog sistema u kome je, prvobitno, površ zadata prethodnom jednačinom, moguće je izabrati novi koordinantni sistem u kome ova jednačina ima najjednostavniji mogući oblik u smislu zapisa. Takav zapis se naziva kanonički oblik jednačine površi . O ovom postupku transformacije koordinatnog sistema ovde neće biti reči.

Za jednačinu površi drugog reda se kaže da je u kanonskom obliku ukoliko ona zadovoljava sledeća četiri uslova:

- nema mešovitih članova, tj. u takvoj jednačini se ne javljaju niti jedan od članova $xy,\ xz,\ yz$;

- nijedna koordinata $x,\ y$ ili z ne sme da se javlja istovremeno i sa kvadratom i kao linearan član (npr. u takvoj jednačini ne sme da se javlja x^2 i x istovremeno);

- linearnih članova ne sme da ima više od jednog (dakle u njoj sme da se javlja samo x ili samo y ili samo z);

- ukoliko se javlja neki linearan član onda ne sme da se javlja slobodan član, tj. slobodan član mora biti jednak nuli.

KLASIFIKACIJA POVRŠI DRUGOG REDA

U odnosu na izabrani Dekartov koordinatni sistem iz opšte jednačine površi drugog reda može se dobiti 17 različitih površi drugog reda u kanonskom obliku.

Može se pokazati da jednačina površi drugog reda

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

gde su $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J \in \mathbb{R}$ i bar jedan od koeficijenata A , B ili C je različit od nule, u odnosu na izabrani Dekartov koordinatni sistem opisuje jednu od 17 sledećih površi u kanonskom obliku:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$– elipsoid (sfera);

2. $x^2 + y^2 + z^2 = -1$– imaginarni elipsoid;

3. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$– jednokrilni hiperboloid;

4. $x^2 + y^2 - z^2 = -1$– dvokrilni hiperboloid;

5. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$– realni konus;

6. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$– imaginarni konus;

7. $x^2 + y^2 = 2z$ – eliptički paraboloid;

8. $x^2 - y^2 = 2z$ – hiperbolički paraboloid;

9. $x^2 + y^2 = 1$ – realni eliptički (kružni) cilindar;
10. $x^2 + y^2 = -1$ – imaginarni eliptički cilindar;

11. $x^2 - y^2 = 1$ – hiperbolički cilindar;

12. $x^2 + y^2 = 0$ – dve imaginarne ravni koje se seku;

13. $x^2 - y^2 = 0$ – dve realne ravni koje se seku;

14. $x^2 = 2y$ – parabolički cilindar;

15. $x^2 = 1$ – dve realne paralelne ravni;

16. $x^2 = -1$ – dve imaginarne paralelne ravni;

17. $x^2 = 0$ – dve ravni koje se poklapaju.

Napomena. Imaginarne površi predstavljaju prazne skupove tačaka u prostoru $\mathbb{R}^3$ (tj. one realno ne postoje).

Ovde ćemo navesti neke od kanoničkih oblika površi drugog reda i dati njihovu geometrijsku interpretaciju. Ove površi, kao i njihove geometrijske interpretacije će nam biti bitne za dalje izlaganje gradiva.

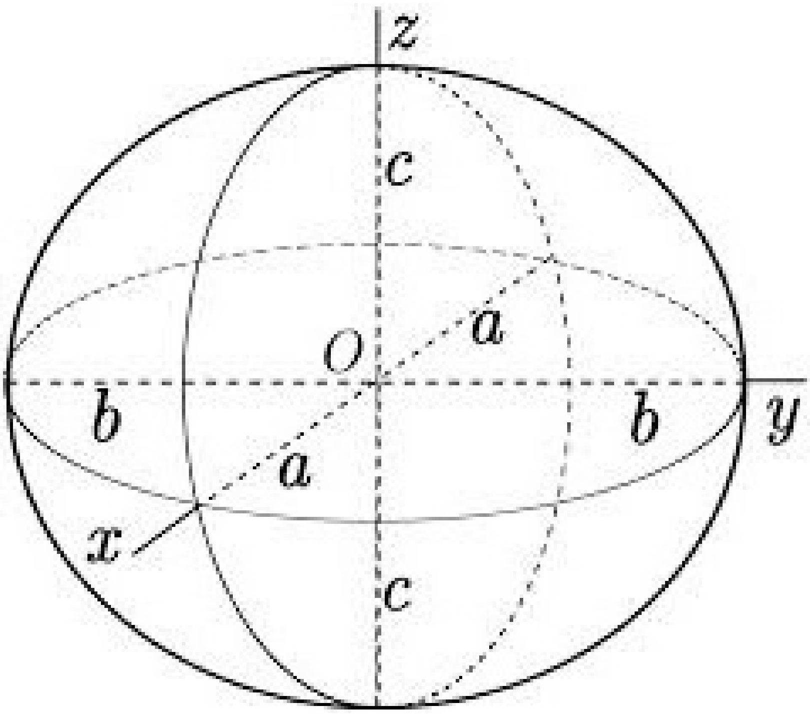
ELIPSOID

Kanonička jednačina elipsoida.

Površ čija je kanonička jednačina

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a\cdot b\cdot c\neq 0,$$

naziva se elipsoid, gde su a, b i c pozitivni realni brojevi koju predstavljaju poluose elipsoida. Ovaj elipsoid se naziva centralni elipsoid, jer mu je centar u koordinatnom početku.



Slika 5.1 Elipsoid.

Često se u zadacima javlja i jedan nekanonički oblik elipsoida

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}+\frac{(z-r)^2}{c^2}=1,\quad a\cdot b\cdot c\neq 0.$$

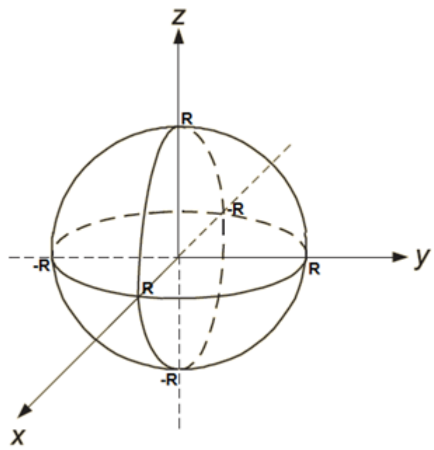
U ovom slučaju se centar elipsoida ne nalazi u koordinatnom početku, već u tački $C(p,\ q,\ r)$. Njegove poluose su i dalje, dužina a, b i c respetivno.

SFERA

Kanonička jednačina sfere.

Kanonička jednačina sfere je specijalan slučaj kanoničke jednačine elipsoida, gde je $a = b = c$. Centar ove sfere je u koordinatnom početku, pa se ona naziva centralna sfera, poluprečnika R. Njena jednačina je

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$



Slika 5.2 Centralna sfera.

Specijalan slučaj elipsoida kome centar nije u koordinatnom početku, za $a = b = c$, jeste sfera,

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-r)^2 = R^2,$$

čiji je centar tačka $C(p,\ q,\ r)$ i poluprečnik R .

Primer. Neka je data jednačina

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 11 = 0.$$

Važi da je

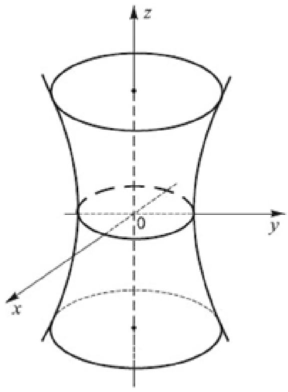
$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 + z^2 - 11 = 0, \quad \text{tj.} \quad (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 16.$$

Dakle, zadata površ jeste sfera čiji centar se nalazi u tački $C(1, -2, 0)$, poluprečnika 4.

JEDNOKRILNI (JEDNOLISNI) HIPERBOLOID

Kanonička jednačina jednokrilnog (jednolisnog) hiperboloida.

Jednokrilni ili jednolisni hiperboloid, ima jednačinu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

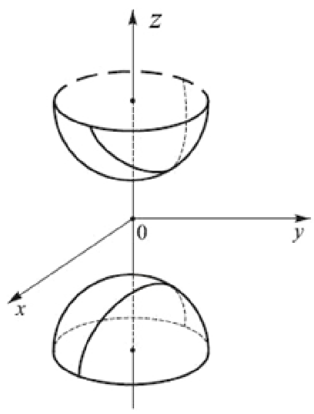


Slika 5.3 Jednokrilni (jednolisni) hiperboloid.

DVOKRILNI (DVOLISNI) PARABOLOID

Kanonička jednačina dvokrilnog (dvolisnog) paraboloida.

Dvokrilni ili dvolisni hiperboloid, je površ koja ima jednačinu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \;\; a \cdot b \cdot c \neq 0.$

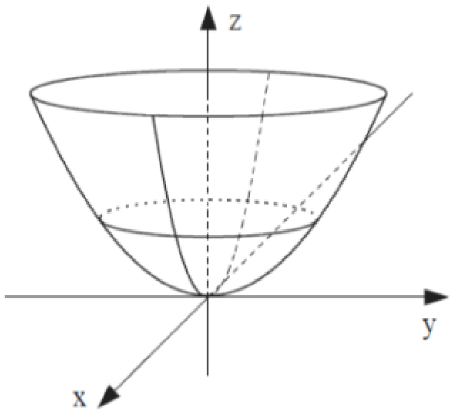


Slika 5.4 Dvokrilni (dvolisni) paraboloid.

ELIPTIČKI PARABOLOID

Kanonička jednačina eliptičkog paraboloida.

Površ čija je jednačina $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \;\; p, q > 0$,naziva se eliptički paraboloid.



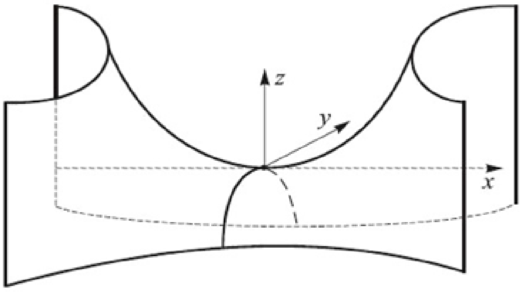
Slika 5.5 Eliptički paraboloid.

Svakako, ovaj paraboloid može biti kružni. Primer jednačine kružnog paraboloida glasi $x^2 + y^2 = z$.

HIPERBOLIČKI PARABOLOID

Kanonička jednačina hiperboličkog paraboloida.

Površ čija je jednačina $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p, q > 0$,naziva se hiperbolički paraboloid. Često se u literaturi ova površ naziva sedlo.

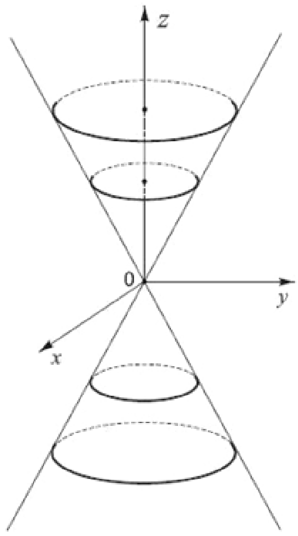


Slika 5.6 Hiperbolički paraboloid.

KONUS DRUGOG REDA

Kanonska jednačina konusa drugog reda.

Površ čija je jednačina $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a \cdot b \cdot c \neq 0$,naziva se eliptički konus drugog reda.



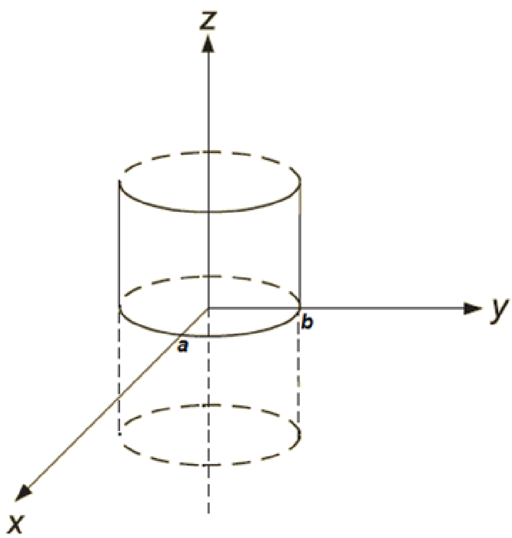
Slika 5.7 Konus drugog reda.

Specijalno, ako je $a = b = c$, tada dobijamo površ čija je jednačina $x^2 + y^2 - z^2 = 0$i koja se naziva kružni konus drugog reda.

ELIPTIČKI CILINDAR

Kanonaska jednačina eliptičkog cilindra.

Površ čija je jednačina $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \cdot b \neq 0$,naziva se eliptički cilindar.



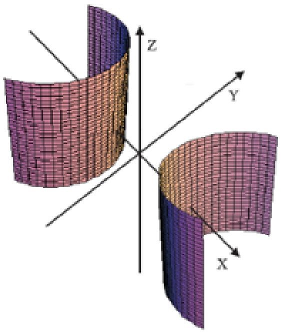
Slika 5.8 Eliptički cilindar.

Specijalan slučaj, za $a = b$, predstavlja kružni cilindar čija je jednačina $x^2 + y^2 = R^2$.

HIPERBOLIČKI CILINDAR

Kanonska jednačina hiperboličkog cilindra.

Površ čija je jednačina $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \cdot b \neq 0$,naziva se hiperbolički cilindar.

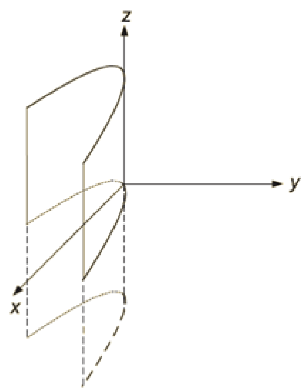


Slika 5.9 Hiperbolički cilindar.

PARABOLIČKI CILINDAR

Kanonska jednačina paraboličkog cilindra.

Površ čija je jednačina $y^2 = 2px$, naziva se parabolički cilindar.

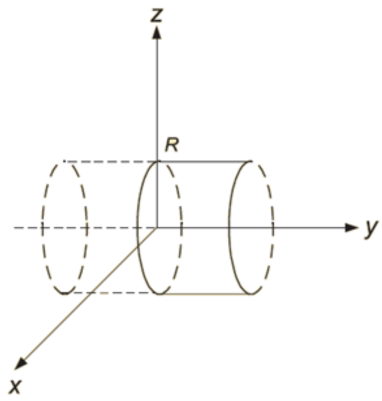


Slika 5.10 Parabolički cilindar $y^2 = 2px, p > 0$.

NAPOMENA 1

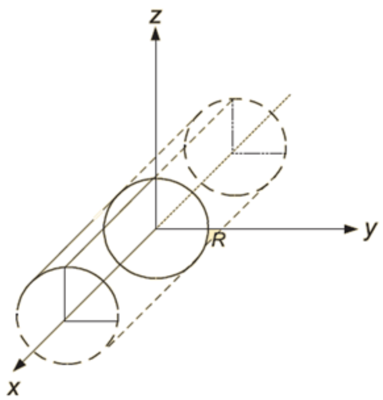
Prethodnim jednačinama su dati samo "reprezenti" odgovarajućih površi u kanonskom obliku. Na primer, kružni cilindar može biti zadat i jednačinom $x^2 + z^2 = R^2$ ili $y^2 + z^2 = R^2$.

Prethodnim jednačinama su zadati samo "reprezenti" odgovarajućih površi u kanonskom obliku. Na primer, kružni cilindar može biti zadat i sledećom jednačinom $x^2 + z^2 = R^2$.Tada ova površ ima grafik dat na narednoj slici.



Slika 5.11 Kružni cilindar.

Slično, površ $y^2 + z^2 = R^2$ predstavlja kružni cilindar čiji je grafik dat na sledećoj slici.

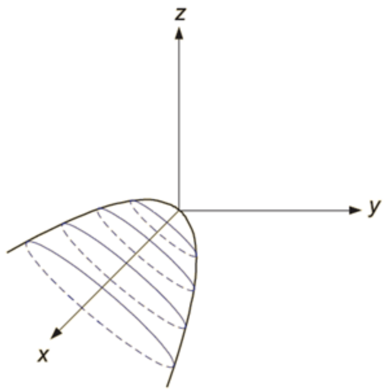


Slika 5.12 Kružni cilindar.

NAPOMENA 2

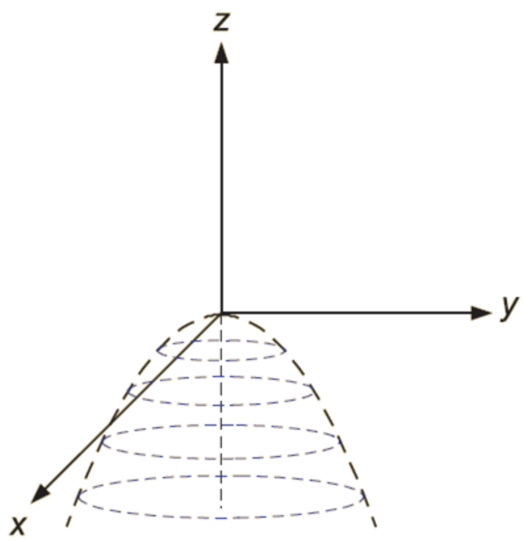
Prethodnim jednačinama su dati samo "reprezenti" odgovarajućih površi u kanonskom obliku. Na primer, eliptički paraboloid može biti zadat i datim jednačinama.

Slično, eliptički paraboloid $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x,\ p, q > 0,$ ima grafik dat na sledećoj slici.



Slika 5.13 Eliptički paraboloid.

Moguće je, takođe, da važi $p, q < 0$. Tada, površ $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,\ p, q < 0,$ ima oblik dat na sledećoj slici.



Slika 5.14 Eliptički paraboloid.

Poglavlje 6

Tangentna ravan i normala površi

TANGENTNA RAVAN

Ravan koja dodiruje (tangira) datu površ u datoj tački naziva se tangentna ravan.

Funkcija $z = f(x, y)$ definiše neku površ u prostoru $\mathbb{R}^3$ koju čine tačke $M(x, y, f(x, y))$, odnosno tačke koje zadovoljavaju jednačinu $f(x, y) - z = 0$. Ako je ova funkcija diferencijabilna u tački (x_0, y_0), onda svaka kriva kroz tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)$, gde je $z_0 = f(x_0, y_0)$ koja se dobija presecanjem te površi sa ravni upravnom na koordinatnu ravan Oxy ima u toj tački svoju tangentu, a sve te tangente leže u jednoj ravni čija je jednačina

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0),$$

gde je $p = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}$ i $q = \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}$. Ova ravan se naziva tangentna ravan površi $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i ona je dodirna tačka površi i tangentne ravni.
Ako je površ data u implicitnom obliku jednačinom $F(x, y, z) = 0$, pri čemu je funkcija $F(x, y, z)$ diferencijalbilna i važi

$$(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2 > 0,$$

u svakoj tački $M(x, y, z)$, tada se pokazuje da je jednačina njene tangentne ravni u tački M_0 data sa

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0.$$

Primer. Odrediti tangentnu ravan na površ $z(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ u tački $M(1, 2, 3)$.

Rešenje. Važi da je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 3y^2,$$

pa je $p = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2 = -3$, kao i $q = -3 \cdot 1 + 3 \cdot 2^2 = 9$. Tada jednačina tangentne ravni glasi

$$z - 3 = -3(x - 1) + 9(y - 2) \quad \text{tj.} \quad -3x + 9y - z - 12 = 0.$$

NORMALA POVRŠI

Prava koja je normalna na tangentnu ravan u datoj tački, naziva se normala površi.

Prava koja prolazi kroz tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i normalna je na tangentnu ravan naziva se normala površi $z = f(x, y)$. Njena jednačina glasi

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Ako je površ data u implicitnom obliku jednačinom $F(x, y, z) = 0$, pri čemu je funkcija $F(x, y, z)$ diferencijalbilna i važi

$$\left(F_x^{\prime}\right)^2 + \left(F_y^{\prime}\right)^2 + \left(F_z^{\prime}\right)^2 > 0,$$

u svakoj tački $M(x, y, z)$, tada se pokazuje da je jednačina normale u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{x - x_0}{F_x^{\prime}\left(M_0\right)} = \frac{y - y_0}{F_y^{\prime}\left(M_0\right)} = \frac{z - z_0}{F_z^{\prime}\left(M_0\right)}.$$

Poglavlje 7

Pokazna vežba

ZADATAK 1 (15 MINUTA)

Lagranžev metod multiplikatora – određivanje uslovnog ekstrema.

Odredi uslovne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ pri uslovu $x + y = 1$.

Rešenje. Imamo da je $\varphi(x, y) = x + y - 1$, pa Lagranževa funkcija glasi:

$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda \cdot (x + y - 1)$.

Odredimo prve parcijalne izvode Lagranžove funkcije

$$
\begin{aligned}
F_x' &= 2x + \lambda \\
F_y' &= 2y + \lambda \\
F_\lambda' &= x + y - 1
\end{aligned}
$$

Rešimo sistem

$$
\begin{aligned}
2x + \lambda &= 0 \\
2y + \lambda &= 0 \\
x + y - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Rešenje sistema je $\lambda = -1$, $x = \frac{1}{2}$ i $y = \frac{1}{2}$ i to je stacionarna tačka funkcije. Da bismo ispitali da li je stacionarna tačka minimuma ili maksimuma (ili ni jedno ni drugo) potrebni su nam parcijalni izvodi:

$F_{xx}'' = 2$, $F_{xy}'' = F_{yx}'' = 0$, $F_{yy}'' = 2$.

Dobijamo totalni diferencijal drugog reda

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 = 2\left(dx^2 + dy^2\right).$$

Totalni diferencijal uslova daje:

$dx + dy = 0 \Longrightarrow dx = -dy$.

pa imamo:

$d^2F = 4 \ dx^2 > 0$.

Funkcija ima uslovni minimum u tački $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i on iznosi

$f_{min} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$

Napomena. Zadatak se može rešiti i primenom metode eliminacije i tada imamo, iz uslova, da je: $y = 1 - x$, pa zamenom ovog u polaznoj funkciji dobijamo da je $f(x) = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$. Tada je $f'(x) = 2x - 1$. Dakle, tačka $x = \frac{1}{2}$ je stacionarna tačka. Kako je $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$ u toj tački se postiže lokalni minimum. Iz uslova $y = 1 - x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, vidimo da je tačka $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ uslovni ekstrem polazne funkcije, kao što je to dobijeno i Lagranževom metodom multiplikatora.

ZADATAK 2 – 1. DEO (25 MINUTA)

Lagranžev metod multiplikatora – određivanje stacionarnih tačaka i totalnog diferencijal drugog reda za funkciju F.

Odredi uslovne ekstreme funkcije $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ pri uslovu $x^2 + y^2 = 1$.

Rešenje. Imamo da je $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, pa Lagranževa funkcija glasi:

$F(x, y, \lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda \cdot \left(x^2 + y^2 - 1\right)$

Odredimo prve parcijalne izvode Lagranžove funkcije

$$F'_x = -4 + 2\lambda x$$
$$F'_y = -3 + 2\lambda y$$
$$F'_\lambda = x^2 + y^2 - 1$$

Rešimo sistem

$$-4 + 2\lambda x = 0$$
$$-3 + 2\lambda y = 0$$
$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Iz prve i druge jednačine izrazimo x i y preko λ, tako da dobijamo

$x = \frac{4}{2\lambda}, \; y = \frac{3}{2\lambda}$

i uvrstimo ih u treću:

$\left(\frac{4}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1, \; (\lambda \neq 0) \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \lambda_{1/2} = \pm\frac{5}{2}.$

Odavde dobijamo da je:

- Za $\lambda = \frac{5}{2}$ imamo da je $x = \frac{4}{2 \cdot \frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$ i $y = \frac{3}{2 \cdot \frac{5}{2}} = \frac{3}{5}$, pa je $S_1\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ stacionarna tačka funkcije F;
- Za $\lambda = -\frac{5}{2}$ imamo da je $x = \frac{4}{2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)} = -\frac{4}{5}$ i $y = \frac{3}{2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)} = -\frac{3}{5}$, pa je $S_2\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ stacionarna tačka funkcije F.

Da bismo ispitali da li je stacionarna tačka tačka minimuma ili maksimuma (ili ni jedno ni drugo) potrebni su nam drugi parcilajni izvodi:

$F''_{xx} = 2\lambda,\ F''_{xy} = F''_{yx} = 0,\ F''_{yy} = 2\lambda$

Dobijamo totalni diferencijal drugog reda

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 = 2\lambda\left(dx^2 + dy^2\right).$$

Izračunajmo totalni diferencijal uslova. Tada imamo da je:

$$2xdx + 2ydy = 0 \Leftrightarrow xdx + ydy = 0.$$

ZADATAK 2 – 2. DEO

Lagranžev metod multiplikatora – određivanje da li su dobijene stacionarne tačke i uslovni ekstremi.

Za tačku $S_1\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, pri čemu je $\lambda = \frac{5}{2}$, imamo da je

$$d^2F\Big|_{S_1} = 2 \cdot \frac{5}{2}\left(dx^2 + dy^2\right) = 5\left(dx^2 + dy^2\right).$$

Iz

$$xdx + ydy = 0$$

za tačku $S_1\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ imamo da je

$$\frac{4}{5}dx + \frac{3}{5}dy = 0 \Leftrightarrow 4dx + 3dy = 0 \Leftrightarrow dx = -\frac{3}{4}dy.$$

Tada imamo da je:

$$d^2F\Big|_{S_1} = 5\left(\frac{9}{16}dy^2 + dy^2\right) = \frac{125}{16}dy^2 > 0.$$

Zaključujemo da je tačka $S_1\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ uslovni minimum i on iznosi:

$$f_{min} = f\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = 6 - 4 \cdot \frac{4}{5} - 3 \cdot \frac{3}{5} = 1.$$

Za tačku $S_2\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$, pri čemu je $\lambda = -\frac{5}{2}$, imamo da je

$d^2F\Big|_{S_2} = 2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\left(dx^2+dy^2\right) = -5\left(dx^2+dy^2\right).$

Iz

$xdx + ydy = 0$

za tačku $S_2\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ imamo da je

$-\frac{4}{5}dx - \frac{3}{5}dy = 0 \Leftrightarrow -4dx - 3dy = 0 \Leftrightarrow dx = -\frac{3}{4}dy.$

Tada imamo da je:

$d^2F\Big|_{S_1} = -5\left(\frac{9}{16}dy^2 + dy^2\right) = -\frac{125}{16}dy^2 < 0.$

Zaključujemo da je tačka $S_2\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ uslovni maksimum i on iznosi:

$f_{max} = f\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = 6 + 4\cdot\frac{4}{5} + 3\cdot\frac{3}{5} = 11.$

Napomena. I u ovom zadatku se može primeniti metod elimincije, ali treba voditi računa da z uslova imamo da je

$y = \pm\sqrt{1-x^2}.$

ZADATAK 3 (10 MINUTA)

Metod eliminacije za određivanje uslovnih ekstrema.

Odrediti uslovne ekstreme funkcije $f(x, y) = 2xy$, pri uslovu $x + y = 1$.

Rešenje. Iz uslova imamo da je $y = 1 - x$, pa tada data funkcija postaje:

$f(x) = 2x(1-x) = 2x - 2x^2.$

Odredimo prvi izvod funkcije i stacionarnu tačku:

$f'(x) = 2 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$

Odredimo znak drugog izvoda

$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -4 < 0.$

Tada imamo da je $x = \frac{1}{2}$ tačka lokalnog maksimuma funkcije $f(x)$ za koju je $y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Dakle, funkcija ima uslovni maksimum u tački $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i on iznosi

$f_{max} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Odrediti uslovne ekstreme funkcije $f(x, y) = (x-5)(y+2)$ pri uslovu $x - y = 1$.

Rešenje. Iz uslova imamo da je $y = x - 1$, pa tada data funkcija postaje:

$f(x) = (x - 5)(x - 1 + 2) = (x - 5)(x + 1) = x^2 + 4x - 5.$

Odredimo prvi izvod funkcije i stacionarnu tačku:

$f'(x) = 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2.$

Odredimo znak drugog izvoda

$f''(-2) = 2 > 0.$

Tada imamo da je $x = -2$ tačka lokalnog minimuma funkcije $f(x)$ za koju je $y = -2 - 1 = -3.$

Dakle, funkcija ima uslovni minimum u tački $S(-2, -3)$ i on iznosi

$f_{min} = f(-2, -3) = (-2 - 5)(-3 + 2) = 7.$.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

ZADATAK 4 (5 MINUTA)

Određivanje Tejlorovog polinoma drugog reda.

Odrediti Tejlorov polinom drugog stepena koji aproksimira funkciju

$f(x, y) = e^{x+y}(2x + y)$

u okolini tačke $A(1, 1)$.

Rešenje: Odredimo, najpre, prve i druge parcijalne izvode date funkcije u datoj tački:

$$f'_x = e^{x+y}(2x + y + 2)$$

$$f'_y = e^{x+y}(2x + y + 1)$$

$$f''_{x^2} = e^{x+y}(2x + y + 4)$$

$$f''_{xy} = e^{x+y}(2x + y + 3)$$

$$f''_{y^2} = e^{x+y}(2x + y + 2)$$

$$f_x'(1, 1) = 5e^2$$
$$f_y'(1, 1) = 4e^2$$
$$f_{xy}''(1, 1) = 6e^2$$
$$f_{x^2}''(1, 1) = 5e^2$$
$$f_{y^2}''(1, 1) = 7e^2$$

$$T_2(x, y) = e^2\left(3 + 5(x-1) + 4(y-1) + \frac{7}{2}(x-1)^2 + 6(x-1)(y-1) + \frac{5}{2}(y-1)^2\right)$$

ZADATAK 5 (5 MINUTA)

Određivanje Tejlorovog polinoma drugog reda

Odrediti Tejlorov polinom drugog stepena koji aproksimira funkciju

$f(x, y) = x^2 + xy^2 + y^2$

u okolini tačke $A(0, 1)$.

Rešenje: Odredimo, najpre, prve i druge parcijalne izvode date funkcije u datoj tački:

$$f_x' = 2x + y^2 \qquad f_x'(0, 1) = 1$$
$$f_y' = 2xy + 3y^2 \qquad f_y'(0, 1) = 3$$
$$f_{x^2}' = 2 \qquad f_{xy}'(0, 1) = 2$$
$$f_{xy}' = 2y \qquad f_{y^2}'(0, 1) = 6$$
$$f_{y^2}' = 2x + 6y \qquad f_{x^2}'(0, 1) = 2$$

$$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left[x - x_0\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} + y - y_0\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\right] +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[x - x_0\left|^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} + 2\left[x - x_0\right]\left[y - y_0\right] + y - y_0\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M}\right.$$

$$T_2(x, y) = 1 + \left[x + 3[y-1]\right] + \frac{1}{2!}\left[2x^2 + 4x[y-1] + 6[y-1]^2\right]$$

ZADATAK 6 (10 MINUTA)

Apsolutni ekstremi.

Odredi najmanju i najveću vrednost funkcije

$f(x, y) = x^2 - y^2$

na skupu $D = \left\{\{x, y\} : \quad x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

Rešenje. Dakle, potrebno je odrediti lokalne ekstremne vrednosti unutar oblasti D (1. korak), a nakon toga i uslovne ekstreme na samom rubu, tj. kružnici $x^2 + y^2 = 4$, za datu funkciju. Najveća vrednost funkcije $f(x, y) = x^2 - y^2$ u tako dobijenim ekstremima predstavlja apsolutni maksimum funkcije, a najmanja vrednost predstavlja apsolutni minimum funkcije. Svakako, može se desiti da postoji više ovakvih apsolutnih ekstrema.

1. Korak Određivanje stacionarnih tačaka.

Rešavamo sistem:

$$f_x'(x, y) = 0$$
$$f_y'(x, y) = 0$$

$$f_x'(x, y) = 2x$$
$$f_y'(x, y) = -2y$$

stacionarna tačka je $A(0, 0)$.

2. Korak Pravimo Lagranževu funkciju poštujući navedeni uslov $x^2 + y^2 = 4$

$$L(x, y) = x^2 - y^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 4\right)$$
$$L_x'(x, y) = 2x + 2\lambda x$$
$$L_y'(x, y) = -2y + 2\lambda y$$
$$L_\lambda'(x, y) = x^2 + y^2 - 4$$

$$2x(1 + \lambda) = 0$$
$$2y(-1 + \lambda) = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$\begin{array}{cc} \text{I slučaj} & \text{II slučaj} \\ x = 0 & y = 0 \\ 1 + \lambda = 0 & -1 + \lambda = 0 \\ \lambda = -1 & \lambda = 1 \\ y = \pm 2 & x = \pm 2 \end{array}$$

$$B(0, 2) \quad C(0, -2) \quad D(-2, 0) \quad E(2, 0)$$

$$f(A) = 0 \quad f(B) = -4 \quad f(C) = -4 \quad f(D) = 4 \quad f(E) = 4$$

Dakle, B i C su tačke u kojima funkcija ima najmanju vrednost. U tačkama D i E funkcija ima najveću vrednost.

ZADATAK 7 (5 MINUTA)

Određivanje totalnog diferencijala prvog reda implicitno zadate funkcije.

Izračunati prvi totalni diferencijal implicitno zadate funkcije

$x^2 + y^2 + z^2 = 2x$

Rešenje: Totalni diferencijal

$$dz = z_x' dx + z_y' dy$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x \, \Big/_x'$$

$$2x + 0 + 2zz_x' = 2$$

$$2zz_x' = 2 - 2x$$

$$z_x' = \frac{1 - x}{z}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x \, \Big/_y'$$

$$0 + 2y + 2zz_y' = 0$$

$$2zz_y' = -2y$$

$$z_y' = \frac{-y}{z}$$

$$dz = \frac{1 - x}{z} dx - \frac{y}{z} dy$$

ZADATAK 8 (10 MINUTA)

Određivanje totalnog diferencijala drugog reda implicitno zadate funkcije.

Izračunati drugi totalni diferencijal zadate funkcije

$f(x, y, z) = 2x^3 - 3y^3 + x^2yz - z^2 + xyz$

Rešenje:

$$f_x' = 6x^2 + 2xyz + yz$$

$$f_y' = -9y^2 + x^2z + xz$$

$$f_z' = x^2y - 2z + xy$$

$$f_{xx}'' = 12x + 2yz$$

$$f_{yy}'' = -18y$$

$$f_{zz}'' = -2$$

$$f_{xy}'' = 2xz + z$$

$$f_{xz}'' = 2xy + y$$

$$f_{yz}'' = x^2 + x$$

$$d^2f = (12x + 2yz)dx^2 - 18ydy^2 - 2dz^2 + 2\Big((2xz + z)dxdy + (2xy + y)dxdz + \left(x^2 + x\right)dydz\Big)$$

ZADATAK 9 – 1. DEO (25 MINUTA)

Lokalni ekstremi implicitno zadate funkcije – određivanje stacionarnih tačaka.

Odrediti lokalne ekstreme implicitno zadate funkcije

$F(x, y, z) = z^3 + xyz + x^2 + 2y^2 + 8.$

1. Korak rešenja Određivanje stacionarnih tačaka. Rešavamo sistem:

$$z_x' = 0,$$
$$z_y' = 0,$$
$$F(x, y, z) = 0.$$

$$z_x' = -\frac{F_x'}{F_z'} = -\frac{yz + 2x}{3z^2 + xy} = 0,$$
$$z_y' = -\frac{F_y'}{F_z'} = -\frac{xz + 4y}{3z^2 + xy} = 0,$$
$$z^3 + xyz + x^2 + 2y^2 + 8 = 0.$$

$$yz + 2x = 0, \quad 3z^2 + xy \neq 0$$
$$xz + 4y = 0, \; 3z^2 + xy \neq 0$$
$$z^3 + xyz + x^2 + 2y^2 + 8 = 0$$

Iz prve jednačine sistema imamo da je $x = -\frac{yz}{2}$. Zamenom ovog u drugoj jednačini imamo $-\frac{yz^2}{2} + 4y = 0$, odakle dobijamo da je

$$-\frac{yz^2}{2} + 4y = 0 \Leftrightarrow y\left(-\frac{z^2}{2} + 4\right) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee z^2 = 8.$$

Za $y = 0$, imamo da je $x = 0$, pa zamenom ovih vrednosti u trećoj jednačini sistema:

$$z^3 + xyz + x^2 + 2y^2 + 8 = 0,$$

dobijamo da je $z^3 + 8 = 0$, tj. $z = -2$. Kako važi da je $3z^2 + xy \neq 0$, za ovako dobijene vrednosti x, y i z, imamo da je $S_1(0, 0)$ stacionarna tačka.

Za $z = 2\sqrt{2}$, imamo, iz prve jednačine sistema, da je $x = -\sqrt{2}y$, pa zamenom ovih vrednosti u trećoj jednačini sistema:

$$z^3 + xyz + x^2 + 2y^2 + 8 = 0,$$

ona postaje

$$16 + 8\sqrt{2} - 4y^2 + 2y^2 + 2y^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow 24 + 8\sqrt{2} = 0,$$

što je nemoguće.

Slično imamo i za $z = -2\sqrt{2}$

Dakle, postoji samo jedna stacionarna tačka $S_1(0, 0)$, za $z = -2$. Proverimo da li je ona i lokalna ekstremna vrednost.

ZADATAK 9 – 2. DEO

Lokalni ekstremi implicitno zadate funkcije – primena Silvesterovog kriterijuma.

2. korak rešenja: Primena Silvesterovog kriterijuma:

Odredimo druge parcijalne izvode implicitno zadate funkcije:

$$z''_{xx} = -\frac{2\left(3z^2+xy\right)-y(yz+2x)}{\left(3z^2+xy\right)^2} = -\frac{6z^2-y^2z}{\left(3z^2+xy\right)^2},$$

$$z''_{xy} = -\frac{z\left(3z^2+xy\right)-x(yz+2x)}{\left(3z^2+xy\right)^2} = -\frac{3z^3-2x^2}{\left(3z^2+xy\right)^2},$$

$$z''_{yy} = -\frac{4\left(3z^2+xy\right)-x(xz+4y)}{\left(3z^2+xy\right)^2} = -\frac{12z^2-x^2z}{\left(3z^2+xy\right)^2}.$$

Za $S_1(0,0)$ i za $z=-2$ imamo da je $z'_x(0,0)=0$ i $z'_y\left(0,0\right)=0,$ a takođe i

$$A = z''_{xx}(0,0) = -\frac{6\cdot 2^2-0\cdot 2}{\left(3\cdot 2^2+0\right)^2} = -\frac{1}{6},$$

$$B = z''_{xy}(0,0) = -\frac{3\cdot 2^3-2\cdot 0^2}{\left(3\cdot 2^2+0\right)^2} = -\frac{1}{6},$$

$$C = z''_{yy}(0,0) = -\frac{12\cdot 2^2-0^2\cdot 2}{\left(3\cdot 2^2+0\right)^2} = -\frac{1}{3}.$$

Računamo veličinu

$$\gamma = AC - B^2 = \frac{1}{36} > 0.$$

Kako je

$$A = -\frac{1}{6} < 0,$$

tačka $S_1(0,0)$ je tačka lokalnog maksimuma.

ZADATAK 10 – 1. DEO (25 MINUTA)

Lokalni ekstremi implicitno zadate funkcije – određivanje stacionarnih tačaka

Odrediti lokalne ekstremume implicitno zadate funkcije

$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 \; - 2xy - 2xz - 2zy = 72.$

1. <u>Korak rešenja</u>: Određivanje stacionarnih tačaka. Rešavamo sistem:

$z_x' = 0,$

$z_y' = 0,$

$F(x, y, z) = 0.$

$$z_x' = -\frac{F_x'}{F_z'} = -\frac{10x - 2y - 2z}{10z - 2x - 2y} = 0,$$

$$z_y' = -\frac{F_y'}{F_z'} = -\frac{10y - 2x - 2z}{10z - 2x - 2y} = 0,$$

$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 \; - 2xy - 2xz - 2zy = 72.$

$10x - 2y - 2z = 0,$

$10y - 2x - 2z = 0,$

$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 \; - 2xy - 2xz - 2zy - 72 = 0.$

Iz prve jednačine imamo da je $x = \frac{y+z}{5}$. Zamenom u drugoj jednačini je $z = 4y$, a onda iz prve jednačine imamo $x = y$.

Zamenom ovih vrednosti u treću jenačinu dobijamo da je

$5y^2 + 5y^2 + 80y^2 \; - 2y^2 - 8y^2 - 8y^2 = 72,$

tj. $y = 1 \vee y = -1.$

Dobijamo da su stacionarne tačke: $S_1(1, 1)$, za $z = 4$ i $S_2(-1, -1)$, za $z = -4.$

ZADATAK 10 – 2. DEO

Lokalni ekstremi implicitno zadate funkcije – primena Silvesterovog kriterijuma

<u>2. Korak primena Silvesterovog kriterijuma:</u>

Odredimo druge parcijalne izvode:

$$z''_{xx} = \frac{-5 - 5z'^2_x + 2z'_x}{5x - x - y},$$

$$z''_{xy} = \frac{-5z'_x z'_y + 1 - z'_x - z'_y}{5x - x - y},$$

$$z''_{yy} = \frac{-5 - 55z'^2_y + 2z'_y}{5x - x - y}.$$

Za tačku $S_1(1,\ 1)$, za $z = 4,$ je

$$z'_x(1,\ 1) = \frac{1 + 4 - 5}{20 - 1 - 1} = 0,\ z'_y\left(1,\ 1\right) = \frac{1 + 4 - 5}{20 - 1 - 1} = 0$$

$$A = z''_{xx}(1,\ 1) = -\frac{5}{18},\ B = z''_{xy}(1,\ 1) = \frac{1}{18},\ C = z''_{yy}(1,\ 1) = -\frac{5}{18}.$$

Računamo veličinu

$$\gamma = AC - B^2 = \frac{2}{27} > 0.$$

Kako je $A = -\frac{5}{18} < 0$, Tačka $S_1(1,\ 1)$ je tačka lokalnog maksimuma.

Za tačku $S_2(-1 -,\ 1)$, za $z = -4,$ je

$$z'_x(-1,\ -1) = 0,\ z'_y\left(-1,\ -1\right) = 0,$$

$$A = z''_{xx}(-1,\ -1) = \frac{5}{18},\ B = z''_{xy}(-1,\ -1) = -\frac{1}{18},\ C = z''_{yy}(-1,\ -1) = \frac{5}{18}.$$

Računamo veličinu

$$\gamma = AC - B^2 = \frac{2}{27} > 0.$$

Kako je $A = \frac{5}{18} > 0$, tačka $S_2(-1,\ -1)$ je tačka lokalnog minimuma.

Poglavlje 8

Zadaci za samostalni rad

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba da dodatno provežbaju.

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = x^2 + 3y^2$ ako između promenljivih x i y postoji veza $4x + y - 7 = 0$.

rešenje: $z_{min}\left(\frac{12}{7}, \frac{1}{7}\right) = 3$

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = 2\ln y + \ln x - 8$ ako između promenljivih x i y postoji veza $\frac{2}{y} + \frac{1}{x} - 6 = 0$.

rešenje: $z_{min}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\left(8 + \ln 8\right)$

Izračunati parcijalne izvode prvog reda implicitno zadate funkcije $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$.

rešenje: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3\left(xy - z^2\right)}$

Izračunati parcijalne izvode prvog i drugog reda implicitno zadate funkcije $x^2z + yz^2 + 1 = 0$.

rešenje:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xz}{x^2 + 2yz}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z^2}{x^2 + 2yz}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{6x^4z - 8y^2z^3}{\left(x^2 + 2yz\right)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4x^2z^2 + 6yz^4}{\left(x^2 + 2yz\right)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{6x^3z^2 + 8xyz^3}{\left(x^2 + 2yz\right)^3}$$

Odrediti drugi totalni diferencijal funkcije $z = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + y^3$.

rešenje: $d^2z = (6x + 4)dx^2 + 2(4x + 6y)dxdy + (6x + 6y)dy^2$

Odrediti Tejlorov polinom trećeg stepena koji aproksimira funkciju $z = e^x \ln(1 + y)$ u okolini tačke $(0, 0)$.

rešenje: $z = y + \frac{1}{2}\left(2xy - y^2\right) + \frac{1}{6}\left(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3\right)$

Odrediti Tejlorov polinom trećeg stepena koji aproksimira funkciju $z = 2x^3 + y^2 + 3x^2y^2$ u okolini tačke $(-1, 2)$.

rešenje:

$$z = 14 - 18(x+1) + 16(y-2) + 6(x+1)^2 - 24(x+1)(y-2) + 13(y-2)^2 + 12(x+1)^2(y-2)$$

Vreme izrade:

1. 10 minuta; 2. 10 minuta; 3. 10 minuta; 4. 10 minuta; 5. 10 minuta; 6. 10 minuta; 7. 10 minuta;

Zaključak za lekciju 05

REALNA FUNKCIJA DVE REALNE PROMENLJIVE

Domen, granična vrednost, neprekidnost, diferencijabilnost, parcijalni izvodi prvog i višeg reda, totalni diferencijal prvog i višeg reda, lokalni ekstremi funkcije dve promenljive.

Realna funkcija dve realne promenljive je veoma bitna za opisivanje pojmova iz prirodnih i tehničkih nauka. Znanje kojim ste ovladali će biti od značaja za kako za praćenje daljeg gradiva, tako i za razumevanje i opisivanja matematičkih modela u tehničkim naukama.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. Rale Nikolić, Nada Damljanović, Matematika 2 – zbirka zadataka, Fakultet tehničkih nauka, Čačak, 2016. godina
4. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.

UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Diferencijalne jednačine prvog reda

Lekcija 08

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 08

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA

Uvod

UVOD

Diferencijalne jednačine prvog reda.

U ovoj lekciji ćemo se upoznati sa pojmom obične diferencijalne jednačine prvog reda, s različitim tipovima diferencijalnih jednačina prvog reda, kao i s postupcima za njihovo rešavanje.

Diferencijalne jednačine su od fundamentalnog značaja u nauci i tehnici je se čitav niz pojava, zakonitosti i problema izražavaju diferencijalnim jednačinama. One posebno mesto zauzimaju u fizici, hemiji, biologiji, mehanici i drugim naukama.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Obične diferencijalne jednačine prvog reda

POJAM DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA

Diferencijalne jednačine su veoma značajne u procesu modeliranja raznih pojava u prirodnim i tehničkim naukama.

Neka je dat interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ i neka je na tom intervalu definisana funkcija $y = y(x)$ koja će biti nepoznata u posmatranim jednačinama. Neka je funkcija $y(x)$ diferencijabilna i neka je na intervalu $[a, b]$ funkcija $y'(x)$ neprekidna funkcija.

Obična diferencijalna jednačina prvog reda je jednačina koja uključuje nepoznatu funkciju jedne promenljive (koju treba odrediti), kao i njen prvi izvod. Ovom jednačinom se opisuje veza između takve funkcije i njenog prvog izvoda. Ona može biti zadata u implicitnom ili eksplicitnom obliku.

Opšti implicitni oblik diferencijalne jednačine prvog reda je svaki izraz oblika

$$F(x, y, y') = 0,$$

gde je F realna funkcija od tri nezavisne realne promenljive sa dopustivim domenom.
Opšti eksplicitni oblik diferencijalne jednačine prvog reda je svaki izraz oblika

$$y' = f(x, y),$$

gde je f realna funkcija od dve nezavisne realne promenljive sa dopustivim domenom.

Napomena. Za funkciju F domen je dopustiv ako po svakoj od koordinata obuhvata sve potrebne vrednosti za x, y, odnosno y' dok je za funkciju f domen dopustiv, ako po svakoj od koordinata obuhvata sve potrebne vrednosti za x i y.

Generalno govoreći, diferencijalne jednačine su veoma značajne u procesu modeliranja raznih pojava u prirodnim i tehničkim naukama. Određivanjem njihovih rešenja (ako postoje) definišemo funkcijske odnose između veličina u procesu koji modeliramo.

Napomena. Diferencijalne jednačine prvog reda se mogu, pored implicitnog i eksplicitnog oblika, zadati u obliku preko diferencijala tj. u obliku

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

S ovog oblika se može preći na eksplicitni ili implicitni oblik diferencijalne jednačine, kao i obrnuto.

Primer. U nastavku su navedene neke diferencijalne jednačine prvog reda:

1. $xdx + \sqrt{x^2 + y^2}dy = 0$, zadata preko diferencijala,

2. $3xy' - x^2y = \ln(\operatorname{tg} x)y^2$, zadata u implicitnom obliku,

3. $y' = \dfrac{3y - 5x - 6}{4y + 3x - 8}$ zadata u eksplicitnom obliku.

OPŠTE, PARTIKULARNO I SINGULARNO REŠENJE

Opšta i partikularna rešenja se dobijaju nekom od metoda za integraljenje. Svako drugo rešenje se naziva singularno rešenje, tj. ono se ne može dobiti iz opšteg.

Opšte rešenje ili opšti integral jednačine

$$F(x, y, y') = 0,$$

odnosno, jednačine $y' = f(x, y)$, (ako postoji) je svaka funkcija oblika $\varphi(x, y, C) = 0$, gde su $x \in [a, b]$ i $C \in \mathbb{R}$ koja ih zadovoljava. Funkcija $\varphi(x, y, C) = 0$, gde su $x \in [a, b]$ i $C \in \mathbb{R}$ u ravni $\mathbb{R}^2$ predstavlja familiju krivih koje zavise od jednog parametra C. One se nazivaju integralne krive za date diferencijalne jednačine. Kroz proizvoljnu tačku $M(x_0, y_0)$ ravni može prolaziti jedna ili više integralnih krivih ako je zadovoljen uslov $\varphi(x_0, y_0, C) = 0$, odakle se može odrediti realna vrednost za C. Svakoj realnoj vrednost dobijenoj za C iz poslednjeg uslova odgovaraće po jedna integralna kriva, ako tu vrednost za C zamenimo u opštem rešenju diferencijalne jednačine. Takva kriva predstavlja partikularno rešenje za posmatrane diferencijalne jednačine. Zadavanje tačke $M(x_0, y_0)$, tj. postavljanje uslova da za $x = x_0$, je $y_0 = y(x_0)$ se naziva početni uslov ili početni vrednost .

Opšta i partikularna rešenja diferencijalnih jednačina prvog reda, ako postoje, se dobijaju nekom od metoda za integraciju. Za takvu diferencijalnu jednačinu se kaže da je rešiva pomoću kvadratura. Svako drugo rešenje diferencijalne jednačine se naziva singularno rešenje. Dakle, to je rešenje koje se ne može dobiti iz opšteg rešenja ni za koju vrednost konstante $C \in \mathbb{R}$.

Napomena. Za svaku jednačinu oblika $F(x, y, y') = 0$, odnosno $y' = f(x, y)$, pod uslovom neprekidnosti i pod još jednim uslovom koji treba da važi za funkciju F, odnosno f – uslovom fiksne tačke, može se preko Koši – Pikarove teoreme (o kojoj ovde neće biti reči) dokazati postojanje i jedinstvenost jednog njenog partikularnog rešenja, ako je dat početni uslov da je za $x = x_0$, $y_0 = y(x_0)$. Ovaj uslov se naziva Košijev uslov , a problem određivanja pomenutog partikularnog rešenja naziva se Košijev problem ili Košijev zadatak .

Uopšteno govoreći, svaka diferencijalna jednačina prvog reda može biti ili rešiva (ima barem jedno rešenje) ili nerešiva (skup rešenja je prazan). Rešavanje ove jednačine podrazumeva poznavanje postupka koji nam za rezultat daje sva njena rešenja (ako ih ima).

Rešive jednačine mogu biti takve da je poznat postupak za njihovo rešavanje ili da se takav postupak ne zna. One jednačine koje su rešive, a za koje je nepoznat postupak za njihovo rešavanje se dele na: jednačine za koje se može dokazati da postoji postupak za njihovo rešavanje, ali da još uvek nema teorijskih dostignuća da bi se taj postupak odredio i na jednačine koje su rešive i za koje se dokazuje da ne postoji konstruktivni postupak za njihovo rešavanje bez dodatnih uslova (takva je npr. Rikatijeva jednačina).

Napomena. Osim pomenutih rešenja za diferencijalne jednačine postoje još približna i granična (asimptotska) rešenja, ali se njima ovde nećemo baviti.

TIPOVI OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA PRVOG REDA

U ovoj lekciji će biti obrađene diferencijalne jednačina prvog reda za koje znamo postupke za određivanje njihovog ukupnog rešenja (opšte rešenje + singularna rešenja).

U nastavku ćemo razmotriti nekoliko tipova rešivih diferencijalnih jednačina prvog reda za koje znamo postupke za određivanje njihovog ukupnog rešenja (opšte rešenje + singularna rešenja). Od takvih diferencijalnih jednačina prvog reda ćemo obraditi:

- Jednačinu koja razdvaja promenljive,
- Homogenu jednačinu,
- Jednačinu koja se može svesti na homogenu jednačinu,
- Linearnu jednačinu,
- Bernulijevu jednačinu,
- Jednačina koja predstavlja totalni diferencijal neke funkcije,
- Rikatijevu jednačinu.
- Lagranžovu jednačinu,
- Kleroovu jednačinu.

Poglavlje 2

Jednačina koja razdvaja promenljive

POSTUPAK ZA REŠAVANJE

Postupak za rešavanje jednačine ovog tipa se zasniva na razdvajanju promenljivih na različite strane znaka jednakosti, a nakon toga se izvršava integracija cele jednakosti.

Pretpostavimo da je na intervalu $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ nepoznata funkcija $y = f(x), x \in [a,b]$ neprekidna funkcija zajedno sa svojom izvodnom funkcijom $y'(x)$. Sada ćemo razmotriti rešavanje diferencijalnih jednačina prvog reda koje imaju oblik (ili se mogu na njega svesti)

$$y' = f(x) \cdot g(y),$$

odnosno,

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y),$$

gde je $f(x)$ neprekidna funkcija na $x \in [a,b]$ i $g(y)$ neprekidna funkcija na $y \in [c,d] \subseteq \mathbb{R}$, gde je $g(y) \neq 0$, za svako $y \in [c,d]$.

Ovakva jednačina naziva se diferencijalna jednačina kod kojih se promenljive mogu razdvojiti i ona je rešiva po nepoznatoj funkciji $y(x)$, tj. njena rešenja se mogu dobiti integracionim metodama. Ona se rešava na sledeći način

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \Leftrightarrow G(y) + C_1 =$$
$$F(x) + C_2, (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow G(y) = F(x) + C,$$

gde je $C = (C_2 - C_1) \in \mathbb{R}$, a funkcije G i F su primitivne funkcije za funkcije $\frac{1}{g(y)}$ i $f(x)$, tim redom.
Funkcija $G(y) = F(x) + C$ predstavlja opšte rešenje diferencijalne jednačine koja razdvaja promenljive u implicitnom obliku i njena partikularna rešenja se mogu dobiti zadavanjem pojedinačnih vrednosti za $C \in \mathbb{R}$. Ako je moguće, funkciju $G(y) = F(x) + C$ koja predstavlja opšte rešenje jednačine koja razdvaja promenljive potrebno je prevesti u eksplicitan oblik.

Napomena. U slučaju da je funkcija $g(y) \neq 0$, ali da za neko y_0 važi da je $g(y_0) = 0$, tada je $y = y_0$ rešenje koje se ne može dobiti iz opšteg rešenja, tj. ono je singularno rešenje. To ilustrujemo sledećim primerom.

Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'^2 + y^2 - 1 = 0$. Da li ova diferencijalna jednačina ima singularna rešenja?

Diferencijalnu jednačinu $y'^2 + y^2 - 1 = 0$ možemo zapisati u obliku $y' = \pm\sqrt{1-y^2}$, odakle dobijamo $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm dx$, za $y \in (-1,1)$. Dalje, integracijom dobijamo $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm \int dx$, odnosno $\arcsin y = C \pm x$. Dakle, opšte rešenje ove diferencijalne jednačine je $y = \sin(C \pm x)$.

Može se proveriti da $y_1 = 1$ i $y_2 = -1$ jesu rešenja diferencijalne jednačine $y'^2 + y^2 - 1 = 0$ koja se ne mogu dobiti iz opšteg rešenja (niti za jednu vrednost konstante C,) pa $y_1 = 1$ i $y_2 = -1$ predstavljaju singularna rešenja ove diferencijalne jednačine.

PRIMER

Rešavanje diferencijalne jednačine koja razdvaja promenljive.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$x^3 - (y+1)^3 y' = 0.$$

Rešenje. Ako iskoristimo da je $y' = \frac{dy}{dx}$, data jednačina se može napisati u sledećem obliku

$$\begin{aligned} x^3 - (y+1)^3 \frac{dy}{dx} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^3 dx - (y+1)^3 dy = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x^3 dx = (y+1)^3 dy \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \int x^3 dx = \int (y+1)^3 dy \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^4}{4} + c = \frac{(y+1)^4}{4}. \end{aligned}$$

Proširivanjem prethodne jednačine sa 4 i uvođenjem da je $c_1 = 4c$, imamo da je $(y+1)^4 = x^4 + c_1$. Opšte rešenje polazne jednačine je

$$y = -1 \pm \sqrt[4]{x^4 + c_1}.$$

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: primena diferencijalne jednačine koja razdvaja promenljive.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: Njutnov zakon hlađenja.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

Homogena jednačina po x i y

POSTUPAK REŠAVANJA

Prilikom rešavanja ovog tipa diferencijalne jednačine potrebno je, najpre, proveriti da li je ona homogena, a nakon toga uvesti novu nepoznatu funkciju.

Diferencijalna jednačina oblika

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{odnosno} \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

ili svaka diferencijalna jednačina koja se može svesti na ovaj oblik, naziva se homogena diferencijalna jednačina po x i y. Za neku jednačinu kažemo da je homogena po x i y ako se $f\left(\frac{y}{x}\right)$ ne menja zamenom x sa kx i y sa ky, gde je $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dakle, tada važi

$$y' = f\left(\frac{ky}{kx}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Primer. Jednačina oblika $xyy' = x^2 + y^2$ jeste homogena jednačina po x i y, jer se može predstaviti u obliku

$$x^2 + y^2 = xyy' / : xy \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Takođe, važi da je

$$y' = \frac{1}{\frac{ky}{kx}} + \frac{ky}{kx} = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ovu jednačina je moguće rešavati pomoću kvadratura. U tu svrhu treba uvesti smenu $z = \frac{y}{x}$, gde je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija. Odavde dobijamo da je $y = x \cdot z$, tj. $y' = z + xz'$.

Početna jednačina, sada, postaje

$$z + xz' = f(z), \quad \text{tj.} \quad z + x\frac{dz}{dx} = f(z).$$

Ona predstavlja jednačinu koja razdvaja promenljive. Tada je

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z) - z}.$$

Integracijom ove jednačine dobijamo da je

$$x = c \cdot e^{\int \frac{dz}{f(z)-z}},$$

što predstavlja opšte rešenje jednačine koja razdvaja promenljive, po funkciji z. Opšte rešenje polazne jednačine se dobija vraćanjem uvedene smene i tada je

$$x = c \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Napomena. U prethodnom postupku, za dobijenu diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive po z može se desiti da za određenu vrednost $z = z_0$ važi da je $f(z_0) - z_0 = 0$. Tada je $z = z_0$ jedno njeno rešenje. Stoga, za polaznu homogenu jednačinu, s obzirom na smenu, imamo da je $y = z_0 \cdot x$, jedno njeno rešenje.

PRIMER - 1. DEO

Homogena diferencijalna jednačina – provera i uvođenje smene.

Rešiti diferencijalnu jednačinu:

$$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx.$$

Rešenje. Nakon deobe prethodne jednačine sa dx, ova diferencijalna jednačina se može napisati u obliku

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Prethodna jednačina nakon deobe sa x, postaje

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Dalje, ako uvedemo smene $x = k \cdot x, y = k \cdot y, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, imamo da je

$$y' = f\left(\frac{ky}{kx}\right) = \frac{ky}{kx} + \sqrt{1 + \left(\frac{ky}{kx}\right)^2} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

Ovo znači da je jednačina

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \qquad (*)$$

homogena po x i y.

Homogenu jednačinu po x i y rešavamo uvođenjem smene $z = \frac{y}{x}$, gde je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija. Iz smene je $y = x \cdot z$ imamo da je $y' = z + x \cdot z'$. Zamenom dobijenog u jednačini (*) dobijamo da je

$$z + xz' = z + \sqrt{1 + z^2}.$$

Odavde imamo da je

$$x\frac{dz}{dx} = \sqrt{1+z^2}.$$

Dobijena jednačina predstavlja onu koja razdvaja promenljive. Razdvajanjem promenljivih ona postaje

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{dx}{x}.$$

PRIMER - 2. DEO

Homogena diferencijalna jednačina – rešavanje dobijene diferencijalne jednačine koja razdvaja promenljive.

Dobijenu jednačinu rešavamo integraljenjem

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{dx}{x}.$$

Imamo da je

$$\ln|z+\sqrt{1+z^2}| = \ln|x| + \ln|c|, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Dalje, imamo da je

$$\ln|z+\sqrt{1+z^2}| = \ln|cx|, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Opšte rešenje po z glasi

$$z+\sqrt{1+z^2} = cx, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Dalje, izrazimo funkciju $z = z(x)$, kako bismo odredili opšte rešenje polazne jednačine po y.

Tada imamo

$$\begin{aligned}\sqrt{1+z^2} = cx - z \quad &\Rightarrow \quad 1+z^2 = c^2x^2 - 2cxz + z^2 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad z = \frac{c^2x^2-1}{cx}, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.\end{aligned}$$

Kako je $y = x \cdot z$, tada je

$$y = \frac{c^2x^2-1}{c},\ \ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Napomena. U prethodnom primeru smo uzeli da je konstanta u obliku $\ln|c|$. Ovo je dozvoljeno raditi i često se koristi u zadacima kako bi se omogućilo zapisivanje opšteg rešenja u što jednostavnijem obliku.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: homogena jednačina.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

3.1 Diferencijalna jednačina koja se svodi na homogenu

POSTUPAK REŠAVANJA - PRVI SLUČAJ

Ako za koeficijente važi $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ tada se takva jednačina uvođenjem odgovarajuće smene svodi na homogenu jednačinu.

Diferencijalna jednačina oblika

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

gde su $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$se može svesti na homogenu jednačinu uvođenjem određenih smena. Moguća su dva slučaja.

U prvom slučaju, ako je

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

tada se uvodi sledeća smena

$$x = X + \alpha,$$

$$y = Y + \beta.$$

de je X nova nepoznata, $Y = Y(X)$ nova nepoznata funkcija, a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konstante koje treba odrediti, kako bi se polazna jednačina svela na homogenu. Uvodeći smenu u polaznu jednačinu dobijamo

$$Y' = f\left(\frac{a_1 X + a_1 \alpha + b_1 Y + b_1 \beta + c_1}{a_2 X + a_2 \alpha + b_2 Y + b_2 \beta + c_2}\right)$$

a koeficijente α i β određujemo iz sledećih zahteva

$$a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 = 0,$$

$$a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2 = 0.$$

Ovako određene konstante α i β dovode do jednačine

$$Y' = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right),$$

odnosno,

$$Y' = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right),$$

tj.

$$Y' = g\left(\frac{Y}{X}\right).$$

Poslednja jednačina predstavlja homogenu jednačinu po X i Y, koja se rešava po već izloženom metodu. Na kraju je potrebno vratiti sve uvedene smene.

POSTUPAK REŠAVANJA – DRUGI SLUČAJ

Ako za koeficijente važi $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ tada se takva jednačina rešava na uvođenjem nove nepoznate funkcije $u = a_1 \cdot x + b_1 \cdot y$..

Drugi slučaj podrazumeva situaciju da je u diferencijalnoj jednačini oblika

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

gde su $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$,važi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ovo znači da je su a_1 i a_2, kao i b_1 i b_2 proporcionalne veličine, tj.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \alpha, \;\; \alpha \in \mathbb{R},$$

pa je tada $a_1 = \alpha \cdot a_2, b_1 = \alpha \cdot b_2, \alpha \in \mathbb{R}$. U ovoj situaciji se uvodi nova nepoznata funkcija $u = u(x)$ koja je oblika

$$u = a_1x + b_1y \quad \Rightarrow \quad u' = a_1 + b_1y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u' - a_1}{b_1}.$$

Uvođenjem ove smene u polaznu jednačinu, ona postaje jednačina

$$u' = a_1 + b_1 f\left(\frac{u + c_1}{ku + c_1}\right)$$

i predstavlja diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive.

PRIMER

Diferencijalna jednačina koja se svodi na homogenu.

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y' = \left(\frac{x-y-1}{2x-2y+1}\right)^2.$$

Rešenje: Kako je $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$, uvodimo novu funkciju $u(x) = x - y$, pa je $u' = 1 - y'$. Zamenom, u polaznoj jednačini

$$1 - u' = \left(\frac{u-1}{2u+1}\right)^2,$$

tj. dobijena jednačina je ona koja razdvaja promenljive. Tada je

$$\frac{du}{dx} = 1 - \left(\frac{u-1}{2u+1}\right)^2 = \frac{3u^2+6u}{4u^2+4u+1}.$$

Sada imamo

$$\int \frac{4u^2+4u+1}{3u(u+2)}du = \int dx.$$

Rešimo integral na levoj strani

$$\int \frac{4u^2+4u+1}{3u(u+2)}du = \int\left(\frac{4u(u+2)}{3u(u+2)} + \frac{1-4u}{3u(u+2)}\right)du = \frac{4}{3}\int du + \frac{1}{3}\int\frac{1-4u}{u(u+2)}du.$$

Integral $\int\frac{1-4u}{u(u+2)}du$ ćemo rešavati metodom neodređenih koeficijenata i imamo

$$\frac{1-4u}{u(u+2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+2},$$

odakle dobijamo da je $A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{9}{2}$. Tada je:

$$\int \frac{4u^2+4u+1}{3u(u+2)}du = \frac{4}{3}u + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln|u| - \frac{9}{2}\ln|u+2|\right).$$

Tada je:

$$\frac{4}{3}u + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln|u| - \frac{9}{2}\ln|u+2|\right) = x + C,$$

odnosno

$$\frac{1}{6}\left(8u + \ln|u| - 9\ln|u+2|\right) = x + C.$$

Vraćajući smenu $u(x) = x - y$ i množenjem prethodnog izraza sa 6, nakon sređivanja, dobijamo:

$$2x - 8y + \ln|x-y| - 9\ln|x-y+2| = C_1,\ C_1 = 6C.$$

Poglavlje 4

Linearna jednačina

POSTUPAK REŠAVANJA – HOMOGENA LINEARNA JEDNAČINA

Linearna jednačina je rešiva i postoji postupak za njeno rešavanje. Sva njena rešenja su partikularna, tj. nema singularnih rešenja.

Svaka jednačina oblika

$$y' + a(x)y = b(x),$$

ili bilo koja druga čiji se oblik može svesti na ovaj, gde su $a(x)$ i $b(x)$ neprekidne funkcije na $[a, b]$, naziva se linearna (obična) diferencijalna jednačina prvog reda. Data jednačina je rešiva i postoji postupak za njeno rešavanje. Sva njena rešenja su partikularna, tj. nema singularnih rešenja.

Ako je $b(x) = 0$, za svako $x \in [a, b]$, tada se prethodna jednačina naziva homogena linearna (obična) diferencijalna jednačina prvog reda, a ako je $b(x) \neq 0$, za barem jedno $x \in [a, b]$, tada ovu jednačinu nazivamo nehomogena linearna (obična) diferencijalna jednačina prvog reda.

Kada je data jednačina u homogenoj varijanti, onda se kroz određeni integracioni postupak može doći do formule za njeno opšte rešenje. Naime, tada imamo

$$\begin{aligned} y' + a(x)y = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -a(x)y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -a(x)dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = -\int a(x)dx + c_0, c_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tada imamo da je

$$y(x) = e^{c_0} e^{-\int a(x)dx}, c_0 \in \mathbb{R}.$$

Poslednji rezultat može se napisati u obliku

$$y(x) = ce^{-\int a(x)dx}, c = e_0^c, c_0 \in \mathbb{R}.$$

POSTUPAK REŠAVANJA – NEHOMOGENA LINEARNA JEDNAČINA

Jedan od metoda za nalaženje rešenja ove jednačine jeste Lagranžev metod varijacije konstanti o kome će biti više reči na sledećem predavanju.

Međutim, ako je jednačina nehomogenog karaktera, tj. oblika

$$y' + a(x)y = b(x)$$

onda je postupak za njeno rešavanje takav da koristeći opšte rešenje homogene jednačine i $\text{metod varijacije konstanti}$ (o kome će biti više reči u sledećoj lekciji) ili kako se još naziva Lagranžev metod dolazimo do opšteg rešenja nehomogene jednačine. Ovaj metod se zasniva na tome da se u opštem rešenju homogene jednačine, konstanta c proglasi funkcijom $c(x)$, koju treba tek odrediti. Tada je opšte rešenje nehomogene linearne diferencijalne jednačine prvog reda oblika

$$y(x) = c(x)e^{-\int a(x)dx}, c \in \mathbb{R}.$$

gde funkciju $c(x)$ određujemo iz uslova $c'(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x)$.

Tada je

$$c'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx},$$

odnosno nakon integracije poslednjeg izraza dobijamo

$$c(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + c, c \in \mathbb{R}.$$

OPŠTE REŠENJE LINEARNE JEDNAČINE

Postoje i drugi postupci, osim pomenutog Lagranževog metoda, za određivanje opšteg rešenja linearne diferencijalne jednačine, ali o njima ovde neće biti reči.

Prethodna razmatranje indukuje sledeću formulu koja predstavlja opšte rešenje jednačine linearne jednačine, bilo da je ona homogenog ili nehomogenog karaktera, i to dato u eksplicitnom obliku

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\left(\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + c\right),$$

gde je $c \in \mathbb{R}$, a konstante iz integracija u eksponentima se ignorišu.

Napomena. Dato opšte rešenje se prilikom rešavanja zadataka može koristiti bez izvođenja prethodne formule. Dakle, na ispitu će biti dozvoljeno da se koristi ova formula.

Napomena. U nekim situacijama može se desiti da posmatrana diferencijalna jednačina nije linearna jednačina, u odnosu na posmatranu nepoznatu funkciju $y = y(x)$, ali da jeste linearna jednačina kada se posmatra da je $x = x(y)$ nepoznata funkcija. Tada je ova jednačina oblika

$$x' + a(y)x = b(y)$$

i treba je tako i rešavati.

PRIMER

Rešavanje linearne diferencijalne jednačine prvog reda.

Rešiti jednačinu

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \cos x.$$

Rešenje. Data jednačina je linearna, pri čemu je $a(x) = -\operatorname{tg} x$, $b(x) = \cos x$. Tada je

$$e^{-\int a(x)dx} = e^{-\int -\operatorname{tg} x dx} = e^{\int \operatorname{tg} x dx} = e^{-\ln|\cos x|} = e^{\ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|} = \frac{1}{\cos x}.$$

S druge strane, imamo da je

$$\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c.$$

Opšte rešenje je oblika

$$y(x) = \frac{1}{\cos x}\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c\right).$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: linearna diferencijalna jednačina

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Bernulijeva jednačina

POSTUPAK ZA REŠAVANJE

Bernulijeva jednačina je jako slična linearnoj. Njeno rešavanje se nakon uvođenja smene svodi na rešavanje linearne jednačine.

Svaka jednačina oblika

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha},$$

ili bilo koja druga čiji se oblik može svesti na ovaj, gde su $a(x)$ i $b(x)$ neprekidne funkcije na intervalu $[a, b]$ i $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, naziva se Bernulijeva diferencijalna jednačina.

Napomena. U slučaju da je $\alpha = 0$ ili $\alpha = 1$, prethodna jednačina se svodi na linearnu jednačinu.

Ova jednačina je rešiva i poseduje konstruktivni postupak za rešavanje, a njeno ukupno rešenje je sačinjeno od opštih rešenja -- singularnih nema.

Postupak za rešavanje Bernulijeve jednačine se ogleda u tome što se u nju, najpre, uvede smena

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

gde je $y = y(x), x \in [a, b]$, a $z = z(x), x \in [a, b]$ nova nepoznata funkcija. Nakon uvođenja ove smene, Bernulijeva jednačina postaje obična linearna diferencijalna jednačina prvog reda po nepoznatoj funkciji $z = z(x)$ neprekidnoj na intervalu $[a, b]$.

Na kraju je potrebno dobijenu linearnu jednačinu rešiti po nepoznatoj funkciji z i vraćajući pomenutu smenu dobijamo opšte rešenje Bernulijeve jednačine.

Napomena. U nekim situacijama može se desiti da posmatrana diferencijalna jednačina nije Bernulijeva jednačina u odnosu na posmatranu nepoznatu funkciju $y = y(x)$, ali da jeste Bernulijeva jednačina kada se posmatra da je $x = x(y)$ nepoznata funkcija. Tada posmatranu jednačinu treba tako i rešavati.

PRIMER

Rešavanje Bernulijeve jednačine i uveđenjem smene i njenim svođenjem na linearnu jednačinu.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y' - \frac{4x}{x^2+1}y - (2x^2+8)\sqrt{y} = 0.$$

Rešenje. Datu jednačinu zapisaćemo u obliku

$$y' - \frac{4x}{x^2+1}y = (2x^2+8)\sqrt{y}$$

iz kojeg je jasno da se radi o Bernulijevoj diferencijalnoj jednačini. Deljenjem sa $\sqrt{y}$, dobićemo

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4x}{x^2+1}\sqrt{y} = 2x^2+8.$$

Dalje, uvodimo smenu $\sqrt{y} = z$, pri čemu je $\frac{y'}{2\sqrt{y}} = z'$, tj. $\frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'$, pa se data jednačina transformiše u oblik

$$2z' - \frac{4x}{x^2+1}z = 2x^2+8,$$

tj. nakon deljenja sa 2 prethodne jednačine dobijamo

$$z' - \frac{2x}{x^2+1}z = x^2+4.$$

Ovo je linearna diferencijalna jednačina čije je rešenje određeno sa

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{2x}{x^2+1}dx}\left(C + \int (x^2+4)e^{-\int \frac{2x}{x^2+1}dx}dx\right) \\ &= e^{\ln(x^2+1)}\left(C + \int (x^2+4)e^{-\ln(x^2+1)}dx\right) \\ &= (x^2+1)\left(C + \int \frac{x^2+4}{x^2+1}dx\right) \\ &= (x^2+1)\left(C + \int \left(1 + \frac{3}{x^2+1}dx\right)\right) \\ &= (x^2+1)\left(C + x + 3\operatorname{arctg} x\right). \end{aligned}$$

Odavde dobijamo da je rešenje početne jednačine

$$\sqrt{y} = (x^2+1)\left(C + x + 3\operatorname{arctg} x\right),$$

odnosno

$$y = (x^2+1)^2(C + x + 3\operatorname{arctg} x)^2.$$

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: Bernulijeva jednačina - primer 1

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: Bernulijeva jednačina - primer 2

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 6

Jednačina koja predstavlja totalni diferencijal

POJAM

Može se desiti da diferencijalna jednačina prvog reda nekog drugog tipa bude i jednačina sa totalnim diferencijalom.

Svaki jednačina oblika

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \qquad (*)$$

ili bilo koja druga jednačina čiji se oblik može svesti na ovaj, gde su $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ neprekidne funkcije na dopustivim domenima u $\mathbb{R}^2$ za $x \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}, y \in [c,d] \subseteq \mathbb{R},$ naziva se obična diferencijalna jednačina sa totalnim diferencijalom ako postoji funkcija $U(x,y)$ sa dopustivim domenom takva da je

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \text{ i } \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y).$$

U tom slučaju polazna jednačina se može zapisati

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = du = 0. \qquad (**)$$

U ovom slučaju primećujemo da je jednačina oblika $(*)$ ekvivalentna jednačini oblika $(**)$, a iz jednačine $(**)$ imamo da je

$$U(x,y) = C, C \in \mathbb{R}.$$

Sama funkcija $U(x,y)$ naziva se potencijal jednačine (*) , a formulom $U(x,y) = C,\ C \in \mathbb{R}$, zadato je opšte rešenje jednačine $(*)$ u implicitnom obliku što ćemo pokazati kasnije.
Ova jednačina nema singularnih rešenja. Ako je potrebno i ako je moguće iz rešenja oblika $U(x,y) = C,\ C \in \mathbb{R}$, može se izvesti i eksplicitan oblik tog rešenja.

Da bi za jednačinu $(*)$ tražili pomenuti potencijal, potrebno je prvo ustanoviti kriterijum da li on uopšte i postoji. Tome govori sledeći stav.

Stav. Za jednačinu (*) postoji potencijal $U(x,y)$ ako i samo ako su $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ i $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ neprekidne funkcije na dopustivim domenima za $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ i ako je

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

na preseku pomenutih domena.

ODREĐIVANJE OPŠTEG REŠENJA

Prilikom određivanje opšteg rešenja potrebno je primeniti tzv. parcijalno integraljenje, tj. integraljenje funkcije dve promenljive, po jednoj od promenljivih.

U sledećem razmatranju izložimo ukratko postupak nalaženja funkcije $U(x,y)$ za jednačinu $(*)$, uz pretpostavku da je ispunjen uslov $P'_x(x,y)=Q'_y(x,y)$. Najpre, iz jednakosti $U'_x(x,y)=P(x,y)$ imamo da je

$$U(x,y)=\int P(x,y)\partial x=p(x,y)+C(y),$$

gde je $p(x,y)$ primitivna funkcija (po promenljivoj x) za funkciju $P(x,y)$ i važi da je

$$U'_x(x,y)=p'_x(x,y)+\underbrace{(C(y))'_x}_{=0}=P(x,y).$$

Dalje, iz $U'_y(x,y)=Q(x,y)$, imamo da je

$$U'_y(x,y)=p'_y(x,y)+\underbrace{(C(y))'_y}_{=0}=Q(x,y).$$

pa je

$$Q(x,y)=p'_y(x,y)+C'_y(y),$$

Na kraju, rešavamo poslednju jednačinu po $C(y)$, gde pretpostavlja se da je ona trivijalnog karaktera i da ima samo opšte rešenje dato sa $C(y)=\varphi(x,y)+C_1,(C_1\in\mathbb{R})$.

Tada je

$$U(x,y)=\int P(x,y)\partial x=p(x,y)+\varphi(x,y)+C_1,(C_1\in\mathbb{R}),$$

potencijal jednačine $(*)$ i njeno opšte rešenje je dato sa

$$p(x,y)+\varphi(x,y)+C_1=C_2,(C_1,C_2\in\mathbb{R}),$$

odnosno sa

$$p(x,y)+\varphi(x,y)=C,\ C=(C_1-C_2)\in\mathbb{R}.$$

Napomena. Svakako, jednačina data sa $(*)$ ne mora biti jednačina sa totalnim diferencijalom, tj. ne mora da bude ispunjen uslov

$$P'_x(x,y) = Q'_y(x,y).$$

Međutim, može se desiti da nakon množenja jednačine (*), nekom funkcijom (koja je funkcija samo po promenljivoj x ili samo po promenljivoj y ili je funkcija dve promenljive x i y) ona postane jednačina sa totalnim diferencijalom. Ova funkcija se naziva integracioni faktor jednačine $(*)$. U teoriji postoje postupci za određivanje ovakvih funkcija, ako one postoje, i sami postupci su uslovljeni time da li je integracioni faktor funkcija samo po promenljivoj x ili samo po promenljivoj y ili je funkcija dve promenljive x i y. O ovome neće biti reči u okviru ove lekcije.

PRIMER

Jednačina sa totalnim diferencijalom.

Rešiti jednačinu:

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

Rešenje. Imamo da je: $P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2$ i $Q(x,y) = 6x^2y + 4y^3$. Kako je

$$P'_y(x,y) = Q'_x(x,y) = 12xy,$$

ova jednačina predstavlja diferencijalnu jednačinu sa totalnim diferencijalom. Tada postoji $U(x,y)$ takvo da je

$$U'_x(x,y) = P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2,\ U'_y(x,y) = Q(x,y) = 6x^2y + 4y^3.$$

Iz prve jednačine, integracijom po promenljivoj x (promenljivu y posmatramo kao konstantu u ovoj integraciji) imamo da je

$$U(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + f(y),$$

gde je $f(y)$ nepoznata funkcija po promenljivoj y koju treba odrediti. Ako uradimo izvod po promenljivoj y od prethodne funkcije dobijamo

$$U'_y(x,y) = 6x^2y + f'(y).$$

Kako smo već ustanovili da mora biti $U'_y(x,y) = Q(x,y) = 6x^2y + 4y^3$, iz ove i prethodne jednačine, njihovim izjednačavanjem dobijamo da je:

$$f'(y) = 4y^3 \Rightarrow f(x) = y^4 + c.$$

Dakle, imamo da je

$$U(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + f(y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + c.$$

S druge strane je $du(x,y) = 0$, pa je $u(x,y) = c_1$, $(c_1 \in \mathbb{R})$. Ukupno imamo da je: $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + c = c_1$,tj.

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}\ (c_2 = c_1 - c).$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: totalni diferencijal - primer

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

AUTORSKI VIDEO KLIP

Jednačina koja predstavlja totalni diferencijal - postupak za rešavanje.

Poglavlje 7

Rikatijeva jednačina

REŠAVANJE RIKATIJEVE JEDNAČINE AKO JE POZNATO PARTIKULARNO REŠENJE

Ova jednačina nije rešiva uz pomoć kvadratura u opštem slučaju, ali uz dodatni uslov može se dobiti konstruktivni postupak za takvo rešavanje.

Svaka jednačina oblika

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y = r(x),$$

ili bilo koja druga jednačina čiji se oblik može svesti na ovaj, gde su $p(x), q(x)$ i $r(x)$ neprekidne funkcije na intervalu $[a, b]$, naziva se Rikatijeva diferencijalna jednačina.

Napomena. Ova jednačina je rešiva i može se dokazati da ne postoji konstruktivan postupak za njeno rešavanje u opštem slučaju, tj. da nije rešiva pomoću kvadratura. Međutim, uz dodatne uslove moguće je napraviti algoritam za njeno rešavanje. Ona ima opšte rešenje, dok singularnih rešenja nema.

Da bi se Rikatijeva jednačina rešavala integracijom može se uvesti dodatni uslov da je poznato jedno njeno partikularno rešenje $y_0 = y_0(x)$, za $x = x_0$, $x_0 \in [a, b]$. Tada se u Rikatijevu jednačinu može uvesti smena

$$y = y(x) = y_0 + \frac{1}{z},$$

gde je $z = z(x)$, $x \in [a, b]$ nova nepoznata funkcije $(z(x) \neq 0,\ x \in [a, b])$, koja u tom slučaju postaje diferencijalna jednačina prvog reda koja je ili linearna ili koja razdvaja promenljive (po nepoznatoj funkciji $z = z(x)$, $x \in [a, b]$).

Nakon rešavanja poslednje jednačine po $z = z(x)$ i vraćanja smene, dobijamo opšte rešenje za Rikatijevu jednačinu pod navedenim uslovom.

PRIMER

Rešavanje Rikatijeve diferencijalne jednačine.

Rešiti jednačinu

$$y' - y^2 + 2e^x y = e^{2x} + e^x,$$

ako se zna da je funkcija $y_0 = e^x$ jedno njeno partikularno rešenje.

Rešenje. Sada u Rikatijevu jednačinu možemo uvesti smenu

$$y = y(x) = e^x + \frac{1}{z},$$

gde je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija. Takođe, da bi uveli smenu u početnu jednačinu treba odrediti

$$y' = e^x - \frac{1}{z^2} z'.$$

Tada imamo, zamenom svih ovih veličina u početnoj jednačini dobijamo

$$e^x - \frac{1}{z^2} z' - \left(e^x + \frac{1}{z}\right)^2 + 2e^x \left(e^x + \frac{1}{z}\right) = e^{2x} + e^x \Rightarrow \frac{1}{z^2} z' + \frac{1}{z^2} = 0 \Rightarrow z' + 1 = 0.$$

Dobijena jednačina je ona koja razdvaja promenljive čijim rešavanjem dobijamo da je

$$z(x) = -x + c, \ (c \in \mathbb{R})$$

pa imamo da je

$$y(x) = e^x + \frac{1}{-x + c}, \ c \in \mathbb{R}.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Rikatijeva jednačina.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 8

Lagranževa i Kleroova jednačina

LAGRANŽEVA JEDNAČINA

Za Lagranževu jednačinu postoji njeno opšte rešenje, kao i postupak za njegovo određivanje.

Svaki izraz oblika

$$y = x \cdot f(y') + g(y'),$$

ili bilo koji drugi čiji se oblik može svesti na ovaj, gde je $y = y(x)$ nepoznata funkcija za $x \in [a, b]$ i gde su f i g neprekidne funkcije na dopustivom domenu, naziva se Lagranževa diferencijalna jednačina.

Ova jednačina ima samo opšte rešenje i postoji postupak za njeno određivanje. Naime, uvedimo (parametar)

$$p = y' = \frac{dy}{dx} \ i \ dy = pdx.$$

Sada je

$$y = x \cdot f(p) + g(p).$$

Ako potražimo diferencijal prethodne jednačine dobijamo

$$dy = d[x \cdot f(p) + g(p)],$$

tj.

$$pdx = f(p)dx + x \cdot f'(p)dp + g'(p)dp.$$

Odavde dobijamo da je

$$(f(p) - p)dx + (x \cdot f'(p) + g'(p))dp = 0.$$

Nakon deobe poslednje jednačine sa dp $(dp \neq 0)$ dobijamo

$$(f(p) - p)\frac{dx}{dp} + x \cdot f'(p) + g'(p) = 0.$$

Na kraju, poslednju jednačinu delimo sa $f(p) - p$, $(f(p) - p \neq 0)$ i dobijamo sledeću jednačinu

$$\frac{dx}{dp}+\frac{f\,'(p)}{f(p)-p}\cdot x=-\frac{g\,'(p)}{f(p)-p'}$$

koja predstavlja linearnu jednačinu po $x=x(p)$.

Njenim rešavanjem po već izloženom postupku dobijamo funkciju $x=x(p),$ čime traženu funkciju $y=y(x)$ dobijamo u parametarskom obliku

$$y=x\cdot f(p)+g(p),\ x=x(p).$$

Napomena. Rešenje Lagranževe jednačine se obično zadržava u ovakvom parametarskom obliku. Međutim,ako je moguće iz ovog oblika eliminisati parametar p, tako da opšte rešenje bude u eksplicitnom obliku $y=y(x)$, to treba i učiniti.

PRIMER 1

Određivanje opšteg rešenja Lagranževe jednačine.

Rešiti jednačinu

$$y=\frac{3}{2}xy\,'+e^{y\,'}.$$

Rešenje. Uvođenjem parametra $p=y\,'$, pri čemu je $f(p)=\frac{3}{2}p$ i $g(p)=e^p$, polazna jednačina postaje:

$$y=\frac{3}{2}xp+e^p.$$

Ako potražimo prvi diferencijal prethodne jednačine, dobijamo

$$dy=d\left[\frac{3}{2}x\cdot p+e^p\right],$$

a koristeći da je $dy=pdx$, imamo

$$pdx=\frac{3}{2}pdx+\frac{3}{2}xdp+e^pdp,$$

tj.

$$\frac{1}{2}pdx+\frac{3}{2}xdp=-e^pdp.$$

Nakon deobe poslednje jednačine sa dp $(dp\neq 0)$ dobijamo

$$\frac{1}{2}p\frac{dx}{dp}+\frac{3}{2}x=-e^p.$$

Sada je još samo potrebno poslednju jednačinu podeliti sa $\frac{1}{2}p$ $(p\neq 0)$. Tada dobijamo

$$\frac{dx}{dp} + \frac{3}{p}x = \frac{-2e^p}{p}.$$

Dobijena diferencijalna jednačina je linearna diferencijalna jednačina prvog reda po $x = x(p)$. Njenim rešavanjem (ostavlja se za vežbu studentu) dobijamo da je

$$x(p) = \frac{1}{p^3}(c + (p^2 - 2p + 2)e^p),$$

što predstavlja opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

KLEROOVA JEDNAČINA

Kleroova jednačina predstavlja poseban oblik Lagranževe jednačine.

Svaki izraz oblika

$$y = x \cdot y' + g(y'),$$

ili bilo koji drugi čiji se oblik može svesti na ovaj, gde je $y = y(x)$ nepoznata funkcija za $x \in [a, b]$ i g neprekidna funkcija na dopustivom domenu, naziva se Kleroova diferencijalna jednačina. Kleroova jednačina je poseban oblik Lagranževe funkcije.

Postupak za rešavanje Kleroove jednačine je sličan kao i kod rešavanja Lagranževe jednačine. Najpre, uvodimo parametar p na sledeći način $p = y' = \frac{dy}{dx}$ i $dy = pdx$.

Sada je

$$y = x \cdot p + g(p).$$

Ako potražimo diferencijal prethodne jednačine dobijamo

$$dy = d[x \cdot p + g(p),]$$

tj.

$$pdx = pdx + xdp + g'(p)dp.$$

Odavde dobijamo da je

$$x + g'(p)dp = 0.$$

Ako, najpre, pretpostavimo da je $dp = 0$, integraljenjem prethodne jednačine dobijamo da je $p = c,\ c \in \mathbb{R}$. Tada je

$$y = x \cdot p + g(p) = cx + g(c),\ c \in \mathbb{R}.$$

opšte rešenje Kleroove jednačine.

Ako pretpostavimo da je $x + g'(p) = 0$, imamo da je $x = -g'(p)$.

Ako uvrstimo uz ovu jednačinu i Klerovu jednačinu u obliku $y = x \cdot p + g(p)$ tj.

$$y = x \cdot p + g(p),\ x = -g'(p)$$

gde je p parametar uveden na početku, dobijamo singularno rešenje Kleroove jednačine, zadato preko parametra p. Ovo rešenje nije opšte rešenje, jer nije dobijeno integralnim računom. Potrebno je na kraju, ako je to moguće, iz ovog rešenja eliminisati parametar p i dobiti rešenje u eksplicitnom obliku.

PRIMER 2

Određivanje opšteg rešenja Kleroove jednačine.

Rešiti jednačinu

$$y = x \cdot y' + (y')^2.$$

Rešenje. Prema prethodno izloženom, pri čemu je $g(y') = (y')^2$, imamo da je

$$y = x \cdot p + g(p) = cx + g(c),\ c \in \mathbb{R}.$$

opšte rešenje Kleroove jednačine.

Singularno rešenje tražimo iz uslova

$$y = x \cdot p + g(p),\ x = -g'(p),$$

tj. u našem slučaju, za $p = y'$ i $g(p) = p^2$, je

$$y = x \cdot p + p^2,\ x = -2p.$$

Kako je moguće p izraziti u funkciji od x, tada imamo da je $p = -\frac{x}{2}$, pa je singularno rešenje oblika

$$y = x \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{4}.$$

Poglavlje 9

Pokazna vežba

ZADATAK 1 (5 MINUTA)

Rešavanje jednačina koja razdvaja promenljive.

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$\frac{x}{y} + y' = 0.$

Rešenje:

Posle smene $y' = \frac{dy}{dx}$ dobija se

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$y \quad dy = -x \quad dx$

$\int y \quad dy = -\int x \quad dx + C$

$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$

$x^2 + y^2 = 2C$

$x^2 + y^2 = C_1, \; C_1 = 2C,$

$y = \pm\sqrt{C_1 - x^2}.$

ZADATAK 2 (10 MINUTA)

Određivanje opšteg rešenja jednačine koja razdvaja promenljive.

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$e^y\left(y' + 1\right) = 1.$

Rešenje:

$$e^y\left(y' + 1\right) = 1 \Leftrightarrow e^y\frac{dy}{dx} + e^y = 1 \Leftrightarrow e^y dy + e^y dx = dx \Leftrightarrow e^y dy = dx - e^y dx \Leftrightarrow$$

$$e^y dy = \left(1 - e^y\right)dx \Leftrightarrow \frac{e^y}{1 - e^y}dy = dx \Leftrightarrow \int\frac{e^y}{1 - e^y}dy\begin{bmatrix} \text{smena}: \\ 1 - e^y = t \\ -e^y dy = dt \end{bmatrix} = \int dx + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\int\frac{dt}{t} = x + C \Leftrightarrow -\ln|t| = x + C \Leftrightarrow -\ln\left|1 - e^y\right| = x + C.$$

Tada imamo da je

$$1 - e^y = e^{-x - C},$$

tj.

$$e^y = 1 - e^{-x - C},$$

tj.

$$y = \ln\left|1 - e^{-x - C}\right|.$$

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$xy'\cos y + \sin y = 0.$$

Rešenje: Posle smene $y' = \frac{dy}{dx}$ dobija se:

$$x\frac{dy}{dx}\cos y + \sin y = 0$$

Množenjem sa dx dobijamo

$$x \quad dy\cos y + \sin y \quad dx = 0,$$

$$\frac{\cos y}{\sin y}dy = -\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{\cos y}{\sin y}dy = -\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|\sin y| = -\ln|x| + \ln|C|,$$

$$\ln|\sin y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|,$$

$$\sin y = \frac{C}{x},$$

$$y = \arcsin\left(\frac{C}{x}\right).$$

ZADATAK 3 (10 MINUTA)

Homogena jednačina po x i y .

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}.$

Rešenje: Deljenjem polazne jednačine sa x, dobijamo:

$y' = \frac{y}{x} \cos \ln \frac{y}{x}.$

Provera da li je posmatrana jednačina homogena jeste ta, da se funkcija $f(y/x)$ ne menja ako se u njoj x zameni sa kx, a y sa ky, što je ovde slučaj.

Kako se radi o homogenoj jednačini nju rešavamo smenom $z(x) = \frac{y}{x}$. Tada imamo $y = xz$, tj. $y' = xz' + z$. Uvodeći sve prethodno u polaznu jednačinu, ona postaje

$xz' + z = z \cos \ln z,$

$xz' = z \cos \ln z - z,$

$z' = \frac{z \cos \ln z - z}{x},$

$\frac{dz}{dx} = \frac{z(\cos \ln z - 1)}{x},$

$\frac{dz}{z(\cos \ln z - 1)} = \frac{dx}{x}.$

Integracijom dobijamo

$\int \frac{dz}{z(\cos \ln z - 1)} = \int \frac{dx}{x},$

$\operatorname{ctg} \frac{\ln z}{2} = \ln |x| + \ln \left| C \right| ,$

$\ln \frac{y}{x} = 2 \operatorname{arcctg}(\ln |Cx|),$

$\frac{y}{x} = e^{2 \operatorname{arcctg}(\ln |Cx|)},$

$y = xe^{2 \operatorname{arcctg}(\ln |Cx|)}.$

Napomena. Pri rešavanju integrala $\int \frac{dz}{z(\cos \ln z - 1)}$ uvodimo smenu $\ln z = t,\quad \frac{dz}{z} = dt$ i dobijamo integral $\int \frac{dt}{\cos t - 1}$ koji možemo, korišćenjem trigonometrijskog identiteta $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$ svesti na integral

$\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$

ZADATAK 4 (15 MINUTA)

Diferencijalna jednačina koja se svodi na homogenu

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$y' = \frac{4x - y + 7}{2x + y - 1}$.

Rešenje: Kako je $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, uvodimo smenu $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, gde su brojevi α, β takvi da je $4\alpha - \beta + 7 = 0$ i $2\alpha + \beta - 1 = 0$. Rešavanjem ovog sistema dobijamo da je $\alpha = -1$ i $\beta = 3$. Zamenom u polaznoj jednačini $x = u - 1$, $y = v + 3$, pri čemu je $v = v(u)$, dobijamo diferencijalnu jednačinu

$\frac{dv}{du} = \frac{4u - v}{2u + v}$, tj. $v' = \frac{4u - v}{2u + v}$,

koja je homogena diferencijalna jednačina i koja se rešava uvođenjem nove nepoznate funkcije $w(u) = \frac{v}{u}$. Tada imamo $v = uw$, $v' = uw' + w$ i dobijamo:

$uw' + w = \frac{4 - w}{2 + w}$.

Dobijena jednačina je ona koja razdvaja promenljive. Tada je:

$$\int \frac{dw}{\frac{4 - w}{2 + w} - w} = \int \frac{du}{u}, \text{ tj.} \int \frac{(2 + w)dw}{4 - 3w - w^2} = \ln|u| + \ln\left|C\right|.$$

Rešimo, sada, integral sa leve strane poslednje jednakosti. Kako je $4 - 3w - w^2 = (1 - w)(4 + w)$ radi se racionalnoj integraciji.

Sada imamo:

$$\frac{2 + w}{(1 - w)(4 + w)} = \frac{D}{1 - w} + \frac{E}{4 + w}, \quad \text{tj.} 2 + w = 4D + E + (D - E)w.$$

Odavde dobijamo sistem $2 = 4D + E$, $1 = D - E$, čije je rešenje $D = \frac{3}{5}$, $E = -\frac{2}{5}$. Tada je:

$$\int \frac{(2 + w)dw}{4 - 3w - w^2} = \frac{3}{5}\int \frac{dw}{1 - w} - \frac{2}{5}\int \frac{dw}{4 + w} = -\frac{3}{5}\ln|1 - w| - \frac{2}{5}\ln|4 + w|.$$

Sada je:

$$-\frac{3}{5}\ln|1 - w| - \frac{2}{5}\ln|4 + w| = \ln|Cu|, \quad \text{tj.} 3\ln|1 - w| + 2\ln|4 + w| = -5\ln|Cu|.$$

Tada imamo da je:

$$\ln|1 - w|^3 + \ln|4 + w|^2 = \ln|Cu|^{-5}, \text{ tj. } (1 - w)^3(4 + w)^2 = (Cu)^5.$$

Kako je $x + 1 = u$, $y - 3 = v$ i $w = \frac{v}{u}$, to je opšte rešenje polazne jednačine:

$$\left(1 - \frac{y - 3}{x + 1}\right)^3\left(4 + \frac{y - 3}{x + 1}\right)^2 = \left(C(x + 1)\right)^5.$$

ZADATAK 5 (10 MINUTA)

Određivanje opšteg rešenja linearne jednačine.

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$xy' + y = \cos x.$

Rešenje:

Deljenjem sa x jednačina postaje

$y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x},$

i ovo je linearna jednačina, pri čemu je $p = \frac{1}{x}, \quad q = \frac{\cos x}{x}.$

Prema formuli

$$y = e^{-\int\frac{dx}{x}}\left(C + \int\frac{\cos x}{x}e^{\int\frac{dx}{x}}dx\right) = e^{-\ln x}\left(C + \int\frac{\cos x}{x}e^{\ln x}dx\right) = \frac{1}{x}\left(C + \int\frac{\cos x}{x}x \ dx\right) = \frac{1}{x}(C + \int\cos x \ dx) = \frac{1}{x}(C + \sin x).$$

Odrediti opšti integral sledeće linearne diferencijalne jednačine

$y' + y\cos x = \sin x \ \cos x.$

Rešenje:

$p = \cos x, \quad q = \sin x \ \cos x$

$$y = e^{-\int p \ dx}\left(C + \int qe^{\int p \ dx}dx\right) = e^{-\int\cos x \ dx}\left(C + \int\sin x \ \cos xe^{\int\cos x \ dx}dx\right) = e^{-\sin x}\left(C + \int\sin x \ \cos xe^{\sin x}dx\right)$$

$(\sin x = t, \quad \cos x \ dx = dt)$

$$= e^{-\sin x}\left(C + \int te^{t}dt\right) = e^{-\sin x}\left(C + te^{t} - e^{t}\right) = e^{-\sin x}\left(C + \sin x \ e^{\sin x} - e^{\sin x}\right) = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1.$$

ZADATAK 6 (10 MINUTA)

Rešavanje linearne jednačine.

Odrediti opšti integral sledeće linearne diferencijalne jednačine

$y \ \ln y \ dx + (x - \ln y)dy = 0.$

Rešenje:

Početnu jednačinu možemo zapisati u obliku

$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{y \ \ln y}{x - \ln y}$

kako iz ovog oblika ne možemo da uočimo o kom se tipu jednačine radi, pogledajmo recipročnu jednačinu. Tada imamo:

$x' = \frac{dx}{dy} = -\frac{x - \ln y}{y \ \ln y}$

$x' = -\frac{1}{y \ \ln y}x + \frac{1}{y}$

Primećujemo da početna jednačina iako nije linearna po y, jeste po x i dobijamo:

$$x' + \frac{1}{y \ln y} x = \frac{1}{y},$$

gde je $p = \frac{1}{y \ln y}$, $q = \frac{1}{y}$. Opšte rešenje je oblika:

$$x(y) = e^{-\int p\, dy}\left(C + \int q e^{\int p\, dy} dy\right)$$

Izračunaćemo prvo $\int p\, dy$.

$$\int p\, dy = \int \frac{dy}{y \ln y}$$

Smenom $\ln y = t$ dobijamo

$$\int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln(\ln y) + C$$

$$x(y) = \frac{1}{\ln y}\left(C + \int \frac{\ln y}{y} dy\right)$$

$$x(y) = \frac{1}{\ln y}\left(C + \frac{\ln^2 y}{2}\right).$$

ZADATAK 7 (10 MINUTA)

Bernulijeva jednačina

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$2xy' + y + 3x^2y^2 = 0.$$

Rešenje:

$$2xy' + y + 3x^2y^2 = 0$$

$$2xy' + y = -3x^2y^2 \qquad : 2x$$

$$y' + y\frac{1}{2x} = -\frac{3}{2}xy^2$$

Ovde je $\alpha = 2$, pa uvodimo smenu $y = z^{\frac{1}{1-2}} = \frac{1}{z}$. Uvođenjem te smene, polazna jednačina postaje

$$z' - \frac{1}{2x}z = \frac{3}{2}x.$$

Ovo je linearna diferencijalna jednačina čije rešenje je:

$$z = e^{-\int -\frac{dx}{2x}}\left(C + \int \frac{3}{2}x \quad e^{\int -\frac{dx}{2x}} dx\right) = e^{\frac{1}{2}\ln x}\left(C + \int \frac{3}{2}x \quad e^{-\frac{1}{2}\ln x} dx\right) = \sqrt{x}\left(C + \frac{3}{2}\int \sqrt{x} dx\right)$$

$$= \sqrt{x}\left(C + \frac{3}{2}\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right) = \sqrt{x}(C + x\sqrt{x}) = x^2 + C\sqrt{x}.$$

Dakle,

$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + C\sqrt{x}}$.

ZADATAK 8 (10 MINUTA)

Određivanje opšteg rešenja Bernulijeve jednačine.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y^3 + 2\left(x^2 - xy^2\right)y' = 0.$

Rešenje:

$y' = -\frac{y^3}{2\left(x^2 - xy^2\right)}$

Pogledajmo i recipročnu:

$x' = -\frac{2\left(x^2 - xy^2\right)}{y^3} = -2\frac{x^2}{y^3} + 2\frac{x}{y}$

$x' - \frac{2}{y}x = -2\frac{x^2}{y^3}$

$\alpha = 2$, uvodimo smenu $z(y) = \frac{1}{x}$ i $z' = \frac{-x'}{x^2}$, polazna jednačina postaje linearna jednačina

$z' + \frac{2}{y}z = \frac{2}{y^3}.$

Odavde je:

$z(y) = \frac{1}{y^2}\left(C + 2\ln|y|\right),$

a nakon vraćanja smene $x = \frac{1}{z}$ dobijamo

$x = \frac{y^2}{C + 2\ln|y|}$.

ZADATAK 9 (10 MINUTA)

Određivanje opšteg rešenja jednačine koja predstavlja totalni diferencijal.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$x\left(y^2 + 1\right)dx + \left(yx^2 + 2y^3\right)dy = 0.$

Rešenje:

$P(x,y) = x\left(y^2+1\right), \quad Q(x,y) = yx^2 + 2y^3$

$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

$F(x,y) = \int x\left(y^2+1\right)dx + \int\left(yx^2 + 2y^3 - \frac{\partial}{\partial y}\int x\left(y^2+1\right)dx\right)dy$

$F(x,y) = \frac{x^2}{2}\left(y^2+1\right) + \int\left(yx^2 + 2y^3 - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2}\left(y^2+1\right)\right)\right)dy$

$F(x,y) = \frac{x^2}{2}\left(y^2+1\right) + \int\left(yx^2 + 2y^3 - yx^2\right)dy$

$F(x,y) = \frac{x^2}{2}\left(y^2+1\right) + \int 2y^3 dy$

$F(x,y) = \frac{x^2}{2}\left(y^2+1\right) + \frac{1}{2}y^4 + C.$

ZADATAK 10 (10 MINUTA)

Jednačina koja predstavlja totalni diferencijal.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$\left(2xy + 4x^3\right)y' + y^2 + 12yx^2 = 0.$

Rešenje:

$\left(2xy + 4x^3\right)dy + \left(y^2 + 12yx^2\right)dx = 0$

$P(x,y) = y^2 + 12yx^2, \quad Q(x,y) = 2xy + 4x^3$

$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2y + 12x^2 = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

$F(x,y) = \int\left(y^2 + 12yx^2\right)dx + \int\left(2xy + 4x^3 - \frac{\partial}{\partial y}\int\left(y^2 + 12yx^2\right)dx\right)dy$

$F(x,y) = xy^2 + 4yx^3 + \int\left(2xy + 4x^3 - \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2 + 4yx^3\right)\right)dy$

$F(x,y) = xy^2 + 4yx^3 + \int\left(2xy + 4x^3 - \left(2xy + 4x^3\right)\right)dy$

$F(x,y) = xy^2 + 4yx^3 + \int 0 \quad dy$

$F(x,y) = xy^2 + 4yx^3 + C.$

ZADATAK 11 (15 MINUTA)

Rikatijeva jednačina.

Data je diferencijalna jednačina:

$$y' = -y^2 + 2xy - x^2 + 5.$$

Pokazati da je jedno rešenje ove jednačine linearna funkcija $y = ax + b$, a zatim naći opšte rešenje ove jednačine.

Rešenje. Linearna funkcija $y = ax + b$ predstavlja pretpostavljeno partikularno rešenje date Rikatijeve jednačine. Tada ono zadovoljava polaznu jednačinu i kako je $y' = a$, imamo:

$$a = -(ax+b)^2 + 2x(ax+b) - x^2 + 5 = -a^2x^2 - 2abx - b^2 + 2ax^2 + 2bx - x^2 + 5,$$

odnosno

$$a = \left(-a^2 + 2a - 1\right)x^2 + (-2ab + 2b)x + b^2 + 5 = -(a-1)^2x^2 + 2b(1-a)x - b^2 + 5.$$

Odavde dobijamo sledeći sistem: $(a-1)^2 = 0$, $2b(1-a) = 0$ i $-b^2 + 5 = a$. Iz prve jednačine sistema imamo da je $a = 1$, druga jednačina postaje identitet, a iz treće jednačine imamo da je $b^2 = 4$, tj. tada je $b = \pm 2$. Tada, jedno partikularno rešenje je $y = x - 2$.

Potražimo sada opšte rešenje ove diferencijalne jednačine. Ono je oblika $y(x) = y_0 + \frac{1}{z}$, tj. $y(x) = x - 2 + \frac{1}{z}$. Tada je $y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$.

Uvedimo ovu smenu sada u polaznu jednačinu. Tada imamo

$$1 - \frac{z'}{z^2} = -\left(x - 2 + \frac{1}{z}\right)^2 + 2x\left(x - 2 + \frac{1}{z}\right) - x^2 + 5,$$

što nas nakon sređivanja dovodi do jednačine:

$$z' + 4z = 1, \quad \text{tj.} \quad \frac{dz}{dx} + 4z = 1.$$

Dobijena diferencijalna jednačina je ona koja razdvaja promenljive i imamo

$$\frac{dz}{1-4z} = dx, \quad \text{tj.} \quad \int \frac{dz}{1-4z} = \int dx.$$

Rešavanjem dobijamo:

$$-\frac{1}{4}\ln|1-4z| = x + C,$$

tj.

$$z = \frac{1}{4} - \frac{1}{4e^{4(x+C)}} = \frac{e^{4(x+C)} - 1}{4e^{4(x+C)}}.$$

Tada je opšte rešenje oblika:

$y(x) = x - 2 + \frac{1}{z} = x - 2 + \frac{4e^{4(x+C)}}{e^{4(x+C)} - 1}.$

ZADATAK 12 (10 MINUTA)

Određivanje opšteg rešenja Lagranževe jednačine.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y = 2xy' + y'^2.$

Rešenje:

Kako je $\varphi\left(y'\right) = 2y' \neq y'$, ovo je Lagranžova diferencijalna jednačina. Dakle,

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{2p - p}x = \frac{2p}{p - 2p}$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -2$$

$$x = e^{-\int\frac{2}{p}dp}\left(C + \int\left(-2e^{\int\frac{2}{p}dp}\right)dp\right)$$

$$x = e^{-2\int\frac{dp}{p}}\left(C + \int\left(-2e^{2\int\frac{dp}{p}}\right)dp\right)$$

$$x = e^{-2\ln|p|}\left(C + \int\left(-2e^{2\ln|p|}\right)dp\right)$$

$$x = \frac{1}{e^{\ln|p|^2}}\left(C + \int\left(-2e^{\ln|p|^2}\right)dp\right)$$

$$x = \frac{1}{p^2}\left(C + \int\left(-2p^2\right)dp\right)$$

$$x = \frac{1}{p^2}\left(C - 2\int p^2 dp\right)$$

$$x = \frac{1}{p^2}\left(C + \left(-2\frac{p^3}{3}\right)\right) = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}$$

$$y = 2\left(\frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}\right)p + p^2 = \frac{2C}{p} - \frac{4p^2}{3} + p^2 = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3}$$

$2p = p \Rightarrow p = 0$. Dakle, $y = \varphi(0)x + \psi(0) = 0$ i to je singularno rešenje polazne jednačine.

ZADATAK 13 (10 MINUTA)

Lagranževa jednačina.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y = 3xy' - 7y'^3.$

Rešenje:

Kako je $\varphi(y') = 3y'$, ovo je Lagranžova diferencijalna jednačina. Dakle,

$y' = p \qquad dy = pdx$

$pdx = 3pdx + 3xdp - 21p^2dp$

$2pdx + (3x - 21p^2)dp = 0 \qquad / : 2dp$

$x' + \frac{3x}{2p} = \frac{21}{2}p$

$$x(p) = e^{-\frac{3}{2}\int\frac{dp}{p}}\left(C + \frac{21}{2}\int pe^{\frac{3}{2}\int\frac{dp}{p}}dp\right)$$

$$x(p) = e^{-\frac{3}{2}\ln|p|}\left(C + \frac{21}{2}\int pe^{\frac{3}{2}\ln|p|}dp\right)$$

$$x(p) = e^{-\frac{3}{2}\ln|p|}\left(C + \frac{21}{2}\int p|p|^{\frac{3}{2}}dp\right)$$

Ako je $p > 0$

$$x(p) = p^{-\frac{3}{2}}\left(C + \frac{21}{2}\frac{2}{7}p^{\frac{7}{2}}\right)$$

$$x(p) = p^{-\frac{3}{2}}C + 3p^2.$$

Ako je $p < 0$

$$x(p) = (-p)^{-\frac{3}{2}}\left(C + \frac{21}{2}\frac{2}{7}(-p)^{\frac{7}{2}}\right)$$

$$x(p) = (-p)^{-\frac{3}{2}}C + 3p^2.$$

Poglavlje 10

Zadaci za samostalni rad

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba da dodatno provežbaju.

Rešiti diferencijalne jednačine:

1. $(xy+2y)y' = x^2+3x-2$. Rezultat: $y=\sqrt{x^2+2x-8\ln|x+2|+C}$.

2. $(x^2+y^2)y' - xy = 0$. Rezultat: $\frac{2y^2}{x^2}\ln\frac{y}{x} = 1 - \frac{2y^2}{x^2}\ln(Cx)$.

3. $xy' + y = x^3$. Rezultat: $y = \frac{C}{x} + \frac{x^3}{4}$.

4. $y' + 2xy = 2x^3y^3$. Rezultat: $y = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+2x^2}{2}+ce^{2x^2}}}$.

5. $(2x-y+1)dx + (2y-x-1)dy = 0$. Rezultat: $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$.

6. $y' = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2}$. Rezultat: $y = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x(C-\ln|x|)}$.

Vreme izrade: 1. 10 minuta; 2. 10 minuta; 3. 10 minuta; 4. 10 minuta; 5. 10 minuta; 6. 10 minuta.

Zaključak za lekciju 06

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA

Obične diferencijalne jednačine.

U ovoj lekciji smo obradili sledeće tipove diferencijalnih jednačina prvog reda: one koje razdvajaju promenljive, homogenu i jedna tip diferencijalnih jednačina prvog reda koje se svode na homogenu, linearna jednačina, Bernulijeva jednačina, jednačina koja predstavlja totalni diferencijal i Rikatijeva jednačina.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. Rale Nikolić, Nada Damljanović, Matematika 2 – zbirka zadataka, Fakultet tehničkih nauka, Čačak, 2016. godina
4. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.

UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Diferencijalne jednačine višeg reda

Lekcija 09

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 09

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE VIŠEG REDA

Uvod

UVOD

Diferencijalne jednačine višeg reda.

Od diferencijalnih jednačina višeg reda obradićemo homogene i nehomogene linearne diferencijalne jednačine višeg reda sa konstatnim koeficijentima, kao i postupke za njihovo rešavanje. Takođe, upoznaćemo se sa Koši-Ojlerovom jednačinom čije se rešavanje svodi na prethodno pomenute diferencijalne jednačine više reda.

Diferencijalne jednačine su od fundamentalnog značaja u nauci i tehnici jer se čitav niz pojava, zakonitosti i problema izražavaju diferencijalnim jednačinama. One posebno mesto zauzimaju u fizici, hemiji, biologiji, mehanici drugim naukama.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Diferencijalne jednačine višeg reda

UVOD

Kao i u slučaju običnih diferencijalnih jednačina prvog reda, rešenje diferencijalne jednačine n -tog reda može biti: opšte, partikularno i singularno.

Opšti oblik obične diferencijalne jednačine $n-$ tog reda je

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right)=0,$$

gde je x nezavisna promenljiva, a $y=y(x)$ nepoznata funkcija koju treba odrediti, koja se u jednačini javlja zajedno sa svojim izvodima. Red diferencijalne jednačine određuje najviši stepen izvoda koji se javlja u njoj.

Termin obična diferencijalna jednačina podrazumeva slučaj da je nepoznata funkcija $y=y(x)$, funkcija jedne promenljive.

Napomena. Postoje diferencijalne jednačine kod kojih je nepoznata funkcija, funkcija više nezavisno promenljivih. Takve diferencijalne jednačine se nazivaju parcijalne diferencijalne jednačine i njima se ovde nećemo baviti.

Nekada je moguće izraziti iz opšteg oblika diferencijalne jednačine $n-$ tog reda, $y^{(n)}$ u funkciji preostalih veličina i tada tu diferencijalnu jednačinu zapisujemo u obliku

$$y^{(n)}=f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Rešiti običnu diferencijalnu jednačinu $n-$ tog reda podrazumeva određivanje funkcije $y=g(x)$ koja ima neprekidne izvode $n-$ tog reda i koja zajedno sa svojim izvodim zadovoljava tu jednačinu.
Kao i u slučaju običnih diferencijalnih jednačina prvog reda, rešenje diferencijalne jednačine $n-$ tog reda može biti: opšte rešenje, partikularno rešenje i singularno rešenje.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine $n-$ tog reda predstavlja jednu klasu funkcija, s tim što se broj integracionih konstanti poklapa sa najvišim redom izvoda koji u njoj figuriše tj. n i ono je oblika

$$y=g(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \text{ ili } h(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0.$$

Konstante $C_1, C_2, \ldots, C_n$ se nazivaju integracione konstante i one se javljaju prilikom rešavanje diferencijalne jednačine neodređenom integracijom.

Partikularno rešenje se može dobiti iz opšteg rešenja kada se zadaju tzv. početni uslovi

$$y(x_0) = y_{01},\ y'(x_0) = y_{02},\ y''(x_0) = y_{02},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n},$$

koje opšte rešenje treba da zadovolji, gde su $x_0, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n} \in \mathbb{R}$dati brojevi. Na taj način se iz klase funkcija koje prestavljaju opšte rešenje izdvaja samo jedna funkcija. Početni uslovi se još nazivaju i Košijevi uslovi, a dobijeno partikularno rešenje se naziva Košijevi rešenje.

Singularno rešenje se ne može dobiti iz opšteg i najčešće se dobija iz ograničenja koje važe za tu diferencijalnu jednačinu.

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA KOJIMA SE MOŽE SNIZITI RED

Postoje diferencijalne jednačine drugog reda kojima se odgovarajućom smenom može sniziti red.

Navešćemo nekoliko specijalnih tipova diferencijalnih jednačina drugog reda kod kojih se opšte rešenje može naći pomoću uzastopnih integracija, odnosno pomoću sniženja reda jednačina, tj. svodeći polaznu jednačinu na jednačinu prvog reda. Ovakve jednačine se nazivaju diferencijalne jednačine kojima se može sniziti red.

1. Kod diferencijalnih jednačina oblika $y'' = f(x)$, kako je $\frac{dy'}{dx} = y''$ imamo $\frac{dy'}{dx} = f(x)$, tj. $dy' = f(x)dx$, a odavde integracijom

$$y' = \int f(x)\,dx + c_1.$$

Ovo je diferencijalna jednačina prvog reda, pa ponovnom integracijom nalazimo

$$y = \int \left(\int f(x)\,dx + c_1 \right)\,dx$$

tj. za opšte rešenje polazne jednačine dobijamo

$$y = \int \left(\int f(x)\,dx \right)\,dx + c_1 x + c_2,$$

2. Jednačina $y'' = f(y)$ ne sadrži eksplicitno argument x. Red ove jednačine može se sniziti i svesti na jednačinu prvog reda smenom $y' = p$. Smatrajući p kao funkciju od y i primenjujući teoremu za izvod složene funkcije, dobijamo

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' = p \cdot \frac{dp}{dy}.$$

Zato je polazna jednačina oblika $p\cdot\frac{dp}{dy}=f(y)$, tj. njen je red snižen i ona je svedena na jednačinu prvog reda. U njoj se promenljive mogu razdvojiti, tj. $pdp=f(y)dy$, odakle nakon integracije imamo

$$\frac{p^2}{2}=\int f(y)\,dy+\frac{c_1}{2}\quad \text{tj.}\quad p=\pm\sqrt{2\int f(y)\,dy+c_1}.$$

Kako je $p=\frac{dy}{dx}$ imamo da je $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{2\int f(y)\,dy+c_1}$. Odavde razdvajanjem promenljivih i integracijom nalazimo da je

$$\int\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy+c_1}}=\pm(x+c_2),$$

što predstavlja opšte rešenje polazne jednačine.

3. Jednačina drugog reda koja ne sadrzi argument x i funkciju y je oblik $y''=f(y')$. Njen red se može sniziti i ona se svodi na jednačinu prvog reda smenom $y'=p$, $y''=\frac{dp}{dx}$. Tada je ona oblika $\frac{dp}{dx}=f(p)$. U ovoj jednačini promenljive se mogu razdvojiti, te imamo $\frac{dp}{f(p)}=dx$, dok integracijom dobijamo

$$\int\frac{dp}{f(p)}=x+c_1.$$

Neka je $p=\varphi(x,c_1)$ opšte rešenje poslednje jednačine. Kako je $p=y'=\frac{dy}{dx}$, imamo da je $\frac{dy}{dx}=\varphi(x,c_1)$, odakle je opšte rešenje jednačine drugog reda oblika

$$y=\int\varphi(x,c_1)\,dx+c_2.$$

NAPOMENE I PRIMERI

Rešavanje diferencijalnih jednačina kojima se može sniziti red.

Napomena. Opštiji tip diferencijalne jednačine drugog reda od onoga pod 2. bio bi $y\,''=f(y,y')$. Smenom $y'=p$, iz koje je $y\,''=p\cdot\frac{dp}{dy}$ ova jednačina se svodi na jednačinu prvog reda.

Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y''+2y(y')^3=0$.

Rešenje. Smenom $y'=p$, $y''=p\cdot\frac{dp}{dy}$ data jednačina se svodi na

$$p\cdot\frac{dp}{dy}+2yp^3=0,\quad \text{tj.}\quad \frac{dp}{dy}+2yp^2=0$$

kako je $p = 0$. Ovo je jednačina prvog reda u kojoj se promenljive mogu razdvojiti, pa je $\frac{dp}{p^2} = -2y\,dy$. Integracijom ove jednačine imamo $-\frac{1}{p} = -c_1 - y^2$, tj. $\frac{1}{p} = c_1 + y^2$. Odavde dobijamo da je $p = \frac{1}{c_1+y^2}$ ili

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{c_1 + y^2}.$$

Razdvajanjem promenljivih u ovoj jednačini dobijamo $(c_1 + y^2)\,dy = dx$, ili posle integracije

$$c_1 y + \frac{y^3}{3} + c_2 = x,$$

što predstavlja opšte rešenje polazne jednačine.

Napomena. Opštiji tip diferencijalne jednačine drugog reda od onoga pod 3. bio bi $y'' = f(x, y')$. Smenom $y' = p$, iz koje je $y'' = \frac{dp}{dx}$ svodi se na jednačinu prvog reda.

Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y''x\ln x = y'$.

Rešenje. Smenom $y' = p$ i $y'' = \frac{dp}{dx}$ data jednačina se svodi na jednačinu prvog reda

$$\frac{dp}{dx} x \ln x = p.$$

U ovoj jednacini promenljive se mogu razdvojiti, te dobijamo

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x \ln x}$$

Integracijom dobijamo $\ln|p| = \ln|c_1 \ln x|$, odakle je $p = c_1 \ln x$. Kako je $\frac{dy}{dx} = c_1 \ln x$, ili $dy = c_1 \ln x\,dx$, tada ponovnom integracijom dobijamo

$$y = c_1 x(\ln x - 1) + c_2,$$

što predstavlja opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine.

Napomena. U opštijem slučaju datih tipova od 1. do 3. (i u opštenijih tipova datih u napomenama) mogu biti i diferencijalne jednačine višeg reda od dva. Ideja za njihovo rešavanje je analogna datim, s tim što broj integracija kojim se dolazi do opšteg rešenja odgovara redu takve jednačine.

LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA VIŠEG REDA

Linearna diferencijalna jednačina n-tog reda se tako naziva jer je nepoznata funkcija y, kao i svi njeni izvodi koji se javljaju u jednačini prvog stepena.

Jednačina oblika

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + a_2(x)y^{(n-2)}(x) + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

se naziva linearna diferencijalna jednačina $n-$tog reda, gde su $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ proizvoljne funkcije po x ili konstante, pri čemu je funkcija $f(x)$ neprekidna na realnom intervalu $x \in D$.

U slučaju da je $f(x) = 0$, ova jednačina se naziva homogena linearna jednačina $n-$tog reda, a u slučaju $f(x) \neq 0$ se naziva nehomogena linearna jednačina $n-$tog reda, $n-$tog reda.

Mi ćemo se ovde baviti slučajem kada su u prethodnoj jednačini $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ i tada se prethodna jednačina naziva linearna jednačina $n-$tog reda sa konstantnim koeficijentima. O ovim diferencijalnim jednačinama ćemo govorimo u nastavku.

Najpre ćemo izložiti metodologiju za određivanje opšteg rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine višeg reda, jer određivanje opšteg rešenja nehomogene linearne diferencijalne jednačine višeg reda direktno zavisi od odgovarajuće homogene. Postupak za određivanje ovih rešenja ćemo prvo pokazati za homogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda, a zatim uopštiti za proizvoljan red.

Za dobijanje opšteg rešenja nehomogene diferencijalne jednačine, pored određivanja opšteg rešenja odgovarajuće homogene jednačine, potrebno je odrediti i jedno njeno partikularno rešenje. Ovde će biti izložene dve metode za njihovo određivanje. U opštem slučaju ovo nije jednostavno uraditi. Prva od njih se naziva Metoda neodređenih koeficijenata i ona se može primenjivati samo za određene klase funkcija $f(x)$. Druga se naziva Metoda varijacije konstanti ili Lagranževa metoda i ona je opštija od Metode neodređenih koeficijenata, jer ne postoje ograničenja kakvoj klasi funkcija pripada funkcija $f(x)$. Ipak, Metod neodređenih koeficijenata se primenjuje, kada je to moguće, pre nego Metod varijacije konstanti zbog jednostavnijeg postupka u određivanju partikularnog rešenja (u njemu nema neodređene integracije). Metod neodređenih koeficijenata zbog lakšeg razumevanja ćemo, prvo, izučiti za nehomogene linearne jednačine drugog reda, a nakon toga uopštiti. S druge strane, Metod varijacije konstanti ćemo odmah izlagati u najopštem slučaju.

Poglavlje 2

Homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda

POJAM

Bilo koja dva linarno nezavisna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda čine njen tzv. fundamentalni sistem rešenja.

U ovom delu razmatraćemo homogenu linearnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima, tj. jednačinu oblika

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0, \ (x \in D).$$

Ako uvedemo izraz

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y$$

definisan za dvaput diferencijabilne funkcije na intervalu D (diferencijalni operator drugog reda), jednačinu $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$možemo napisati u obliku $L(y) = 0$.

Ova jednačina će uvek imati trivijalno rešenje $y(x) \equiv 0$ koje ćemo isključiti iz daljeg razmatranja. Važi sledeći stav.

Stav. Ako su y_1 i y_2 bilo koja dva rešenja posmatrane jednačine, tada je i svaka njihova linearna kombinacija, tj. funkcija

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \ (C_1, C_2 \in \mathbb{R}),$$

takođe rešenje ove jednačine.

S obzirom da je pojam opšteg rešenja jednačine $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$suštinski vezan za dva linearno nezavisna rešenja te jednačine, navodimo, najpre, kriterijum za proveru linearne nezavisnosti rešenja y_1 i y_2 ove jednačine.

Stav. Rešenja $y_1 = y_1(x)$ i $y_2 = y_2(x)$ homogene jednačine $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ biće linearno nezavisna na intervalu D ako i samo ako za njihov Vronskijan, tj. sledeću funkcionalnu determinantu važi

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{za } x \in D.$$

Primer. Bilo koje dve funkcije x^m i x^n, $(m, n \in \mathbb{R},\ m \neq n)$, su linearno nezavisne u svakom intervalu $D = (a, b)$, jer je

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^m & x^n \\ mx^{m-1} & nx^{n-1} \end{vmatrix} = (n-m)x^{m+n-1} \neq 0.$$

Bilo koja dva linearno nezavisna rešenja y_1 i y_2 homogene jednačine $L(y) = 0$ obrazuju njen fundamentalni sistem rešenja. Svaki fundamentalni sistem rešenja je od ogromnog značaja, jer se pomoću njega može obrazovati opšte rešenje te jednačine.

Značaj fundamentalnog sistema rešenja se vidi iz narednog stava.

Stav. Ako je y_1 i y_2 bilo koji fundamentalni sistem rešenja homogene jednačine jednačine $y'' + a_1y' + a_2y = 0$,tada je jedno njeno opšte rešenje dato sa

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

POSTUPAK ZA ODREĐIVANJE SISTEMA FUNDAMENTALNIH REŠENJA

Postupak se zasniva na određivanju karakteristične jednačine i njenih rešenja. U zavisnosti kakva je priroda tih rešenja razlikujemo tri slučaja.

Potražimo rešenje jednačine $y'' + a_1y' + a_2y = 0$u obliku $y = e^{\lambda x}$, gde je λ konstanta koju tek treba da odredimo. Tada je $y' = \lambda e^{\lambda x}$ i $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, pa zamenom ovih vrednosti u homogenoj linearnoj diferencijalnoj jednačini drugog reda sa konstantnim koeficijentima ona postaje

$$L(y) = \lambda^2 e^{\lambda x} + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_2 e^{\lambda x} = 0.$$

Kako je $e^{\lambda x} \neq 0$, za svako $x \in D$, nakon deobe prethodne jednačine sa $e^{\lambda x}$ dobijamo jednačinu

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$

koja se naziva karakteristična jednačina diferencijalne jednačine $y'' + a_1y' + a_2y = 0$.Rešavanjem ove kvadratne jednačine dobijamo njena rešenja λ_1 i λ_2. U zavisnosti od prirode ovih rešenja razlikovaćemo tri slučaja.

Prvi slučaj. Rešenja λ_1 i λ_2 realna i različita. Tada su funkcije $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ i $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ rešenja jednačine $y'' + a_1y' + a_2y = 0$.Za odgovarajući Vronskijan važi da je:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \neq 0.$$

pa imamo da $e^{\lambda_1 x}$ i $e^{\lambda_2 x}$ čine fundamentalni sistem rešenja.

Stoga je funkcija

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

opšte rešenje homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Drugi slučaj. Rešenja λ_1 i λ_2 su realni i jednaka. Tada se može pokazati da je zajedno sa funkcijom $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ i funkcija $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ rešenje posmatrane jednačine. U ovom slučaju, takođe, važi da je $W(y_1, y_2) \neq 0$, pa imamo da funkcije $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ i $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ čine fundamentalni sistem rešenja.

Stoga je funkcija

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}$$

opšte rešenje posmatrane jednačine.

Treći slučaj. Rešenja λ_1 i λ_2 konjugovano-kompleksna, tj. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Može se pokazati da je funkcije $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ i funkcija $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$. I u ovom slučaju važi da je $W(y_1, y_2) \neq 0$, pa ove dve funkcije obrazuju fundamentalni sistem rešenja posmatrane jednačine. Stoga je njeno opšte rešenje dato sa

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

PRIMERI

Određivanje opšteg rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Primer 1. Za jednačinu

$$y'' - 5y' + 6y = 0,$$

njena karakteristična jednačina glasi

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

čija su rešenja $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 3$.
Dakle, fundamentalan sistem rešenja biće e^{2x} i e^{3x}, pa je opšte rešenje dato sa

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Primer 2. Za jednačinu

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

njena karakteristična jednačina glasi:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

čija su rešenja $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.
Dakle, fundamentalan sistem rešenja biće e^{2x} i xe^{2x}, pa je opšte rešenje dato sa

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Primer 3. Za jednačinu

$$y'' + 2y' + 2y = 0,$$

njena karakteristična jednačina glasi

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

čija su rešenja $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$.
Ovde je $\alpha = -1$ i $\beta = 1$. Dakle, fundamentalan sistem rešenja biće $y_1(x) = e^{-x}\cos x$ i $y_2(x) = e^{-x}\sin x$, pa je opšte rešenje dato sa

$$y(x) = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x.$$

Poglavlje 3

Homogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda

POJAM

Prethodno navedeni rezultati za homogene linearne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima se uopštavaju na linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima višeg reda.

Homogena linearna jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ je jednačina oblika

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0, \quad (x \in D).$$

Nju, koristeći operator L, možemo zapisati u obliku $L(y) = 0$. Kao i za slučaj $n = 2$ rešenja ove jednačine imaće sledeću karakterističnu osobinu.

Stav. Ako su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ proizvoljna rešenja homogene linearne jednačine n -tog reda, tada je i svaka njihova linearna kombinacija, tj. funkcija $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$, takođe rešenje ove jednačine.

Kod nalaženja realnih rešenja jednačine često koristimo i njena kompleksna rešenja. Reći ćemo, naime, da je kompleksna funkcija $y(x)$ realnog argumenta x, $(x \in D)$ ako je oblika

$$y(x) = u(x) + i \cdot v(x),$$

(gde su $u(x)$ i $v(x)$ odgovarajuće realne funkcije) rešenje posmatrane jednačine, ako važi jednakost $L(y) = 0$.

Pritom definišemo $y'(x) = u'(x) + i \cdot v'(x)$, $y''(x) = u''(x) + i \cdot v''(x)$, ... , $y^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + i \cdot v^{(n)}(x)$. Može se dokazati da je tada $L(y) = L(u) + iL(v)$, odakle sledi da su i funkcije $u(x)$ i $v(x)$ realna rešenja jednačine.

Kod obrazovanja opšteg rešenja jednačine koristi se, kao i za $n = 2, n$ linearno nezavisnih rešenja te jednačine, pri čemu se prethodno dokazuje da takvih n rešenja zaista i postoji.

Da bi se ispitala njihova linearna nezavisnost, uvodi se ponovo pojam Vronskijana koji odgovara tim rešenjima. Pretpostavimo opštije da su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bilo kojih n funkcija, $n-1$ puta diferencijabilnih na intervalu D (ako su one istovremeno i rešenja jednačine, neposredno sledi da moraju biti $n-$ puta diferencijabilne na intervalu D). Tada je na osnovu definicije, njihov Vronskijan funkcionalna determinanta

$$W(x)=W(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1^{'} & y_2^{'} & \cdots & y_n^{'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Stav. Rešenja $y_1,y_2,\ldots,y_n$ homogene jednačine biće linearno nezavisna u intervalu D ako i samo ako je odgovarajući Vronskijan $W(x)\neq 0$, za svako $x\in D$.

Napomena. Za Vronskijan n partikularnih rešenja homogene jednačine važi sledeća formula Ostrogorski – Liuvil $W(x)=W(x_0)e^{-a_1(x-x_0)}$ iz koje ponovo dobijamo dve osobine implicitno dokazane u prethodnom stavu: ako je $W(x_0)=0\ (x_0\in D)$ tada je $W(x)\equiv 0$ i ako je $W(x_0)\neq 0\ (x_0\in D)$ tada je $W(x)\neq 0$ za svako $x\in D$.

FUNDAMENTALNI SISTEM REŠENJA

Skup od n proizvoljnih linearno nezavisnih rešenja homogene jednačine nazivamo fundamentalni sistem rešenja ovejednačine.

Kao i za $n=2$, skup od n proizvoljnih linearno nezavisnih rešenja homogene jednačine nazivaćemo fundamentalni sistem rešenja te jednačine. Slično kao i za $n=2$, imamo sledeća dva stava.

Stav. Uvek postoji bar jedan sistem fundamentalnih rešenja homogene jednačine.

Stav. Ako je $y_1,y_2,\ldots,y_n$ bilo koji fundamentalni sistem rešenja homogene jednačine, tada je (jedno) njeno opšte rešenje dato sa

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n.$$

pri čemu su $C_1,C_2,\ldots,C_n$ proizvoljne realne konstante.

Iz poslednjeg stava neposredno dobijamo narednu posledicu.

Posledica. Bilo kojih $n+1$ rešenja jednačine jesu linearno zavisna.

Opišimo sada kao i za slučaj $n=2$ postupak određivanja bar jednog fundamentalnog sistema rešenja homogene jednačine sa konstantnim koeficijentima. Potražimo naime rešenje te jednačine u obliku $y=e^{\lambda x}$, gde je λ konstanta koju tek treba da odredimo. Tada je $y‘=\lambda e^{\lambda x}$, $y‘‘=\lambda^2e^{\lambda x},\ldots,y^{(n-1)}=\lambda^{n-1}e^{\lambda x}$, $y^{(n)}=\lambda^ne^{\lambda x}$ Polazna homogena jednačina je tada oblika:

$$\lambda^ne^{\lambda x}+a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x}+\ldots+a_{n-1}\lambda e^{\lambda x}+a_ne^{\lambda x}=0$$

Deobom sa $e^{\lambda x}$ poslednje jednačine dobijamo karakterističnu jednačinu za polaznu homogenu jednačinu:

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0.$$

Napomena. Rešenje karakteristične jednačine može biti realno ili kompleksno, tako da će ova jednačina imati n realnih ili konjugovan-kompleksnih rešenja $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, pri čemu realna rešenja mogu biti jednostruka ili višestruka.
Razlikovaćemo, stoga, više slučajeva, zavisno od toga da li su koreni homogene jednačine realni i pri tom da li su jednostruki ili višestruki, ili da li su rešenja konjugovano-kompleksna. O tome govorimo u nastavku.

PRVI SLUČAJ - REŠENJA SU REALNA I RAZLIČITA

Sva rešenja karakteristične jednačine su realna i različita.

Stav. Neka su rešenja karakteristične jednačine

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

koja odgovara homogenoj jednačini

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}y'(x) + a_n y(x) = 0,$$

sa konstantnim koeficijentima $a_1, a_2, \cdots, a_n,$ realna i različita. Tada je jedan fundamentalan sistem rešenje

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$$

a opšte rešenje posmatrane homogene jednačine glasi:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

PRIMER 1

Rešenja karakteristične jednačine su realna i različita.

Odrediti opšte rešenje jednačine

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina date homogene jednačine je oblika

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0,$$

odakle, ako za prvi i treći član izvučemo λ kao zajednički činilac, a za drugi i četvrti -2, dobijamo

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda^2 - 1)(\lambda - 2) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0,$$

nalazimo da je

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2.$$

Kako su dobijena rešenja realna i različita tada je odgovarajući sistem fundamenatalnih rešenja dat sa

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}.$$

PRIMER 2

Homogena linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima trećeg reda.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y''' - 13y' - 12y = 0.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina je

$$\lambda^3 - 13\lambda - 12 = 0.$$

Podsetimo se kako se određuju koreni polinom sa celobrojnim koeficijentima

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \;\; a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Posmatra se koeficijent a_n i svi njegovi delioci u oznaci p (posmatrani i sa predznakom + i -), kao i delioci koeficijenta a_0, u oznaci q (posmatrani i sa predznakom + i -). Ako posmatrani polinom imam racionalna rešenja (korene), tada su oni oblika $\frac{q}{p}$.

U našem slučaju imamo da je kod polinoma $P_3(x) = \lambda^3 - 13\lambda - 12$ koeficijent $a_3 = 1$, a $a_0 = -12$. U ovom slučaju moguće nule polinoma su brojevi $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 12.$ Nula polinoma je ona vrednost koju kada zamenimo u posmatranom polinomu dobijemo vrednost 0 . Dakle, krenimo od vrednosti $\lambda = 1$. Imamo da je $P_3(1) = 1^3 - 13 - 12 \neq 0$, pa ova vrednost nije nula polinoma. Dalje, važi da je $P_3(-1) = (-1)^3 + 13 - 12 = 0$, pa je vrednost $\lambda_1 = -1$, nula posmatranog polinoma. To dalje znači da je polinom $P_3(x) = \lambda^3 - 13\lambda - 12$ deljiv polinomom $\lambda - \lambda_1$, tj. $\lambda + 1$.

Tada je

$$(\lambda^3 - 13\lambda - 12) : (\lambda + 1) = \lambda^2 - \lambda - 12,$$

tj.

$$\lambda^3 - 13\lambda - 12 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 12).$$

Na kraju rešavajući kvadratnu jednačinu $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ dobijamo da je $\lambda_2 = -3$ i $\lambda_3 = 4$. Dakle,

$$\lambda^3 - 13\lambda - 12 = (\lambda + 1)(\lambda + 3)(\lambda - 4).$$

Kako su $\lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = -3$ i $\lambda_3 = 4$ nule karakteristične jednačine $\lambda^3 - 13\lambda - 12 = 0$, opšte rešenje glasi:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{4x}.$$

DRUGI SLUČAJ - REŠENJA SU REALNA I NEKA OD NJIH SU JEDNAKA

Sva rešenja karakteristične jednačine su realna i neka od njih su višestruka

Pretpostavimo da su svi koreni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ karakteristične jednačine realni, ali su neki od njih i višestruki i da su koreni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ $(r < n)$ medjusobno različiti, a da su oni odgovarajuće višestrukosti $m_1, m_2, \ldots, m_r$, tim redom, pri čemu važi $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n$. Ovo znači da se karakteristični polinom

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ \ldots \ + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

može faktorisati u obliku

$$(x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \cdot \ \cdots \ \cdot (x - \lambda_r)^{m_r} = 0.$$

Stav. Pri navedenim pretpostavkama, fundamentalni sistem rešenja jednačine

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ \ldots \ + a_{n-1}y'(x) + a_n y(x) = 0,$$

sa konstantnim koeficijentima $a_1, a_2, \cdots, a_n$ obrazovaće funkcije

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & x^2e^{\lambda_1 x}, & \ldots & x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x} \\ e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & x^2e^{\lambda_2 x}, & \ldots & x^{m_2-1}e^{\lambda_2 x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ e^{\lambda_r x}, & xe^{\lambda_r x}, & x^2e^{\lambda_r x}, & \ldots & x^{m_r-1}e^{\lambda_r x} \end{cases}$$

Primer. Nađimo opšte rešenje homogene jednačine

$$y''' - 3y' + 2y = 0.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina date homogene jednačine je oblika:

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Tada imamo da je

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = \lambda^3 - \lambda - 2\lambda + 2 = \lambda(\lambda^2 - 1) - 2(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2) =$$
$$= (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0.$$

nalazimo da je $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2.$

Stoga je jedan njen fundamentalni sistem rešenja { $\{e^x, xe^x, e^{-2x}\}$) , a opšte rešenje

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-2x}.$$

TREĆI SLUČAJ - NEKA REŠENJA SU KONJUGOVANO-KOMPLEKSNA

Među rešenjima karakteristične jednačine, neka su konjugovano-kompleksna, odgovarajuće višestrukosti.

Neka su (različiti) koreni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ karakteristične jednačine u opštem slučaju kompleksni i neka su im odgovarajuće višestrukosti redom $m_1, m_2, \ldots, m_r$, tim redom, pri čemu važi $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n$.

Stav. Ako je $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k \ \ (\beta_k \neq 0)\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ kompleksan koren karakteristične jednačine višestrukosti $m_j\ (1 \leq j \leq r)$, tada je i konjugovano kompleksan broj $\overline{\lambda}_k = \alpha_k - i\beta_k(\beta_k \neq 0)\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ takođe njen koren iste višestrukosti, a deo fundamentalnog sistema rešenja koji odgovara korenima $\alpha_k + i\beta_k$, za $\alpha_k \neq 0$, sadržaće $2 \cdot m_j$ funkcija oblika

$$x^p e^{\alpha_k x} \cos \beta_k \ \ i \ \ x^p e^{\alpha_k x} \sin \beta_k, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, m_j,$$

dok za $\alpha_k = 0$, sadržaće $2 \cdot m_j$ funkcija oblika

$$x^p \cos \beta_k \ \ i \ \ x^p \sin \beta_k, \ \ p = 0, 1, 2, \ldots, m_j.$$

Napomena. U slučaju realnog korena λ_k, tj. za $\beta_k = 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots, n)$, iz prethodnog slučaja za određivanje odgovarajućeg dela fundamentalnog sistema rešenja, koristi se postupak opisan u prethodna dva stava. Zapravo, treći slučaj predstavlja opšti postupak za rešavanje jednačine

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0,$$

jer su prva dva sadržana u njemu. Naime, za $\beta_k = 0, (k = 1, 2, \ldots, n)$ u prethodnom slučaju (tj. kada je rešenje realno) dobijamo, partikularna rešenja, kao i fundamentalni skup rešenje za prva dva slučaja.

PRIMER 3

Homogena jednačina n-tog reda.

Primer. Odrediti opšte rešenje homogene jednačine

$$y''' + 4y' = 0.$$

Rešenje. Odgovarajuća karakteristična jednačina glasi

$$\lambda^3 + 4\lambda = \lambda(\lambda^2 + 4) = 0.$$

Odavde vidimo da su rešenje ovog polinoma $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm 2i,$ pa jedan njen fundamentalan sistem rešenja obrazuju funkcije $y_1 = 1, y_2 = \cos 2x$ i $y_3 = \sin 2x$.

Stoga je njeno opšte rešenje

$$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

Primer. Odrediti opšte rešenje homogene jednačine

$$y^{iv} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina date jednačine biće

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0,$$

pa su njena rešenja $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ višestrukosti 2.

Stoga je fundamentalni sistem rešenja obrazovan funkcijama $y_1 = e^{-x}\cos x,\ y_2 = e^{-x}\sin x,\ y_3 = xe^{-x}\cos x$ i $y_4 = xe^{-x}\sin x$, a opšte rešenje je

$$y = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x + C_3 x e^{-x}\cos x + C_4 x e^{-x}\sin x.$$

Poglavlje 4

Nehomogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda

POJAM

Rešavanje nehomogena linearna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima u tesnoj je vezi sa rešavanjem odgovarajuće homogene jednačine.

Jednačina oblika

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f(x),$$

se naziva nehomogena linearna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima, pri čemu je funkcija $f(x) \neq 0$ neprekidna na intervalu D. Prethodna jednačina će imati jedinstveno rešenje koje zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_{01}$ i $y'(x_0) = y_{02}$ tj. postojaće jedna jedinstvena integralna kriva koja prolazi kroz tačku (x_0, y_{01}, y_{02}).

Primer. Jednačina oblika

$$y'' + y' + y = x^3 + 3x - 2 - e^x$$

je jedna nehomogena linearna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Rešavanje nehomogena linearna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima u tesnoj je vezi sa rešavanjem odgovarajuće homogene jednačine. Pokazuje se naime da važi sledeći stav.

Stav. Ako je $y_p = y_p(x)$ bilo koje partikularno rešenje jednačine

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f(x),$$

a $y_1(x)$ i $y_2(x)$ bilo koja dva linearno nezavisna rešenja odgovarajuće homogene jednačine, tada je $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p$,opšte rešenje nehomogene jednačine.

Iz prethodnog stava vidimo da nam je za određivanje opšteg rešenja nehomogene jednačine potrebno, pored određivanja opšteg rešenja odgovarajuće homogene jednačine i jedno nehomogene jednačine partikularno rešenje

METOD NEODREĐENIH KOEFICIJENATA

Primena metode neodređenih koeficijenata za određivanje opšteg rešenja nehomogene linearne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Sada ćemo izneti jednu metodu za određivanje jednog partikularnog rešenja nehomogene diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima, ali koja važi samo za izvesne tipove funkcije $f(x)$. Ova metoda se naziva metod neodređenih koeficijenata i može se primeniti samo za slučajeve kada je funkcija $f(x)$ oblika

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right), \qquad (*)$$

pri čemu su polinomi $P_n(x)$ i $Q_m(x)$, tim redom, stepena n, odnosno m. Specijalni slučajevi prethodnog, koji se često javljaju u zadacima, su $f(x) = P_n(x)$, $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, $f(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, gde su $A, B \in \mathbb{R}$. Partikularno rešenje $y_p(x)$ nehomogene jednačine

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f(x),$$

gde je $f(x)$ oblika $(*)$ određujemo zavisno od toga da li je kompleksan broj $\lambda = \alpha + i\cdot\beta$ rešenje ili ne karakteristične jednačine za odgovarajuću homogenu jednačinu.

U slučaju da $\lambda = \alpha + i\cdot\beta$ nije rešenje karakteristične jednačine odgovarajuće homogene jednačine, tada partikularno rešenje $y_p(x)$ tražimo u obliku

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x),$$

gde su $R_s(x)$ i $T_s(x)$ nepoznati polinomi čije koeficijente treba odrediti, a s je stepen polinoma koji je jednak višem od stepena n i m, tj. $s = \max\{n, m\}$.
Ako pretpostavimo, ne umanjujući opštost, da je $n = max\{n, m\}$ tada važi da je

$$R(x) = r_0 x^n + r_1 x^{n-1} + \ldots + r_{n-1}x + r_n$$

i

$$S(x) = s_0 x^n + s_1 x^{n-1} + \ldots + s_{n-1}x + s_n$$

čije koeficijente $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}, r_n$ i $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n$ treba odrediti.

Drugi slučaj podrazumeva situaciju da je $\lambda = \alpha + i\cdot\beta$ rešenje karakteristične jednačine odgovarajuće homogene jednačine, tada partikularno rešenje $y_p(x)$ tražimo u obliku

$$y_p(x) = xe^{\alpha x}(R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x)$$

gde koeficijente polinoma $R(x)$ i $S(x)$ treba odrediti, kao i u prethodnom slučaju.

Ako se u okviru funkcije $f(x)$ na desnoj strani nalazi više sabiraka oblika $e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$ tada se za svaki od ovih sabiraka traži odgovarajuće partikularno rešenje, a ukupno partikularno rešenje koje odgovara funkciji $f(x)$ je jednako zbiru svih pojedinačnih partikularnih rešenja. Ovakav postupak rešavanja se u teorija naziva metod superpozicije.

PRIMER

Primena metode neodređenih koeficijenata za određivanje partikularnog rešenja nehomogene linearne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima - princip superpozicije.

Odredimo opšte rešenje nehomogene jednačine

$$y'' - y' - 2y = x^2 - 1 + 3e^{-x}.$$

Rešenje. Kako karakteristična jednačina $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ima rešenja $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 2$ odgovarajući fundamentalni sistem rešenja homogene jednačine biće $y_1 = e^{-x}$ i $y_2 = e^{2x}$.
Funkcija $f(x)$ predstavlja zbir dve funkcije, tako da, prvo određujemo partikularna rešenja $y_{p_1}(x)$ i $y_{p_2}(x)$ koje odgovaraju jednačinama

$$y'' - y' - 2y = x^2 - 1 \;\; i \;\; y'' - y' - 2y = 3e^{-x},$$

tim redom, a partikularno rešenje $y_p(x)$ cele nehomogene jednačine je $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$. U nastavku ćemo odrediti funkcije $y_{p_1}(x)$ i $y_{p_2}(x)$.

U slučaju jednačine $y'' - y' - 2y = x^2 - 1$, kako je $\alpha = \beta = 0$, tada se proverava da li je $\lambda = 0$ rešenje karakteristične jednačine, što nije tačno, tako da je $y_{p_1}(x) = ax^2 + bx + c$, pri čemu koeficijente a, b i c treba odrediti.

Kako je $y'_{p_1}(x) = 2ax + b$ i $y''_{p_1}(x) = 2a$, vraćajući ovo u posmatranu jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned} &2a - 2ax - b - 2(ax^2 + bx + c) = x^2 - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2ax^2 + (-2a - 2b)x + 2a - b - 2c = x^2 - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2a = 1 \wedge -2a - 2b = 0 \wedge 2a - b - 2c = 1. \end{aligned}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo da je $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ i $c = -\frac{1}{4}$. Tada je traženo partikularno rešenje oblika

$$y_{p_1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

U slučaju jednačine $y'' - y' - 2y = 3e^{-x}$, kako je $\alpha = \;-1$ i $\beta = 0$, tada se proverava da li je $\lambda = -1 + i \cdot 0$ jeste rešenje karakteristične jednačine. Vidimo da je jedno rešenje karakteristične jednačine $\lambda_1 = -1$, pa je $y_{p_2}(x) = Axe^{-x}$, pri čemu koeficijent A treba odrediti. Kako je $y'_{p_2}(x) = A(1-x)e^{-x}$ i $y''_{p_2}(x) = A(2+x)e^{-x}$, vraćajući ove veličine u posmatranu jednačinu dobijamo

$$A(2+x)e^{-x} - A(1-x)e^{-x} - 2Axe^{-x} = 3e^{-x}.$$

Nakon deljenja poslednje jednačina sa e^{-x} dobijamo da je $-3A = 3,$ tj. $A = -1.$ Tada je $y_{p_2}(x) = -xe^{-x}.$

Stoga je opšte rešenje date nehomogene jednačine:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} - xe^{-x}.$$

VIDEO KLIP

Snimci sa Youtube-a: postupak za rešavanje Koši - Ojlerove jednačine je drugačiji od izloženog i odnosi se na jednačine drugog reda.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Nehomogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda

POJAM

Za određivanje partikularnog rešenja linearne nehomogene diferencijalne jednačine višeg reda se koriste Metoda neodređenih koeficijenata i Metoda varijacije konstanti.

Jednačina oblika

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+a_2y^{(n-2)}(x)+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),$$

gde su $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n\in\mathbb{R}$, se naziva nehomogena linearna jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima, pri čemu je funkcija $f(x)\neq 0$ neprekidna na realnom intervalu $x\in D$.

Može se pokazati da važi sledeći stav.

Stav. Ako je $y_p=y_p(x)$ bilo koje partikularno rešenje nehomogene jednačine

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+a_2y^{(n-2)}(x)+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),$$

i $u=u(x)$ opšte rešenje odgovarajuće linearne homogene jednačine sa konstantnim koeficijentima, tada je

$$y(x)=u(x)+y_p(x)$$

opšte rešenje date nehomogene jednačine.

U nastavku ćemo najpre izložiti Metod neodređenih koeficijenata, a zatim i Metod varijacije konstanti ili kako se još naziva Lagranžev metod za određivanje partikularnog rešenja posmatrane nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

METODA NEODREĐENIH KOEFICIJENATA

Ova metoda se može primeniti samo za određene klase funkcija $f(x)$.

Isto kao i za nehomogenu linearnu jednačinu drugog reda, ako je slobodan član jednačine

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+a_2y^{(n-2)}(x)+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),$$

gde su $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n\in\mathbb{R}$,funkcija $f(x)\neq 0$ oblika

$$f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x),$$

tada se partikularno rešenje polazne jednačine može odrediti neposredno, metodom neodredjenih koeficijenata, pri čemu su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi stepena n, odnosno m, tim redom.

Uočimo karakterističnu jednačinu, odgovarajuće homogene jednačine koja glasi:

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0.$$

Sada razlikujemo sledeća dva slučaja:

1° Ako kompleksan broj $\lambda=\alpha+i\cdot\beta$ nije rešenje odgovarajuće karakteristične jednačine, tada postoji partikularno rešenje posmatrane jednačine oblika

$$y_p(x)=e^{\alpha x}(R_s(x)\cos\beta x+T_s(x)\sin\beta x),$$

gde su $R_s(x)$ i $T_s(x)$ polinomi čije koeficijente treba odrediti, a s je stepen polinoma koji je jednak višem od stepena n i m.

2° Ako kompleksan broj $\lambda=\alpha+i\cdot\beta$ jeste rešenje odgovarajuće karakteristične jednačine, višestrukosti $p\,(1\leq p\leq n)$, tada postoji partikularno rešenje posmatrane nehomogene jednačine oblika

$$y_p(x)=x_pe^{\alpha x}(R_s(x)\cos\beta x+T_s(x)\sin\beta x).$$

Napomena. Ako se u okviru funkcije $f(x)$ na desnoj strani nalazi više sabiraka oblika $e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x$ tada se za svaki od ovih sabiraka traži odgovarajuće partikularno rešenje, a ukupno partikularno rešenje koje odgovara funkciji $f(x)$ je jednako zbiru svih pojedinačnih partikularnih rešenja. Ovakav postupak rešavanja se u teorija naziva metod superpozicije.

METOD VARIJACIJE KONSTANTI – POSTAVLJANJE SISTEMA ZA ODREĐIVANJE OPŠTEG REŠENJA

U opštem slučaju, kada je funkcija $f(x)$ izvesna elementarna funkcija, za određivanje partikularnog rešenja posmatrane nehomogene jednačine može se koristi Lagranžev metod.

Nedostatak pomenute metode neodređenih koeficijenata za rešavanje nehomogene linearne diferencijalne jednačine $n-$tog reda

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+a_2y^{(n-2)}(x)+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$,je u tome što se može primeniti samo na određene klase funkcija $f(x)$, o čemu je već bilo reči.

U opštem slučaju, kada je funkcija $f(x)$, što je u praksi najčešće slučaj, izvesna elementarna funkcija, za određivanje partikularnog rešenja posmatrane nehomogene jednačine može se koristiti Metoda varijacije konstanti ili kako se još naziva Lagranževa metoda.

On se, dakle, sastoji u tome da opšte rešenje $y(x)$ tražimo u obliku

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x),$$

gde je $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ bilo koji fundamentalni sistem rešenja odgovarajuće homogene jednačine i gde su nepoznate funkcije $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ koje treba odrediti.

Može se pokazati da se ove funkcije mogu odrediti iz sledećeg sistema jednačina

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n &= 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' &= 0, \\ C_1'y_1'' + C_2'y_2'' + \ldots + C_n'y_n'' &= 0, \\ &\vdots \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} &= f(x). \end{aligned}$$

METODA VARIJACIJE KONSTANTI – ODREĐIVANJE OPŠTEG REŠENJA

Za razliku od Metode neodređenih koeficijenata, prilikom primene Metode varijacije konstanti do opšteg rešenja se dolazi neodređenom integracijom izvesnih funkcija.

Rešavanjem ovog sistema dobijamo da je:

$$C_1'(x) = \varphi_1(x),\, C_2'(x) = \varphi_2(x),\, \ldots, C_n'(x) = \varphi_n(x)$$

tj.

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + D_1 = \alpha_1(x) + D_1,$$

$$C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + D_2 = \alpha_2(x) + D_2,$$

$$\vdots$$

$$C_n(x) = \int \varphi_n(x)dx + D_n = \alpha_n(x) + D_n.$$

Tada je opšte rešenje posmatrane nehomogene jednačine oblika

$$y(x) = \big(\alpha_1(x) + D_1\big) \cdot y_1 + \big(\alpha_2(x) + D_2\big) \cdot y_2 + \cdots + \big(\alpha_n(x) + D_n\big) \cdot y_n = \\ = u(x) + y_p(x),$$

gde

$$u(x) = D_1 \cdot y_1 + D_2 \cdot y_2 + \cdots + D_n \cdot y_n,$$

predstavlja rešenje odgovarajuće homogene jednačine, dok funkcija

$$y_p(x) = \alpha_1(x) \cdot y_1 + \alpha_2(x) \cdot y_2 + \alpha_n(x) \cdot y_n$$

predstavlja partikularno rešenje.

Napomena. Metoda varijacije konstanti se može koristiti za određivanje partikularnog rešenja nehomogenih diferencijalnih jednačina drugog i više reda za proizvoljnu klasu funkcija $f(x)$. Utom smislu ovaj metod je opštiji od metoda neodređenih koeficijenata. Međutim, u slučaju kada funkcija $f(x)$ pripada klasina kojese može primeniti taj metod,preporučuje se njegova primena, jer se na jednostavniji način dolazi do rešenja (izbegava se integracija).

PRIMER

Rešavanje diferencijalne jednačine primenom Metode varijacije konstanti.

Metodom varijacije konstanti rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 2y' = e^x \sin x$.

Rešenje. Posmatrajmo odgovarajuću homogenu jednačinu $y'' - 2y' = 0$. Njena karakteristična jednačina je $\lambda^2 - 2\lambda = 0$, čiji su koreni $r_1 = 0$, $r_2 = 2$. Fundamentalni sistem rešenja odgovarajuće homogena diferencijalne jednačine su funkcije 1 i e^{2x}. Opšte rešenje polazne jednačine je oblika

$$y(x) = C_1(x) \cdot 1 + C_2(x) \cdot e^{2x},$$

gde funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$ treba odrediti iz sistema

$$\begin{aligned} C_1'(x) + C_2'(x)e^{2x} &= 0, \\ C_1'(x) \cdot 0 + 2C_2'(x)e^{2x} &= e^x \sin x. \end{aligned}$$

Iz druge jednačine sistema dobijamo da je $C_2'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \sin x$. Tada je

$$C_2(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x} \sin x \, dx = \text{ostavlja se za vežbu studentima} = \\ -\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x + \cos x) + D_2.$$

Iz prve jednačine sistema, važi da je $C_1'(x) = -C_2'(x)e^{2x} = -\frac{1}{2}e^x \sin x$. Tada je

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\int e^x \sin x \, dx = \text{ostavlja se za vežbu studentima} =$$
$$-\frac{1}{4}e^x(\sin x - \cos x) + D_1.$$

Opšte rešenje, polazne jednačine je tada

$$y(x) = -\frac{1}{4}e^x(\sin x - \cos x) + D_1 + \left(-\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x + \cos x) + D_2\right) \cdot e^{2x} =$$
$$= D_1 + D_2 \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\sin x.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Metod varijacije konstanti.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 6

Koši - Ojlerova jednačina

POJAM

Poseban slučaj linearne homogene ili nehomogene diferencijalne jednačine višeg reda čiji su koeficijenti funkcije predstavlja Koši-Ojlerova jednačina.

Do sada smo razmatrali linearnu homogenu i nehomogenu diferencijalnu jednačinu višeg reda oblika

$$y^{(n)}x + a_1 y^{(n-1)}x + a_2 y^{(n-2)}x + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x),$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$,pri čemu je funkcija $f(x) \neq 0$ neprekidna na realnom intervalu $x \in D$.

Međutim, kao što smo u uvodu rekli, koeficijenti $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ mogu biti i proizvoljne funkcije, po promenljivoj x. Sada ćemo obraditi jedan specifičan slučaj ovakvih jednačina, u smislu da koeficijenti koji su funkcije imaju specifičan oblik. Naime, posmatrajmo jednačinu oblika

$$c_n(ax+b)^n y^{(n)}(x) + c_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + c_1(ax+b)y' + c_0 y = f(x).$$

Ova jednačina se naziva Koši - Ojlerova jednačina koja se smenom $ax + b = e^t$ prevodi u nehomogenu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima, gde su $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n \in \mathbb{R}$.

Pri uvođenju prethodne smene treba voditi računa o sledećem

$$ax + b = e^t \Rightarrow adx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = ae^{-t}.$$

Kako se u polaznu Koši-Ojlerovu jednačinu uvodi nova promenljiva t, potrebno je odrediti izvod funkcije y po promenljivoj t.
Tada imamo:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = a\dot{y}e^{-t},$$

gde je uvedena oznaka $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$. Slično, možemo dobiti da je

$$
\begin{aligned}
y'' = \frac{dy'}{dx} &= \frac{d(a\dot{y}e^{-t})}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \\
&= a(\ddot{y}e^{-t} - \dot{y}e^{-t})e^{-t} = \\
&= a\ddot{y}e^{-2t} - a\dot{y}e^{-2t},
\end{aligned}
$$

gde je $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$.

Nastavljajući ovaj postupak, sve do $n-$ tog izvoda, i nakon uvođenja pomenute smene, polazna Ojlerova jednačina postaje nehomogena diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima, koja se može rešavati već pomenutom Metodom neodređenih koeficijenata ili Metodom varijacije konstanti u zavisnosti od toga kakva je funkcija $f(x)$.

PRIMER 1. DEO

Postupak rešavanja Ojlerove jednačine.

Odrediti opšte rešenje sledeće diferencijalne jednačine

$$(2x+3)^3 y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0.$$

Rešenje. Ovo je Koši-Ojlerova diferencijalna jednačina i nju rešavamo smenom $2x+3 = e^t \Rightarrow 2dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 2e^{-t}$.

Tada imamo da je

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2\dot{y}e^{-t},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(2\dot{y}_t e^{-t})}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2(\ddot{y}e^{-t} - \dot{y}e^{-t})e^{-t} = 2\ddot{y}e^{-2t} - 2\dot{y}_t e^{-2t},$$

$$
\begin{aligned}
y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(2\ddot{y}e^{-2t} - 2\dot{y}e^{-2t})}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} &= 2(\dddot{y}e^{-2t} - 2\ddot{y}e^{-2t} - (\ddot{y}e^{-2t} - 2\dot{y}e^{-2t}))e^{-t} \\
&= 2\dddot{y}e^{-3t} - 6\ddot{y}e^{-3t} + 4\dot{y}e^{-3t}.
\end{aligned}
$$

Uvodeći sve dobijene smene u početni jednačinu imamo

$$
\begin{aligned}
(2x+3)^3 y''' + 3(2x+3)y' - 6y = e^{3t}(2\dddot{y}e^{-3t} - 6\ddot{y}e^{-3t} + 4\dot{y}e^{-3t} + 3e^t \cdot 2\dot{y}e^{-t} - 6y \\
= 0,
\end{aligned}
$$

tj.

$$2\dddot{y} - 6\ddot{y} + 10\dot{y} - 6y = 0 / : 2 \Rightarrow \dddot{y} - 3\ddot{y} + 5\dot{y} - 3y = 0$$

Dobijena je homogena linearna diferencijalna jednačina trećeg reda sa konstantnim koeficijentima. Karakteristična jednačina tada glasi

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3 = 0.$$

PRIMER 2. DEO

Određivanje nula karakterističnog polinoma.

Podsetimo se kako se određuju koreni polinom sa celobrojnim koeficijentima

$$P_n(x) = a_n(x)^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$

gde su $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Posmatra se koeficijent a_n i svi njegovi delioci u oznaci p (posmatrani i sa predznakom + i -), kao i delioci koeficijenta a_0, u oznaci q (posmatrani i sa predznakom + i -). Ako posmatrani polinom imam racionalna rešenja (korene), oni su oblika $\frac{q}{p}$.

U našem slučaju imamo da je kod polinoma $P_3(x) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3$ koeficijent $a_3 = 1$, a $a_0 = -3$. U ovom slučaju celobrojne nule, ako ih polinom ima, su brojevi $\pm 1, \pm 3$. Nula polinoma je ona vrednost koju kada zamenimo u posmatranom polinomu dobijemo vrednost 0 . Dakle, krenimo od vrednosti $\lambda = 1$. Imamo da je $P_3(1) = 0$, pa je vrednost $\lambda_1 = 1$, nula posmatranog polinoma. To dalje znači da je polinom $P_3(x) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3$ deljiv polinomom $\lambda - \lambda_1$, tj. $\lambda - 1$.

Tada je

$$(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - 2\lambda + 3,$$

$$tj. \qquad \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 3)$$

Na kraju rešavajući kvadratnu jednačinu $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$ dobijamo da je $\lambda_{2,3} = 1 + i\sqrt{2}$.

Dakle,

$$\lambda^3 - 13\lambda - 12 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 3).$$

Tada je

$$y(t) = C_1e^t + e^tC_2 \cos\sqrt{2t} + C_3 \sin\sqrt{2t}.$$

Tada je

$$y(t) = C_1e^t + C_2e^{\frac{1}{2}t} + C_3e^{\frac{3}{2}t}$$

Vraćajući uvedenu smenu $2x + 3 = e^t$, odnosno $t = \ln(2x + 3)$, dobijamo opšte rešenje polazne jednačine

$$y(x) = C_1(2x+3) + C_2e^{\frac{1}{2}\ln(2x+3)} + C_3e^{\frac{3}{2}\ln(2x+3)} = C_1(2x+3) + C_2\sqrt{2x+3} + C_3\sqrt{2x+3}^3$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Koši-Ojlerova homogena jednačina.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 7

Pokazna vežba

ZADATAK 1 (10 MINUTA)

Diferencijalne jednačine drugog reda kojima se može sniziti red.

Naći opšte rešenje diferencijalnih jednačina

a) $y'' = e^{2x}$;   b) $yy'' = y'^2 - y'^3$.

Rešenje.
a) Važi da je

$$y' = \int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + c_1, \quad \text{odakle je} \quad y = \int \left(\frac{e^{2x}}{2} + c_1\right)dx = \frac{e^{2x}}{4} + c_1x + c_2,$$

što predstavlja opšte rešenje polazne jednačine.

b) Ovo je diferencijalna jednačina kojoj nedostaje argument x. Nju rešavamo uvodeći smenu $y' = p$, odakle je $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Tada je

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2 - p^3 \quad \text{tj. nakon sređivanja dobijamo} \quad \frac{dp}{p-p^2} = \frac{dy}{y}.$$

Važi da je

$$\int \frac{dp}{p-p^2} = \int \frac{A\,dp}{p} + \int \frac{B\,dp}{1-p} = [\text{rešiti za vežbu: A=1, B=1}] = \int \frac{dp}{p} - \int \frac{dp}{p-1}$$
$$= \ln\left|\frac{p}{p-1}\right|.$$

Tada je

$$\ln\left|\frac{p}{p-1}\right| = \ln|c_1y|, \quad \text{odakle je} \quad \frac{p}{p-1} = c_1y, \quad \text{tj.} \quad p = \frac{c_1y}{c_1y-1}.$$

Kako je $p = \frac{dy}{dx}$ imamo da je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1y}{c_1y-1}, \quad \text{tj.} \quad \frac{(c_1y-1)\,dy}{c_1y} = dx \quad \text{tj.} \quad \int \frac{(c_1y-1)\,dy}{c_1y} = \int dx.$$

Tada je

$$y - \frac{1}{c_1}\ln y = x + c_2,$$

odnosno nakon proširivanja poslednje relacije sa c_1, dobijamo

$$c_1 y - \ln y = c_1 x + c_1 c_2,$$

što predstavlja opšte rešenje polazne jednačine.

ZADATAK 2 (10 MINUTA)

Homogena linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima drugog reda.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y'' - 4y = 0.$

Rešenje:

Karakteristični jednačina zadate jednačine glasi $\lambda^2 - 4 = 0$. Rešenja ove jednačine su $\lambda = 2$ i $\lambda = -2$.

Ovo je slučaj kada su rešenja karakteristične jednačine realna i različita. Tada su funkcije $y_1 = e^{2x}$ i $y_2 = e^{-2x}$ rešenja polazne jednačine.

Opšte rešenje polazne jednačine je oblika

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y'' - 4y' + 13y = 0.$

Rešenje:

Karakteristični jednačina zadate jednačine glasi $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ i njena rešenja su $\lambda = 2 + 3i$ i $\lambda = 2 - 3i$.

Ovo je slučaj kada su rešenja karakteristične jednačine konjugovano-kompleksna.

Ukoliko su $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ i $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ rešenja karakteristične jednačine, tada su rešenja polazne jednačine kompleksne funkcije $\varphi_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ i $\varphi_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Sada su funkcije $y_1(x) = e^{2x}\cos 3x$ i $y_2(x) = e^{2x}\sin 3x$ rešenja polazne jednačine.

Opšte rešenje polazne jednačine je oblika

$y = C_1 e^{2x}\cos 3x + C_2 e^{2x}\sin 3x.$

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y'' - 2y' + y = 0.$

Rešenje:

Karakteristični jednačina zadate jednačine glasi $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Rešenja ove jednačine su $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Ovo je slučaj kada su rešenja karakteristične jednačine višestruka. Tada su funkcije $y_1 = e^x$ i $y_2 = xe^x$ rešenja polazne jednačine.

Opšte rešenje polazne jednačine je oblika

$y = C_1e^x + C_2xe^x$.

ZADATAK 3 (5 MINUTA)

Homogena linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima trećeg reda.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$.

Rešenje:

Karakteristična jednačina je $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$. Nule karakteristične jednačine su $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ i $\lambda_3 = 3$. O postupku kako su ova rešenja određena videti primer sa predavanja.

Primećujemo da je -2 dvostruko rešenje.

Opšte rešenje ovo homogene jednačine tada glasi:

$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + C_3e^{3x}$.

ZADATAK 4 (10 MINUTA)

Nehomogena linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima drugog reda - metod neodređenih koeficijenata - rešenja homogene jednačine konjugovano-kompleksna.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y'' + y = x$.

Rešenje:

Karakteristična jednačina zadate homogene jednačine je $\lambda^2 + 1 = 0$. Njena rešenja su $\lambda_{1/2} = 0 \pm i$. Dakle, konjugovano-kompleksna. Odgovarajuća homogena jednačina $y'' + y = 0$ ima partikularna rešenja $y_1 = \sin x$ i $y_2 = \cos x$ koja su linearno nezavisna, pa je njeno rešenje oblika

$y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$

Da bismo odredili partikularno rešenje zadate nehomogene jednačine koristimo metod neodređenih koeficijenata.

Partikularno rešenje tražimo u obliku

$y_p = x^p P_n(x).$

U našem slučaju je $p = 0,$ jer se $\alpha = 1$ (koeficijent uz x u eksponentu e^x) ne preklapa ni sa jednim od rešenja karakteristične jednačine. a $P_n(x)$ je nepoznati polinom istog stepena, kao i polinom koji se javlja na desnoj strani polazne jednačine, tj. prvog stepena. Dakle, partikularno rešenje je oblika $y_p = ax + b.$ Računamo izvode $y_p{}' = a$ i $y_p{}'' = 0.$ Ubacujemo upravo dobijene izraze u polaznu jednačinu i dobijamo

$y_p{}'' + y_p = x,$

tj.

$ax + b = x.$

$a = 1,$ $b = 0$ pa je $y_p = x,$ dok je opšte rešenje nehomogene jednačine

$y = y_h + y_p = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x.$

ZADATAK 5 (10 MINUTA)

Metode neodređenih koeficijenata za određivanje partikularnog rešenja nehomogene linearne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima - rešenja homogene j-ne realna i različita.

Odredimo opšte rešenje jednačine

$$y'' - y = 2x - 1.$$

Rešenje. Kako karakteristična jednačina $\lambda^2 - 1 = 0$ ima rešenja $\lambda_{1,2} = \pm 1,$ odgovarajući fundamentalni sistem rešenja homogene jednačine biće $y_1 = e^x$ i $y_2 = e^{-x}.$

Opšte rešenje ove jednačine je oblika $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + y_p(x).$

Funkcija sa desne strane ove nehomogene jednačine $f(x) = 2x - 1$ polinom prvog stepena. Ako pogledamo opšti oblik funkcije $f(x)$ vidimo da ovaj polinom prvog reda potpada pod taj slučaj, pri čemu je $\alpha = 0$ i $\beta = 0.$ Tada proveravamo da li je $\lambda = 0 + i \cdot 0 = 0$ rešenje karakteristične jednačine. Kako to nije slučaj, partikularno rešenje nehomogene jednačine tražimo u obliku

$$y_p(x) = a \cdot x + b.$$

Kako je $y'_p(x) = a$ i $y''_p(x) = 0$ vraćajući ove veličine u početnu jednačinu dobijamo

$$-ax - b = 2x - 1 \Leftrightarrow a = -2 \wedge b = 1,$$

dakle, $y_p(x) = -2x + 1$. Odavde, opšte rešenje nehomogene jednačine je

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2x + 1.$$

ZADATAK 6 (15 MINUTA)

Primena metode neodređenih koeficijenata za određivanje partikularnog rešenja nehomogene linearne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima - princip superpozicije.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y'' + y = x + 2e^x$.

Rešenje:

Funkcija $f(x) = x + 2e^x$ se može podeliti na dva sabirka

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Partikularno rešenje jednačine $y'' + y = x$ je $y_1 = x$ (na osnovu prethodnog zadatka).

Treba odrediti partikularno rešenje jednačine $y'' + y = 2e^x$.

Da bismo odredili partikularno rešenje zadate nehomogene jednačine koristimo metod neodređenih koeficijenata.

Partikularno rešenje tražimo u obliku

$y_2 = x^p e^{\alpha x} P_n(x)$.

U našem slučaju je $p = 0$, jer se $\alpha = 1$ (koeficijent uz x u eksponentu e^x) ne preklapa ni sa jednim od rešenja karakteristične jednačine. $P_n(x)$ je polinom stepena istog kao i polinom od koga je sačinjena funkcija $f_2(x) = 2e^x$. Kako je 2 konstanta, tj. polinom nultog stepena, takav će biti i $P_n(x)$.

Dakle, partikularno rešenje je oblika $y_2 = ae^x$. Računamo izvode, $y_2' = ae^x$ i $y_2'' = ae^x$. Ubacujemo upravo dobijene izraze u polaznu jednačinu i dobijamo

$y_2'' + y_2 = 2e^x$

tj.

$2ae^x = 2e^x$.

Odakle je $a = 1$ i $y_2 = e^x$.

Odgovarajuća homogena jednačina $y'' + y = 0$ ima opšte rešenje

$y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

(takođe, na osnovu prethodnog zadatka).

Opšte rešenje nehomogene jednačine oblika

$y = y_h + y_1 + y_2 = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x + e^x.$

ZADATAK 7 (10 MINUTA)

Metod neodređenih koeficijenata za odredjivanje partikularnog rešenja nehomogene linearne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima - rešenja homogene j-ne konj. kompleksna.

Odredimo opšte rešenje jednačine

$$y'' + y = 2\cos x.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina odgovarajuće homogene jednačine je $\lambda^2 + 1 = 0$ i njena rešenja su $\lambda_{1,2} = \pm i$, pa je jedan fundamentalni sistem rešenja homogene jednačine $\{\cos x, \sin x\}$.

Opšte rešenje ove jednačine je oblika $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + y_p(x)$.

U funkciji $f(x)$ je $\alpha = 0, \beta = 1$, a kako je $\lambda = 0 + i = i$ rešenje karakteristične jednačine, traženo partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x(A\cos x + B\sin x).$$

Imamo da je

$$y'_p(x) = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$$

i

$$y''_p(x) = -2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x + B\sin x).$$

Vraćajući dobijeno u polaznu jednačinu, imamo

$$-2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x + B\sin x) + x(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x,$$

odakle se, nakon sređivanja dobija

$$-A\sin x + B\cos x = 2\cos x,$$

tj. dobijamo da je $A = 0$ i $B = 2$.

Dakle $y_p(x) = x \cdot \sin x$, pa je opšte rešenje date jednačine oblika

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \cdot \sin x.$$

ZADATAK 8 (15 MINUTA)

Nehomogena linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima trećeg reda - princip superpozicije.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y''' - y'' + y' - y = \cos x + 2e^x.$

Rešenje:

Opšte rešenje nehomogene diferencijalne jednačine je zbir opšteg rešenje odgovarajuće linearne homogene jednačine i partikularnog rešenja nelinearne. Partikularno rešenje y_p jednako je zbiru partikularnih rešenja y_1 i y_2 redom jednačina

$y''' - y'' + y' - y = \cos x$

i

$y''' - y'' + y' - y = 2e^x.$

Kako karakteristična funkcija polazne jednačine

$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$

ima korene $i,\ -i$ i 1. Opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine je $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^x.$

Posmatrajmo, najpre, jednačinu $y''' - y'' + y' - y = \cos x$. Njeno partikularno rešenje je oblika $y_1 = x(A\cos x + B\sin x)$. Naime, zbog $f_1 = \cos x$ imamo da je u opštem slučaju partikularno rešenje oblika

$y_p(x) = x^p e^{\alpha x}\left(R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x\right)$

U našem slučaju imamo da je $p = 1$, jer je $\alpha + i\beta = i$, pa imamo preklapanje sa komplesnim rešenjem u karakterističnj jednačini. S obzirom da uz funkciju $\cos x$ stoji koeficijent imamo da je $R_s(x) = A$ i $T_s(x) = B$.

Koeficijente A i B u y_1 određujemo tako što prvo odredimo y_1', y_1'' i y_1''' i zamenimo u $y''' - y'' + y' - y = \cos x$. Odatle dobijamo da je $A = B = -\frac{1}{4}$ (proveriti za vežbu).

O partikularnom rešenju jednačine $f_2(x) = 2e^x$ je već bilo reči i važi da je $y_2 = Cxe^x$ (x stoji u partikularnom rešenju jer je jedno rešenje karakteristične jednačine 1). Koeficijent C i određujemo tako što prvo odredimo y_2', y_2'' i y_2''' i zamenimo u

$y''' - y'' + y' - y = 2e^x.$

Tada dobijamo da je $C = 1$ (proveriti za vežbu).

Prema tome, opšte rešenje je

$y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3e^x - \frac{1}{4}x(\cos x + \sin x) + xe^x.$

ZADATAK 9 (15 MINUTA)

Primena metode neodređenih koeficijenata za određivanje partikularnog rešenja nehomogene linearne jednačine trećeg reda sa konstantnim koeficijentima.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x.$

Rešenje:

Opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine je, kao i u prethodnom zadatku

$y_h = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3e^x,$

Pri čemu su rešenja karakteristične jednačine $i,\ -i$ i 1. Kako je $f(x) = \left(x^2 + x\right)e^{0x},$ tada nema preklapanja rešenja karakteristične jednačine sa vrednosšću $\alpha = 0,$ pa je partikularno rešenje oblika $y_p = ax^2 + bx + c.$ Da bismo odredili koeficijente a, b i c metodom neodređenih koeficijenata potrebno je, najpre, odrediti

$y'_p = 2ax + b$

$y''_p = 2a$

$y'''_p = 0$

Zamenom ovih vrednosti u polaznoj jednačini dobijamo

$-2a + 2ax + b - ax^2 - bx - c = x^2 + x,$

tj.

$-ax^2 + (2a - b)x - 2a + b - c = x^2 + x,$

tj. $-a = 1,\quad 2a - b = 0,\quad -2a + b - c = 0.$ Rešavanjem ovog sistema dobijamo da je $a = -1,\quad b = -2,\quad c = 0.$

$y_p = -x^2 - 3x - 1$

$y = y_h + y_p = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3e^x - x^2 - 2x.$

ZADATAK 10 (15 MINUTA)

Nehomogena linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima drugog reda - metod neodređenih koeficijenata.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y'' + 4y' + 5y = 10\cos x e^{-2x}$.

Rešenje: Karakteristična jednačina glasi $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ i njena rešenja su konjugovano-kompleksna

$\lambda_{1,2} = -2 \pm i$.

Tada je odgovarajuće homogeno rešenje oblika

$y_h = e^{-2x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right)$.

Dalje, zbog $f(x) = 10\cos x e^{-2x}$ imamo da je u opštem slučaju partikularno rešenje oblika

$y_p(x) = x^p e^{\alpha x}\left(R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x\right)$

Primećujemo da je $\alpha + i\beta = -2 + i$, pa je $p = 1$. Kako u funkciji $f(x) = 10\cos x e^{-2x}$ uz funkciju $\cos x$ stoji koeficijent - broj 10 (polinom nultog reda), imamo da je $R_s(x) = A$ i $T_s(x) = B$. Partikularno rešenje je tada oblika $y_p = xe^{-2x}\left(A\cos x + B\sin x\right)$.

Računamo prvi i drugi izvod partikularnog rešenja $y_p(x) = x\left(A\cos x + B\sin x\right)e^{-2x}$.

$y_p'(x) = (A\cos x + B\sin x)e^{-2x} + x(-A\sin x + B\cos x)e^{-2x} - 2x\left(A\cos x + B\sin x\right)e^{-2x}$

$y_p''(x) = (-A\sin x + B\cos x)e^{-2x} - 2(A\cos x + B\sin x)e^{-2x} + (-A\sin x + B\cos x)e^{-2x} + x(-A\cos x - B\sin x)e^{-2x} -$

$2x(-A\sin x + B\cos x)e^{-2x} - 2(A\cos x + B\sin x)e^{-2x} - 2x(-A\sin x + B\cos x)e^{-2x} + 4x\left(A\cos x + B\sin x\right)e^{-2x}$

Iz identiteta $y_p'' + 4y_p' + 5y_p = 10\cos x e^{-2x}$, metodom neodređenih koeficijenata i rešavanjem sistema sa dve nepoznate dobijamo da je $A = 0$ i $B = 5$.

Opšte rešenje je oblika

$y = y_h + y_p = \left(C_1\cos x + C_2\sin x\right)e^{-2x} + 5x\sin x e^{-2x}$.

ZADATAK 11 (10 MINUTA)

Lagranžev metod varijacije konstanti.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$y'' - 6y' + 9y = \frac{1}{x^2}e^{3x}.$

Rešenje:

Karakteristični polinom homogene linearne jednačine glasi $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. Rešenja ove jednačine su $\lambda_{1,\,2} = 3$.

Ovo je slučaj kada su rešenja karakteristične jednačine višestruka. Tada su funkcije $y_1 = e^{3x}$ i $y_2 = xe^{3x}$ rešenja polazne jednačine.

Opšte rešenje homogene linearne jednačine je oblika

$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}.$

Dalje, koristimo Lagranžev metod varijacije konstanti.

Rešavanjem sistema

$C_1'(x)e^{3x} + C_2'(x)xe^{3x} = 0$

$C_1'(x)3e^{3x} + C_2'(x)\left(e^{3x} + 3xe^{3x}\right) = \frac{1}{x^2}e^{3x}$

Kramerovim pravilom, npr.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 3 & 1+3x \end{vmatrix} = 1 + 3x - 3x = 1, \quad D_x = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \frac{1}{x^2} & 1+3x \end{vmatrix} = 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2}.$$

Imamo da je:

$C_1'(x) = \frac{D_x}{D} = -\frac{1}{x}$

$C_2'(x) = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{x^2}$

$C_1(x)$ i $C_2(x)$ se dobijaju rešavanjem integrala

$C_1(x) = \int -\frac{1}{x}dx = -\ln x + D_1$, $C_2(x) = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + D_2$.

Opšte rešenje je oblika

$y = \left(-\ln x + D_1\right)e^{3x} + \left(-\frac{1}{x} + D_2\right)xe^{3x}.$

ZADATAK 12 (10 MINUTA)

Koši-Ojlerova jednačina.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$x^2y'' + xy' - y = x^2$.

Rešenje: Ovo je Ojlerova diferencijalna jednačina i nju rešavamo smenom $x = e^t$ $\Rightarrow dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}$.

Tada imamo da je:

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \dot{y}e^{-t}$,

$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\dot{y}_t e^{-t}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\ddot{y}e^{-t} - \dot{y}e^{-t}\right)e^{-t} = \ddot{y}e^{-2t} - \dot{y}_t e^{-2t}$,

Zamenom dobijenih vrednosti u polaznoj jednačini imamo

$x^2y'' + xy' - y = e^{2t}\left(\ddot{y}e^{-2t} - \dot{y}_t e^{-2t}\right) + e^t \cdot \dot{y}e^{-t} - y = e^{2t}$,

tj.

$\ddot{y} - y = e^{2t}$.

Dobili smo diferencijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Odgovarajuća homogena jednačina ima karakterističnu jednačinu je $\lambda^2 - 1 = 0$ koja ima rešenja $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 1$, pa je opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine $y_h = C_1e^t + C_2e^{-t}$. Kako je $f(t) = e^{2t}$, tada partikularno rešenje je oblika:

$y_p = Ae^{2t}$.

Tada imamo da je $\dot{y}_p = 2Ae^{2t}$ i $\ddot{y}_p p = 4Ae^{2t}$. Zamenom prethodno dobijenog u jednačini $\ddot{y} - y = e^{2t}$ imamo

$$4Ae^{2t} - Ae^{2t} = e^{2t}.$$

Odavde dobijamo da je $A = \frac{1}{3}$, pa je $y_p = \frac{1}{3}e^{2t}$.

Ukupno je

$$y = y_h + y_p = C_1e^t + C_2e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}.$$

Vraćajući smenu $x = e^t$ dobijamo opšte rešenje date diferencijalne jednačine po x koje glasi

$$y = C_1x + C_2\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^2.$$

Poglavlje 8

Zadaci za samostalni rad

VIDEO KLIP 1 (21 MINUT)

Snimak sa Youtube-a - dodatni zadaci za rad.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2 (9 MINUTA)

Snimak sa Youtube-a.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci za dodatni rad studenata.

Zadatak 1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.
Rezultat. $y = \frac{x}{c_2} e^{c_1 x+1} - \frac{1}{c_2} e^{c_1 x+1}$.

Zadatak 2. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 3y' - 4y = 0$.
Rezultat. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$.

Zadatak 3. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' + 4y' + 4y = 0$.
Rezultat. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$.

Zadatak 4. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y''' + y'' + 9y' + 9y = 0$.
Rezultat. $y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x$.

Zadatak 5. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' + 5y' + 6y = e^{x}(3 - 4x)$.
Rezultat. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{9}\right) e^{x}$.

Zadatak 6. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 7y' + 12y = e^{2x} + x^2$.
Rezultat. $y = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{12} x^2 + \frac{7}{72} x + \frac{37}{864} + C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$.

Zadatak 7. Rešiti diferencijalnu jednačinu $x^2y'' - 3xy' - 5y = x^2 \ln x$.
Rezultat. $y = \frac{1}{150}x^2(5\ln x - x^3) - \frac{1}{6}x^4(\ln x + 1) + \frac{D_1}{x} + D_2x^5$.

Vreme izrade: 1. 10 minuta; 2. 10 minuta; 3. 10 minuta; 4. 15 minuta; 5. 20 minuta; 6. 20 minuta; 7. 20 minuta.

Zaključak za lekciju 07

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE VIŠEG REDA

Homogena i nehomogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima.

U ovoj lekciji smo učili o diferencijalnim jednačinama višeg reda i to:

- Jednačinama drugog reda kojima se može sniziti red,
- Homogenim linearnim jednačinama drugog reda sa konstatnim koeficijentima,
- Nehomogenim linearnim jednačinama drugog reda sa konstantnim koeficijentima,
- Homogenim linearnim jednačinama n -tog reda ($n \geq 3$) sa konstatnim koeficijentima,
- Nehomogenim linearnim jednačinama n -tog reda ($n \geq 3$) sa konstantnim koeficijentima,
- Koši - Ojlerovoj jednačini.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. Rale Nikolić, Nada Damljanović, Matematika 2 – zbirka zadataka, Fakultet tehničkih nauka, Čačak, 2016. godina
4. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.

UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Brojni redovi

Lekcija 10

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 10

BROJNI REDOVI

Uvod

UVOD

Brojni redovi

Ova lekcija je posvećena izučavanju osnovnog pojma iz matematičke analize – brojnom redu. U njoj će biti izučen pojam brojnog reda kako sa nenegativnim članovima, tako i sa znakopromenljivim članovima. Centralno mesto u radu sa ovim veoma bitnim matematičkim pojmovima jeste određivanje njihove konvergencije i tome će biti posvećena posebna pažnja. Naime, biće uvedeni razni kriterijumi za ispitivanje konvergencije brojnog reda.

U prvom delu ćemo se podsetiti o brojnim nizovima, jer se pojam brojnog reda nastavlja na pojam brojnog niza.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Brojni niz

DEFINICIJA

Skup realnih brojeva $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ naziva se brojni niz ako je svakom elementu a_n skupa A korespondiran jedan i samo jedan prirodan broj kao njegov indeks.

Za uočeni neprazan skup $A \subseteq \mathbb{R}$ i neprazan skup $B \subseteq \mathbb{R}$, svaku uređenu trojku (A, B, f) gde je f pravilo po kojem se, na jednoznačan način, svakom $x \in A$ dodeljuje tačno jedno $y \in B$ naziva se realna funkcija jedne realne promenljive. Za pomenutu funkciju najčešća oznaka je $y = f(x),\ \ x \in A$, tj. kada je ona zadata u eksplicitnom obliku, što će ovde biti slučaj.

Skup realnih brojeva $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ naziva se brojni niz ako je svakom elementu a_n skupa A korespondiran jedan i samo jedan prirodan broj kao njegov indeks. Dakle,

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n & \ldots \end{array}$$

Element iz skupa A kome je indeks 1 naziva se prvim članom niza i označava se sa a_1. Analogno, a_2 je drugi član niza, a_3 je treći član niza i tako redom, uopšte a_n je $n-$ ti član niza, za $n \in \mathbb{N}$. Član a_n se naziva opšti član niza , koji igra veoma važnu ulogu u određivanju osobina posmatranog niza. Drugim rečima, za svaku funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ kažemo da je jedan brojni (realan niz) i to se zapisuje: $a_n = f(n), (n \in \mathbb{N})$.

Niz sa članovima $a_n, (n \in \mathbb{N})$ se označava sa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili kraće sa (a_n). Nizovi se najčešće zadaju preko opšteg člana. To je ilustrovano narednim primerom.

Primer. Niz prirodnih brojeva se zadaje sa $a_n = f(n) = n$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ Niz parnih prirodnih brojeva se zadaje sa $a_n = f(n) = 2n$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ Niz neparnih prirodnih brojeva se zadaje sa $a_n = f(n) = 2n - 1$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ Niz recipročnih vrednosti prirodnim brojevima se zadaje sa $a_n = f(n) = \frac{1}{n}$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ Niz čiji je opšti član $a_n = f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ je od posebnog interesa u matematici.

Nizovi mogu biti sa konačnim brojem članova i tada se nazivaju konačni nizovi, dok ako imaju beskonačno mnogo članova, tada se nazivaju beskonačni nizovi. Ovde će biti proučavane osobine beskonačnih nizova.

OGRANIČENOST BROJNOG NIZA

Za niz se kaže da je ograničen ako je ograničen i odozdo i odozgo. Supremum (infimum) niza (ako postoji) predstavlja njegovo najmanje (najveće) gornje (donje) ograničenje.

Neka je dat niz (a_n). Za njega se kaže da je ograničen odozgo ako postoji $M \in \mathbb{R}$ tako da je $a_n \leq M$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Svako gornje ograničenje niza (a_n) naziva se $majoranta$ za taj niz.

Neka je dat niz (a_n). Za njega se kaže da je ograničen odozdo ako postoji $m \in \mathbb{R}$ tako da je $a_n \geq m$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Svako donje ograničenje niza (a_n) naziva se $minoranta$ za taj niz.

Niz (a_n) je ograničen niz ako je ograničen i odozdo i odozgo. To, zapravo, znači da se svi članovi tog niza nalaze u intervalu $[m, M]$.

Primer. Niz $a_n = \frac{n+2}{n+1}$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ je ograničen niz, jer je:

$$a_n = \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1},$$

Očigledno je $1 < a_n < 2$, gde je broj 1 minoranta, a broj 2 majoranta niza.
U prethodnom primeru su samo grubo određene granice u kojima se vrednosti niza nalaze. Može se postaviti pitanje da li se za dati niz mogu preciznije odrediti granice intervala u kojima se nalaze sve vrednosti niza.

Broj G se naziva supremum niza (a_n) ako važi

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq G,$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{N}) a_{n_1} > G - \varepsilon.$$

Ako je supremum niza konačan broj, tada se piše da je $\sup{(a_n)} = G$, a u suprotnom po definiciji je $\sup{(a_n)} = +\infty$. Ako supremum pripada nizu naziva se maksimum i označava se sa $\max{(a_n)}$.

Broj g se naziva infimum niza (a_n) ako važi

$$(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \geq g,$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{N}) a_{n_2} < g + \varepsilon.$$

Ako takav konačan broj postoji tada se piše da je $\inf{(a_n)} = g$, a u suprotnom po definiciji je $\inf{(a_n)} = -\infty$.
Ako infimum pripada nizu naziva se minimum i označava se sa $min(a_n)$.

Za posmatrani niz (a_n), ako postoje vrednosti za $n \in \mathbb{N}$ takve da nije ispunjen uslov $|a_n| < M$, gde je M realan broj koji ne zavisi od n , tada se kaže da taj niz nije ograničen, tj. da je neograničen.

Primer. Niz $a_n = \frac{n^2+1}{n-1}$, za $n = 2,3,4,\ldots$ je neograničen niz. Zaista

$$|a_n| = \left|\frac{n^2+1}{n-1}\right| > \frac{n^2-1}{n-1} = n+1 > M,$$

za $n = 2,3,4\ldots$

MONOTONOST NIZA

Rastući nizovi su ujedno i neopadajući, ali obrnuto ne mora da važi. Analogno važi i za opadajuće i nerastuće nizove.

Niz (a_n) se naziva rastući niz , ako za svako $n \in \mathbb{N}$, važi $a_{n+1} - a_n > 0$.

Niz (a_n) se naziva neopadajući niz , ako za svako $n \in \mathbb{N}$, važi $a_{n+1} - a_n \geq 0$.

Niz (a_n) se naziva opadajući niz , ako za svako $n \in \mathbb{N}$, važi $a_{n+1} - a_n < 0$.

Niz (a_n) se naziva nerastući niz , ako za svako $n \in \mathbb{N}$, važi $a_{n+1} - a_n \leq 0$.

Nizovi koji imaju jednu od pobrojanih osobina se nazivaju monotoni nizovi.

Napomena. Treba uočiti da su rastući nizovi ujedno i neopadajući, a obrnuto ne mora da važi. Analogno važi i za opadajuće i nerastuće nizove.

Neka je (a_n) niz pozitivnih brojeva, tj. važi $a_n > 0, (\forall n \in \mathbb{N})$. Tada je niz (a_n) rastući ako za svako $n \in \mathbb{N}$, važi $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, a (a_n) je opadajući ako za svako $n \in \mathbb{N}$, važi $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

DEFINICIJA PODNIZA

Za zadati niz se na beskonačno mnogo načina može, od njega, formirati novih nizova koji predstavljaju njegove podnizove

Ako je zadat niz (a_n) od njega se na beskonačno mnogo načina može formirati novi niz a_{n_k}, tj niz

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$$

gde su indeksi n_k prirodni brojevi takvi da važi $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$Ovako formirani niz naziva se podniz niza (a_n).

Primer. Od niza $(a_n) = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ za $n = 1,2,3,\ldots$ tj.

$$-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \ldots$$

možemo formirati npr. dva podniza uzimajući da prvi podniz, u oznaci (a'_{n_k}) čine članovi niza za koje je $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ a drugi u oznaci (a''_{n_k}) za koje je $n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}$. Dakle, niz (a'_{n_k}) koji ima članove

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \frac{11}{10}, \ldots$$

je opadajući niz dok je niz (a''_{n_k}) koji ima članove

$$-2, -\frac{4}{3}, -\frac{6}{5}, -\frac{8}{7}, -\frac{10}{9}, \ldots$$

je rastući niz. Primetimo da početni niz nije monoton ali se sastoji od monotonih podnizova.

DEFINICIJA TAČKE NAGOMILAVANJA NIZA

Tačka nagomilavanja je ona tačka u čijoj se okolini nalazi beskonačno mnogo članova toga niza.

Definicija. Broj a je tačka nagomilavanja niza (a_n) ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji podniz (a_{n_k}) datog niza takav da svi elementi datog podniza imaju osobinu $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

Tačka nagomilavanja je ona tačka u čijoj se okolini nalazi beskonačno mnogo članova toga niza. Niz ne mora imati tačke nagomilavanja, a ako ih ima, tada može imati jednu ili više takvih tačaka. Ako postoji tačka nagomilavanja nekog niza ona može, a i ne mora pripadati tom nizu. Niz iz prethodnog primera ima dve tačke nagomilavanja i to su broj 1 (za one članove koji su pozitivni) i broj -1 (za one članove koji su negativni).

Sada, će biti dat iskaz jednog važnog stava, koji daje vezu između ograničenosti niza i postojanja tačaka nagomilavanja.

Stav. (Bolcano–Vajerštrasov stav). Ograničeni niz ima bar jednu tačku nagomilavanja.

Pod pretpostavkom da je posmatrani niz i monoton, tada važi sledeći stav.

Stav. Svaki ograničeni i monoton niz ima tačno jednu tačku nagomilavanja.
Primer. Niz $a_n = (-1)^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ ima dve tačke nagomilavanja. Naime, $a_{2k} = 1$, za $n = 2k,\ k = 1, 2, 3, \ldots$ dok je $a_{2k-1} = -1$, za $n = 2k-1,\ k = 1, 2, 3, \ldots$

Niz $a_n = n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ je niz koji nema tačaka nagomilavanja, (ovo je neograničen niz).

Niz $a_n = \frac{1}{n},\ n = 1, 2, 3, \ldots$ ima jednu tačku nagomilavanja, jer se svi članovi tog niza okupljaju oko vrednosti 0.

DEFINICIJA KONVERGENCIJE BROJNOG NIZA

Za ispitivanje osobine konvergentnosti nekog brojnog niza dovoljno je tretirati taj niz počev od nekog mesta, pa na dalje (tj. može se izostaviti konačno mnogo početnih članova tog niza).

Za posmatrani niz, najvažnije pitanje je pitanje njegove konvergencije.

Definicija. Za niz (a_n) se kaže da je konvergentan ako postoji $A \in \mathbb{R}$ takvo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ i da pri tom važi da je $|a_n - A| < \varepsilon$, za $n > n_0$.

Dakle, oko tačke A se "okupljaju" skoro svi članovi niza, tj. svi članovi niza osim njih konačno mnogo.

Ako niz (a_n) nije konvergentan, tada se za njega kaže da je divergentan.

Za konvergentan niz (a_n) vrednost A iz prethodne definicije predstavlja njegovu graničnu vrednost i to se označava sa

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A \quad ili \quad a_n \to A,\ n \to +\infty.$$

U slučaju da je $A = 0$ takav niz se naziva nula-niz.

Stav. Neka je dat niz (a_n). Tada je on konvergentan ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tako da je

$$|a_m - a_n| < \varepsilon,$$

za svako $n, m > n_0(\varepsilon)$.

Niz sa prethodnom osobinom se naziva Košijev niz.

Napomena. Prethodni stav se naziva Košijev princip konvergencije realnih nizova. Košijev princip je ravnopravan prethodnoj definiciji i ima svoje prednosti i nedostatke u odnosu na nju. Prednost je u tome što se za njegovu primenu ne mora znati kandidat za graničnu vrednost niza, a mana je da ako se njime utvrdi da je posmatrani niz konvergentan, tada se granična vrednost tog niza ne zna.

Za ispitivanje svojstva konvergentnosti posmatranog niza, sasvim je dovoljno tretirati taj niz počev od nekog mesta, pa na dalje (tj. može se preskočiti početnih konačno mnogo elemenata tog niza).

Pod opštim članom posmatranog niza se podrazumeva n -ti član kada n nije fiksirano.

PRIMER 1

Primena definicije za dokazivanje konvergencije određenih nizova.

Za niz sa opštim članom $a_n = q^n,\ n \in \mathbb{N}$,važi da je

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ \infty, & |q| > 1. \end{cases}$$

Rešenje. Dokažimo, najpre, da je $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0,\ |q| < 1.$ Očigledno je da za $q = 0$ prethodno važi. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i $0 < |q| < 1$. Tada je

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(1 + \frac{1}{|q|} - 1\right)^n > 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right) > n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right).$$

Odavde imamo da je

$$|q|^n = |q^n| < \frac{|q|}{n(1-|q|)} < \varepsilon,\ \ za\ \ n > \frac{|q|}{\varepsilon(1-|q|)}.$$

Sada ćemo dokazati da je $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \infty,\ |q| > 1.$ Neka je, stoga, $|q| > 1$ i $\delta > 0$ proizvoljno. Tada je

$$|q|^n > (1 + (|q| - 1))^n > 1 + n(|q| - 1) > n(|q| - 1) > \delta,$$

za

$$n > \frac{\delta}{|q| - 1}.$$

Specijalno za $q = 1$, ovaj niz je konvergentan, dok za $q = -1$, on očigledno ima dve tačke nagomilavanja 1 i -1, pa je divergentan.

Pomenućemo i poznati niz sa opštim članom

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n,\ \ n \in \mathbb{N},$$

koji se naziva geometrijska progresija. Opšti član ovog niza se može zapisati i na sledeći način

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

U slučaju da je $|q| < 1$, tada na osnovu prethodnog niza iz ovog primera važi da je

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{1 - q}.$$

ARITMETIČKE OSOBINE KONVERGENTNIH NIZOVA

Kada su dva niza konvergentna, tada se postavlja pitanje šta je s njihovim zbirom, razlikom, proizvodom, količnikom...

Neka su (a_n) i (b_n) dva realna niza. Tada se nizovi $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ nazivaju, tim redom zbir, razlika i proizvod nizova (a_n) i (b_n). Ako je, $b_n \neq 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada se niz $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ naziva količnikom nizova (a_n) i (b_n).

Kada su nizovi (a_n) i (b_n) konvergentni, tada se postavlja pitanje šta je s njihovim zbirom, razlikom, proizvodom i količnikom. Odgovor na to pitanje daje naredni stav.

Stav. Neka su (a_n) i (b_n) konvergetni nizovi tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$i neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada važi:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a \pm b,$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a \cdot b,$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n} = \dfrac{a}{b},\ b \neq 0,$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha \cdot a,$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^k = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\right)^k = a^k,\ \ k \in \mathbb{N},$

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n} = \sqrt[k]{a},\ \ k \in \mathbb{N},$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\right| = |a|.$

Napomena. Data tvrđenja olakšavaju određivanje graničnih vrednosti.

STAVOVI ZA KONVERGENCIJU

Monoton i ograničen brojni niz je konvergentan.

Stav. Neka je dat niz (a_n) i neka je ograničen odozdo. Ako je (a_n) nerastući niz, tada je on konvergentan.

Stav. Neka je dat niz (a_n) i neka je ograničen odozgo. Ako je (a_n) neopadajući niz, tada je on konvergentan.

U opštem slučaju obrnuto ne mora da važi u oba stava.

Stav. Neka je dat niz (a_n) i neka je on konvergentan. Tada je (a_n) ograničen niz. Obrnuto ne mora da važi.

Napomena. Prethodni stav daje dobru metodologiju za dokazivanje da je niz divergentan ako se dokaže da nije ograničen.

PRIMER 2

Broj e se naziva Ojlerov broj i on je jedan od najvažnih konstanti u matematici. On je iracionalan transcendentan broj.

Primer. Neka je dat niz $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, za $n \in \mathbb{N}$. Ovaj niz je rastući što smo već pokazali. Može se dokazati da je on ograničen odozgo brojem 3.

Na osnovu Binomne formule, zaista, imamo da važi da je

$$
\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n})^n &= 1+\frac{n}{n}+\frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}= \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)< \\
&< 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}= \\
&= 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1+2-\frac{1}{2^{n-1}}<3
\end{aligned}
$$

Prema prethodnom stavu ovaj niz je konvergentan i postoji broj $e \in (2,3)$, tako da je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Broj e se naziva Ojlerov broj i on je jedan od najvažnih konstanti u matematici. Broj e je iracionalan transcendentan broj. Numerički se može proračunati bilo koja njegova decimala i važi da je $e = 2,71828\ldots$

STAV O TRI NIZA

Ovaj stav ima poseban značaj jer se prilikom njegove primene za neki konvergentan niz (c_n) odmah dobija i granična vrednost niza.

Sledeći stav predstavlja veoma važan i često korišćen kriterijum za ispitivanje konvergencije nizova.

Stav. Neka su dati nizovi (a_n) i (b_n) i neka je

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = A \in \mathbb{R},$$

Ako je za niz (c_n) ispunjeno da je $a_n \leq c_n \leq b_n$, za $n \geq n_0$, tada je niz (c_n) konvergentan i važi :

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = A.$$

Napomena. Ovaj stav ima poseban značaj jer se prilikom njegove primene za konvergentan niz (c_n) odmah dobija i granična vrednost niza. Ovaj stav se u literaturi naziva Stav o tri niza, a često se naziva i Lema o dva policajca.

PRIMERI 3 I 4

Primena Leme o dva policajca za dokazivanje konvergencije nizova.

Dokazati da važi:

$a)$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0,$ $\qquad b)$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Dokaz.

$a)$ Za $a = 1$ očigledno je tačno. Za $a > 1$ je $\sqrt[n]{a} > 1$ i imamo da je

$$a = (1 + (\sqrt[n]{a} - 1))^n > 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) > n(\sqrt[n]{a} - 1).$$

Ako posmatramo $a > n(\sqrt[n]{a} - 1)$ sledi da je $\frac{a}{n} > \sqrt[n]{a} - 1,$ tj. imamo da je:

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n}.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a}{n} = 0$ sledi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) = 0,$ tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$ Ako je konačno $0 < a < 1,$ tada imamo da je $\frac{1}{a} > 1.$ Tada na osnovu prethodnog važi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1,$ pa imamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

b) Važi da je

$$\begin{aligned} n &= (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n > \\ &> 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{n(n-1)}{2!}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + \cdots + (\sqrt[n]{n} - 1)^n > \\ &> \frac{n(n-1)}{2!}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \end{aligned}$$

Dakle, imamo da važi

$$\frac{n(n-1)}{2!}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 < n,$$

tj.

$$(\sqrt[n]{n} - 1)^2 < \frac{2}{n-1},$$

tj.

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Kako je $0 < |\sqrt[n]{n} - 1| < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ i važi da je $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0,$ tada imamo, na osnovu Leme o dva policajca, da važi tvrđenje.

KLASA NEOGRANIČENIH NIZOVA

Beskonačan niz, ograničen sa donje strane, koji u konačnosti nema tačaka nagomilavanja naziva se određeno divergentan niz.

Sada će biti razmotrene ukratko neke klase neograničenih nizova. Beskonačan niz, ograničen sa donje strane, koji u konačnosti nema tačaka nagomilavanja naziva se određeno divergentan niz. Kaže se da je tačka beskonačnosti njegova jedina tačka nagomilavanja i piše se

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \quad \text{ili} \quad a_n \to +\infty,\ n \to +\infty.$$

Slično prethodnom, može se uvesti pojam nizova koji divergiraju ka $-\infty$.

Kod određeno divergentnog niza može se desiti da su njegovi članovi počev od nekog indeksa $n_0 \in \mathbb{N}$ proizvoljno veliki tj.

$$a_n \geq M, \quad \text{za} \quad n \geq n_0(M).$$

Ovakvi nizovi koji teže u $+\infty$ čine klasu uslovno divergentnih nizova. Slično, mogu se definisati i uslovno divergentni nizovi koji teže u $-\infty$. Određeno divergentni nizovi, se po svojoj strukturi ne razlikuju mnogo od konvergentnih nizova. U osnovi oni se podudaraju jer i jedni i drugi imaju jednu tačku nagomilavanja. Mnogi stavovi koji važe za konvergentne nizove važe i za određeno divergentne nizove.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: ispitivanje konvergencije niza.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 2

Pojam brojnog reda

DEFINICIJA BROJNOG REDA

Oznaka koja se koristi za sumu konvergentnog reda se vrlo često koristi u literaturi i za zadavanje samog reda, bez obzira da li je on konvergentan ili ne.

Neka je dat realan niz $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ kao i realan niz

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Tada se niz $(S_n)_n \in \mathbb{N}$ naziva brojni red, a njegov n -ti član $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ se naziva n-ta parcijalna suma. Za razmatrani red $(S_n)_n \in \mathbb{N}$ vrednost $a_n = S_n - S_{n-1}, \; n \in \mathbb{N}$, je njegov opšti član (ili osnovni član). Svaki beskonačan zbir brojeva $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k, \; (m \in \mathbb{N}_0)$, se, takođe, naziva brojni red.

Konvergencija datog reda podrazumeva da postoji neko $S \in \mathbb{R}$ takvo da za niz $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, važi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Kako važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = S$, to se često koristi oznaka

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S,$$

gde se S naziva suma brojnog reda. U slučaju da je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ ili $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ ili da $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ne postoji, takav red se naziva divergentan, s tim što se u prva dva slučaja kaže da je određeno divergentan.

Sada ćemo navesti primere nekih redova čije poznavanje konvergentnosti će biti od interesa za dalji rad.

Primer. Red $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ je konvergentan red za $|q| < 1$, dok je za $|q| \geq 1$ divergentan. Ovaj red se naziva geometrijski red i njegova suma za $|q| < 1$ iznosi $S = \frac{1}{1-q}$.

Red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ je divergentan red i on se naziva harmonijski red.

Red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$ konvergira za $\alpha>1$, dok za $\alpha\leq 1$ divergerira. Ovaj red se naziva hiperharmonijski red. Na primer važi da je

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Definicija. Neka je red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentan, čija je suma S i neka je S_n njegova n -ta parcijalna suma. Razlika

$$R_n=S-S_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

naziva se ostatak reda.

PRIMER 1

Određivanje sume geometrijskog reda.

Odrediti sumu geometrijskog reda

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k.$$

Posmatrajmo n -tu parcijalnu sumu ovog reda

$$S_n=1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Poznajući činjenicu da se suma prvih n članova geometrijskog niza može zapisati

$$S_n=\frac{1-q^n}{1-q},\quad q\neq 1,\ n\in\mathbb{N},$$

kao i da je $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0,$ za $|q|<1,$ važi da je

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{1}{1-q},\quad \text{za}\ \ |q|<1.$$

Tada je

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k=\frac{1}{1-q},\quad \text{za}\ \ |q|<1.$$

S druge strane, imamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\begin{cases} +\infty, & \text{ako je}\ \ q\geq 1,\\ \text{ne postoji}, & \text{ako je}\ \ q\leq -1.\end{cases}$$

Dakle, geometrijski red određeno divergira, za $q \geq 1$, dok neodređeno divergira, za $q \leq -1$. Ukupno, geometrijski red divergira za $q \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Napomena. Na osnovu prethodnog primera nije teško uočiti da važi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Možemo izvoditi i sledeće zaključke

$$1 + q^2 + q^4 + q^6 + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^k = \frac{1}{1-q^2},$$

za $|q| < 1$, zatim

$$1 - q + q^2 - q^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-q)^k = \frac{1}{1-(-q)} = \frac{1}{1+q},$$

za $|q| < 1$, kao i mnoge druge.

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: konvergencija geometrijskih reda.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER 2

Određivanje sume reda.

Izračunati sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

Rešenje. Opšti član ovog reda je $a_n = \frac{1}{4n^2-1}$, i pri tom za svako $n \in \mathbb{N}$ važi jednakost

$$a_n = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Stoga je

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right). \end{aligned}$$

Pošto je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$,neposredno sledi da je dati red konvergentan i njegov zbir je $S = \frac{1}{2}$.

Napomena. $a_n = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$ se dobija korišćenjem metode neodređenih koeficijenata koja je uvedena i objašnjena u lekciji o neodređenim integralima.

Napomena. Harmonijski red je specijalan slučaj hiperharmonijskog reda, za $\alpha = 1$. Harmonijski red ima sumu $+\infty$ i veoma je bitan za ispitivanje konvergencije nekog složenijeg reda. Niz njegovih parcijalnih suma se ponaša veoma blisko vrednosti $\ln n$ i razlikuju se od nje do na Ojlerovu konstantu $c = 0,57722\ldots$

Poglavlje 3

Redovi s pozitivnim i znakopromenljivim članovima

BROJNI RED SA POZITIVNIM (NENEGATIVNIM) ČLANOVIMA

Brojni red se sa pozitivnim (nenegativnim) članovima ili će biti konvergentan red ili će biti određeno divergentan.

U okviru ove lekcije obradićemo, najpre, pojam brojnog reda sa pozitivnim (nenegativnim) članovima. Pošto su redovi nizovi parcijalnih suma, sve tehnike za ispitivanje konvergencije nizova se i ovde mogu primeniti. Međutim, ovde ćemo uvesti aspekt određivanja konvergencije reda preko opšteg člana posmatranog reda.

Prvo, dajemo definiciju brojnog reda sa pozitivnim (nenegativnim) članovima.

Definicija. Brojni red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se naziva brojni red sa pozitivnim (nenegativnim) članovima ako važi $a_k > 0\ (a_k \geq 0)$, za svako $k \in \mathbb{N}$.

Brojni red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kod koga je $a_k < 0$ ($a_k \leq 0$), za svako $k \in \mathbb{N}$, se naziva brojni red sa negativnim (nepozotovnim) članovima. Međutim, ako neki brojni red ima konačno mnogo negativnih članova, a svi ostali njegovi članovi su pozitivni (nenegativni), tada je taj brojni red, red sa pozitivnim (nenegativnim) članovima.

Brojni red sa pozitivnim (nenegativnim) članovima ili će biti konvergentan red ili će biti određeno divergentan ka $+\infty$.

Stav. Brojni red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sa pozitivnim članovima je konvergentan ako i samo ako je niz njegovih parcijalnih suma $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen niz.

U nastavku ćemo dati razne kriterijume za proveru konvergentnosti brojnih redova sa pozitivnim (nenegativnim) članovima, koji se zadaju, kao što smo rekli, preko opšteg člana posmatranog reda. Pre toga ćemo govoriti o još nekim klasa brojnih redova.

BROJNI RED SA ČLANOVIMA PROMENLJIVOG ZNAKA

Najopštiji brojni red je onaj čiji članovi mogu biti promenljivog znaka.

Prethodno smo govorili o redovima sa pozitivnim (ili nenegativnim), odnosno negativnim (nepozitivnim) članovima. Sada ćemo nešto reći o brojnim redovima čiji članovi ne moraju biti istog znaka, tj. koji menjaju znak. Takvi redovi se nazivaju znakopromenljivi brojni redovi ili brojni redovi sa članovima promenljivog znaka.

Neka je takav red $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. Pored ovog reda posmatrajmo i red sa nenegativnim članovima $|a_k|$, tj. $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$. Sa S_n i S_n' označimo njihove parcijalne sume, tj. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ i $S_n' = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ i primetimo da je

$$|S_n| = |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = S_n'.$$

Ovo znači da je red $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ uvek konvergentan kada konvergira red $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$. Obrnuto ne važi, tj. kada je prvi red konvergentan, drugi red može biti konvergentan ili divergentan. Na ispitivanje konvergencije reda $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ možemo primenjivati sve kriterijume koje ćemo u nastavku razmatrati u vezi sa brojnim redovima sa pozitivnim (nenegativnim) članovima.

Primer. Brojni red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sin k$$

ima članove koji su promenljivog znaka. Zaista, važi da je

$$\sin 1 > 0, \sin 2 > 0, \sin 3 > 0, \sin 4 < 0, \sin 5 < 0, \sin 6 < 0, \sin 7 > 0, \ldots$$

ALTERNATIVNI REDOVI

U alternativnom brojnom redu važi da njegovi članovi naizmenično menjaju znak.

Alternativni redovi su specijalan slučaj redova sa članovima promenljivog znaka. Kod redova ;iji su članovi promenljivog znaka, promena znaka ne mora da podleže nekoj posebnoj pravilnosti kao kod alternativnih redova. Za neki brojni red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kažemo da je alternativan red ako važi da njegovi članovi naizmenično menjaju znak, tj. u alternativnom redu važi da je

$$a_1 < 0,\ a_2 > 0,\ a_3 < 0,\ a_4 > 0, \ldots$$

ili

$$a_1 > 0,\ a_2 < 0,\ a_3 > 0,\ a_4 < 0, \ldots$$

Ako uvedemo oznaku $b_k = |a_k|,\ k \in \mathbb{N},$ tada možemo alternativni red zapisati u obliku u kome se on najčečće i zapisuje

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k \quad ili \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} b_k,$$

u zavisnosti da li je prvi član tog alternativnog reda pozitivan ili negativan. Svakako, važi da je $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} b_k = -\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k.$

Primer. Red

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

je alternativni brojni red.

OPERACIJE SA KONVERGENTNIM REDOVIMA

Konvergentan red pomnožen konstantom ostaje konvergentan, zbir ili razlika dva konvergetna reda jednaka je zbiru njihovih suma.

Osnovni zadatak u radu sa redovima jeste ispitivanje konvergencije redova i određivanje suma za konvergentne redove. Kod redova, slično kao i kod nizova, od divergentnih redova najinteresantniji su oni koji određeno ili uslovno divergiraju (tj. oni čije su sume $+\infty$ ili $-\infty$). Prilikom određivanja da li je neki red konvergentan ili divergentan, uvek se može zanemariti prvih konačno mnogo članova u njemu, ali ako je red konvergentan prilikom određivanja njegove sume, moraju se svi članova uzeti u obzir. Prvo ćemo govoriti o nekim osobinama konvergentnih redova.

Stav. Neka je $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentan red sa sumom

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

i neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta. Tada je konvergentan i red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k$ i važi da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot S.$$

Stav. Neka su $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergentni redovi sa sumama

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = T.$$

Tada je konvergentan red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k)$ i važi da je

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k) = S \pm T.$$

Pod pretpostavkama datim u prethodnih stavovima, možemo prethodna dva stava objediniti u sledeći zapis

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k \pm \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \alpha S \pm \beta T, \; \beta \in \mathbb{R}.$$

Stav. Brojni redovi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ $(m = 2, 3, 4, \ldots)$ su istovremeno konvergentni ili divergetni redovi.

Dakle, ovakvi redovi su ekvikonvergetni (istovremeno ili konvergiraju ili divergiraju), ali im sume, u slučaju konvergencije, neće biti iste.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: o brojnim redovima

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 4

Konvergencija redova sa pozitivnim članovima

PRVI POREDBENI KRITERIJUM

Prvim poredbenim kriterijumom se preko opštih članova dati red poredni sa redom za koji znamo da je konvergentan, odnosno divergentan upoređivanjem njihovih vrednosti.

Stav. Neka su dati brojni redovi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ za koje je $a_k, b_k \geq 0$, za svako $k \in \mathbb{N}$, pri čemu je $a_k \leq b_k$, za svako $k \in \mathbb{N}$. Tada

1. ako red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergira, konvergira i red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$;
2. ako red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira, divergira i red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$;

Napomena. Prethodnim stavom je zadat tzv. Prvi poredbeni kriterijum. Za poređenje njegovom primenom se najčešće koriste harmonijski, hiperhamonijski i geometrijski red.

Primer. Brojni red $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ je divergentan red. To zaključujemo iz sledećeg: $\ln k < k \Rightarrow \frac{1}{k} < \frac{1}{\ln k}, k = 2, 3, 4, \ldots$.Dalje, kako je brojni red $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergentan red (harmonijski red), na osnovu prethodnog stava pod 2. zaključujemo da je polazni red divergentan.

Primer. Brojni red $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}$ je konvergentan red. To zaključujemo iz sledećeg

$$(k-1)^2 \leq k! \Rightarrow \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(k-1)^2}, \quad k = 2, 3, 4, \ldots$$

Kako je brojni red $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^2}$, tj. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ hiperharmonijski red koji je konvergentan, na osnovu prethodnog stava pod 1. zaključujemo da je i polazni red konvergentan. Poznato je da važi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots = e.$$

Primer. Red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4^k+3}}$ je konvergentan red jer važi

$$\frac{1}{\sqrt{4^k+3}} < \frac{1}{\sqrt{4^k}} = \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Kako je red $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ konvergentan red, kao geometrijski red za koji važi $q = \frac{1}{2} < 1$, tada zaključujemo da i polazni red konvergira.

DRUGI POREDBENI KRITERIJUM

Drugim poredbenim kriterijumom se preko opštih članova dati red poredni sa redom za koji znamo da je konvergentan, odnosno divergentan, preko granične vrednosti njihovog količnika.

Stav. Neka je brojni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ red sa nenegativnim članovima, a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ brojni red sa pozitivnim članovima. Ako je

$$l = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k},$$

pri čemu je $l \in (0, +\infty)$, tada za brojne redove $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ kažemo da su istovremeno konvergetni ili istovremeno divergentni.

Napomena. Prethodnim stavom je zadat Drugi poredbeni kriterijum. Za brojne redove za koje se ustanovi njihova konvergentnost ili divergentnost, kaže se da je ekvikonvergentan sa redom sa kojim je upoređivan.

Primer. Ispitaćemo konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+2}{k^3+k+2}.$$

Rešenje. Posmatrani red ćemo upoređivati sa redom $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Tada imamo da je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{3k+2}{k^3+k+2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3k^3+2k^2}{k^3+k+2} = 3 \in (0, +\infty).$$

Na osnovu drugog poredbenog kriterijuma je posmatrani red ekvikonvergentan sa redom $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, a kako je ovaj red konvergentan kao hiperharmonijski red, tada zaključujemo da je i polazni red konvergentan.

Stav. Neka su dati brojni redovi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ sa pozitivnim članovima, pri čemu je

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k},$$

za svako $k \in \mathbb{N}$.

- Ako brojni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergira, tada i brojni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira.
- Ako brojni red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira, tada i brojni red $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergira.

KOŠIJEV KORENI KRITERIJUM

Nedostatak Košijevog korenog kriterijuma jeste da postoji situacija kada on ne može dati odgovor u vezi za konvergencijom ili divergencijom posmatranog brojnog reda.

Stav (Košijev koreni kriterijum). Neka je dat red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sa pozitivnim članovima, tj. $a_k > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$ i neka pritom postoji granična vrednost

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = c.$$

- Ako je $0 \leq c < 1$ posmatrani red konvergira,
- Ako je $c > 1$ posmatrani red divergira,
- Ako je $c = 1$ onda ovaj kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji posmatranog reda, već se mora primeniti neki drugi kriterijum.

Primer. Ispitaćemo konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k(k-1)}.$$

Rešenje. Kako je $a_k = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k(k-1)}$, tada je

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k(k-1)}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k-1} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{k-1}{k+1} - 1\right)^{k-1} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{-2}{k+1}\right)^{k-1} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{k+1}{-2}}\right)^{\frac{k+1}{-2}\cdot\frac{-2}{k+1}\cdot(k-1)} = e^{\lim_{k\to\infty} \frac{-2}{k+1}\cdot(k-1)} = e^{-2} < 1.$$

Zaključujemo na osnovu Košijevog korenog kriterijuma da posmatrani red konvergira.

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: Dalamberov kriterijum (Root test).

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

DALAMBEROV KRITERIJUM

Nedostatak Dalamberovog kriterijuma jeste da postoji situacija kada on ne može dati odgovor u vezi za konvergencijom ili divergencijom posmatranog brojnog reda.

Stav. (Dalamberov kriterijum) Neka je dat red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sa pozitivnim članovima, tj. $a_k > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$ i neka pritom postoji granična vrednost

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = d.$$

- Ako je $0 \leq d < 1$ posmatrani red konvergira,
- Ako je $d > 1$ posmatrani red divergira,
- Ako je $d = 1$ onda ovaj kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji posmatranog reda, već se mora primeniti neki drugi kriterijum.

Primer. Pokazaćemo Dalamberovim kriterijumom da red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2+k}$ divergira. Imamo da je

$$a_k = \frac{2^k}{k^2+k} \qquad \text{i} \qquad a_{k+1} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)^2+k+1} = \frac{2^{k+1}}{k^2+3k+2}.$$

Tada je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{2^{k+1}}{k^2+3k+2}}{\frac{2^k}{k^2+k}} = 2 \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+k}{k^2+3k+2} = 2 > 1.$$

Napomena. Košijev koreni kriterijum je precizniji od Dalamberovog, jer postoje slučajevi u kojima se konvergencija nekog brojnog reda može dokazati Košijevim, a ne može Dalamberovim, dok obrnuto ne važi.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: Dalamberov kriterijum (Ratio test).

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

RABEOV KRITERIJUM

Rabeov kriterijum je opštiji od Dalamberovog kriterijuma.

Stav. (Rabeov kriterijum) Neka je dat red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sa pozitivnim članovima, tj. $a_k > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$ i neka pritom postoji granična vrednost

$$\lim_{k\to\infty} k \cdot \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = r.$$

• Ako je $0 \leq r < 1$ posmatrani red divergira,
• Ako je $r > 1$ posmatrani red konvergira,
• Ako je $r = 1$ onda ovaj kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji posmatranog reda, već se mora primeniti neki drugi kriterijum.

Napomena. Osim Dalamberovog i Rabeovog kriterijuma, često se koriste i Kumerov, Gausov, Bertranov i drugi kriterijumi. De Morgan je dao hijerarhiju među pomenutim kriterijumima. Najslabiji od ovih kriterijuma je Dalamberov. Precizniji od njega je Rabeov kriterijum, a od njega su precizniji Bertranov i Gausov kriterijum. Na vrhu hijerarhije je Kumerov kriterijum, kao najopštiji. Njegova posledica su Bertranov i Gausov kriterijum. U praksi se konvergentnost brojnog reda proverava u skladu sa pomenutom hijerarhijom. Dakle, prvo se proverava po Dalamberovom kriterijumu i ako je $d = 1$, primenjuje se Rabeov kriterijum i tako redom.

Primer. Ispitaćemo konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k!}}{(2+\sqrt{1}) \cdot (2+\sqrt{2}) \cdot \ldots \cdot (2+\sqrt{k})}$$

Prvo proveravamo konvergentnost po Dalamberovom kriterijumu. Tada je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{\sqrt{(k+1)!}}{(2+\sqrt{1})\cdot(2+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(2+\sqrt{k})\cdot(2+\sqrt{k+1})}}{\frac{\sqrt{k!}}{(2+\sqrt{1})\cdot(2+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(2+\sqrt{k})}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k+1}}{2+\sqrt{k+1}} = 1,$$

pa prema Dalamberovom kriterijumu nemamo odgovor. Primenjujemo Rabeov kriterijum

$$\lim_{k\to\infty} k \cdot \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = \lim_{k\to\infty} k \cdot \left(\frac{2+\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}} - 1\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{2k}{\sqrt{k+1}} = +\infty.$$

Na osnovu Rabeovog kriterijuma zaključujemo da posmatrani red konvergira.

KOŠIJEV INTEGRALNI KRITERIJUM

Ovim kriterijumom se ispituje konvergencija reda, ispitivanjem konvergencije odgovarjućeg nesvojstvenog integrala. Oni su ekvikonvergentni.

Stav. (Košijev integralni kriterijum) Neka $y = f(x)$ neprekidna, pozitivna i nerastuća funkcija na intervalu $[m, +\infty)$, $m \in \mathbb{N}$. Tada je red $\sum\limits_{k=m}^{\infty} f(k)$ ekvikonvergentan sa integralom

$$\int_m^{+\infty} f(x)dx.$$

Ekvikonvergentnost, kao što smo već rekli, znači da red i integral istovremeno ili konvergiraju ili divergiraju. Dakle, ako nesvojstveni integral ima vrednost $\pm\infty$ ili ta vrednost ne postoji, tada je odgovarajući red divergentan, dok u slučaju da je vrednost integrala konačan broj, tada posmatrani red konvergira. Kao i u slučaju ostalih kriterijuma o kojima smo govorili, Košijevim integralnim kriterijumom se samo proverava njegova konvergencija i u slučaju da on konvergira ne znamo sumu tog reda.

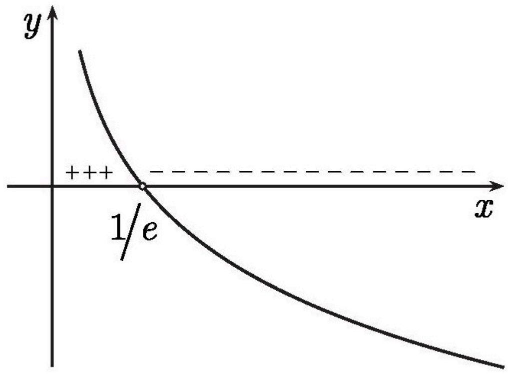
Primer. Ispitaćemo konvergenciju reda $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k \cdot \ln k}$.

Rešenje. Ispitivanje vršimo primenom Košijevog integralnog kriterijuma. Najpre, za funkciju $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$ treba proveriti da li ona neprekidna, pozitivna i nerastuća funkcija na intervalu $[2, +\infty)$. Domen ove funkcije je $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, tako da je ona neprekidna, a takođe je pozitivna funkcija na intervalu $[2, +\infty)$.
Ostaje još da proverimo da li je nerastuća funkcija. Stoga, odredimo prvi izvod ove funkcije i proverimo kakvoj znaka na intervalu $[2, +\infty)$.

Tada imamo $f'(x) = \frac{-\ln x - 1}{(x \cdot \ln x)^2}$. Grafik funkcija $g(x) = -\ln x - 1$ je dat na slici. Kako je $f'(x) < 0$, za $x \in [2, +\infty)$, tada je funkcija $y = f(x)$ nerastuća $x \in [2, +\infty)$.
Dakle, ispunjene su pretpostavke kriterijuma. Potrebno je sada odrediti vrednost integrala:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x dx} = \ldots = +\infty \text{ (uraditi za vežbu)}.$$

Dakle, ovaj integral divergira, a to znači, na osnovu Košijevog integralnog kriterijuma da divergira i početni red.



Slika 4.1 Grafik funkcije $f(x) = -lnx - 1$ [Izvor: Autor].

PRIMER

Košijev integralni kriterijum.

Primenom Košijevog integralnog kriterijuma ćemo dokazati da hiperharmonijski red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$ konvergira za $\alpha > 1$, dok za $\alpha \le 1$ divergerira.

Očigledno, ako je $\alpha \le 0$, red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$ je divergentan red. Stoga ćemo proveriti šta se dešava za $\alpha > 0$. Najpre, za funkciju $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ treba proveriti da li ona neprekidna, pozitivna i nerastuća funkcija na intervalu $[1, +\infty)$. Domen ove funkcije je $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, tako da je ona neprekidna, a takođe je pozitivna funkcija na intervalu $[1, +\infty)$. Ostaje još da proverimo da li je ovo nerastuća funkcija na intervalu $[1, +\infty)$. Stoga, odredimo prvi izvod ove funkcije i proverimo kakvog je on znaka na intervalu $[1, +\infty)$. Tada imamo $f'(x) = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0$, za $\alpha > 0$ i $x \in [1, +\infty)$.

Dakle, posmatrani red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$ je ekvikonvergentan sa nesvojstvenim integralom $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$. Na prethodnim predavanjima smo videli da je

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} +\infty, & za \;\; 0 < \alpha \le 1, \\ -\frac{1}{-p+1}, & za \;\; \alpha > 1 \end{cases}$$

Na osnovu ekvikonvergencije posmatranog integrala i polaznog reda zaključujemo da hiperharmonijski red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$ konvergira za $\alpha > 1$, dok za $\alpha \le 1$ divergerira.

KOŠIJEV PRINCIP KONVERGENCIJE

Ovaj stav je ekvivalentan definiciji konvergenciji redova.

Na kraju ovog dela navodimo i navodimo i Košijev opšti princip za konvergenciju brojnih redova koji je zasnovan na Košijevom principu za konvergenciju brojnih nizova. Ovaj kriterijum ima veliki teorijski značaj, ali se zbog složenosti retko primenjuje u praksi.

Stav. (Košijev princip konvergencije) Neka je dat red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Tada je on konvergentan ako i samo ako je za svako proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji broj m $(m \in \mathbb{N})$, takav da za svako $n > m$ važi

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \varepsilon.$$

Napomena. Prethodni stav je ekvivalentan definiciji konvergencije za redove i u odnosu na nju ima svoje prednosti i mane (kao i kod nizova). Određena prednost ovog kriterijuma konvergencije sastoji se u tome što je, da bi se ispitala konvergencija nekog reda je dovoljno znati sve njegove članove, ali ne i tačnu vrednost njegove sume koja se u opštem slučaju teško može eksplicitno odrediti.

Primer. Pomenuli smo da je harmonijski red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergentan red. To se može pokazati primenom Košijevog principa konvergencije. Tada imamo, za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n} = \\ & \quad = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \\ & \quad > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \\ & \quad = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Iz prethodnog vidimo da je za $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ i $m = 2n$ Košijev princip konvergencije očigledno nije ispunjen, pa je posmatrani red divergentan.

STAV ZA DOKAZIVANJE DIVERGENCIJE BROJNOG REDA

Ako opšti član brojnog reda ne teži nuli, tada taj red divergira.

Stav. Neka je dat red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ koji je konvergentan. Tada je $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Dokaz. Kako je dati red konvergentan, tada je $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$. Takođe je i $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) = S$, pa imamo da je $\lim\limits_{k\to\infty} S_{k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}) = S$. Kako je $a_k = S_k - S_{k-1}$, za svako $k \in \mathbb{N}$, to je

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (S_k - S_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1} = S - S = 0.$$

Napomena. Prethodni stav je odličan za ispitivanje divergencije datog reda, jer na osnovu zakona o kontrapoziciji prethodni stav se može interpretirati na sledeći način: ako opšti član brojnog reda ne teži nuli, tada taj red divergira.

Primer. Red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$ je divergentan red. Zaista, kako je

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) = 1 \neq 0,$$

na osnovu prethodnog iznetog zaključujemo da je posmatrani red divergentan.

Poglavlje 5

Brojni redovi sa članovima promenljivog znaka

APSOLUTNA I USLOVNA KONVERGENCIJA

Kod brojnih redova sa članovima promenljivog znaka, uključujući i alternativne redove, postoje dve vrste konvergencije: apsolutna i uslovna konvergencija.

Kod redova sa članovima promenljivog znaka postoje dve vrste konvergencije: apsolutna konvergencija i uslovna konvergencija.

Definicija. Brojni red sa članovima promenljivog znaka $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ naziva se apsolutno konvergentan ako konvergira odgovarajući red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Iz prethodne definicije može se uvideti da je apsolutna konvergencija nekog reda sa članovima promenljivog znaka ista kao i konvergencija reda odgovarajućeg reda sa pozitivnim (nenegativnim) članovima. Stoga se za ispitivanje apsolutne konvergencije mogu primenjivati svi pomenuti kriterijumi za redove sa pozitivnim (nenegativnim) ćlanovima i važi sledeći stav.

Stav. Ako brojni red sa članovima promenljivog znaka $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ apsolutno konvergira, tada on i konvergira.

Napomena.U prethodnom stavu obrnuto ne mora da važi. Takođe, iz prethodnog stava važi da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| .$$

Redovi koji su konvergentni, a nisu apsolutno konvergentni nazivaju se uslovno konvergentni redovi (ili semi konvergentni redovi). Na sledećoj slici je predstavljen odnos između apsolutno, uslovno konvergentnih i divergentnih redova.

Slika 5.1 Apsolutno i uslovno konvergetni redovi, kao i divergentni redovi [Izvor: Autor].

PRIMER 1

Ispitivanje apsolutne konvergencije brojnog reda.

Ispitati konvergenciju brojnog reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} 3^k}{(2k-1)^k}.$$

Rešenje. Ovaj red je primer reda sa članovima promenljivog znaka, jer je opšti član $a_k = \dfrac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} 3^k}{(2k-1)^k}$, $k = 1, 2, 3 \dots$ Tada je $|a_k| = \dfrac{3^k}{(2k-1)^k}$. Dakle, red

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(2k-1)^k}$$

je red sa pozitivnim članovima i na ispitivanje njegove konvergencije ćemo primeniti Košijev koreni kriterijum. Imamo da je

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{3^k}{(2k-1)^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{2k-1} = 0 < 1.$$

Tada na osnovu Košijevog korenog kriterijuma zaključujemo da je red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(2k-1)^k}$ konvergentan, a samim tim je i red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} 3^k}{(2k-1)^k}$ apsolutno konvergentan.

LAJBNICOV KRITERIJUM

Ovaj kriterijum se koristi za ispitivanje konvergencije alternativnih redova.

Opšte osobine konvergentnih redova koje smo već naveli, važe i za alternativne redove. Međutim, pomenuti kriterijumi za konvergenciju brojnih redova sa pozitivnim (nenegativnim) članovima ne važe za alternativne redove. U nastavku dajemo jedan kriterijum za konvergenciju alternativnih redova.

Stav (Lajbnicov kriterijum) Neka je dat alternativni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$. Ako važi da je niz $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nerastući i da je $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$, tada je red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ konvergentan red.

Primer. Ispitaćemo konvergenciju reda $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Posmatrani red je alternativan. Niz $b_k = \frac{1}{k},\ k\in\mathbb{N}$ je opadajući niz. Zaista, važi da je

$$(\forall k\in\mathbb{N}) b_{k+1} - b_k \leq 0 \Leftrightarrow (\forall k\in\mathbb{N})\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \leq 0 \Leftrightarrow (\forall k\in\mathbb{N})\frac{-1}{k(k+1)} \leq 0.$$

Takođe, važi da je

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0,$$

pa na osnovu Lajbnicovog kriterijuma zaključujemo da posmatrani red konvergira.

Napomena. Ako je neki red alternativan tada se proverava, najpre, njegova apsolutna konvergencija. Ako ona ne važi, tada se uslovna konvergencija može proveriti Lajbnicovim kriterijumom.

Videli smo, u prethodnom primeru, da red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konvergira na osnovu Lajbnicovog kriterijuma, ali on ne konvergira apsolutno, jer je red

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

harmonijski red koji divergira, već uslovno.

U slučaju da alternatnivni red konvergira, tada ostatak tog reda, oznaci R_n, je po apsolutnoj vrednosti manji od prvog zanemarenog člana i ima isti znak kao i taj član, tj.

$$R_n = S - Sn = \lambda(-1)^n a_{n+1}\ (0<\lambda<1),$$

gde su S i S_n suma reda i n -ta parcijalna suma, respektivno. Često se to zapisuje na sledeći način

$$R_n < |a_{n+1}|.$$

Prema Lajbnicovom kriterijumu red iz prethodnog primera je konvergentan, a za ostatak R_n važi ocena $|R_n| < \dfrac{1}{n+1}$.

DIVERGENCIJA REDOVA SA ČLANOVIMA PROMENLJIVOG ZNAKA

Divergencija u slučaju znakopromenljivih brojnih redova (kao i alternativnih redova) podrazumeva dva slučaja.

U radu sa znakopromenljivim brojnim redovima (kao i alternativnih redova) divergencija podrazumeva dva slučaja. Prvi slučaj je da suma tog reda iznosi $-\infty$ ili $+\infty$. Drugi slučaj je da se divergencija javlja kada parcijalne sume takvog reda osciliraju između, na primer, dve vrednosti. To ilustrujemo sledećim primerom.

PrimerIspitati konvergenciju alternativnog reda $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}$.

Rešenje. Za n -tu parcijalnu sumu datog reda važi $S_n = 1$, za $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}$ i $S_n = 0$, za $n = 2k, k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n = 2k-1, k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{ako je } n = 2k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ovaj red oscilira između dve vrednosti 0 i 1. Ovakvi redovi se nazivaju oscilatorni redovi. Dakle, dati red je oscilatoran i prema tome divergentan.

Napomena. Stav za dokazivanje divergencije brojnog reda sa nenegativnim članovima o kome smo već govorili važi i za brojne redove sa članovima koji su promenljivog znaka. Dakle, ako opšti član brojnog reda sa članovima koji su promenljivog znaka ne teži nuli, tada taj red divergira.

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: Apsolutna i uslovna konvergencija i divergencija.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: Poredbeni kriterijum

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

STAVOVI O ZBIRU KONVERGENTNIH BROJNIH REDOVA

Kod konvergetnih i apsolutno konvergetnih redova njihova suma se ne menja promenom rasporeda članova, dok to ne važi za uslovno konvergetne redove.

Sada ćemo dati neke opšte stavove o konvergenciji brojnih redova.

Stav. Ako izvestan red sa pozitivnim (nenegativnim) članovima konvergira, tada se pri bilo kakvoj permutaciji njegovih članova dobija red koji je, takođe, konvergentan i ima isti zbir kao i početni red.

Na osnovu definicije apsolutno konvergetnih redova prethodni stav se može primeniti i na njih.

Stav. Ako izvestan red sa članovima prozvoljnog znaka apsolutno konvergira, tada se pri bilo kakvoj permutaciji njegovih članova dobija red koji je, takođe, apsolutno konvergentan i ima isti zbir kao i početni red.

Sledeći stav govori i o sumi uslovno konvergetnih redova.

Stav. Ako izvestan red sa članovima prozvoljnog znaka uslovno konvergira, tada za proizvoljan realan broj A postoji određena permutacija njegovih članova takva da je suma tog reda jednaka A. Takodje, postoji bar jedna permutacija članova tog reda, takva da je dobijeni red divergentan.

Na osnovu prethodnog stava vidimo da se pravila za sumiranje konačno mnogo članova i beskonačno mnogo članova nekog brojnog reda u opštem slučaju ne poklapaju.

Prethodni stav ilustrujemo sledećim primerom.

Primer. Posmatrajmo ponovo uslovno konveregentan red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$. Pretpostavimo da je suma tog reda S. Imamo da je

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \dots$$

Ako posmatramo red

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

Sabiranjem ova dva reda, dobijamo

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

Poslednji red je isti kao i polazni samo mu je redosled sumiranja članova promenjen. Pogrešno bi bilo zaključiti da je $\frac{3}{2}S = S,$ jer bi odatle dobili da je $S = 0,$ što nije tačno jer je iz samog reda $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ lako videti da je $\frac{1}{2} < S < 1.$

Dakle, permutovanje članova u sumiranju beskonačnog uslovno konvergetnog reda dovodi do toga da se dobijaju različiti zbirovi, za isti red.

VIDEO KLIP 3

Youtube snimak

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 6

Pokazna vežba

ZADATAK 1 (10 MINUTA)

Određivanje sume reda.

Odrediti sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Rešenje. Za članove reda važi

$$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \dots$$

U opštem slučaju imamo da je

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tada, $n-$ ta parcijalna suma je jednaka

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Konačno, imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Dakle, niz parcijalnih suma je konvergentan, pa red konvergira i suma reda je jednaka graničnoj vrednosti niza parcijalnih suma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

ZADATAK 2 (5 MINUTA)

Provera konvergencije primenom stava da ako opšti član nekog reda ne teži nuli, tada je on divergentan.

Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}.$$

Rešenje:

Opšti član konvergentnog reda mora težiti nuli. Ovde imamo

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

pa je red divergentan.

ZADATAK 3 (8 MINUTA)

Primena prvog poredbenog kriterijuma na dokazivanje divergencije reda.

Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+1}.$$

Rešenje:

Za primenu ovog kriterijuma je od koristi znati da važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{divergentan}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \qquad \begin{cases} \alpha > 1, & \text{konvergentan} \\ \alpha \leq 1, & \text{divergentan} \end{cases}$$

$$\frac{n}{2n^2+1} > \frac{n}{2n^2+n} = \frac{n}{n(2n+1)} = \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+n} = \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n}$$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, jer red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira.

Kako je opšti član našeg reda veći od opšteg člana divergentnog reda zaključujemo da je posmatrani red divergentan.

ZADATAK 4 (8 MINUTA)

Dokazivanje konvergencije reda primenom Košijevog korenog kriterijuma.

Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{n^2+n}.$$

Rešenje:

Koristićemo Košijev koreni kriterijum.

Računaćemo graničnu vrednost n-tog korena opšteg člana

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{\frac{n(n+1)}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-3}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}=e^{-3}<1$$

Dakle, red konvergira na osnovu Košijevog korenog kriterijuma.

ZADATAK 5 (8 MINUTA)

Primena Dalamberovog kriterijuma na dokazivanje konvergencije datog reda.

Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}.$$

Rešenje:

Koristićemo Dalamberov kriterijum.

Računaćemo graničnu vrednost količnika dva uzastopna člana

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!\,n^n}{(n+1)(n+1)^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

Dakle, red konvergira na osnovu Dalamberovog kriterijuma.

ZADATAK 6 (16 MINUTA)

Primena Košijevog integralnog kriterijuma na ispitivanje konvergencije/divergencije brojnog reda sa potivnim članovima.

Koristeći integralni kriterijum ispitati konvergenciju sledećeg reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Rešenje:

Uočimo funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Ona je definisana, neprekidna i nerastuća za $x \geq 1$, pa stoga možemo primeniti Košijev integralni kriterijum.

Odgovarajući nesvojstveni integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \left(\operatorname{arctg} x \,\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

je konvergentan, pa je i posmatrani red konvergentan.

Koristeći integralni kriterijum ispitati konvergenciju sledećeg reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad (p \in \mathbb{R}).$$

Rešenje:

Napomenimo prvo da se posmatrani red naziva i opštim harmonijskim redom.

Ako stavimo da je $f(x) = \frac{1}{x^p}$, tada je $a_n = f(n) = \frac{1}{n^p}$, pri tom je funkcija f neprekidna i pozitivna za $x \geq 1$.

Ako je najpre $p \leq 0$, tada je $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^{|p|} \nrightarrow 0$, pa posmatrani red očigledno divergira.

Dalje, pretpostavimo da je $p > 0$. U tom slučaju je funkcija f opadajuća pa možemo primeniti Košijev integralni kriterijum.

Kako je nesvojstveni integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^b = \begin{cases} \text{konvergira}, & p > 1 \\ \text{divergira}, & p \leq 1. \end{cases}$$

Neposredno sledi da je posmatrani red konvergentan za $p > 1$ i divergentan za $p \leq 1$.

ZADATAK 7 (10 MINUTA)

Primena drugog poredbenog kriterijuma na dokazivanje konvergencije brojnog reda.

Ispitati konvergenciju sledećih redova: a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt[4]{k^3}}$; c) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{20^k}{2^k+5^k}$.

Rešenje.a) Posmatrajmo opšti član ovog brojnog reda

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{k^2}} = \frac{1}{k}, \quad k \to +\infty.$$

Kako je red $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ divergentan red, tada na osnovu Drugog poredbenog kriterijuma zaključujemo da je i polazni red konvergentan.

b) Posmatrajmo opšti član ovog brojnog reda

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt[4]{k^3}} \cdot \frac{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = \\ &= \frac{1}{k^{\frac{3}{4}} \cdot k^{\frac{1}{2}} \left(1+\sqrt{1-\frac{1}{k}}\right)} \sim \frac{1}{2k^{\frac{5}{4}}},\ k \to \infty. \end{aligned}$$

Kako je red $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{5}{4}}}$ hiperharmonijski, pri čemu je $\alpha = \frac{5}{4} > 1$, on je konvergentan red. Tada, na osnovu Drugog poredbenog kriterijuma, zaključujemo da je i polazni red konvergentan.

c) Posmatrajmo opšti član ovog brojnog reda

$$a_k = \frac{20^k}{2^k+5^k} = \frac{5^k \cdot 4^k}{5^k\left(\left(\frac{2}{5}\right)^k+1\right)} \sim 4^k, \quad k \to \infty,$$

jer $\left(\frac{2}{5}\right)^k \to 0$, kada $k \to \infty$. Kako je red $\sum_{k=1}^{+\infty} 4^k$ divergentan red, tada na osnovu Drugog poredbenog kriterijuma zaključujemo da je takav i polazni red.

ZADATAK 8(10 MINUTA)

Primena Rabeovog kriterijuma na dokazivanje konvergencije brojnog reda.

Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.$$

Rešenje. Za $(2k)!!$ važi da je

$$(2k)!! = (2k) \cdot (2k-2) \cdot (2k-4) \cdots 4 \cdot 2.$$

Slično, za $(2k-1)!!$ važi da je

$$(2k-1)!! = (2k-1) \cdot (2k-3) \cdot (2k-5) \cdots 3 \cdot 1.$$

Na osnovu prethodne napomene, prvo ćemo ispitati konvergenciju datog reda primenom Dalamberovog kriterijuma. Imamo da je $a_k = \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}, k \in \mathbb{N}$,pa je

$$a_{k+1} = \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!}.$$

Tada je

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\dfrac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!}}{\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}} = \frac{\dfrac{(2k+1)(2k-1)!!}{(2k+2)(2k)!!}}{\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}} = \frac{2k+1}{2k+2},$$

i dobijamo da je

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2k+1}{2k+2} = 1.$$

Dakle, na osnovu Dalamberovog kriterijuma ne možemo dati odgovor o konvergenciji, odnosno divergenciji datog reda. Stoga, primenjujemo Rabeov kriterijum. Tada je

$$\lim_{k\to+\infty} k \cdot \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = \lim_{k\to+\infty} k \cdot \left(\frac{2k+2}{2k+1} - 1\right) = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Na osnovu Rabeovog kriterijuma zaključujemo da posmatrani red divergira.

ZADATAK 9 (10 MINUTA)

Dokazivanje apsolutna konvergencije alternativnog reda, primenom Košijevog korenog kriterijuma.

Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{5^n}.$$

Rešenje:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}n}{5^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{5^n}} = \frac{1}{5} < 1$$

Dakle, red $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}n}{5^n}\right|$ konvergira na osnovu Košijevog korenog kriterijuma. Onda je red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{5^n}$ apsolutno konvergentan.

NAPOMENA: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$

ZADATAK 10 (10 MINUTA)

Ispitivanje apsolutna konvergencije alternativnog reda. Kako red ne konvergira apsolutno, primenom Lajbnicovog kriterijuma je dokazana uslovna konvergencija.

Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}.$$

Rešenje:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$$

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$$

Red $\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}\right|$ divergira, pa red $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$ ne konvergira apsolutno.

Za uslovnu konvergenciju koristimo Lajbnicov kriterijum: Alternativni red konvergira ako je niz apsolutnih vrednosti monotono opadajući i teži nuli.

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)} \quad \Rightarrow \text{ niz je opadajući}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = 0$$

Dakle, red uslovno konvergira.

ZADATAK 11 (10 MINUTA)

Dokazivanje apsolutna konvergencije alternativnog reda, primenom Dalamberovog kriterijuma.

Ispitati konvergenciju sledećeg reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}.$$

Rešenje:

U ovom primeru opšti član reda je oblika

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{2^n}$$

$$|a_n| = \frac{n}{2^n} > 0, \qquad n \in N$$

odakle je

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{n+1}{2^{(n+1)}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{(n+1)2^n}{n2^{(n+1)}} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2}, \quad \text{kada} \quad n \to \infty.$$

Stoga, na osnovu Dalamberovog kriterijuma ovaj red konvergira apsolutno.

ZADATAK 12 (10 MINUTA)

Dokazivanje apsolutna konvergencije alternativnog reda.

Ispitati konvergenciju sledećeg reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{(2n-1)^n}.$$

Rešenje:

U ovom primeru opšti član je oblika

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{3^n}{(2n-1)^n}$$

$$|a_n| = \frac{3^n}{(2n-1)^n} > 0, \qquad n \in N$$

odakle je

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{3^n}{(2n-1)^n}} = \frac{3}{2n-1} \to 0, \quad \text{kada} \quad n \to \infty.$$

Zaključujemo da na osnovu Košijevog korenog kriterijuma dati red konvergira apsolutno.

ZADATAK 13 - 1. DEO (20 MINUTA)

Ispitivanje apsolutne i uslovne konvergencije za dati red, kada je $p < 0$ (red apsolutno konvergira) i $p \geq \frac{1}{2}$ (red divergira).

Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (k^2+2)^p}{k+6},$$

u zavisnosti od $p \in \mathbb{R}$.

Rešenje. Posmatrani red je alternativan. Proverimo, apslutnu konvergenciju ovog reda. Tada je

$$|a_k| = \left| \frac{(-1)^k (k^2+2)^p}{k+6} \right| = \frac{(k^2+2)^p}{k+6}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sada imamo da je:

$$\frac{(k^2+2)^p}{k+6} \sim \frac{k^{2p}}{k} = k^{2p-1} = \frac{1}{k^{1-2p}}, \quad \text{za~~} k \to +\infty.$$

Red $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1-2p}}$ konvergira za $1-2p > 1$, tj. za $p < 0$ kao hiperharmonijski red. Na osnovu Drugog poredbenog kriterijuma konvergira i red $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k^2+2)^p}{k+6}$. Dakle, polazni red $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (k^2+2)^p}{k+6}$ apsolutno konvergira za $p < 0$. Za $p \geq \frac{1}{2}$, može se uočiti da je

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{(-1)^k (k^2+2)^p}{k+6} \neq 0,$$

pa opšti član posmatranog reda ne teži nuli. Zaključujemo da je posmatrani red divergentan za $p \geq \frac{1}{2}$.

ZADATAK 13 - 2. DEO

Ispitivanje apsolutne i uslovne konvergencije za dati red, kada je $0 \leq p < \frac{1}{2}$ (red uslovno konvergira).

Na kraju, ispitajmo konvergenciju reda na intervalu $0 \leq p < \frac{1}{2}$. S obzirom da početni red ne konvergira apsolutno na ovom intervalu, on može biti uslovno konvergentan. Primenimo Lajbnicov kriterijum.

Treba proveriti da li je niz $|a_k| = \frac{(k^2+2)^p}{k+6}$, $k \in \mathbb{N}$ nerastući. Posmatrajmo funkciju $f(x) = \frac{(x^2+2)^p}{x+6}$, za $x \geq 1$ i $0 \leq p < \frac{1}{2}$ i odredimo njen prvi izvod. Tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{p(x^2+2)^{p-1} \cdot 2x \cdot (x+6) - (x^2+2)^p}{(x+6)^2} = \\ &= \frac{(x^2+2)^{p-1}(2px^2+12px-x^2-2)}{(x+6)^2} = \\ &= \frac{(x^2+2)^{p-1}}{(x+6)^2}\big((2p-1)x^2+12px-2\big). \end{aligned}$$

Znak funkcije $f'(x)$ za $x \geq 1$ i $0 \leq p < \frac{1}{2}$ zavisiće od kvadratne funkcije $y = (2p-1)x^2 + 12px - 2$. Za koeficijent koji stoji uz x^2 u ovoj kvadratnoj funkciji važi da je $2p - 1 < 0$, zbog uslova $0 \leq p < \frac{1}{2}$. Ovo znači da će za dovoljno veliko x važiti da je $(2p-1)x^2 + 12px - 2 \leq 0$, tj. $f'(x) \leq 0$, za $0 \leq p < \frac{1}{2}$ i dovoljno veliko x. Ovim smo dokazali da je niz $|a_k| = \frac{(k^2+2)^p}{k+6}$, za dovoljno veliko $k \in \mathbb{N}$, nerastući.
S druge strane, važi da je

$$\lim_{k\to+\infty} |a_k| = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k^2+2)^p}{k+6} = 0, \quad \text{za } 0 \leq p < \frac{1}{2}.$$

Kako su ispunjeni uslovi Lajbnicovog kriterijuma, posmatrani red uslovno konvergira za $0 \leq p < \frac{1}{2}$.

Napomena. Dokazano je u prethodnom zadatku da je niz $|a_k| = \frac{(k^2+2)^p}{k+6}$, za dovoljno veliko $k \in \mathbb{N}$, nerastući. Prilikom ispitivanja konvergencije nekog reda možemo zanemariti konačno mnogo njegovih članova, jer to ne utiče na njegovu konvergenciju. Zato, posmatrani niz ne mora da bude nerastući za svako $k \in \mathbb{N}$, već je dovoljno dokazati da je on nerastući počevši od nekog $k \in \mathbb{N}$.

Poglavlje 7

Zadaci za samostalni rad

VIDEO KLIP (13 MINUTA)

Snimak sa Youtube-a: razni postupci za ispitivanje konvergencije redova - za dodatni rad.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba da dodatno provežbaju.

Zadatak 1. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

Rezultat: Konvergentan.

Zadatak 2. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Rezultat: Divergentan.

Zadatak 3. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n}{3n^2+1}.$$

Rezultat: Divergentan.

Zadatak 4. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

Rezultat: Konvergentan.

Zadatak 5. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

Rezultat: Konvergentan.

Zadatak 6. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

Rezultat: Apsolutno konvergentan.

Zadatak 7. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}.$$

Rezultat: Apsolutno konvergentan.

Vreme izrade: 1. 10 minuta; 2. 10 minuta; 3. 10 minuta; 4. 10 minuta; 5. 10 minuta; 6. 10 minuta; 7. 10 minuta.

Zaključak za lekciju 08

BROJNI REDOVI

Brojni red, suma brojnog reda, konvergencija, apsolutna konvergencija, uslovna konvergencija, divergencija.

U ovoj lekciji je izučen pojam brojnog reda. Centralno mesto u radu sa ovim veoma bitnim matematičkim pojmovima jeste odredjivanje njihove konvergencije. Obradjeni su sledeći kriterijumi:

- Dalamberov kriterijum
- Košijev koreni kriterijum
- Poredbeni kriterijum
- Košijev integralni kriterijum
- Lajbnicov kriterijum

Međutim, u slučaju konvergentnosti reda ovi kriterijumi ne mogu nam ništa reći o njegovoj sumi.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. Rale Nikolić, Nada Damljanović, Matematika 2 – zbirka zadataka, Fakultet tehničkih nauka, Čačak, 2016. godina
4. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.

UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Funkcionalni redovi

Lekcija 11

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 11

FUNKCIONALNI REDOVI

Uvod

UVOD

Funkcionalni redovi

U ovoj lekciji proučićemo teoriju redova u kojoj se vrši sumiranje realnih funkcija jedne realne promenljive na zajedničkom domenu, tzv. funkcionalni ili funkcijski redovi, sa aspekta različitih tipova njihove konvergencija, kao i osobine ovih redova koje iz njih proizilaze. Takođe, biće izložena i teorija o stepenim ili potencijalnim redovima, kako se još nazivaju, koji predstavljaju veoma bitnu klasu funkcionalnih redova. Na kraju lekcije biće reči o tome kako je moguće i pod kojim uslovima određenu funkciju razviti u red.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Funkcionalni niz

POJAM

Kada kažemo da je funkcionalni niz definisan na nekom skupu, smatramo da je svaka funkcija tog niza definisana na tom skupu (oblast definisanosti svake funkcije je taj skup).

Uređeni skup realnih funkcija jedne realne promenljive $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, koje su definisane na istom domenu $A \subseteq \mathbb{R}$ i koji zapisujemo

$$(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots),$$

naziva se funkcionalni niz.

Funkcionalni niz ćemo slično, kao i brojni niz, označavati na sledeći način $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ili kraće $(f_n(x))$.

Funkcija $f_n(x)$ se naziva opšti član funkcionalnog niza $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ i funkcionalni niz se najčešće zadaje preko njega.

Primer. Posmatrajmo funkcionalni niz $\left(\frac{x}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, pri čemu je opšti član $f_n(x) = \frac{x}{n^2}$. Tada, prvih nekoliko članova ovog niza je

$$f_1(x) = \frac{x}{1},\ f_2(x) = \frac{x}{4},\ f_3(x) = \frac{x}{9},\ f_4(x) = \frac{x}{16}, \dots,$$

odakle vidimo da su članovi ovog reda, zapravo, linearne funkcije, čiji grafici sadrže koordinatni početak. Oblast definisanosti svih članova ovoga niza tj. funkcija je $\mathbb{R}$.

S druge strane, ako izaberemo neku konkretnu vrednost za $x \in \mathbb{R}$, na primer $x = 1$, tada posmatrani funkcionalni red postaje brojni red $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Osobine ovih nizova smo obrađivali u okviru Matematike 1, a kratko podsećanje je dato u okviru prethodne lekcije.

Kao i kod brojnih redova, pojam konvergencije je najvažnije pitanje u vezi sa funkcionalnim redovima. O tome govorimo u nastavku.

KONVERGENCIJA FUNKCIONALNOG NIZA U TAČKI I NA INTERVALU

Kod funkcionalnih nizova se definiše konvergencija u tački, konvergencija na intervalu i uniformna konvergencija.

Kod funkcionalnih nizova se definiše konvergencija u tački, konvergencija na intervalu i uniformna konvergencija.

Funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u tački $x = x_0 \in A$, ako konvergira brojni niz $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$, tj. ako postoji konačna granična vrednost $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Ako ne postoji konačna granična vrednost $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$, tada kažemo da funkcionalni niz divergira u tački $x_0 \in A$. Skup svih tačaka $x_0 \in A$ za koje dobijeni brojni niz konvergira, predstavlja oblast konvergencije posmatranog funkcionalnog niza.

Pretpostavimo da je oblast konvergencije neki interval (a, b) (može biti i neki od interval $[a, b]$ ili $[a, b)$ ili $(a, b]$). Funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira na intervalu $(a, b) \in A$ ka funkciji $f(x)$, $x \in (a, b)$, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, za svako $x \in (a, b)$. Iz prethodnog sledi da za svako $\varepsilon > 0$ i svako fiksirano $x \in (a, b)$, postoji prirodan broj $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, takav da važi da je

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

za svako $n > n_0$.

Za funkcionalni niz kažemo da divergira na intervalu (a, b), ako divergira u svakoj tački tog intervala.

Primer. Posmatrajmo funkcionalni niz

$$f_n(x) = \frac{nx + x^2}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

za $x \in \mathbb{R}$. Tada za svaki realan broj x važi da je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx + x^2}{n^2} = x \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} + x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Dakle, na čitavom skupu $\mathbb{R}$ posmatrani funkcionalni niz konvergira ka funkciji $f(x) = 0$.

PRIMER 1 I 2

Konvergencija i divergencija funkcionalnog reda.

Primer. Ispitati konvergenciju funkcionalnog niza

$$f_n(x) = \cos^n x, \ n \in \mathbb{N},$$

na intervalu $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rešenje. Za $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ važi da je $0 \leq \cos x < 1,$ pa je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \cos^n x = 0.$$

Za $x = 0$ imamo da $f_n(0) = \cos^n 0 = 1,$ za svako $n \in \mathbb{N}.$

Stoga, funkcionalni niz

$$f_n(x) = \cos^n x, \; n \in \mathbb{N},$$

na intervalu $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ konvergira ka funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Napomena. Iz ovog primera bi trebalo uočiti da funkcija $f(x)$ ne mora biti obavezno neprekidna funkcija, iako je funkcionalni niz sastavljen od neprekidnih funkcija.

Primer. Da li funkcionalni niz

$$f_n(x) = n^2 x^n, \; n \in \mathbb{N},$$

konvergira na intervalu $x \in [0, 1]$?

Rešenje. Za $x = 0$ važi da je $f_n(0) = 0,$ za svako $n \in \mathbb{N},$ pa posmatrani niz konvergira u tački $0.$

Za $0 < x < 1$ imamo da je $n^2 x^n = n^2 e^{n \ln x}$. Kako je $\ln x < 0,$ za $0 < x < 1$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 e^{n \ln x} = 0.$$

(Pokazati za vežbu da ovo važi.) Dakle, posmatrani niz konvergira na intervalu $(0, 1)$ ka funkciji $f(x) = 0.$

Za $x = 1$ imamo da $f_n(1) = n^2,$ pa je očigledno početni funkcionalni niz ne konvergira u tački $x = 1.$

Dakle, posmatrani funkcionalni niz ne konvergira na intervalu $[0, 1],$ jer ne konvergira u svakoj tački tog intervala.

RAVNOMERNA (UNIFORMNA) KONVERGENCIJA FUNKCIONALNOG NIZA

Svaki uniformno (ravnomerno) konvergentan niz je konvergentan, dok obrnuto u opštem slučaju ne važi.

U jednom od prethodnih primera smo videli da “prolaz limesa kroz neprekidnu funkciju” nije moguć u opštem slučaju. Zato nas može interesovati da li se mogu postaviti uslovi koji obezbeđuju neprekidnost funkcije koja je predstavlja graničnu vrednost konvergentnog funkcionalnog niza neprekidnih funkcija. To nas dovodi do pojma ravnomerne (uniformne) konvergencije funkcionalnih redova na intervalu (ne definiše se uniformna konvergencija u tački).

Definicija. Funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ravnomerno (ili uniformno) na intervalu (a,b) ka funkciji $f(x),\ x\in(a,b)$, ako za svako $\varepsilon>0$, postoji prirodan broj $n_0=n_0(\varepsilon)$, takav da važi

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

za svako $n>n_0$ i svako $x\in(a,b)$.

Uniformna konvergencija se označava sa $f_n(x)\rightrightarrows f(x),\ x\in(a,b),\ n\to\infty$.

Ravnomernu konvergenciju zadatog funkcionalnog niza $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jednostavnije je ispitati primenom sledećeg stava nego prethodno datom definicijom.

Stav. Funkcionalni niz konvergira ravnomerno na intervalu (a,b), ka funkciji $f(x),\ x\in(a,b)$ ako i samo važi da je

1° $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in(a,b)}|f_n(x)-f(x)|\right)=0$

2° Postoji realni nula niz (c_n) koji ne zavisi od $x\in(a,b)$, takav da je $|f_n(x)-f(x)|<c_n$, za svaki $x\in(a,b)$ i skoro svaki $n\in\mathbb{N}$.

Napomena. Treba istaći da u prethodno datoj definiciji prirodan broj n_0 zavisi jedino od ε (ne i od x.) Stoga uniforma konvergencija povlači (običnu) konvergenciju na intervalu, dok obrnuto, u op[tem slučajune važi.

PRIMER 3

Ovim primerom pokazujemo da konvergentan funkcionalni niz ne mora biti uniformno konvergentan. Primer kojim se obara neko tvrđenje se u matematici naziva kontraprimer.

Primer. Posmatrajmo funkcionalni niz

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},\ n\in\mathbb{N},$$

za $x\in(0,\infty)$.

Ovaj niz konvergira na intervalu $(0,\infty)$ ka funkciji $f(x)=0.$ Naime, $1+n^2x^2\sim n^2x^2$, kada $n\to\infty$ (asimptotski se ponaša isto), pa imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x^2n^2}=\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

S druge strane, za $\varepsilon<\frac{1}{2}$ imamo da je

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{2}-0>\varepsilon.$$

Stoga, posmatrani funkcionalni niz ne konvergira ravnomerno (uniformno).

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: konvergencija funkcionalnog niza.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: uniformna konvergencija funkcionalnog niza.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 2

Funkcionalni red

POJAM

Posebno mesto u radu sa funkcionalnim redovima, predstavlja ispitivanje njihove konvergencije.

Neka je dat funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, za $x \in A \subseteq \mathbb{R}$, $(A \neq \emptyset)$. Beskonačan zbir

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

naziva se funkcionalni red.

Napomena. Treba istaći da se i beskonačan zbir funkcija

$$\sum_{n=p}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

gde je $p \in \mathbb{N}_0$, takođe naziva funkcionalan red. U mnogim slučajevima prilikom rada sa ovakvim redovima može se desiti da brojač n kreće od nule. Funkcionalni redovi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ i $\sum_{n=p}^{\infty} f_n(x)$, za $p \neq 1$, se razlikuju za konačno mnogo članova.

Veoma važni primeri funkcionalnih redova su

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

koji su od posebnog interesa u matematici i primenama, i oni će biti obrađeni na ovom i narednom predavanju.

Posebno mesto u radu sa funkcionalnim redovima, jeste ispitivanje njihove konvergencije. Za funkcionalne redove može se definisati konvergencija u tački, konvergencija na intervalu, apsolutna konvergencija i uniformna konvergencija.

SUMA FUNKCIONALNOG REDA

Funkcionalni red konvergira na nekom intervalu ako njegov niz parcijalnih suma konvergira na tom intervalu. Ta granična funkcija se naziva suma funkcionalnog reda.

Zbir prvih n članova funkcionalnog niza $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, u oznaci $S_n(x)$, tj.

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x),$$

gde su $x \in A,\ n \in \mathbb{N}$, predstavlja n-tu parcijalnu sumu funkcionalnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Na ovaj način se može generisati funkcionalni niz $\big(S_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, definisan za $x \in A$, funkcionalnim nizom $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, za $x \in A$.

Funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira na intervalu $A_1 \subseteq A$, ako niz parcijalnih suma $\big(S_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira na tom intervalu. Dakle, ako posmatramo sledeću graničnu vrednost

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

za $x \in A$ i ako granica prethodnog limesa postoji u $\mathbb{R}$ (označimo je sa $S(x)$), tada za nju kažemo da je suma funkcijskog reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, za $x \in A_1 \subseteq A$. Tada zapisujemo

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ x \in A_1 \subseteq A.$$

Beskonačan zbir, u oznaci $R_n(x)$, oblika

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots$$

se naziva ostatak funkcionalnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

PRIMER

Određivanje sume geometrijskog reda.

Red

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

se naziva geometrijski red, koji je konvergentan za $-1 < x < 1$, za koji je poznato da važi

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Takođe, red

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \ldots = x(1 + x + x^2 + \ldots),$$

pa je njegova suma jednaka $f(x) = \frac{x}{1-x}$, za $-1 < x < 1$.

Poglavlje 3

Konvergencija funkcionalnog reda u tački i na intervalu

POJAM

Konvergencija funkcionalnog reda u tački se poklapa sa konvergencijom odgovarajućeg brojnog reda. Skup svih tačaka u kojima posmatrani red konvergira se nalazi oblast konvergencije.

Konvergencija (divergencija) funkcionalnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ u tački $x_0 \in A$ poklapa se sa konvergencijom (divergencijom) brojnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

Skup svih tačaka $A_1 \subseteq A$ za koje posmatrani funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira naziva se oblast konvergencije posmatranog reda. Ta oblast može biti prazan skup tačaka, a može se poklopiti i sa skupom A. Konvergencija na intervalu, zapravo, predstavlja konvergenciju u svakoj tački tog intervala.

Napomena. Oblast konvergencije u ovom slučaju predstavlja interval konvergencije jer se tačke x_0 u kojima funkcionalni red konvergira nalaze u $\mathbb{R}$.

Koristeći pojam ostatka funkcionalnog reda, možemo definisati konvergenciju na intervalu $A_1 \subseteq A$ na sledeći način: funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira na intervalu $A_1 \subseteq A$, ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji prirodan broj n_0 koji zavisi od x i ε, tj. $n_0 = n_0(x, \varepsilon)$ takav da je

$$R_n(x) = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon,$$

za svako $n > n_0 = n_0(x, \varepsilon)$ i svako fiksirano $x \in A_1$.

PRIMER

Određivanje oblasti konvergencije funkcionalnog reda primenom hiperharmonijskog reda.

Odrediti oblast konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\ln x}$.

Rešenje. Funkcije $f_n(x) = n^{\ln x}$, za $n \in \mathbb{N}$, su definisane za $x > 0$ (zbog funkcije $y = \ln x$), pa će oblast konveregencije, svakako, biti interval koji je podskup ovog skupa (ili njemu jednak). Takođe, sve pomenute funkcije su uvek pozitivne za $x > 0$, pa govorimo o konvergenciji reda (ne o apsolutnoj konvergenciji o kojoj će biti reči kasnije), jer je ovo red sa pozitivnim članovima. Opšti član ovog reda se može zapisati u oblik

$$f_n(x) = n^{\ln x} = \frac{1}{n^{-\ln x}}.$$

Videli smo da brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ sa pozitivnim članovima, koji se naziva hiperharmonijski red, konvergira za $p > 1$, a da za $p \leq 1$ divergira. Tada će i polazni red konvergirati za $-\ln x > 1$, tj. za $\ln x < -1$, tj. za $x < e^{-1}$. Kako važi da je $x > 0$, tada je $0 < x < e^{-1}$, tj. $x \in (0, e^{-1})$, što predstavlja oblast konvergencije polaznog reda. Svakako, za $x \geq e^{-1}$ polazni red divergira.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 4

Uniformna konvergencija funkcionalnog reda

POJAM UNIFORMNE KONVERGENCIJE

Neprekidnost članova konvergentnog funkcionalnog reda, u opštem slučaju, ne povlači neprekidnost njegove sume. Od posebnog interesa su funkcionalni redovi kod kojih ovo važi.

Može se zapaziti veoma važna činjenica da neprekidnost članova konvergentnog funkcionalnog reda ne povlači, u opštem slučaju, neprekidnost njegove sume $S(x)$, tj.

$$\lim_{x\to x_0} S(x) \neq S(x_0).$$

ili što je isto sa tvrdnjom

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Dakle, “prolaz limesa kroz sumu” nije moguć u opštem slučaju. U daljem tekstu interesovaće nas dovoljni uslovi koji obezbeđuju neprekidnost sume konvergentnog reda neprekidnih funkcija, tj. koji garantuju jednakost u prethodnim izrazima. To nas dovodi do pojma ravnomerne (uniformne) konvergencije kod funkcionalnih redova na intervalu (ne definiše se uniformna konvergencija u tački).

Neka je dat funkcionalan red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ za $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ i neka je suma $S(x)$ definisana za $x \in A_1 \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$. Takođe, neka je $B \subseteq A_1$ $(B \neq \emptyset)$. Tada za posmatrani red kažemo da uniformno (ravnomerno) konvergira ka $S(x)$ na B, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tako da za svako $x \in B$ i svako $n \geq n_0$ važi da je

$$R_n(x) = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

Napomena. Za razliku od obične konvergencije, kod ravnomerno konvergentnih funkcionalnih redova prethodna procena važi nezavisno od $x \in B$.

Ravnomerna konvergencija se može predstaviti i sledećom karakterizacijom.

Stav. Neka je dat funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ $x \in A \subseteq \mathbb{R}$, i neka je $S(x)$ definisano za $x \in A_1 \subseteq \mathbb{R}$. Tada je, za neko $B \subseteq A$, $(B \neq \emptyset)$, ovaj rad uniformno konvergentan ka $S(x)$, za $x \in B$, ako i samo ako je

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in B}|S(x)-S_n(x)|\right)=0$$

Napomena. Prethodna formula je veoma bitan alat za ispitivanje ravnomerne konvergencije u zadacima. U skoro svim zadacima „sup” (supremum) iz prethodne formule biće kod nas „max” (maksimum).

Za funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ koji uniformno konvergira ka $S(x)$ za $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ uvodimo oznaku

$$S_n(x) \rightrightarrows S(x),\ n \to \infty.$$

Napomena. Uslov ravnomerne konvergencije jači je od uslova obične konvergencije na nekom intervalu. Drugim rečima, ako je neki funkcionalni red ravnomerno konvergentan, tada je on konvergentan, dok obrnuto u opštem slučaju ne važi.

VAJEŠTRASOV KRITERIJUM

Za ispitivanje uniformne konvergencije postoji više kriterijuma, kao što su Vajerštrasov kriterijum, Dirihletov kriterijum, Abelov kriterijum.

Ispitivanje konvergencije na intervalu se svodi na ispitivanje konvergencije u tačkama tog intervala, tj. na ispitivanje konvergencije brojnih redova. Zato za običnu konvergenciju nisu razvijeni nikakvi posebni kriterijumi.

Za ispitivanje uniformne konvergencije postoji više kriterijuma, kao što su Vajerštrasov kriterijum, Dirihletov kriterijum, Abelov kriterijum. Najpoznatiji među njima je Vajerštrasov kriterijum i njega navodimo u nastavku.

Stav (Vajerštrasov kriterijum). Neka je dat funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ definisan za $x \in A$, i neka je dat niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \geq 0$, za svako $n \in \mathbb{N}$, tako da je ispunjeno

$$|f_n(x)| \leq a_n$$

za svako $x \in A$ i za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira na intervalu A, ako nenegativan brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Napomena. Vajerštrasov kriterijum daje samo dovoljne, ali ne i potrebne uslove za konvergenciju nekog funkcionalnog reda.

Prethodno rečeno ilustrujemo sledećim primerom.

PRIMER 1

Vajerštrasov kriterijum daje samo dovoljne, ali ne i potrebne uslove za konvergenciju nekog funkcionalnog reda.

Ispitati uniformnu konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}.$$

Rešenje. Primena Vajerštrasovog kriterijuma u ovom slučaju nije moguća jer važi

$$\frac{(-1)^n}{n+x^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Naime, brojni red čiji je opšti član $\frac{1}{n}$ je poznati harmonijski red koji je divergentan. Međutim, polazni red konvergira, jer za ostatak tog reda važi

$$\begin{aligned} R_n(x) &= |S(x) - S_n(x)| = \\ &= \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1+x^2} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+2+x^2} + \dots \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n+1+x^2} \leq \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

za svako $x \in \mathbb{R}$.

Odavde zaključujemo da za svako $\varepsilon > 0$, važi

$$R_n(x) < \varepsilon,$$

za svako $x \in \mathbb{R}$ uzimajući da je $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ odakle zaključujemo da n_0 zavisi samo od ε, a ne i od x. Dakle, dati funkcionalni red konvergira uniformno.

OSOBINE UNIFORMNO KONVERGENTNIH REDOVA

Suma neprekidnih funkcija koja uniformno konvergira je neprekidna funkcija.

Zbog velikog praktičnog značaja, navodimo osobine uniformno konvergentnih redova.

Stav. Neka je dat funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, za $x \in A$. Takođe, neka je $g(x)$ ograničena funkcija na A. Tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(x) \cdot f_n(x)$ uniformno konvergira na A.

U sledećem tvrđenju iskazaćemo jednu od najvažnijih osobina uniformno konvergentnih redova.

Stav. Neka je dat funkcionalan red red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, za $x \in A$. Takođe, neka $f_n(x)$, za $x \in A$, neprekidne funkcije, za svako $n \in \mathbb{N}$, i neka je posmatrani red uniformno konvergentan na intervalu A. Tada je i funkcija

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ x \in A,$$

neprekidna na A, gde $S(x)$ predstavlja sumu tog reda.

Kao što smo već rekli, ako neki funkcionalni red nije uniformno konvergentan, a jeste konvergentan, za $x \in A$, tada granična funkcija $S(x)$ ne mora biti neprekidna na A.

INTEGRACIJA UNIFORMNO KONVERGENTNOG FUNKCIONALNOG REDA ČLAN PO ČLAN

U opštem slučaju funkcionalni red koji ne konvergira uniformno ne može integraliti član po član.

Stav. Neka je dat funkcionalan red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, za $x \in A$, koji je uniformno konvergentan na A. Takođe, neka je $x_0 \in (a,b) \subseteq A$ fiksirano, a $x \in (a,b)$ proizvoljno. Tada važi da je:

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_0}^{x} f_n(t) dt \right),$$

gde su funkcije $f_n(t)$ neprekidne na (a,b) za svako $n \in \mathbb{N}$.

Prethodna formula se u literaturi često naziva integracija funkcionalnog reda član po član. Pretpostavka da je red uniformno konvergentan je veoma važna, jer se u opštem slučaju red koji ne konvergira uniformno ne može integraliti član po član. Drugo, iz ove formule vidimo da je funkcija zbira posmatranog funkcionalnog reda integrabilna u smislu određenog integrala. Najzad, funkcionalni red na desnoj strani u ovoj formuli je takođe uniformno konvergentan na skupu A.

PRIMER 2

Integracija uniformno konvergentnog funkcionalnog reda član po član.

Da li se red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2},$$

može integraliti član po član, za svako $x \in \mathbb{R}$?

Rešenje. Potrebno je proveriti da li su uslovi prethodnog stava ispunjeni. Dakle, potrebno je proveriti da li su funkcije $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2}, n \in \mathbb{N}$, neprekidne, za svako $x \in \mathbb{R}$, što je očigledno tačno, kao i da li posmatrani red uniformno konvergira. Kako važi da je

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

i kako je brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergentan red, tada na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma imamo da je posmatrani red uniformno konvergentan. Dakle, polazni red se može integraliti član po član i tada važi

$$\int\limits_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + t^2} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_0^x \frac{1}{n^2 + t^2} dt \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}$$

jer je

$$\int\limits_0^x \frac{1}{n^2 + t^2} dt = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{t}{n} \Big|_0^x = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{x}{n},$$

što se ostavlja studentima da urade za vežbu.

DIFERENCIRANJE UNIFORMNO KONVERGENTNOG FUNKCIONALNOG REDA ČLAN PO ČLAN

Primena ovog stava na određeni funkcionalni red je dozvoljena samo uz ispunjenja navedenih pretpostavki.

Stav. Neka je dat funkcionalan red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ za $x \in A$, i neka on konvergira (obično) za barem jedno $x_0 \in A$. Pretpostavimo još da su funkcije $f_n(x)$ diferencijabilne i $f'_n(x)$ neprekidne, za $x \in A$ i za svako $n \in \mathbb{N}$ i da funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ uniformno konvergira na A. Tada je

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

za svako $x \in A$.

Prethodna formula se u literaturi često naziva diferenciranje reda član po član i bez navedenih pretpostavki u stavu je ne smemo koristiti.

Poglavlje 5

Apsolutna konvergencija funkcionalnog reda

POJAM

Ako se primenom Vajerštrasovog kriterijuma dokaže uniformna konvergencija nekog funkcionalnog reda, tada važi i njegova apsolutna konvergencija.

Osim konvergencije i uniformne konvergencije, kod funkcionalnih redova se uvodi i pojam apsolutne konvergencije.

Definicija. Za red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ za $x \in A$ kažemo da je apsolutno konvergentan u tački $x_0 \in A$, ako je brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x_0)|$ konvergira.

Stav. Funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ za $x \in A$ je apsolutno konvergentan na intervalu $A_1 \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, ako je apsolutno konvergentan u svakoj tački tog intervala.

Napomena. Prilikom ispitivanja apsolutne konvergencije u tački nekog funkcionalnog reda može se desiti da on ne konvergira apsolutno, ali da konvergira uslovno, jer se radi o konvergenciji brojnog reda.

Istakli smo već da iz apsolutne konvergencije sledi konvergencija, ali da obrnuto ne važi. Međutim, apsolutna i uniformna konvergencija ne mogu se porede na ovaj način.

Napomena. Ako se primenom Vajerštrasovog kriterijuma dokaže uniformna konvergencija nekog funkcionalnog reda, tada važi i njegova apsolutna konvergencija. Ovo sledi iz samog dokaza Vajerštrasovog kriterijuma.

PRIMER

Određivanje oblasti konvergencije funkcionalnog reda sa znakopromenljivim članovima.

Odrediti oblast konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^n}{n}.$$

Rešenje. Ovde se vrši određivanje apsolutne konvergencije, jer su članovi reda očigledno znakopromenljivi. Primenićemo Dalamberov kriterijum. Tada imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(2x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-1)^n(2x)^n}{n}}\right| = |2x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |2x|.$$

Na osnovu Dalamberovog kriterijuma, imamo da važi

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \begin{cases} \text{za } D > 1, & \text{posmatrani red divergira,} \\ \text{za } 0 \le D < 1, & \text{posmatrani red konvergira,} \\ \text{za } D = 1, & \text{nemamo odgovor po ovom kriterijumu.} \end{cases}$$

Dakle, ako je $|2x| < 1,$ tj. $|x| < \frac{1}{2}$ posmatrani red konvergira, dok za $|x| > \frac{1}{2}$ divergira. Ostaje jedino još pitanje šta se dešava u slučaju kada je $|2x| = 1,$ tj. kada je $x = \frac{1}{2}$ ili $x = -\frac{1}{2}$ I oni se posebno ispituju.
Za $x = \frac{1}{2}$, početni red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

koji je uslovno konvergentan na osnovu Lajbnivcovog kriterijuma.

Za $x = -\frac{1}{2}$, početni red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

koji je divergentan red (ovo je harmonijski red).

Dakle, oblast konvergencije polaznog reda je $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: konvergencija funkcionalnog reda.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 6

Stepeni redovi

POJAM

Među funkcionalnim redovima najznačajniji su stepeni redovi zbog svojih osobina.

Među funkcionalnim redovima najznačajniji su stepeni i trigonometrijski redovi, a među trigonometrijskim redovima najznačajniji su Furijeovi redovi. Stepene i Furijeove redove, kao i njihovu konvergenciju, ćemo posebno razmatrati. Ovde, najpre, govorimo o stepenim redovima.

Stepeni redovi ili potencijalni redovi imaju sve karakteristike iz opšte teorije funkcionalnih redova i još neke dodatne.

Naime, za funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ za $x \in \mathbb{R}$ kažemo da je potencijalni red ako je

$$f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$$

za $n \in \mathbb{N}$, gde je a_n niz realnih brojeva, a x_0 fiksirana vrednost iz $\mathbb{R}$ i x realna promenljiva.

U našem razmatranju posmatraćemo slučaj $x_0 = 0$, dok se slučaj $x_0 \neq 0$ može svesti na slučaj $x_0 = 0$, uvođenjem smene $x - x_0 = t$, gde je t nova realna promenljiva. Kada je $x_0 = 0$ takve stepene redove nazivamo centrirani stepeni redovi.

Zbog važnosti u primenama, posmatraćemo stepene redove kod kojih je prva vrednost za brojač $n = 0$, tj. posmatraćemo potencijalne redove oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

za $x \in \mathbb{R}$, gde je a_0 dodatni (prvi) član za već postojeći niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tj. imamo niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$. Treba napomenuti da se niz brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ naziva niz koeficijenata posmatranog reda. Za red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ važi sve dosad izneto iz opšte teorije o redovima.

KRITERIJUM ZA KONVERGENCIJU STEPENIH REDOVA

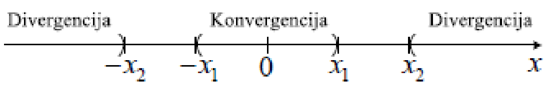
Najpoznatiji kriterijum za utvrđivanje konvergencije stepenih redova je Abelov kriterijum.

Svaki stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira barem za $x=0$, jer se svodi na vrednost a_0. Za ostale vrednosti $x \in \mathbb{R}$ posmatrani stepeni red može konvergirati ili ne (u zavisnosti od slučaja do slučaja). Postoje stepeni redovi koji ne konvergiraju ni za jedno $x \neq 0$.

Najpoznatiji kriterijum za utvrđivanje konvergencije potencijalnih redova je Abelov kriterijum.

Stav. (Abelov kriterijum). Neka je dat stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Ako konvergira za $x_1 \in \mathbb{R}$, tada apsolutno konvergira za svako $x \in (-|x_1|, |x_1|)$. Ako divergira za $x_2 \in \mathbb{R}$, tada divergira za svako $x \in (-\infty, |x_2|) \cup (|x_2|, +\infty)$.

Grafički prikaz prethodnog stava, pod pretpostavkom da je $x_2 > x_1 > 0$, je dat na sledećoj slici.



Slika 6.1 Oblast konvergencije stepenog reda [Izvor: Autor].

Umesto Abelovog stava, u praksi se često koristi njegova posladica.

Stav. Neka je dat stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Tada postoji $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ tako da dati stepeni red apsolutno konvergira na intervalu $(-R, R)$ i divergira na intervalu $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$.

Vrednost R se naziva poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Kada je R jednak $+\infty$, tada posmatrani stepeni red konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$. U slučaju da je $R=0$, posmatrani stepeni red konvergira samo za $x=0$. Prema prethodnom stavu za dati stepeni red razmatra se konvergencije za sve vrednosti $x \in \mathbb{R}$, osim za $x=R$ i $x=-R$. U tim slučajevima moramo dodatno uraditi sledeće: zameniti vrednost $x=R$ u datom stepenom redu i ispitati konvergenciju nastalog brojnog reda, a zatim isto uraditi i za $x=-R$. U slučaju da dati stepeni red konvergira u nekoj od pomenutih vrednosti, tu vrednost pridružujemo ostalim iz oblasti konvergencije tog stepenog reda.

METODOLOGIJE ZA ODREĐIVANJE POLUPREČNIKA KONVERGENCIJE

Poluprečnik konvergencije stepenog reda se određuje uz pomoć Dalmaberovog i Košijevog metoda.

Stav (Dalamberov metod). Neka je dat stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Takođe, neka je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}.$$

Tada je $R = \frac{1}{l}$.

Napomena. Ovaj metod proističe iz Dalamberovog kriterijuma za konvergenciju brojnih redova.

Stav (Košijev metod). Neka je dat stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Takođe, neka je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}.$$

Tada je $R = \frac{1}{l}$.

Napomena. Ovaj metod proističe iz Košijevog korenog kriterijuma za konvergenciju brojnih redova.
Napomena. U slučaju obe metode kada je $l = 0$, uzimamo $R = +\infty$, a kada je $l = +\infty$, uzimamo $R = 0$.

Univerzalan metod za određivanje vrednosti za R je Koši-Ademarov metod i on u sebi kao specijalne slučajeve sadrži prethodna dva stava. U ovom slučaju važi da je

$$l = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

gde se koristi limes superior za određivanje veličine l. Tada je $R = \frac{1}{l}$.

Primećujemo da o konvergenciji stepenog reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ odlučuju samo koeficijenti tog reda.

PRIMERI

Određivanje poluprečnika i oblasti konvergencije stepenog reda.

Primer. Odrediti interval konvergenicije za sledeće stepene redove:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n-1)!} x^n$.

Rešenje. Za prvi red ćemo primeniti Dalamberov metod, pri čemu imamo da je $|a_n| = \dfrac{1}{n+1}$, $|a_{n+1}| = \dfrac{1}{n+2}$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1,$$

pa imamo da je $R = 1$. Dakle, interval konvergencije je $(-1, 1)$. Ostaje da proverimo šta se dešava za $x = 1$ i $x = -1$.

Za $x = 1$ je dobijamo red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ koji je uslovno konvergentan red, po Lajbnicovom kriterijumu.

Za $x = -1$ imamo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ koji je divergentan red, kao harmonijski red. Dakle, interval konvergencije je $(-1, 1]$.

b) Za ovaj red ćemo, takođe, primeniti Dalamberov metod. Kako je $|a_n| = \dfrac{n}{(n-1)!}$, $|a_{n+1}| = \dfrac{n+1}{n!}$, važi da je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n!}}{\frac{n}{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n-1)!}{n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0,$$

pa je i poluprečnik konvergencije $R = +\infty$. Dakle, interval konvergencije je $(-\infty, +\infty)$.

Primer. Za stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(2 - \frac{(-1)^n}{5}\right)^n x^n$ odrediti poluprečnik konvergencije.

Rešenje. U ovom slučaju nije moguće odrediti poluprečnik konvergencije primenom niti Dalamberove, niti Košijeve formule, s obzirom da odgvovarajuće granične vrednosti ne postoje. Međutim, kako je $a_n = \left(2 - \frac{(-1)^n}{5}\right)^n$ primenom Koši-Ademarove formule dobijamo

$$l = \limsup_{n\to\infty} \left(2 - \frac{(-1)^n}{5}\right) = \frac{11}{5},$$

pa je $R = \frac{5}{11}$.

UNIFORMNA KONVERGENCIJA STEPENIH REDOVA

Stepeni red je na proizvoljnom intervalu koji je podskup intervala konvergencije uniformno konvergentan i tada se može integraliti i diferencirati član po član.

Sada ćemo govoriti o uniformnoj konvergenciji za stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gde će R predstavlja poluprečnik (radijus) konvergencije.

Stav. Stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sa poluprečnikom konvergencije R uniformno konvergira na segmentu $[a, b] \subset (-R, R)$, gde su a i b proizvoljni, takvi da važi $a < b$.

Sledeća dva stava imaju veliku praktičnu primenu, a posledica su uniformne konvergencije stepenih redova.

Stav. Ako je R poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, tada je funkcija $S(x)$ koja predstavlja zbir stepenog reda, tj.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

neprekidna funkcija na svakom segmentu $[a, b] \subset (-R, R)$, gde su a i b proizvoljni, takvi da važi $a < b$.

Stav. Ako je R poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, tada ovaj stepeni red na segmentu $[a, b] \subset (-R, R)$, gde su a i b proizvoljni, takvi da važi $a < b$, možemo proizvoljan broj puta integraliti i diferencirati, pri čemu se dobijaju redovi koji imaju poluprečnik konvergencije R.

Napomena. Konvergencija stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i redova koji nastaju njegovom integracijom ili diferenciranjem može da se razlikuje u tačkama $x = \pm R$. Na primer, red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ može da bude divergentan u $x = R$, a red koji se dobija integracijom (ili diferenciranjem) konvergentan i obrnuto.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: diferenciranje stepenog reda član po član.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 7

Tejlorovi redovi

TEJLOROVI KOEFICIJENTI

Maklorenova teorija je specijalni slučaj Tejlorove teorije i tada funkciju koju razvijamo kažemo da je razvijena u centrirani stepeni red.

U mnogim matematičkim disciplinama i tehničkim naukama često je potrebno neku posmatranu funkciju predstaviti jednostavnijim oblikom (recimo polinomom) koji je operativniji za rad.

Neka je data funkcija $y = f(x),\ x \in D(f)$. Ako postoji centrirani stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ čiji je poluprečnik konvergencije $R > 0$, tako da je $(-R, R) \subseteq D_f$ i da je

$$f(x) = S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

za $x \in (-R, R)$, tada za funkciju f kažemo da je analitička funkcija na $(-R, R)$. Klasu svih takvih funkcija na $(-R, R)$, označavamo sa ?$(-R, R)$.

Napomena. Svaka analitička funkcija po definiciji ima osobinu da se može predstaviti (razviti) nekim stepenim redom na domenu konvergencije tog stepenog reda.

Posmatrajmo još klasu beskonačno diferencijabilnih funkcija na $(-R, R)$, u oznaci $C^{\infty}(-R, R)$, za koje postoje izvodi funkcije bilo kog reda u svim tačkama intervala $(-R, R)$.

Stav. Neka je data funkcija $f \in$?$(-R, R)$ i neka je $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ za $x \in (-R, R)$. Tada važi da

1. $f \in C^{\infty}(-R, R)$.

2. $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!},\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Koeficijenti dati prethodnom formulom za posmatranu analitičku funkciju nazivaju se Tejlorovi koeficijenti, i oni da su jedinstveni. Stepeni red koji se kreira preko Tejlorovih koeficijenata naziva se Tejlorov red. Za posmatranu funkciju f on predstavlja jedinstven razvoj. Dakle, u ovom slučaju funkcija f se može razviti u red oblika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

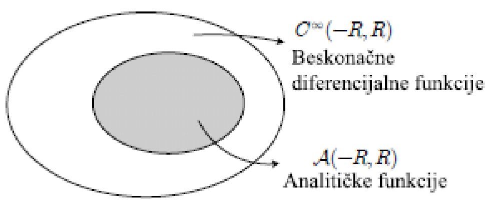
na $(-R, R)$.

Napomena. Činjenice na kojima smo zasnovali razvijanje funkcija date prethodnom formulom nazivamo osnovama Maklorenove teorije. Maklorenova teorija je specijalni slučaj Tejlorove teorije, kada posmatramo centrirani stepeni red i tada za funkciju koju razvijamo kažemo da je razvijena u okolini tačke 0 (nula).

KLASA BESKONAČNO DIFERENCIJABILNIH FUNKCIJA I KLASA ANALITIČKIH FUNKCIJA

Važi da je klasa analitičkih funkcija potklasa klase beskonačno diferencijabilnih funkcija.

U vezi sa prethodnom datim stavom potrebno je istaći da ako je $f \in C^{\infty}(-R, R)$, tada se može dokazati da za funkciju f ne mora da važi $f \in ?(-R, R)$, tj. važi da je $?(-R, R) \subset C^{\infty}(-R, R)$ (videti sliku). Drugim rečima, to znači da Tejlorov red funkcije za koju je $f \in C^{\infty}(-R, R)$, a ne važi $f \in ?(-R, R)$, nije obavezno konvergentan na $(-R, R)$ (osim u tački $x_0 = 0$ u kojoj je sigurno konvergentan). Dakle, u opštem slučaju ne može se svaka ovakva funkcija razviti u odgovarajući Tejlorov red.



Slika 7.1 Klasa analitičkih funkcija je podskup klase beskonačno diferencijabilnih funkcija [Izvor: Autor].

KARAKTERIZACIJA ANALITIČNOSTI BESKONAČNO DIFERENCIJABILNIH FUNKCIJA

Datim stavovima se može proveriti da li je neka beskonačno diferencijabilna funkcija, analitička.

Stav. Neka je data funkcija je $f \in C^{\infty}(-R, R)$, $R > 0$. Tada je $f(x) \in ?(-R, R)$ ako i samo ako je

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right\} = 0$$

za svako $x \in (-R, R)$.

Napomena. Prethodni stav je veoma slab za operativnu upotrebu u zadacima i zato navedimo sledeća dva kriterijuma koji su njegove posledice – oni su dobri alati za rad u zadacima.

Stav. Neka je data funkcija $f \in C^{\infty}(-R,R),\ R>0$ i neka je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ za $x \in (-R,R)$, njome kreiran stepeni red po Tejlorovom principu. Ako postoji niz nenegativan realnih brojeva $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i konstanta $B>0$, tako da je

$$|f^{(n)}(x)| \leq M_n,$$

za $x \in (-R,R),\ n \in \mathbb{N}$, i da je

$$\frac{M_n B^n}{n!} \to 0,\ n \to \infty.$$

tada je $f \in ?(-R,R)$.
Sledeće tvrđenje je pojednostavljenje prethodnog stava i najčešće se koristi kao kriterijum u zadacima (najvažnije za određivanje konvergencije reda i da li je funkcija analitička).

Stav. Neka je data funkcija $f \in C^{\infty}(-R,R),\ R>0$. Ako postoji broj $M>0$, tako da je

$$|f^{(n)}(x)| \leq M,$$

za $x \in (-R,R),\ n \in \mathbb{N}$, tada je $f \in ?(-R,R)$.

Napomena. Prethodnim stavom se daje uslov pod kojim se funkcija $f \in C^{\infty}(-R,R),\ R>0$ može razviti u Tejlorov red na sledeći način $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, za $x \in (-R,R)$.

MAKLORENOV RAZVOJ NEKIH ELEMENTARNIH FUNKCIJA

Ovo su razvoji koji se najčešće koriste u primenama.

1. Za funkciju $f(x) = e^x$ poluprečnik konvergencije je $(-\infty,+\infty)$ i važi da je

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

2. Za funkciju $f(x) = \sin x$ poluprečnik konvergencije je $(-\infty,+\infty)$ i važi da je

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots,$$

3. Za funkciju $f(x) = \cos x$ poluprečnik konvergencije je $(-\infty,+\infty)$ i važi da je

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots,$$

4. Za funkciju $f(x) = \ln(1+x)$ poluprečnik konvergencije je $(-1,1]$ i važi da je

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

5. Za funkciju $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, poluprečnik konvergencije je $(-1,1)$ i važi da je

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

Specijalno, za $\alpha = -1$ imamo da je

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Ako u poslednjem razvoju zamenimo x sa $-x$ on postaje

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

Za oba ova razvoja je poluprečnik konvergencije $(-1,1)$.

TEJLOROV RED

Maklorenov red je samo specijalni slučaj Tejlorove teorije redova.

Opšta Tejlorova teorija redova je potpuno analogna Maklorenovoj teoriji, s tim što se u tom slučaju posmatra stepeni red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Ako je R poluprečnik konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, tada prethodni red konvergira u intervalu (x_0-R, x_0+R). Na analogan način prethodno izloženom, neka funkcija f može se razviti u stepeni red po stepenima $x-x_0$, tj.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

za $x \in (x_0-R, x_0+R)$. Tada za koeficijente ovog razvoja važi $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n = 0,1,2,\ldots$, pa se posmatrana funkcija f može razviti u red

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Izloženo o klasi beskonačno diferencijabilnih i klasi analitičkih funkcija važi i ako se pomatraju Tejlorovi redovi iz prethodne napomene, za koje je $x_0 \neq 0$, samo što se tada posmatraju intervali $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Međutim, ovde ćemo mahom izučavati Maklorenovu teoriju zbog njene primene u nematematičkim problemima, koje ovaj deo matematike modelira.

MAKLORENOV POLINOM

Pitanje konvergencije Tejlorovog reda može se razmatrati primenom Tejlorove polinoma za datu funkciju.

Pitanje konvergencije Tejlorovog reda može se razmatrati primenom Tejlorove polinoma za datu funkciju

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

gde je Tejlorov polinom $n-$ tog reda (u Maklorenovom obliku) dat sa

$$T_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

a ostatak $n-$ tog reda (u Maklorenovom obliku) dat sa:

$$R_n(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \ldots$$

Prethodno znači da mi možemo određenu funkciju f aproksimirati polinomom $T_n(x)$, pri čemu činimo grešku koja je jednaka ostatku $R_n(x)$. Prilikom vršenja aproksimacije određene funkcije Tejlorovim polinom mogu se javiti određeni zahtevi. Na primer, da se funkcija aproksimira polinom tačno određenog stepena i da se za takvu aproksimaciju odredi greška koja je tom prilikom načinjena. U vezi sa ovim od interesa su razni oblici ostatka $R_n(x)$, o kojima student može pogledati 14. predavanje iz MA101. Drugi zahtev može biti da se određena aproksimacija vrši sa unapred zadatom greškom, odnosno postavlja se pitanje do kog stepena Tejlorovog polinoma izvršiti aproksimaciju određene funkcije, a da greška aproksimacije ne bude veća od unapred zadate greške. U ovakvim situacijama često se u zadacima koristi procena $R_n(x) < |a_{n+1}|$.

PRIMER 1. DEO

Primena Maklorenovog razvoja funkcije na određivanje približne vrednosti određenog integrala.

Izračunati vrednost određenog integrala $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$, sa greškom manjom od 10^{-3}.

$\mathbf{Rešenje.}$ Razvijmo, najpre, funkciju e^{-x^2} u red. Poznato je da važi

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!},$$

za $x \in (-\infty, +\infty)$. Tada je

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!},$$

za $x \in (-\infty, +\infty)$. Tada je

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} x^{2k+1}\Big|_0^1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}.$$

Da bismo odredili približnu vrednost datog određenog integrala, sa greškom manjom od 10^{-3} , potrebno je izvršiti razvijanje dobijenog alternativnog reda do određenog člana, tako da postavljena tačnost bude zadovoljena. Postavlja se pitanje koliko prvih članova ovog reda treba uzeti? Poznato je da za ostatak R_k i prvi zanemareni član a_{k+1} nekog konvergentnog alternativnog reda važi $|R_k| < |a_{k+1}|$, za svako $k \in \mathbb{N}$.

U našem slučaju je $|a_k| = \dfrac{1}{(2k+1)k!}$, pa je $|a_{k+1}| = \dfrac{1}{(2k+3)(k+1)!}$, $(k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$. Stoga, treba da odredimo najmanje $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ za koje je zadovoljena nejednakost

$$|a_{k+1}| = \frac{1}{(2k+3)(k+1)!} < 10^{-3}.$$

PRIMER 2. DEO

Određivanje do kog člana treba raviti funkciju u polinom kako bi se postigla željena tačnost.

Na ovaj način smo sigurni da će onaj deo reda koji zanemarujemo tj. ostatak reda biti manji od 10^{-3}, jer važi $|R_k| < |a_{k+1}|$, pa će samim tim i greška koju činimo biti manja od 10^{-3}. Tada imamo

1° Za $k = 0$ je $|a_1| = \frac{1}{3 \cdot 1!} > 0,001$, pa prethodna nejednakost ne važi.

2° Za $k = 1$ je $|a_2| = \frac{1}{5 \cdot 2!} > 0,001$, pa prethodna nejednakost ne važi.

3° Za $k = 2$ je $|a_3| = \frac{1}{7 \cdot 3!} > 0,001$, pa prethodna nejednakost ne važi.

4° Za $k = 3$ je $|a_4| = \frac{1}{9 \cdot 4!} > 0,001$, pa prethodna nejednakost ne važi.

5° Za $k = 4$ je $|a_5| = \frac{1}{11 \cdot 5!} < 0,001$, pa prethodna nejednakost važi.

Dakle, počev od člana a_5 možemo da zanemarimo ostale članove posmatranog reda, pri čemu dobijemo željenu tačnost. Tada je

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}dx &= \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} = \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} = 0,747.\end{aligned}$$

Poglavlje 8

Pokazna vežba

ZADATAK 1 (10 MINUTA)

Ispitivanje konvergencija funkcionalnog reda na $\mathbb{R}$.

Neka je dat funkcionalni red

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n-1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ ...$$

čija je oblast definisanosti $x \in \mathbb{R}$. Ispitati konvergenciju ovog reda na $\mathbb{R}$.

Rešenje. Poznato je da važi

$$-1 \leq \sin(nx+3) \leq 1$$

za svako $x \in \mathbb{R}$, tj.

$$\frac{-1}{\sqrt{n-1}} \leq \frac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

za svako $x \in \mathbb{R}$. Kako je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}} = 0$$

Tada na osnovu Stava o tri niza (Leme o dva policajca) važi da je

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n-1}} = 0$$

za svako $x \in \mathbb{R}$.

Dakle, na čitavom skupu $\mathbb{R}$ posmatrani funkcionalni niz konvergira ka funkciji $f(x) = 0$.

Ispitati konvergenciju funkcionalni niz

$$f_n(x) = nx(1-x)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

na intervalu $x \in [0, 1]$.

Rešenje. Za $x = 0$ i za $x = 1$ važi da je $f_n(0) = f_n(1) = 0$, za svako $n \in \mathbb{N}$, pa posmatrani niz konvergira u tačkama 0 i 1 ka funkciji $f(x) = 0$.

Za $0 < x < 1$ imamo da je $nx(1-x)^n = nxe^{n\ln(1-x)}$. Kako je $\ln(1-x) < 0$, za $0 < x < 1$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} nxe^{n\ln(1-x)} = x \lim_{n \to \infty} ne^{n\ln(1-x)} = 0.$$

(Pokazati za vežbu da ovo važi.)

Dakle, posmatrani funkcionalni niz konvergira na intervalu $[0, 1]$ ka funkciji $f(x) = 0$.

ZADATAK 2 (10 MINUTA)

Primena Vaještrasovog kriterijuma na ispitivanje uniformne konvergencije funkcionalnog reda.

Koristeći Vajerštrasov kriterijum dokazati uniformnu konvergenciju sledećeg reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Rešenje:

Kako je opšti član datog reda

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Za proizvoljno $x \in R$ i $n \in N$ važi

$$\left|f_n(x)\right| = \frac{|\cos nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Kako je red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergentan, na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma sledi da posmatrani red uniformno konvergira na celoj realnoj pravoj R.

Koristeći Vajerštrasov kriterijum dokazati uniformnu konvergenciju sledećeg reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 - 3\sin nx}{n^{3/2}}.$$

Rešenje:

Kako je opšti član datog reda

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{1 - 3\sin nx}{n^{3/2}}$$

za proizvoljno $x \in R$ i $n \in N$ važi

$$\left|f_n(x)\right| = \left|\frac{1 - 3\sin nx}{n^{3/2}}\right| \leq \frac{1 + 3|\sin nx|}{n^{3/2}} \leq \frac{4}{n^{3/2}}.$$

Kako je red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

konvergentan, na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma sledi da posmatrani red uniformno konvergira na celoj realnoj pravoj $\mathbb{R}$.

ZADATAK 3 (10 MINUTA)

Provera da li se neki funkcionalni red može diferencirati član po šlan.

Da li se red $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ može diferencirati član po član za svako x?

Rešenje: Ako su članovi konvergentnog reda $\Sigma\, u_n(x)$ neprekidno diferencijabilne funkcije na intervalu (a, b) i ako red $\Sigma\, u_n'(x)$ ravnomerno konvergira na (a, b) tada je za svako $x \in (a, b)$

$$\left(\Sigma\, u_n(x)\right)' = \Sigma\, u_n'(x)$$

$$u_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2} \Rightarrow \left|u_n(x)\right| = \left|\operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}\right| = \operatorname{arctg} \left|\frac{x}{n^2}\right| = \operatorname{arctg} \frac{|x|}{n^2}$$

$\Sigma \frac{|x|}{n^2} = |x|\, \Sigma\, \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}$ konvergira, sledi da i $\Sigma\, \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ ravnomerno konvergira za svako x.

Dalje, $\Sigma\, \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ konvergira za svako x.

$$u_n'(x) = \frac{n^2}{n^4 + x^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}$$

$\left|\frac{n^2}{n^4 + x^2}\right| = \frac{n^2}{n^4 + x^2} \le \frac{1}{n^2}$ za svako x.

$\Sigma \frac{1}{n^2}$ konvergira, sledi da $\Sigma\, u_n'(x)$ ravnomerno konvergira za svako x.

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ se može diferencirati član po član.

ZADATAK 4 (10 MINUTA)

Provera da li se neki funkcionalni red može integraliti član po šlan.

Da li se red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ može integraliti član po član?

Rešenje:

Ako su članovi reda $\Sigma\, u_n(x)$ neprekidne funkcije i ako red ravnomerno konvergira na konačnom segmentu $[a, b]$ tada je

$$\int_a^b \left(\Sigma\, u_n(x)\right)dx = \Sigma \int_a^b u_n(x)dx.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$$

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2} \quad \text{neprekidna} \quad \text{za} \quad \text{svako} \quad x$$

$$\left|u_n(x)\right| = \frac{1}{n^2+x^2} \le \frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, sledi po Vajerštrasovom kriterijumu da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ ravnomerno konvergira za svako x.

$$\int_0^{x_1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{x_1} \frac{1}{n^2+x^2}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\operatorname{arctg} \frac{x}{n}.$$

ZADATAK 5 (10 MINUTA)

Određivanje intervala konvergencije stepenog reda. To se sprovodi tako što se odredi poluprečnik konvergencije primenom Dalamberovog metoda.

Odrediti interval konvergencije stepenog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}.$$

Rešenje:

Imamo da je

$$a_n = \frac{1}{n2^n} > 0$$

Dalje, računamo količnik

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n2^n}}{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}} = 2\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Poluprečnik konvergencije je

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2.$$

Stoga ovaj stepeni red konvergira na intervalu $(-2, 2)$.

Za $x = 2$ dati red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Navedeni red divergira.

Za $x = -2$ dati red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Navedeni red uslovno konvergira.

Dakle, polazni red konvergira za $-2 \leq x < 2$.

ZADATAK 6 (10 MINUTA)

Određivanje intervala konvergencije stepenog reda. To se sprovodi tako što se odredi poluprečnik konvergencije primenom Košijevog metoda.

Odrediti interval konvergencije stepenog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n^n}.$$

Rešenje:

Imamo da je

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^n}$$

$$|a_n| = \frac{1}{n^n} > 0$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} \to 0, \quad \text{kada} \quad n \to \infty,$$

odakle je

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \infty.$$

Odavde sledi da dati red konvergira za sve vrednosti, pa je njegov interval konvergencije cela realna osa $\mathbb{R}$.

ZADATAK 7 (10 MINUTA)

Razvijanje logaritamske funkcije u Tejlorov red i određivanje intervala u kome ovaj razvoj važi.

Razviti u Tejlorov red funkciju

$f(x) = \ln(3x-2)$

u tački $x_0 = 2$.

Rešenje:

Smenom $u = x - 2$, dobijamo da je

$f(x) = \ln(3x-2)$

$f(u) = \ln\big(3(2+u)-2\big) = \ln(4+3u) = \ln 4\Big(1+\frac{3u}{4}\Big) = \ln 4 + \ln\Big(1+\frac{3u}{4}\Big).$

Kako je $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$, za $-1 < x < 1$

dobijamo da je

$f(u) = \ln 4 + \frac{3u}{4} - \frac{1}{2}\Big(\frac{3u}{4}\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{3u}{4}\Big)^3 - \cdots = \ln 4 + \frac{3(x-2)}{4} - \frac{1}{2}\Big(\frac{3(x-2)}{4}\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{3(x-2)}{4}\Big)^3 - \cdots$

Prethodno važi za $\frac{3|x-2|}{4} < 1$ tj. za $-\frac{4}{3} < x - 2 < \frac{4}{3}$.

ZADATAK 8 (10 MINUTA)

Razvijanje funkcije $f(x) = \operatorname{arctg} x$ u Tejlorov red i određivanje intervala u kome ovaj razvoj važi.

Razviti funkciju $y = \operatorname{arctg} x$ u stepeni red. U kom intervalu važi ovaj razvoj?

Rešenje. Važi da je $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, pa imamo

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k}, \quad \text{za} \quad x \in (-1,1).$$

Dobijeni stepeni red se može integraliti član po član na intervalu $[0,x] \subset (-1,1)$, pa je

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^x (-1)^k x^{2k}\,dx, \quad \text{za} \quad x \in (-1,1),$$

odnosno

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}\big|_0^x}{2k+1}, \quad \text{za} \quad x \in (-1,1).$$

Kako je $\operatorname{arctg} 0 = 0,$ tada je

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1},$$

pri čemu dati razvoj važi za $x \in (-1,1)$.

ZADATAK 9 (10 MINUTA)

Razvijanje funkcije u Maklorenov red.

Razviti u Maklorenov red funkcije

1. $f(x) = \frac{1}{2+3x}$,
2. $g(x) = \frac{x}{x-1}$.

Rešenje:

1. Kako je

$f(x) = \frac{1}{2+3x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{3x}{2}}$,

ako uvedemo smenu $u = \frac{3x}{2}$ i iskoristimo razvoj

$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots \qquad (|u| < 1)$,

dobijamo da je

$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3x}{2} + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 - \cdots\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2^2}x + \frac{3^2}{2^3}x^2 - \cdots$

Prethodni razvoj važi za $|x| < \frac{2}{3}$.

2. $g(x) = \frac{x}{x-1} = -x\frac{1}{1-x} = -x\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right) = -x - x^2 - x^3 - \cdots$

Prethodni razvoj važi za $|x| < 1$.

ZADATAK 10 - 1. DEO (15 MINTA)

Razvijanje racionalne funkcije u Tejlorov red i određivanje intervala u kome ovaj razvoj važi.

Funkciju

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4x+7},$$

razviti po stepenima $x+2$ i odrediti interval konvergencije. Nakon toga, približno odrediti vrednost integrala:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+7},$$

sa greškom manjom od 10^{-2}.

Rešenje. Polaznu funkciju možemo zapisati na sledeći način:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4x+7} = \frac{1}{x^2+4x+4+3} = \frac{1}{(x+2)^2+3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2+1}.$$

Tada je na osnovu $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ za $x\in(-1,1)$ imamo da je u našem slučaju

$$f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2 n$$

U našem slučaju je $a=-2$, pa ja interval konvergencije $(-2-R,-2+R)$, gde je R poluprečnik konvergencije koji ćemo odrediti primenom Košijevog metoda:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

pa je $R=\sqrt{3}$. Dakle, posmatrani red konvergira u intervalu $(-2-\sqrt{3},-1+\sqrt{3})$.

Ostaje još da se proveri šta se dešava u granicama ovog intervala. Za levu i desnu granicu ovog intervala imamo:

$$\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x+2}{3}\right)^{2n} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n,$$

A ovo je divergentan red pa je konačno interval konvergencije $(-2-\sqrt{3},-1+\sqrt{3})$.

ZADATAK 10 - 2. DEO

Integracija dobijenog reda član po član u intervalu konvergencije.

Kako za interval integracije važi da je $[-2,-1]\subset(-2-\sqrt{3},-1+\sqrt{3})$ tada dobijeni dobijeni red možemo integraliti član po član, pa imamo

$$\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+7} = \int\limits_{-2}^{-1} \left[\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}\right]dx = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(\sqrt{3})^{2n}}\int\limits_{-2}^{-1}(x+2)^{2n}dx$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}(2n+1)}(x+2)^{2n+1}\Big|_{-2}^{-1}.$$

Tada, dobijamo da je

$$\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+7} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}(2n+1)}.$$

Za poslednji red imamo da je njegov niz njegovih koeficijenata

$$|a_n| = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}(2n+1)}.$$

Potrebno je odrediti za koje n će važiti

$$\frac{(-1)^n}{3^{n+1}(2n+1)} < 10^{-2}.$$

Proverom zaključujemo da ova nejednakost nije ispunjena za $n=0$ i $n=1$, dok je $n=2$ prva vrednost za koju je

$$|a_n| = \frac{1}{135} < 10^{-2}.$$

Svakako, ovo je ispunjeno i za $n=3,4,\ldots,$ ali nas interesuje prva vrednost za n za koju je to ispunjeno.

Kako imamo da je

$$R_1(x) = 10^{-2}$$

to znači da ćemo napraviti grešku manju od $0,01$ ako sumiramo samo prva člana reda prilikom određivanja vrednosti integrala. Tada je:

$$\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+7} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}(2n+1)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{27} = \frac{8}{27}.$$

ZADATAK 11 - 1. DEO (15 MINUTA)

Određivanje intervala konvergencije za dati stepeni red primenom Dalamberovog metoda.

Dat je red $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}(2k-1)x^{2k-2}$.

a) Odrediti interval konvergencije;

b) Naći sumu reda u konačnom obliku.

Rešenje. a) Imamo da je $a_{k+1}=(-1)^k(2k+1)$ i $a_k=(-1)^{k-1}(2k-1), k\in\mathbb{N}$. Tada je

$$R=\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to+\infty}\frac{2k-1}{2k+1}=1.$$

Za $x=-1$ ili $x=1$ polazni red postaje red $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}(2k-1)$. On je alternativni brojevni red koji divergira, jer mu opšti član ne teži u nulu. Ukupno, red konvergira za $x\in(-1,1)$.

Napomena. Poluprečnik konvergencije se u početnom stepenom redu odnosi na veličinu x^2, ali kako je $R=1$, interval konvergencije se neće promeniti kada se posmatra za veličinu x .

ZADATAK 11 - 2. DEO

Određivanje sume reda u konačnom obliku.

b) Uvedimo oznaku

$$S(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}(2k-1)x^{2k-2}. \tag{*}$$

Dati red se može u intervalu konvergencije integraliti član po član. Tada imamo

$$\begin{aligned}\int_0^x S(x)dx &= \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^x(-1)^{k-1}(2k-1)x^{2k-2}dx=\\ &=\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^x(-1)^{k-1}(2k-1)\frac{x^{2k-1}\big|_0^x}{2k-1}dx=\\ &=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}x^{2k-1}=x-x^3+x^5-x^7+\ldots=\\ &=x(1-x^2+x^4-x^6+\ldots)=\\ &=\frac{x}{1-x^2},\end{aligned}$$

za $x\in(-1,1)$.

Sada je

$$\left(\int_0^x S(x)dx\right)' = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)',$$

tj.

$$S(x) - S(0) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

za $x \in (-1,1)$. Kako iz $(*)$ važi da je $S(0) = 0$, tada je

$$S(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

za $x \in (-1,1)$.

ZADATAK 12 - 1. DEO (15 MINTA)

Određivanje intervala konvergencije za dati stepeni red. Nalaženje sume datog reda diferenciranjem član po član, pri čemu se dati red svodi na gemetrijski red.

Dat je red $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k \cdot 3^k}$.

a) Odrediti interval konvergencije;

b) Naći sumu reda u konačnom obliku;

c) Izračunati $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Rešenje. a) Imamo da je $a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)\cdot 3^{k+1}}$ i $a_k = \frac{1}{k \cdot 3^k}$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$R = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{k\cdot 3^k}}{\dfrac{1}{(k+1)\cdot 3^{k+1}}} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)\cdot 3 \cdot 3^k}{k \cdot 3^k} = 3.$$

Proverimo, posebno, šta se dešava u tačkama $x = 3$ i $x = -3$. Za $x = 3$, polazni red postaje brojevni red $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k}$ koji je divergentan red (harmonijski red). Za $x = -3$, polazni red postaje brojevni red $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ koji je uslovno konvergentan red. Ukupno, red konvergira za $x \in [-3,3)$.

b) Uvedimo oznaku

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k \cdot 3^k}. \tag{*}$$

Tada, dati red možemo diferencirati član po član u intervalu $x \in [-3,3)$ i imamo

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(x^k\right)'}{k \cdot 3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k \cdot x^{k-1}}{k \cdot 3^k} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k.$$

Kako važi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{3}{3-x},$$

imamo da je

$$S'(x) = \frac{1}{3-x},$$

tj.

$$\int_0^x S'(x)dx = \int_0^x \frac{dx}{3-x}.$$

ZADATAK 12 - 2. DEO

Integracijom dobijene konačne sume u intervalu intervalu konvergencija, dobija se funkcija koja predstavlja konačnu sumu polaznog reda.

Konačno je

$$S(x) - S(0) = -\ln(3-x)|_0^x = -\ln(3-x) + \ln 3 = \ln \frac{3}{3-x}.$$

Iz $(*)$ imamo da je $S(0) = 0$, pa je

$$S(x) = \ln \frac{3}{3-x},$$

za $x \in [-3,3)$.

c) Stavljajući u polazni red i njegovu sumu da je $x = -3$, dobijamo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \ln \frac{3}{3-(-3)} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2.$$

Tada je

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$$

Poglavlje 9

Zadaci za samostalni rad

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba da provežbaju.

Zadatak 1. Koristeći Vajerštrasov kriterijum dokazati uniformnu konvergenciju sledećeg reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}.$$

Zadatak 2. Koristeći Vajerštrasov kriterijum dokazati uniformnu konvergenciju sledećeg reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}, \qquad x \in [-1, 1].$$

Zadatak 3. Odrediti poluprečnik konvergencije stepenog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n.$$

Rezultat: $R = 0$

Zadatak 4. Odrediti poluprečnik konvergencije stepenog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Rezultat: $R = +\infty$

Zadatak 5. Razviti u Tejlorov red funkciju

$f(x) = \ln(4x - 3)$

u tački $x_0 = 1$.

Rezultat: $f(x) = 4(x-1) - \frac{(4(x-1))^2}{2} + \frac{(4(x-1))^3}{3} - \cdots \qquad \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}.$

Zadatak 6. Razviti u Maklorenov red funkciju

$f(x) = \frac{x}{1 + x^3}.$

Rezultat: $f(x) = x - x^4 + x^7 - \cdots \qquad |x| < 1.$

Vreme izrade: 1. 10 minuta; 2. 10 minuta; 3. 10 minuta; 4. 10 minuta; 5. 10 minuta; 6. 10 minuta;

Zaključak za lekciju 09

FUNKCIONALNI REDOVI

Funkcionalni red, apsolutna konvergencija, uslovna konvergencija, uniformna konvergencija, divergencija, stepeni red, radijus konvergencije, razvoj funkcije u red.

U ovoj lekciji smo se upoznali sa redovima čiji su članovi funkcije koje se definisane na određenom, zajedničkom domenu. Takvi redovi se nazivaju funkcionalni redovi. Pojam konvergencije se kod ovih redova proširuje pojmom uniformne konvergencije, pored već postojećih konvergencija koje smo izučili kod brojnih redova, a to su obična, apsolutna i uslovna konvergencija. Takođe, uveden je i pojam oblast (ili interval) konvergencije.

Uniformna konvergencija je veoma bitna osobina u teoriji funkcionalnih redova, jer na redove koji je poseduju na određenom intervalu konvergencije je moguće primenjivati određene transfomacije, kao što su diferencijaranje ili integraljenje član po član unutar intervala konvergencije, što je bitno u primenama teorije redova, kako u drugim matematičkim disciplinama, tako i u tehničkim naukama. Takođe, izložena je jedna veoma značajna klasa funkcionalnih redova, a to je klasa stepenih redova i u vezi sa njenom konvergencijom uveden je pojam poluprečnik (ili radijus) konvergencije.

Na kraju ove lekcije je izložena metodologija kako je moguće i pod kojim uslovima određenu funkciju razviti u red (tzv. Tejlorov red), a na primeru je pokazana jedna od primena ovakvih razvoja. Naime, moguće je primenom ove teorije približno određivati vrednosti određenih integrala. Ovo je bitno kada je posmatrani integral težak za integraciju ili kada podintegralna funkcija nema primitivnu funkciju, pa je nemoguće primeniti Njutn – Lajbnicovu formulu.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. Rale Nikolić, Nada Damljanović, Matematika 2 – zbirka zadataka, Fakultet tehničkih nauka, Čačak, 2016. godina
4. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.

UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Furijeovi redovi

Lekcija 12

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 12

FURIJEOVI REDOVI

Uvod

UVOD

Furijevi redovi

Kao što smo videli iz prethodne dve lekcije, osnovna primena Teorije redova je u tome da se njima može približno izraziti neka funkcija odgovarajućim polinom, ili približno izračunati neka vrednosti uz kontrolu greške koju pritom činimo.

Ideja francuskog matematičara Furijea je bila da polazeći od funkcija $f(x)=\sin nx$, $n=1,2,3,\ldots$ koje su neparne funkcije (tj. $\sin(-nx)=-\sin nx$, $n=1,2,3,\ldots$), periodične funkcije (tj. $\sin(nx+2\pi)=\sin nx$, $n=1,2,3,\ldots$) i za koje važi $\sin n\pi=\sin 0\pi=0$, posmatramo beskonačnu sumu njihovih linearnih kombinacija

$$b_1\sin x+b_2\sin 2x+\ldots b_n\sin nx+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx.$$

On je dokazao da, pod određenim uslovima za koeficijente $b_n, n=1,2,3,\ldots$, prethodna beskonačna suma ima konačni zapis u obliku funkcije $S(x)$. Štaviše, za ovu funkciju će, takođe, važiti da je $S(-x)=S(x)$, $S(x+2\pi)=S(x)$ i $S(0)=S(\pi)=0$. To dalje znači da se bilo koja funkcija koja ima prethodno pomenute tri osobine može razviti u red po sinusnim funkcijama. Ovaj rezultat je izazvao veliko interesovanje, tako da je ova oblast intenzivno izučavana poslednjih 200 godina. Danas, Furijeovi redovi predstavljaju beskonačne sume linearnih kombinacija po kosinusnim i sinusnim funkcijama i zbog toga se nazivaju trigonometrijskim redovi. Šire gledano, oni spadaju u funkcionalne redove. Trigonometrijski redovi predstavljaju izuzetno važan pojam u matematici i tehničkim naukama i glavni su objekti čuvene Furijeove analize. Za njih važi sve izneto iz opšte teorije funkcionalnih redova, kao i neki specifičnosti koje ćemo u ovoj lekciji razmatrati.

Glavni deo razmatranja u ovoj lekciji biće posvećen funkcijama koje su sa osnovnom periodom 2π. Neka manja razmatranja daćemo i za funkcije sa drugačijom osnovnom periodom.

Na kraju ove lekcije ćemo se upoznati sa Furijeovom transformacijom koja predstavlja uopštenje – granični slučaj Furijeovih redova, kao i sa inverznom Furijeovom transformacijom koja predstavlja uopštenje Furijeovih koeficijenata.

Kroz celu ovu lekciju će se provlačiti pojmovi periodičnost funkcije, kao i pojam ortogonalnost funkcija. Najpre, ćemo se podsetiti pojma periodičnosti funkcije (sa kojim ste se susretali u dosadašnjem školovanju), a onda uvesti i pojam ortogonalnih funkcija.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Periodične funkcije

POJAM

Trigonometrijski redovi su poseban oblik funkcionalnih redova.

Mnogi procesi u prirodi su periodičnog karaktera i opisuju se periodičnim funkcijama. Na primer, postoje procesi koji se u pravilnim vremenskim razmacima ponavljaju.

Definicija. Neka je data funkcija $y = f(x)$, za $x \in D_f$, gde je D_f domen date funkcije. Za f kažemo da je periodična funkcija ako postoji $T > 0$, tako da je

$$f(x+T) = f(x-T) = f(x),$$

za svako $x \in D_f$. Primećujemo da domen D_f kod periodične funkcije ne može biti ograničen ni odozdo, niti odozgo.

Veličina T iz prethodne definicije se naziva perioda funkcije f. Ako je T perioda funkcije, tada je i nT, $n \in \mathbb{Z}$ takođe perioda te funkcije. Takođe, ako su T_1 i T_2 periode posmtrane funkcije i ako su $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$,tada važi da je perioda posmtrane funkcije $k_1 \cdot T_1 + k_2 \cdot T_2$.Prema tome, svaka periodična funkciju ima beskonačno mnogo perioda.
Prirodno se postavlja sledeće pitanje: da li svaka periodična funkcija ima najmanju pozitivnu periodu? Odgovor je u opštem slučaju negativan. O tome pod kojim uslovom neka periodična funkcija ima najmanju periodu govori naredni stav.

Stav. Ako je neprekidna periodična funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ različita od konstantne funkcije, tada ona ima najmanju periodu.

Najmanja pozitivna perioda neke funkcije naziva se osnovna perioda funkcije f, u oznaci T_0 i definiše se na sledeći način

$$T_0 = \inf\{T \mid T \text{ je perioda od } f\}.$$

Stav. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodična sa osnovnom periodom T_0. Ako je funkcija f integrabilna u svojstvenom ili nesvojstvenom smislu na segmentu $[0, T_0]$, tada je ona integrabilna na svakom konačnom segmentu realne prave. Pri tome važi

$$\int_a^{a+T_0} f(x)dx = \int_0^{T_0} f(x)dx,$$

za svako $a \in \mathbb{R}$.

PRIMERI

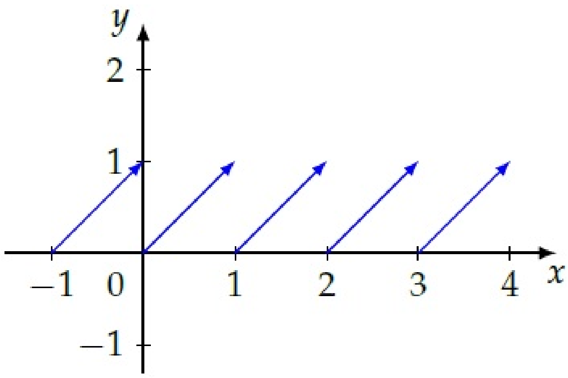
Primeri periodičnih funkcija.

Trigonometrijske funkcije $f(x) = \sin x$ i $f(x) = \cos x$ su periodične s osnovnom preiodom $T_0 = 2\pi$.

Funkciju, u oznaci $\{x\}$, nazivamo razlomljeni deo realnog broja $x = n + z$, gde je $n \in \mathbb{Z}, 0 \leq z < 1,$ pri čemu važi $\{x\} = z$. Važi da je $\{n\} = 0$, za $n \in \mathbb{Z}$. Primenjujući funkciju ceo deo na realni broj x, u oznaci $\lfloor x \rfloor$, pri čemu je $\lfloor x \rfloor = n, n \in \mathbb{Z}$ možemo definisati razlomljeni deo realnog broja x na sledeći način

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor,$$

svako $x \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$. Na narednoj slici je dat njen grafik, odakle vidimo da je ova funkcija periodična. Kako važi da je $\{x+1\} = \{x\}$ i ne postoji manji realan broj za koji ovo važi, zaključujemo da je broj 1 osnovna perioda funkcije razlomljeni deo.



Slika 1.1 Funkcija razlomljeni deo [Izvor: Autor].

Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

se naziva Dirihleova funkcija.

Primetimo da je ova funkcija periodična, jer za svaki racionalan broj q važi da je $f(x+q) = f(x)$, bilo da je x racionalan broj (jer je zbir dva racionalna opet racionalan broj), bilo da je x iracionalan broj (jer je zbir iracionalnog i racionalnog broja iracionalan broj). Međutim, ne postoji najmanji pozitivan racionalan broj q za koji važi $f(x+q) = f(x)$, tako da Dirihleova funkcija nema osnovnu periodu.

Poglavlje 2

Ortogonalnost funkcija

POJAM

Ortogonalnost funkcija je bitan pojam prilikom definisana Furijeovih redova.

Sada ćemo uvesti pojam ortogonalnost funkcija.

Posmatrajmo funkcije $y = f(x)$ i $y = g(x)$, za $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$. Za funkcije f i g kažemo da su međusobno ortogonalne ako su one neprekidne funkcije na $[a, b]$ i ako važi:

$$1. \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = 0,$$

$$2. \int_a^b f^2(x) \neq 0 \text{ i } \int_a^b g^2(x) \neq 0.$$

Posmatrajmo niz funkcija $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, za $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$. Za taj niz kažemo da čini sistem međusobno ortogonalnih funkcija ako je:

$$1. \int_a^b f_i(x) \cdot f_j(x) dx = 0, \text{ za } i \neq j, \; i, j \in \mathbb{N},$$

$$2. \int_a^b f_i^2(x) \neq 0, \quad \text{za svako } i \in \mathbb{N}.$$

SISTEM ORTOGONALNIH FUNKCIJA. PRIMER

Sistem funkcija $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$, je sistem ortogonalnih funkcija na svakom intervalu dužine 2π.

Sistem ortogonalnih funkcija na nekom intervalu, jeste skup linearno nezavisnih funkcija kod koga su svake dve funkcije tog sistema ortogonalne na posmatranom intervalu.

Primer. Istorijski gledano, prvi i najvažniji ortogonalni sistem funkcija je sistem $1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,$ ..., za $x \in [-\pi, \pi]$. Da je on zaista ortogonalan važi iz sledećeg

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]\, dx =$$
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right] \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

za $m \neq n$. Slično, može se pokazati da važi

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \quad \text{i} \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0,$$

za $m \neq n$.

Može se pokazati da je sistem funkcija $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots,$ ortogonalan i na intervalu $x \in [0, 2\pi]$ ili još opštije on je ortogonalan na svakom intervalu dužine 2π.

Dalje, ako svaku od funkcija $\cos x$, $\sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,$ ..., za $x \in [-\pi, \pi]$, rastegnemo ili sabijemo duž x -ose sa koeficijentom $\dfrac{l}{\pi},\ l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dobijamo sistem funkcija

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \ldots,$$

za $x \in [-l, l]$, koji je na ovom intervalu ortogonalan.

Osobinu ortogonalnosti imaju mnogi sistemi funkcija, ali o tome ovde neće biti reči.

Napomena. Od bilo kog sistema linearno nezavisnih funkcija, može se konstruisati sistem ortogonalnih funkcija koji zadovoljava prethodno date uslove $1.$ i $2.$ Taj postupak se naziva ortogonalizacija sistema funkcija.

REDOVI ORTOGONALNIH FUNKCIJA

Uslovi pod kojima je moguće određenu funkciju razviti u red po ortogonalnim funkcijama.

Neka je dati sistem funkcija

$$g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots$$

ortogonalan na intervalu $x \in (a, b)$. Može se postavi pitanje da li se proizvoljna funkcija $f(x)$ može razviti u red na zadatom intervalu po prethodno datim funkcijama, tj. razviti u konvergentan red oblika

$$f(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \ldots + a_n g_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x),$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ realni ili kompleksni brojevi. Tada se postavljaju i dva dodatna pitanja, da li je moguće svaku funkciju $f(x)$ razviti na ovaj način i kako odrediti koeficijente $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$,tako da ovaj razvoj važi. Radi jednostavnosti izlaganja pretpostavimo da je interval (a, b) konačan (tj. $a, b \in \mathbb{R}, a < b$) i da su sve posmatrane funkcije konačne na njemu.

Ako je prethodni razvoj moguć za svaku funkciju $f(x)$, tada se sistem $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots$ naziva potpun sistem. Može se dokazati da je svaki ortogonalni sistem funkcija potpun sistem.

Nalaženje koeficijenata $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$se obavlja tako što izraz

$$f(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \ldots + a_n g_n(x) + \ldots$$

pomnoži sa $g_n(x)$ (pod pretpostavkom da je $g_n(x) \neq 0$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$). Tada integraljenjem dobijene jednačine na intervalu (a, b) dobijamo da je

$$\int_a^b f(x) g_n(x) dx = a_1 \int_a^b g_1(x) g_n(x) dx + a_2 \int_a^b g_2(x) g_n(x) dx + \ldots + a_n \int_a^b g_n(x) g_n(x) dx + \ldots =$$
$$= a_n \int_a^b g_n(x) g_n(x) dx,$$

zbog ortogonalnosti funkcija $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots$ Tada imamo da je

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x) g_n(x) dx}{\int_a^b g_n(x) g_n(x) dx}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Poglavlje 3

Furijeov red periodične funkcije sa periodom 2π

TRIGONOMETRIJSKI REDOVI

Razvoj funkcije u trigonometrijski red.

Posmatrajmo ponovo sistem funkcija $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ za $x \in [-\pi, \pi]$. Proizvoljnu konačnu funkciju $f(x)$ definisanu na intervalu $[-\pi, \pi]$ možemo da razvijemo u red oblika

$$f(x) = a_1 + a_2 \cos x + a_3 \sin x + a_4 \cos 2x + a_3 \sin 2x + \ldots$$

Kako bismo olakšali rad, promenićemo oznake koeficijentima u prethodnom razvoj i predstaviti ih na sledeći način

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \end{aligned}$$

Ove koeficijente određujemo na sledeći način

$$a_n = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \; n = 1, 2, 3, \ldots,$$

gde je

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi.$$

Neka red

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

konvergira u nekoj oblasti $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ i označimo njegovu sumu sa $S(x)$, za $x \in A$. Pošto je $S(x)$, $x \in A$, zbirna funkcija ovog reda, ona mora takođe biti 2π -periodična (jer su takvi svi sabirci u datom trigonometrijskom redu). Odnosno, mora da važi $S(x+2\pi) = S(x-2\pi) = S(x)$, za $x \in A$, pa skup A ne može biti ograničen skup (niti odozgo, niti odozdo) u $\mathbb{R}$. Kažemo da se neka funkcija $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ može razviti u trigonometrijski red, ako postoji red prethodno datog oblika koji konvergira na celoj realnoj osi $\mathbb{R}$ i čiji je zbir jednak datoj funkciji $f(x)$.

Stav. Ako su brojni redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konvergentni, tada je trigonometrijski red

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

apsolutno i uniformno konvergentan funkcionalni red, za svako $x \in \mathbb{R}$.

FURIJEOV RED PERIODIČNE FUNKCIJE SA PERIODOM 2π

Za 2π -periodičnu funkciju dat je postupak kako se ona može razviti u trigonometrijski red.

Stav. Neka je data 2π -periodična funkcija $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Takođe, neka je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

za svako $x \in \mathbb{R}$ i neke realni brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ i $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ Takođe, pretpostavimo da trigonometrijski red iz datog razvoja uniformno konvergira za $[-\pi, \pi]$. Tada je

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \; n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, ako posmatramo funkciju $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, koja je 2π -periodična i neprekidna funkcija na intervalu $[-\pi, \pi]$, za koju važi da je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

tada se trigometrijski red, dat na desnoj strani prethodne formule, naziva Furijeov red funkcije $f(x)$. Koeficijenti a_n $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ i b_n $(n \in \mathbb{N})$ koji se jednoznačno određuju formulama datim u prethodnom stavu, tako da ovaj razvoj važi, nazivaju se Furijeovi koeficijenti .

Furijeova konstrukcija za određivanje koeficijenata $a_n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $b_n,\ n \in \mathbb{N}$ iz prethodnog stava jedino ima smisla za formiranje odgovarajućeg trigonometrijskog reda (Furijeovog reda) ako želimo da razmatramo pitanje razvoja polazne funkcije f u taj trigonometrijski red.

Za egzistenciju Furijeovih koeficijenata određenih datim formulama dovoljno je da funkcija f bude apsolutno integrabilna na segmentu $[-\pi, \pi]$. Pri tome se za svaku apsolutno integrabilnu funkciju smatra da je integrabilna u svojstvenom smislu na svakom konačnom intervalu koji ne sadrži tačke u odnosu na koje je taj integral nesvojstven.

ŽORDAN-DIRIHLEOV KRITERIJUM

Za razvoj 2π -periodične funkcije $y = f(x)$ u Furijeov red, ne postoji potreban i dovoljan uslov (oblika ako i samo ako), već mnogo uporedivih (i neuporedivih) potrebnih uslova.

Ako za polaznu funkciju kreiramo njoj odgovarajući Furijeov red, postavlja se pitanje da li se taj trigonometrijski red mora poklopiti sa polaznom funkcijom za svako $x \in \mathbb{R}$, ili ne, tj. da li će važiti $S(x) = f(x)$, za svako $x \in \mathbb{R}$. Odgovor na ovo pitanje ne mora biti potvrdan bez dodatnih uslova.

Za pitanje razvoja 2π -periodične funkcije f u odgovarajući Furijeov red na skupu $\mathbb{R}$, ne postoji potreban i dovoljan uslov (oblika ako i samo ako), već mnogo uporedivih (i neuporedivih) potrebnih uslova. U daljem razmatranju navešćemo jedan od njih.

Za funkciju $y = f(x)$ kažemo da je deo po deo monotona na intervalu $[-\pi, \pi]$ ako postoji konačan broj tačaka $x_0, x_1, \dots, x_n, n \in \mathbb{N}$, takvih da je

$$-\pi = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \pi,$$

pri čemu je funkcija f monotona, tj. nerastuća ili neopadajuća na intervalima $[x_i, x_{i+1})$, za $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Stav (Žordan-Dirihleov kriterijum). Neka je data 2π -periodična funkcija $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, i neka je deo po deo monotona i ograničena na $[-\pi, \pi]$. Tada njen Furijeov red konvergira u svakoj tački tog integrala. Zbir odgovarajućeg Furijeovog reda

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ispunjava sledeće uslove:

1. ako je funkcija f neprekidna u tački $x \in (-\pi, \pi)$, tada je $f(x) = S(x)$;

2. ako funkcija f ima prekid prve vrste u tački $x_0 \in (-\pi, \pi)$, tada je

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0+} f(x) + \lim_{x \to x_0-} f(x)\right);$$

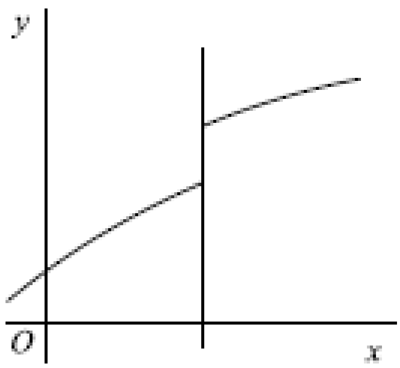
3. važi da je

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\pi_+} f(x) + \lim_{x\to\pi_-} f(x)\right).$$

BITNE NAPOMENE

Prethodni stav predstavlja osnovni alat za rešavanje zadataka – naročito primena dela tvrđenja pod 1.

Uslov iskorišćen u prethodnom stavu (da je funkcija $y = f(x)$ deo po deo monotona funkcija) je specijalan slučaj uslova ograničene varijacije posmatrane funkcije. Posmatrani uslov (deo po deo monotona funkcija) nam ukazuje na to da posmatranu funkciju možemo integraliti u formulama za određivanje koeficijenata $a_n (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ i $b_n (n \in \mathbb{N})$ i ukazuje na to da funkcija može imati samo prekide prve vrste (videti sliku).



Slika 3.1 Primer funkcije koja ima prekid prve vrste [Izvor: Autor].

Žordan-Dirihleov kriterijum ništa ne govori o funkciji $y = f(x)$ van segmenta $[-\pi, \pi]$, tj. ona ne mora biti $2\pi -$ periodična funkcija, čak ne mora biti ni definisana van ovog intervala. Govorili smo već tome da se u ovom slučaju može napraviti ekstenzija funkcije $f(x)$ tako da postane $2\pi -$ periodična funkcija. Ako funkciju $f(x)$ periodično produžimo tako da ona postane $2\pi -$ periodična, Žordan-Dirihleov kriterijum tada važi za svako $x \in \mathbb{R}$. Da bi produženje bilo jednoznačno, funkcija $f(x)$ se najčešće ne zadaje na segmentu $[-\pi, \pi]$, nego na intervalima $(-\pi, \pi]$, $[-\pi, \pi)$, ili $(-\pi, \pi)$, tim pre što u opštem slučaju važi $F(\pi) \neq f(-\pi)$. Žordan-Dirihleov kriterijum može se analogno sprovesti za bilo koju $l -$ periodičnu funkciju $(l > 0)$, o čemu ćemo govoriti kasnije.

FURIJEOV RAZVOJ PARNIH I NEPARNIH 2π - PERIODIČNIH FUNKCIJA

Specijalni slučajevi za određivanje koeficijenata u Furijeovom razvoju se dešavaju kada je posmatrana funkcija parna ili neparna.

Specijalni slučajevi prethodno navedenih formula za određivanje koeficijenata $a_n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $b_n,\ n \in \mathbb{N}$, prilikom razvoja neke funkcije u Furijeov red na segmentu $[-\pi, \pi]$ nastaju kada je $f(x)$ parna, odnosno neparna funkcija.

Neka je $f(x)$ parna funkcija na segmentu $[-\pi, \pi]$ i neka zadovoljava Žordan-Dirihleov kriterijum. Tada je funkcija $f(x) \cdot \cos nx$ parna, a $f(x) \cdot \sin nx$ neparna, pa imamo da važi

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx,\ a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx,\ b_n = 0,\ n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je razvoj parne funkcije $f(x)$ u Furijeov red je oblika

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

gde se koeficijenti a_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, određuju po prethodno datim formulama. Ovakav red se naziva Furijeov kosinusni red.

Neka je, sada, $f(x)$ neparna funkcija na segmentu $[-\pi, \pi]$ i neka zadovoljava Žordan-Dirihleov kriterijum. Tada je funkcija $f(x) \cdot \cos nx$ neparna, a $f(x) \cdot \sin nx$ parna, pa imamo da važi

$$a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx,\ n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je razvoj neparne funkcije $f(x)$ u Furijeov red je oblika

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

gde se koeficijenti b_n $(n \in \mathbb{N})$, određuju po prethodno datim formulama. Ovakav red se naziva Furijeov sinusni red.

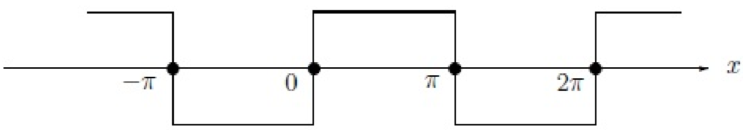
PRIMER

Primena Furijeovog sinusnog reda.

Jedan od najvažnijih primena Furijeov sinusnog reda, jeste razvoj funkcije

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = -\pi \vee x = 0 \vee x = \pi. \end{cases}$$

u njega. Ova funkcija se naziva " neparni kvadratni talas " (odd square wave) i njen grafik je prikazan na sledećoj slici.



Slika 3.2 Neparni kvadratni talas [Izvor: Autor].

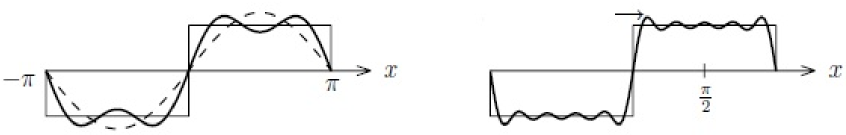
Odredimo koeficijente b_n, $n \in \mathbb{N}$ za razvoj funkcije f u Furijeov sinusni red. Tada je

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{\cos nx}{n}\Big)\Big|_0^{\pi} =$$
$$= \frac{2}{n\pi}(-\cos n\pi + 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ \frac{4}{(2k-1)\pi}, & n = 2k-1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Tada dobijamo da je

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} + \dots\right)$$

Kao što smo ranije govorili, što uzimamo više članova reda iz dobijene sume, time je aproksimacija sve tačnija i tačnija, što je prikazano na narednoj slici. Na slici levo isprekidanom linijom je aproksimirana funkcija f izrazom $\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin x}{1}$, dok je punom linijom predstavljena njena aproksimacija sa $\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3}\right)$. Na datoj slici desno, aproksimacija je izvršena izrazom $\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9}\right)$.



Slika 3.3 Aproksimacija funkcije Furijeovim redom [Izvor: Autor].

U vezi sa aproksimaranjem prekidnih funkcija (tačnije rečeno onih koje imaju prekid prvog reda) Furijeovim redom, javlja se tzv. Gibsov fenomen. On se javlja u okolini tačke u kojoj funkcija ima prekid, u smislu da aproksimacija ima najveće odstupanje u okolini te tačke u odnosu na posmatranu funkciju. To odstupanje nekada može biti značajno, čak i kada se aproksimacija vrši većim brojem članova u parcijanoj sumi. Na datoj slici desno na Gibsov fenomen je ukazano strelicom.

Poglavlje 4

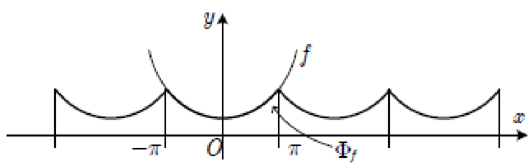
Furijeov razvoj drugih tipova funkcija

RAZVOJ FUNKCIJE KOJA NIJE 2π PERIODIČNA FUNKCIJA

2π -periodična ekstenzija funkcije f sa intervala $[-\pi, \pi)$ na skup $\mathbb{R}$.

Pretpostavimo sada da je data funkcija $y = f(x)$, $x \in R$, koja nije 2π -periodična. Za takvu funkciju ne može se sprovesti Furijeova konstrukcija direktno, ali se može uraditi sledeće: za funkciju f na intervalu $[-\pi, \pi)$ se formira funkcija $\Phi_f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tako da je $\Phi_f(x) = f(x)$ za $x \in [-\pi, \pi)$ i da je $\Phi_f(x)$ za $x \in \mathbb{R}$, 2π -periodična funkcija (videti sliku). Funkcija $\Phi_f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, naziva se " 2π -periodična ekstenzija funkcije f sa intervala $[-\pi, \pi)$ ".

Za ovakvu ekstenziju možemo sprovesti kompletnu Furijeovu konstrukciju. Ako iz ove konstrukcije dobijemo razvoja funkcije $\Phi_f(x)$ preko Furijeovog reda, to će biti razvoj i za funkciju f u intervalu $[-\pi, \pi)$.



Slika 4.1 2π -periodična ekstenzija funkcije f sa intervala $[-\pi, \pi)$ na skup $\mathbb{R}$ [Izvor: Autor].

RAZVOJ U FURIJEOV RED FUNKCIJE NA INTERVALU $[0, \pi]$

Parno i neparno produženje funkcije.

Neka je data ograničena deo po deo monotona funkcija $f(x)$ na intervalu $[0, \pi]$ Ako ovu funkciju na izvestan način možemo produžiti na interval $[-\pi, 0]$ tako da na njemu funkcija $f(x)$ bude, takođe, ograničena deo po deo monotona, tada je nju na intervalu $[-\pi, \pi]$ razviti u Furijeov red. Videli smo da je Furijeov razvoj neke funkcije kosinusni, ako je ta funkcija parna, a sinusni ako je ona neparna na segmentu $[-\pi, \pi]$. Zato bi trebalo produženje funkcije $f(x)$ na intervalu $[-\pi, 0)$ vršiti tako da novodobijena funkcija bude parna, odnosno neparna.

Parno produženje funkcije $f(x)$ je funkcija

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\pi],\\ f(-x), & x\in[-\pi,0).\end{cases}$$

i tako dobijena funkcija zadovoljava sve uslove Žordan-Dirihleovog kriterijuma, a odgovarajući Furijeov red će sadržati samo kosinuse.

Neparno produženje funkcije $f(x)$ je funkcija

$$f_2(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\pi],\\ -f(-x), & x\in[-\pi,0).\end{cases}$$

Ovako dobijena funkcija zadovoljava sve uslove Žordan-Dirihleovog kriterijuma, a odgovarajući Furijeov red će sadržati samo sinuse.

FURIJEOV RED FUNKCIJE NA INTERVALU $[0,l]$, $l>0$

Moguće je funkciju koja je periodična, sa nekom periodom $2l$, razviti u Furijeov red.

Pretpostavimo da je funkcija $f(x)$ periodična funkcija sa periodom $2l$ $(l>0)$. Da bismo ovu funkciju razvili u Furijeov red na intervalu $[-l,l]$, izvršićemo smenu promenljive tako da je $x=\dfrac{lt}{\pi}$. Tada je funkcija $F(t)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ periodična po promenljivoj t i njena perioda je je jednaka 2π. Naime, imamo da je

$$F(t+2\pi)=f\left(\frac{l}{\pi}(t+2\pi)\right)=f\left(\frac{lt}{\pi}+2l\right)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=F(t).$$

Stoga, funkcija $F(t)$ se pod uslovima Žordan-Dirihleovog kriterijuma može razviti u Furijeov red na interval $[-\pi,\pi]$. Tada je

$$F(t)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

pri ovome važi da je

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos nt dt,\ n=0,1,2,3,\dots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\sin nt dt,\ n=1,2,3,\dots$$

Ako vratimo promenljivu x, tj. izrazimo t iz date smene, imamo $t=\frac{\pi x}{l}$, tj. $dt=\frac{\pi dx}{l}$, pa ukupno dobijamo da je

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}) \qquad (*)$$

gde se Furijeovi koeficijenti računaju po formulama

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 0,1,2,3,\dots \qquad (**)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 1,2,3,\dots \qquad (***)$$

Napomena. U ovom slučaju se, zapravo, koristi ortogonalni sistem funkcija $1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l}$, ..., prilikom kreiranja trigonometrijskog reda.

Napomena. U ovom slučaju se može desiti da posmatrana funkcija $2l$ -periodična bude parna ili neparna funkcija, pa se mogu konstruisati Furijeovi koeficijenti za takve slučajeve, na potpuno analogan način kao što smo to uradili za 2π -periodične funkcije.

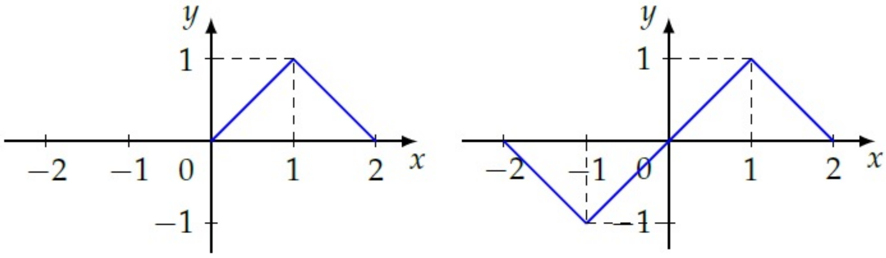
PRIMER

Furijeov red funkcije proizvoljne periode koja ima neparano produženje.

Razviti u sinusni red funkciju, definisanu sa

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 2-x, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Rešenje. Grafik ove funkcije je na slici dat s leve strane. Primetimo da data funkcija ima neparno produženje na intervalu $[-2,0]$ što je prikazano na datoj slici s desne strane. U ovom slučaju je $l = 2$.



Slika 4.2 Funkcija f i njeno neparno produženje [Izvor: Autor].

Datu funkciju možemo, svakako, sada da produžimo na celu brojevnu osu sa osnovnom periodom $2l$, tj. 4. Koristimo formule (**) i (***) za izračunavanje Furijeovih koeficijenata, u slučaju kada je $l = 2$. S obzirom da se radi o neparnom produženju polazne funkcije, dobijamo da je $a_k = 0$, za $k = 0,1,2,\dots$ i

$$b_k = \int_0^1 x \sin \frac{k\pi x}{2}\, dx + \int_1^2 (2-x) \sin \frac{k\pi x}{2}\, dx, k \in \mathbb{N}.$$

U ove integrale, ćemo najpre uvesti smenu $\frac{\pi x}{2} = t$, odakle je $x = \frac{2t}{\pi}$, tj. $dx = \frac{2}{\pi} dt$. Iz smene imamo da za $x = 0$ je $t = 0$, za $x = 1$ je $t = \frac{\pi}{2}$, dok za $x = 2$ je $t = \pi$. Prethodni integral, tada postaje

$$b_k = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin kt\, dt + \frac{4}{\pi^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - t) \sin kt\, dt =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin kt\, dt + \frac{4}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin kt\, dt, - \frac{4}{\pi^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t \sin kt\, dt, k \in \mathbb{N}.$$

Prvi i treći integral se rešavaju metodom parcijalne integracije, dok se drugi integral može direktno rešiti, što se ostavlja studentu za vežbu. Dobijamo da je

$$b_k = \frac{8}{k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{N}.$$

Dakle, traženi sinusni red, prema (*), glasi

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2} \cdot \sin \frac{k\pi x}{2}}{k^2} =$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi x}{2} - \dots \right).$$

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: Furijeov red za funkciju periode 2.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

FURIJEOV RAZVOJ FUNKCIJE NA PROIZVOLJNOM INTERVALU

Uopštavanjem prethodno datog razvoja, može se izvršiti razvoj funkcije na proizvoljnom intervalu.

Opštije, analognim postupkom se može dobiti Furijeov razvoj funkcije $f(x)$ na proizvoljnom intervalu $[\alpha, \beta]$. Tada važi da je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{\beta - \alpha} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{\beta - \alpha} \right)$$

gde se Furijeovi koeficijenti računaju po formulama

$$a_n = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{\beta - \alpha} dx, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{\beta - \alpha} dx, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Poglavlje 5

Furijeova transformacija

UVOD

Furijeova transformacija ima primenu u mnogim oblastima nauke i inženjerstva.

Sada ćemo proučiti Furijeovu transformaciju i njen inverz. Furijeova transformacija se može shvatiti kao neprekidni oblik Furijeovog reda. Naime, Furijeov red razlaže funkciju definisanu na intervalu $[-\pi, \pi]$, na komponente koje osciluju s celobrojnom periodom. S druge strane, Furijeova transformacija razlaže funkciju definisanu na celoj realnoj pravoj, na komponente s periodama koje mogu biti bilo koji realni ili kompleksni broj.

Metode zasnovane na Furijeovoj transformaciji imaju raznoliku primenu u svim oblastima nauke i inženjerstva. Furijeova transformacija se koristi u obradi signala, na primer prilikom kompresije slike ili digitalnog audio-zapisa. Sem toga, može pomoći u rešavanju diferencijalnih jednačina ili u praćenju dinamike tržišta i berze.

KOMPLEKSAN OBLIK FURIJEOVOG REDA

Sa datog oblika Furijeovog reda može se preći na njegov kompleksan oblik.

Za periodičnu funkciju $f(x)$ sa periodom $2l$ $(l > 0)$, sada ćemo, najpre, dati njen kompleksan oblik. Da bismo dobili kompleksan oblik Furijeovog reda ove funkciju na intervalu $[-l, l]$, iskoristićimo poznatu Ojlerovu formulu,

$$\left.\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i\sin x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \cos x &= \tfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \\ \sin x &= \tfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \end{aligned}$$

Tada imamo da je

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}\left(e^{\frac{in\pi x}{l}} + e^{-\frac{in\pi x}{l}}\right) + \frac{b_n}{2i}\left(e^{\frac{in\pi x}{l}} - e^{-\frac{in\pi x}{l}}\right)\right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}\left(e^{\frac{in\pi x}{l}} + e^{-\frac{in\pi x}{l}}\right) - \frac{ib_n}{2}\left(e^{\frac{in\pi x}{l}} - e^{-\frac{in\pi x}{l}}\right)\right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{a_n}{2} - \frac{ib_n}{2}\right)e^{\frac{in\pi x}{l}} + \left(\frac{a_n}{2} + \frac{ib_n}{2}\right)e^{-\frac{in\pi x}{l}}\right). \end{aligned}$$

Ako uvedimo oznake

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{2}, \alpha_n = \frac{a_n}{2} - \frac{ib_n}{2}, \alpha_{-n} = \frac{a_n}{2} + \frac{ib_n}{2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Tada možemo dati kompleksan oblik Furijeovog reda za posmatranu funkciju $f(x)$, na intervalu $[-l, l]$ na sledeći način

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n e^{\frac{inx\pi}{l}} + \alpha_{-n} e^{-\frac{inx\pi}{l}} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{\frac{inx\pi}{l}}.$$

Koeficijente ovako definisanog Furijeovog reda određujemo iz formule:

$$\alpha_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) e^{-\frac{int\pi}{l}} dt.$$

Članovi $e^{\frac{inx\pi}{l}}$ se nazivaju kompleksni harmonici, dok se članovi α_n nazivaju kompleksne amplitude.

FURIJEOV INTEGRAL

Odgovarajuća suma koja se javlja u Furijeovom razvoju predstavlja odgovarajuću integralnu sumu, kada se intervala $[-l, l]$ pređe na $\mathbb{R}$, tj. kada se pusti da $l \to +\infty$.

Sada ćemo u Furijeovom redu funkcije f, definisane na čitavom skupu $\mathbb{R}$, koja je data u kompleksnom obliku pustiti da parametar l teži u beskonačnost i razmotriti šta će se u tom slučaju događati sa navedenim formulama. Zato ćemo u Furijeov red dat u komplesnom obliku uvrstiti izraz za α_n. Tada dobijamo

$$f(x) = \lim_{l\to\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) e^{-\frac{in\pi t}{l}} dt \right) e^{\frac{in\pi x}{l}} \right] =$$
$$= \lim_{l\to\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) e^{-\frac{in\pi(x-t)}{l}} dt \right).$$

Uvedimo sada oznaku $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, kao i $\Delta\lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{l}$,za $n = 1, 2, 3, \ldots$ Tada je

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} f(t) e^{\lambda_n i(x-t)} dt \right] \Delta\lambda. \qquad (*)$$

Neka je sada

$$F_l(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt.$$

Tada sumu u formuli $(*)$ možemo zapisati

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_l(\lambda_n) \Delta\lambda_n.$$

Odavde se može videti da prethodna suma predstavlja zapravo integralnu sumu kada $l \to +\infty$, tj. tada $\Delta\lambda \to 0$, pa imamo da se $(*)$ može zapisati kao

$$f(x) = \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^{l} F_l(\lambda) d\lambda.$$

Dalje, $F_l(\lambda)$ formalno postaje integral

$$F_l(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt$$

kada $l \to +\infty$. Tada imamo da je

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt d\lambda,$$

pri čemu se prethodno dobijeni integral se naziva Furijeov integral.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Furijeova transformacija.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

FURIJEOVA TRANSFORMACIJA I INVERZNA FURIJEOVA TRANSFORMACIJA

Furijeova i inverzna Furijeova transformacija se zadaju u kompleksnom obliku.

Furijeova i inverzna Furijeova transformacija u kompleksnom obliku je data sa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right) e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Za unutrašnji integral uvedimo oznaku

$$\widehat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt.$$

Ova funkcija se naziva Furijeova transformacija funkcije f u kompleksnom obliku. Tada imamo da je

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda)e^{-i\lambda t}d\lambda.$$

Prethodna formula se naziva inverzna Furijeova transformacija funkcije f.
Ako uvedemo oznaku $F[f]$ za Furijeovu transformaciju funkcije f, kao i oznaku $F^{-1}[f]$ za inverznu Furijeovu transformaciju. Tada možemo navesti neke od osobina Furijeove transformacije:

$$F[f\pm g]=F[f]\pm F[g],\ F[c\cdot f]=c\cdot F[f]$$
$$F^{-1}[f\pm g]=F^{-1}[f]\pm F^{-1}[g],\ F^{-1}[c\cdot f]=c\cdot F^{-1}[f]$$

Na osnovu prethodnog možemo uvideti da je Furijeova transformacija, kao i inverzna Furijeova transformacija linearni operator.

Napomena. Za egzistenciju Furijeove transformacije funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dovoljno je:

1. da je ona apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$, tj. da važi

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty,$$

2. da ona ima konačan broj ekstremnih vrijednosti (minimuma i maksimuma) u proizvoljno odabranom konačnom intervalu;

3. da ona ima konačan broj prekida (prekida prve vrste) u proizvoljno odbranom konačnom intervalu.

Ovi uslovi su ekvivalentni uslovima Žordan-Dirihleovog kriterijuma kod Furijeovog reda. Uslov apsolutne integrabilnosti je dovoljan za egzistenciju Furijeove transformacije većine realnih funkcija. Međutim, uslov apsolutne integrabilnosti nije i potreban uslov, jer postoje realne funkcije koji nisu apsolutno integrabilni, ali se za njih, ipak, može odrediti Furijeova transformacija.

PRIMER

Određivanje Furijeove transformacije za datu funkciju.

Neka je zadata funkcija

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{za } x\notin(-1,1)\\ 1, & \text{za } x\in(-1,1).\end{cases}$$

Odrediti njenu Furijeovu transformaciju.

Rešenje. Važi da je

$$F(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{-1}0\cdot e^{-i\lambda t}dt+\int_{-1}^{1}1\cdot e^{-i\lambda t}dt+\int_{1}^{\infty}0\cdot e^{-i\lambda t}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}e^{-i\lambda t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\left(\cos(-\lambda t)+i\sin(-\lambda t)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\left(\cos(\lambda t)-i\sin(\lambda t)\right)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left.\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}\right|_{-1}^{1}+i\cdot\left.\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\right|_{-1}^{1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\lambda}{\lambda}-\frac{\sin(-\lambda)}{\lambda}+i\cdot\left(\frac{\cos\lambda}{\lambda}-\frac{\cos(-\lambda)}{\lambda}\right)\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\lambda}{\lambda}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin\lambda}{\lambda}.$$

Poglavlje 6

Pokazna vežba

ZADATAK 1 (10 MINUTA)

Razvoj funkcije u Furijeov red.

Razviti funkciju $f(x) = \pi - x$ u Furijeov red na intervalu $(-\pi, \pi)$.

Rešenje:

Odgovarajući koeficijenti a_n, b_n Furijeovog reda su

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\pi x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}2\pi^2 = 2\pi,$$

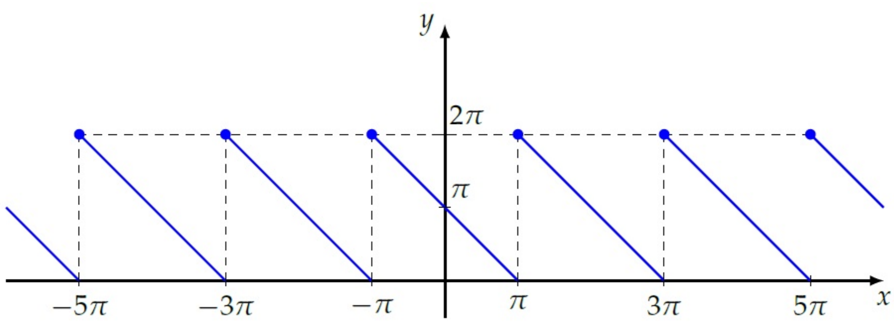
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\cos nx\ \ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\cos nx\ \ dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\sin nx\ \ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\ \ dx = \frac{2(-1)^n}{n},$$

Pa je Furijeov red funkcije

$$S(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n} \qquad (-\pi < x < \pi).$$

Na sledećoj slici prikazan je grafik funkcije $F(x)$, koja predstavlja periodično produženje funkcije $f(x) = \pi - x$ na skup $\mathbb{R}$.



Slika 6.1 Grafik funkcije $F(x)$, koja predstavlja periodično produženje funkcije $f(x) = \pi - x$ na skup $\mathbb{R}$ [Izvor: Autor].

ZADATAK 2 – 1. DEO (20 MINUTA)

Razvoj funkcije u Furijeov red na intervalu 2π. Određivanje koeficijenata a_n.

Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$.

Rešenje:

Data funkcija očigledno zadovoljava uslove Žordan-Dirihleovog kriterijuma, pa se može razviti u Furijeov red. Pritom nije ni parna ni neparna, i njene koeficijente a_n, b_n nalazimo po formuli

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \; dx \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \; dx \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Imaćemo da je

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2 \; dx + \int_{0}^{\pi} 1 \; dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(2x\Big|_{-\pi}^{0} + x\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(2\pi + \pi) = 3,$$

odakle je $a_0 / 2 = 3 / 2$, i

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \; dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2\cos nx \; dx + \int_{0}^{\pi} 1\cos nx \; dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\sin(-n\pi)}{n} + \frac{\sin n\pi}{n}\right) = 0,$$

ZADATAK 2 – 2. DEO

Određivanje koeficijenata b_n.

Dalje je, za svako $n = 1, 2, \dots$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} \sin nx dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{n}(1 - \cos n\pi) - \frac{\cos n\pi - 1}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\right)(1 - \cos n\pi) = -\frac{1}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = -\frac{1}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{n\pi}, & n = 2k - 1, k = 1, 2, \dots \\ 0, & n = 2k, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Stoga je

$$S(x) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Pritom je na osnovu Dirihleove teoreme $S(0) = \frac{3}{2}$ i $S(\pm\pi) = \frac{3}{2}$.

Napomena. Funkcija $f(x)$ ima u tački $x = 0$ prekid prve vrste.

ZADATAK 3 (5 MINUTA)

Razvoj parne funkcije u Furijeov red.

Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = \sin^2 x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rešenje:

Data funkcija je parna, pa njen razvoj u Furijeov red sadrži samo kosinuse. U posmatranom slučaju ovaj se razvoj može naći neposredno. Naime, imaćemo da je

$f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,$

odakle je $a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_n = 0 \quad (n = 1, 3, 4, \ \dots).$

ZADATAK 4 (10 MINUTA)

Razvoj parne funkcije u Furijeov red na intervalu 2π i određivanje na osnovu dobijenog rezultata sume brojnog reda.

Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = x^2$ na intervalu $[-\pi, \pi]$. Koristeći dobijeni rezultat odrediti sumu brojnog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Rešenje. Kako je funkcija $f(x) = x^2$ parna na intervalu $[-\pi, \pi]$ i zadovoljava uslove Žordan-Dirihleovog kriterijuma, njen Furijeov red ima oblik

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Pritom je

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

i

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{4(-1)^n}{n^2},$$

za $n \in \mathbb{N}$, pa dobijamo

$$S(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}, \quad \text{za} \ \ x \in [-\pi, \pi].$$

Kako je $f(\pi) = S(\pi) = \pi^2$, tada je

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi}{n^2}.$$

Kako je $\cos n\pi = (-1)^n$, imamo da je $(-1)^n \cdot (-1)^n = 1$, dobijamo da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

ZADATAK 5 (10 MINUTA)

Razvoj neparne funkcije u Furijeov red.

Razviti funkciju $f(x) = x$ u Furijeov red na intervalu $(-\pi, \pi)$.

Rešenje:

Funkcija $f(x) = x$ zadovoljava uslove Žordan-Dirihleovog kriterijuma, pa se može razviti u Furijeov red na intervalu $(-\pi, \pi)$. Kako je pritom i neparna funkcija, ovaj red imaće oblik

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

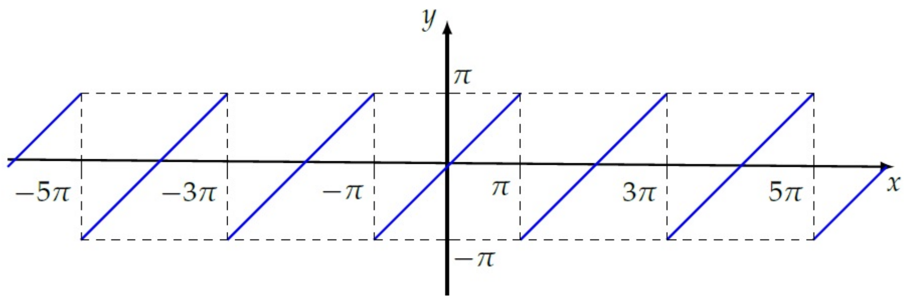
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \ \ dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \sin nx \ \ dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \qquad (n \in N),$$

pa je odgovarajući Furijeov red funkcije

$$S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

Ova relacija važi za svako $x \in (-\pi, \pi)$. U tačkama $x = \pm\pi$ suma $S(x)$ se ne poklapa sa vrednostima funkcije $f(x) = x$, $\ S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} = 0$.

Izvan intervala $[-\pi, \pi]$ suma $S(x)$ je periodično produženje funkcije $f(x) = x$. Njen grafik prikazan je na sledećoj slici.



Slika 6.2 Produženje funkcije f(x) = x na skup ℝ [Izvor: Autor].

ZADATAK 6 (10 MINUTA)

Razvoj funkcije u Furijeov red po kosinusima.

Razviti funkciju $f(x) = \pi - x, \quad (0 \le x \le \pi)$ u Furijeov red po kosinusima.

Rešenje:

Ako funkciju $f(x) = \pi - x$ produžimo parno ili neparno na ceo interval $[-\pi, \pi]$, tada će ona biti ograničena i deo po deo monotona.

Produžimo funkciju $f(x)$ na intervalu $[-\pi, 0]$ kao parnu funkciju (videti sliku). Tada je

$$\pi - x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

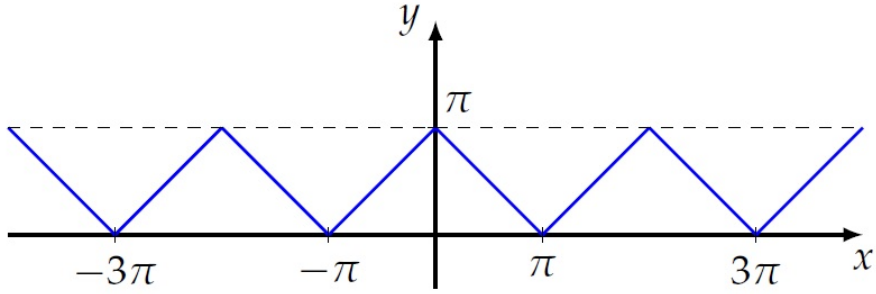
pri čemu je

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx \quad dx = \begin{cases} \frac{4}{\pi n^2}, & n = 1, 3, 5, \ldots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases},$$

pa je Furijeov red funkcije

$$S(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \qquad (0 \le x \le \pi).$$



Slika 6.3 Produženje funkcije funkciju $f(x)=\pi-x,$ kao parne funkcije na $\mathbb{R}$ [Izvor: Autor].

Napomena. S obzirom da važi $f(x)=S(x),$ za $x\in[0,\pi],$ odakle je $f(0)=\pi=S(0),$ pa imamo

$$\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n^2-1)}.$$

Iz poslednje jednakosti možemo izvesti zaključak koliko iznosi suma brojnog reda na njegovoj desnoj strani. Tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n^2-1)}=\frac{\pi^2}{8}.$$

ZADATAK 7 (10 MINUTA)

Furijeov red funkcije proizvoljne periode.

Razviti u Furijeov red funkciju $f(x)=|x|$ sa periodom $2l$ na intervalu $[-l,l]$.

Rešenje:

Kako je funkcija $f(x)=|x|$ parna na intervalu $[-l,l]$, njen Furijeov red ima oblik

$$|x|=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

pri čemu je

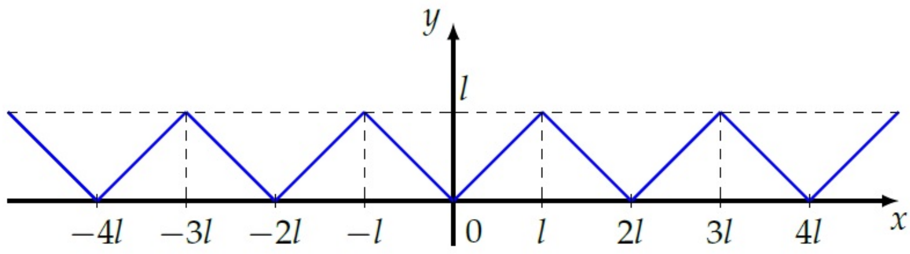
$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l x\,dx=l,$$

dok je

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\begin{cases}-\frac{4}{\pi^2n^2}, & n=1,3,5,\ \dots\\ 0, & n=2,4,6,\ \dots\end{cases}$$

Odakle dobijamo da je

$$S(x)=\frac{l}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^2}\qquad\left(x\in[-l,l]\right).$$



Slika 6.4 Produženje funkcije $f(x)=|x|$ na $\mathbb{R}$ [Izvor: Autor].

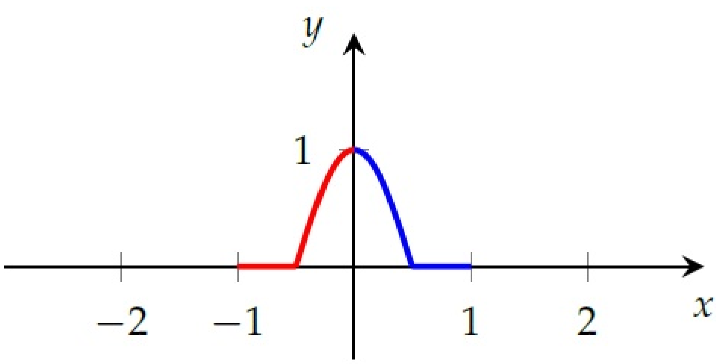
ZADATAK 8 - 1. DEO (20 MINUTA)

Razvoj funkcije u kosinusni red na intervalu $[-1,1]$, konstrukcijom njegovog parnog produženja.

Razviti u kosinusni red funkciju

$$f(x)=\begin{cases}\cos\pi x, & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ 0, & x\in\left(\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

Rešenje. Data funkcija (čiji je grafik na slici ucrtan plavom bojom) sa intervala $[0,1]$ ima svoje parno produženje na intervalu $[-1,0]$ (na slici ucrtano crvenom bojom).



Slika 6.5 Grafik date funkcije i njeno parno produženje na interval $[-1,0]$ [Izvor: Autor].

Svakako, ova funkcija se sa intervala $[-1,1]$ može sada produžiti na ceo $\mathbb{R}$, pri čemu je osnovna perioda tako dobijene funkcije 2.

S obzirom da je $f(x)=0,$ za $x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$, kao i $l=1,$ Furijeove koeficijente računamo na sledeći način

$$a_0=2\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\pi x\,dx=\begin{bmatrix}\text{smena: }\pi x=t,\\ x=0,t=0,\\ x=\frac{1}{2},t=\frac{\pi}{2}\\ dx=\frac{dt}{\pi}\end{bmatrix}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=\frac{2}{\pi}\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Takođe, imamo da je

$$a_n = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi x \cdot \cos k\pi x \, dx, \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Uvodeći istu smenu kao i za rešavanje integrala za koeficijent a_0 i koristeći formulu

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

dobijamo

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(n+1)t + \cos(n-1)t] \, dt$$

za $n \in \mathbb{N}$.

ZADATAK 8 - 2. DEO

Određivanje Furijeovih koeficijenata.

Ako je $n = 1$, imamo da je

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos 2t + 1] \, dt = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin 2t}{2} + t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Za $n > 1$ dobijamo da je

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k+1)t}{(k+1)} + \frac{\sin(k-1)t}{(k-1)}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Ako je $n > 1$ neparan broj, iz prethodnog, dobijamo da je $a_n = 0$. Ako je n paran broj, tj. oblika $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ tada je

$$a_{2k} = -\frac{2 \cdot (-1)^k}{\pi(4k^2 - 1)}.$$

Svakako, važi da je $b_n = 0$, za svako $k \in \mathbb{N}$, jer se radi o parnom produženju date funkcije.

Konačno dobijamo da je

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos \pi x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos 2k\pi x}{(4k^2 - 1)\pi}.$$

ZADATAK 9 (10 MINUTA)

Razvoj funkcije u Furijeov red po sinusima njenim produženjem na interval $[-\pi, \pi]$.

Razviti funkciju $f(x) = \pi - x, \quad (0 \leq x \leq \pi)$ u Furijeov red po sinusima.

Rešenje. Produžimo funkciju $f(x) = \pi - x$ na ceo interval $[-\pi, \pi]$ kao neparnu funkciju (videti sliku).
S obzirom da se radi o neparnom produženju date funkcije, tada je $a_n = 0$, za svako $n \in \mathbb{N}$.

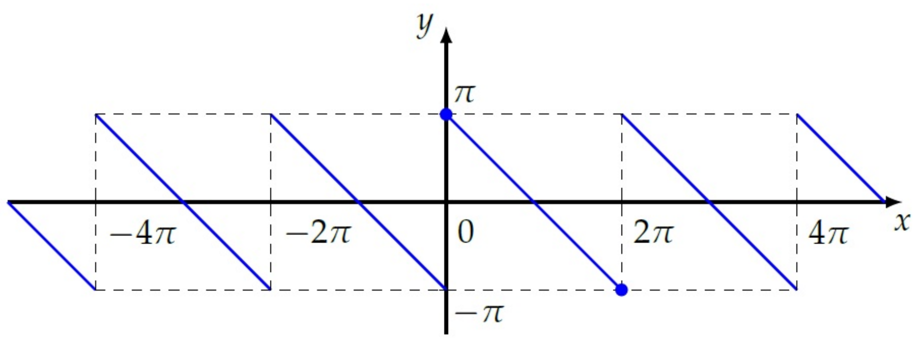
Dalje imamo da je

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin nx \, dx = [\text{uraditi za vežbu}] = \frac{2}{n}.$$

Tada je

$$S(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n},$$

za $0 < x \leq \pi$ i važi $f(0) \neq S(0)$.



Slika 6.6 Produženje funkcije funkciju $f(x) = \pi - x,$ kao neparne funkcije na $\mathbb{R}$ [Izvor: Autor].

ZADATAK 10 - 1. DEO (15 MINUTA)

Furijeov razvoj funkcije na $[1, 3]$ Određivanje Furijeovih koeficijenata $a_n, n \in \mathbb{N}$.

Funkciju $f(x) = x - 2$ razviti u Furijeov red na segmentu $[1, 3]$.

Rešenje. U ovom slučaju radi se o Furijeov razvoju funkcije na proizvoljnom intervalu. Važi da je

$$a_n = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\cos\frac{2n\pi x}{\beta-\alpha}dx,\ n=0,1,2,3,\dots$$

pri čemu je $\alpha = 1$ i $\beta = 3$. Tada je

$$a_0 = \int_1^3 (x-2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_1^3 = 0,$$

kao i

$$\begin{aligned} a_n &= \int_1^3 (x-2)\cos n\pi x dx = \begin{bmatrix} \text{Metod parcijalne int.} & \\ x-2=u, & \cos n\pi x = dv \\ dx = du, & \frac{\sin n\pi x}{k\pi} = v \end{bmatrix} \\ &= \frac{(x-2)\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{\sin n\pi x}{n\pi}dx = \\ &= \frac{\overbrace{\sin 3n\pi}^{=0}}{n\pi} + \frac{\overbrace{\sin n\pi}^{=0}}{n\pi} - \frac{\cos n\pi x}{(n\pi)^2}\Big|_1^3 = \frac{\cos 3n\pi}{(n\pi)^2} - \frac{\cos n\pi}{(n\pi)^2} = \frac{1}{(n\pi)^2}(\cos 3n\pi - \cos n\pi) \\ &= \frac{1}{(n\pi)^2}(-2\underbrace{\sin 2n\pi}_{=0} \cdot \underbrace{\sin n\pi}_{=0}) = 0, \quad \text{za svako } \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Napomena. Koristili smo da je

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

ZADATAK 10 - 2. DEO

Određivanje Furijeovih koeficijenata b_n, $n \in \mathbb{N}$.

S druge strane je

$$b_n = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\sin\frac{2n\pi x}{\beta-\alpha}dx = \int_1^3 (x-2)\sin 2n\pi x,$$

za $n \in \mathbb{N}$, pri čemu je $\alpha = 1$ i $\beta = 3$. Analognim računom (onom koji je primenjen za određivanje koeficijenata $a_n, n = 0,1,2,\dots$) dobijamo da je

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{\cos 3n\pi}{n\pi} - \frac{\cos n\pi}{n\pi} = -\frac{1}{n\pi}(\cos 3n\pi + \cos n\pi) = \\ &= -\frac{2\cdot\overbrace{\cos 2n\pi}^{=1}\cdot\overbrace{\cos n\pi}^{=(-1)^n}}{n\pi} = \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n\pi}, \end{aligned}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$.

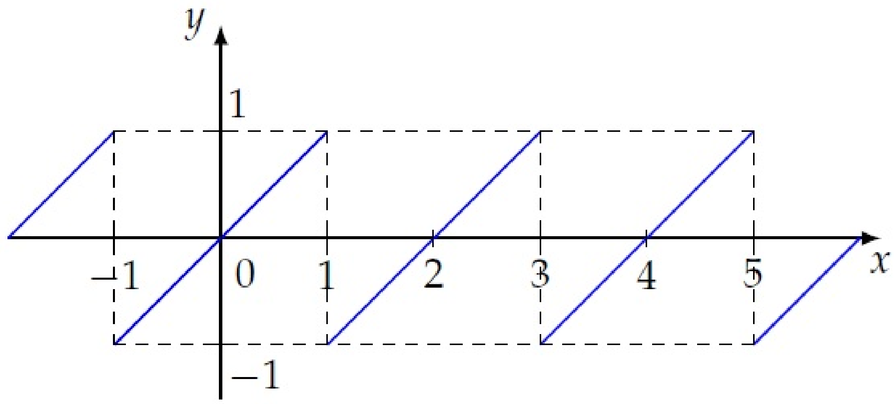
Napomena. Koristili smo da je $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Kako, u ovakvim slučajevima, važi da je

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi x}{\beta-\alpha} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{\beta-\alpha}\right)$$

tada u našem slučaju je

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}\cdot\sin 2n\pi x}{n\pi}.$$



Slika 6.7 Produženje funkcije $f(x)$ na $\mathbb{R}$ [Izvor: Autor].

Sa date slike možemo zaključiti da je $\lim_{x\to 1_+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 1_-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 3_+} f(x) = -1$ i $\lim_{x\to 3_-} f(x) = 1$. Tada je

$$S(1) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 1_+} f(x) + \lim_{x\to 1_-} f(x)\right) = 0 \quad \text{i} \quad S(3) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 3_+} f(x) + \lim_{x\to 3_-} f(x)\right) = 0$$

Konačno je

$$S(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}\cdot\sin 2n\pi x}{n\pi}, & x \in (1,3), \\ 0, & x = 1 \vee x = 3. \end{cases}$$

ZADATAK 11 (15 MINUTA)

Određivanje Furijeove transformacije za datu funkciju.

Neka je zadata funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \sin 3t, & \text{za } x \in (-\pi,\pi), \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odrediti njenu Furijeovu transformaciju.

Rešenje. Data funkcija je neparna funkcija na intetrvalu $(-\pi, \pi)$, pa imamo da je

$$\begin{aligned}
F(f) &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\lambda t) dt = \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3t) \cdot \sin \lambda t dt = \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \big(\cos (3-\lambda)t - \cos (3+\lambda)t \big) dt = \\
&= -\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin (3-\lambda)t}{(3-\lambda)} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\sin (3+\lambda)t}{(3+\lambda)} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} \right) = \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin (3-\lambda)\pi}{(3-\lambda)} - \frac{\sin (3+\lambda)\pi}{(3+\lambda)} \right) = \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin \lambda\pi}{(3-\lambda)} + \frac{\sin (\lambda\pi)}{(3+\lambda)} \right) = \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{6 \cdot \sin \lambda\pi}{9-\lambda^2} = \\
&= -\frac{3\sqrt{2} i \sin \lambda\pi}{\sqrt{\pi}(9-\lambda^2)}.
\end{aligned}$$

Poglavlje 7

Zadaci za samostalan rad

VIDEO KLIP (6 MINUTA)

Snimak sa Youtube-a: motivacija

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

ZADACI ZA INDIVIDUALAN RAD

Zadaci koje studenti treba da provežbaju.

Zadatak 1. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = \begin{cases} c_1, & -\pi < x \leq 0 \\ c_2, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$, $c_1, c_2 \in R$.

Rezultat: $S(x) = \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{2(c_2 - c_1)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x$

Zadatak 2. Razviti u Furijeov red funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

Rezultat: $S(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$

Zadatak 3. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = \operatorname{sgn} \ x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rezultat: $S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

Zadatak 4. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = \begin{cases} -x-2, & -\pi < x \leq 0 \\ x+1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$.

Rezultat: $S(x) = \frac{\pi - 1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \frac{3}{2n-1} \sin(2n-1)x \right)$

Zadatak 5. Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = |x| - 1$, na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rezultat: $S(x) = \frac{\pi - 2}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

Zadatak 6. Razviti funkciju $f(x) = x^2, \quad 0 \le x \le \pi$ u Furijeov red

1. po kosinusima

2. po sinusima.

Rezultat:

1. $S(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$

2. $S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2n-1} - \frac{4}{(2n-1)^3\pi}\right)\sin(2n-1)x - \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2nx$

Vreme izrade: za svaki zadatak 15 minuta.

Zaključak za lekciju 10

FURIJEOVI REDOVI

Funkcionalni red, apsolutna konvergencija, uslovna konvergencija, uniformna konvergencija, divergencija, stepeni red, radijus konvergencije, razvoj funkcije u red.

U ovoj lekciji smo obradili Furijeove redove i u vezi sa time:

- Furijeove redove periodične funkcije sa periodom 2π,
- Neke dovoljne uslove za razvoj funkcije u Furijeov red,
- Furijeov razvoj parnih i neparnih funkcija,
- Razvoj u Furijeov red funkcije na intervalu [0, π],
- Furijeov red funkcije proizvoljne periode.
- Furijeova transformacija i inverzna Furijeova transformacija.

Istaknimo da metode zasnovane na Furijeovoj transformaciji imaju raznoliku primenu u svim oblastima nauke i inženjerstva. Furijeova transformacija se koristi u obradi signala, na primer prilikom kompresije slike ili digitalnog audio-zapisa.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.

UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Dvojni integrali

Lekcija 13

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 13

DVOJNI INTEGRALI

Uvod

UVOD

Dvojni integral

Oblast integracije višestrukih integrala je višedimenzionalna oblast D. Generalni slučaj višestrukih integrala, kada je $D \subset \mathbb{R}^n$, neće biti razmatran na ovom kursu, pa se zadržavamo samo na specijalnim slučajevima. To su dvojni i trojni integrali, kod kojih je oblast integracije $D \subset \mathbb{R}^2$ dvodimenzionalna (ravna) i $D \subset \mathbb{R}^3$ trodimenzionalna (prostorna) oblast, tim redom. U ovoj lekciji ćemo izučavati dvojni integral, a na narednoj trojni integral.

Ideja uvođenja dvojnog integrala, analagno je ideji uvođenja određenog Rimanovog integrala, samo što prilikom uvođenja dvojnog integrala umesto intervala, oblast integracije postaje neka oblast u ravni, a umesto realne funkcije jedne realne promenljive, vrši se integracija realne funkcije dve realne promenljive.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Pojam dvojnog integrala

DEFINICIJA

Dvojni integral predstavlja generalizaciju pojma određenog integrala u prostoru $\mathbb{R}^2$.

Neka je data ograničena funkcija $z = f(x, y)$ na ograničenoj oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Oblast D je ograničen skup u $\mathbb{R}^2$ ako postoji disk (krug) sa konačnim poluprečnikom koji sadrži D u sebi. Takođe, pretpostavimo da D ima konačnu površinu.

Napomena. Postoje oblasti u $\mathbb{R}^2$ koje nisu merljive (za koje se ne može izračunati površina).

U daljem razmatranju uvedimo pojam određenog integrala funkcije f na oblasti D. Posmatrajmo za dato $n \in \mathbb{N}$ kolekciju skupova $\{D_1, \ldots, D_n\}$, takvih da je $D_i \cap D_j = \emptyset$, $\{i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $i \neq j\}$ i da je $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$. Ta kolekcija predstavlja jedan prekrivač oblasti D ili jednu podelu oblasti D. Označimo je sa P.

Nadalje, pretpostavljamo da posmatramo samo takve podele oblasti D kod kojih elementi te podele $\{D_1, \ldots, D_n\}$ imaju svoju površinu kao skupovi u $\mathbb{R}^2$ i da im dijametar (svima) teži nuli, kada se broj tih podeonih delova uvećava i teži u $+\infty$.

Napomena. Ako je $A \subseteq \mathbb{R}^2$, tada dijametar za A definišemo sa

$$dA = \sup_{P,Q \in A} ||P - Q||,$$

gde je supremum, u oznaci $\sup$, standardno definisan (obično je to maksimum) po tačkama $P, Q \in A$ i gde je oznaka $|| \cdot ||$ Euklidsko rastojanje dato u $\mathbb{R}^2$.

Za $n \in \mathbb{N}$ formirajmo sledeće (Darbu-Rimanove) integralne sume

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i, \xi_i)\Pi_i$$

gde su $(\eta_1, \xi_1), (\eta_2, \xi_2), \ldots, (\eta_n, \xi_n)$ proizvoljne tačke iz skupova $D_1, \ldots, D_n$ respektivno i $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ površine oblasti $D_1, \ldots, D_n$ respektivno.

Ako za integralne sume važi

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = I \in \mathbb{R}$$

bez obzira na izbor podele P i bez obzira na izbor tačaka $(\eta_1, \xi_1), (\eta_2, \xi_2), \ldots, (\eta_n, \xi_n)$. Tada za f kažemo da je integrabilna funkcija na oblasti D, tj. postoji njen dvojni integral na D je I.

PRIMER - 1. DEO

Jedan od problema koji dovodi do pojma dvojnog integrala.

Posmatrajmo površ koja je grafik funkcije $z = f(x, y)$ nad njenim domenom u Oxy ravni. Preciznije, nad delom domena koji predstvalja pravougaonik u Oxy ravni. Može se postaviti pitanje kolika je prosečna udaljenost posmatrane površi od ovog pravougaonika u Oxy ravni, tj. koliko su prosečno udaljene tačke sa te površi od njega. Kao i kod većine ovakvih problema, prvo ćemo pokušati da damo približni odgovor.

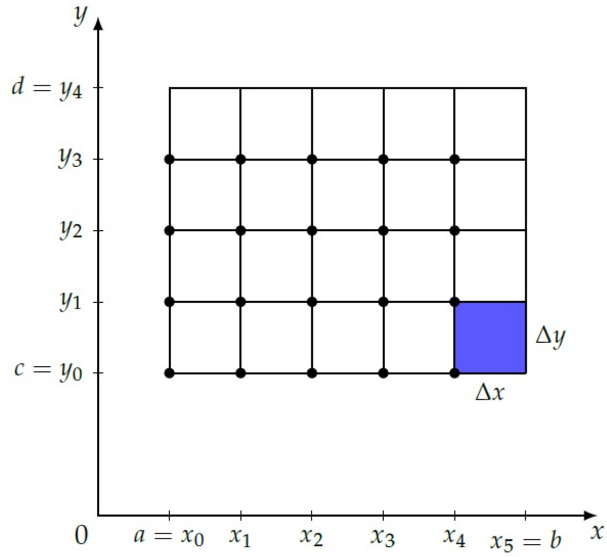
Pretpostavimo, najpre, da posmatramo površ ove funkcije nad pravougaonikom $[a, b] \times [c, d]$. Ne umanjući opštost pretpostavimo da su $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+, (a < b, c < d)$. Podelimo sada interval $[a, b]$ na Ox -osi na m podintervala $[x_i, x_{i+1}], (i = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$, pri čemu je $a = x_0$ i $b = x_{m-1}$. Slično, interval $[c, d]$ podelimo na n podintervala $[y_j, y_{j+1}], (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ pri čemu je $c = y_0$ i $d = y_{n-1}$. Na ovaj način smo ceo ovaj pravougaonik podeli u jednu mrežu, koja sadrži $m \cdot n$ manjih pravougaonika kao što je prikazano na slici. Označimo sa

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x, (i = 0, 1, 2, \ldots, m-1), \text{ kao i } y_{j+1} - y_j = \Delta y, \\ (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

U svakoj od tačaka (x_i, y_j), $(i = 0, 1, 2, \ldots, m-1; j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, ove mreže možemo izračunati udaljenost posmatrane površi koje predstavljaju vrednosti $f(x_i, y_j)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, m-1; j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Prosečna udaljenost bi se tada mogla približno izračunati

$$\frac{\begin{array}{l} f(x_0, y_0) + \ldots + f(x_{m-1}, y_0) + f(x_0, y_1) + \ldots + f(x_{m-1}, y_1) + f(x_0, y_{n-1}) + \ldots \\ + f(x_{m-1}, y_{n-1}) \end{array}}{m \cdot n}.$$

Svakako, tačnost ovog računa je sve veća i veća što je posmatrana mreža gušća, tj. njegova tačnost se povećava kada intervale $[a, b]$ i $[c, d]$ delimo na sve više i više podintervala. Konačno, ako broj podeonih tačaka intervala $[a, b]$ i $[c, d]$ na podintervale teži ka beskonačnosti, tj. ako istovremeno imamo da $m \to \infty$ i $n \to \infty$, tada možemo očekivati da će tražena prosečna udaljenost težiti ka tačno određenoj vrednosti. Svakako, da li ovaj broj možemo odrediti zavisi od same funkcije $z = f(x, y)$, odnosno od njenih osobina. Za sada ovaj problem zanemarujemo (o njemu ćemo govoriti kasnije).



Slika 1.1 Slučaj kada je $m = 5$ i $n = 4$ [Izvor: Autor].

Napomena. Na datoj slici zakvadrat koji je označen plavom bojom udaljenostposmatrane površi od njega je predstavljena vrednošću $f(x_4, y_0)$. U opštem slučaju to može biti koja tačka koja se nalazi unutar ili na njegovom rubu.

PRIMER - 2. DEO

Određivanje prosečne udaljenost posmatrane površi od dela Oxy ravni koji predstavlja uočeni pravougaonik.

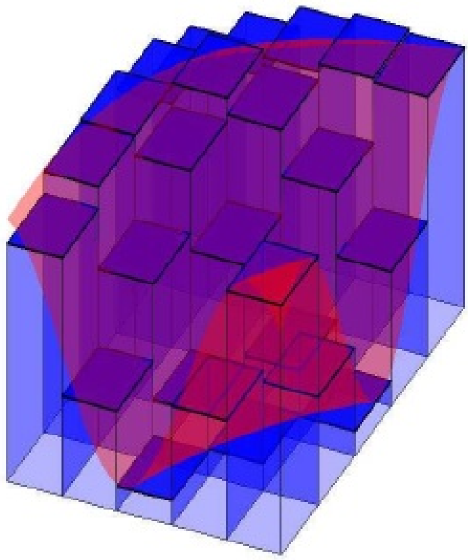
Prethodno možemo zapisati preko sledeće dvostruke sume

$$\frac{1}{mn}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_i, y_j) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m-1}\sum\limits_{j=0}^{n-1} f(x_i, y_j)\frac{b-a}{m}\,\frac{d-c}{n}}{(b-a)\cdot(d-c)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m-1}\sum\limits_{j=0}^{n-1} f(x_i, y_j)\,\Delta x\,\Delta y}{(b-a)\cdot(d-c)}.$$

U poslednjoj formuli $(b-a)\cdot(d-c)$ predstavlja površinu pravougaonika (tj. čitave mreže), dok $f(x_i, y_j)\,\Delta x \Delta y \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, m-1;\ j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ predstavlja zapreminu svakog od kvadra koji se može dobiti nad svakim od pravougaonika koji čine posmatranu mrežu, pri čemu je $f(x_i, y_j)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, m-1;\ j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ visina svakog od njih (videti sliku). Zato su neki delovi gornje strane svakog ovakvog kvadra iznad, a neki ispod posmatrane površi. Zbir svih njihovih zapremina će približno dati zapreminu tela ispod površi $z = f(x, y)$ a iznad pravougaonika $[a, b] \times [c, d]$. Kada pustimo da m i n teže u beskonačno suma $\sum\limits_{i=0}^{m-1}\sum\limits_{j=0}^{n-1} f(x_i, y_j)\,\Delta x\,\Delta y$ će dati tačnu vrednost zapremine ispod posmatrane površi nad posmatranim pravougaonikom. Konačno, kada ovu zapreminu podelimo površinom pravougaonika, dobićemo traženu prosečnu udaljenost površi od Oxy ravni, koja se računa na sledeći način

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{(b-a)(d-c)} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_i, y_j)\, \Delta x\, \Delta y.$$

Napomena. Opštije, D može biti bilo koja ograničena i merljiva oblast.



Slika 1.2 Kvadri koji se dobijaju nad svakim od pravougaonika koji formiraju uočenu mrežu [Izvor: Autor].

KLASE INTEGRABILNIH FUNKCIJA. GEOMETRIJSKA INTEPRETACIJA

Neprekidne funkcije se mogu integraliti, dok se neke od prekidnih funkcija mogu, a neke ne.

Za graničnu vrednost sume iz prethodnog primera možemo uvesti sledeću oznaku

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_i, y_j)\, \Delta x\, \Delta y = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy,$$

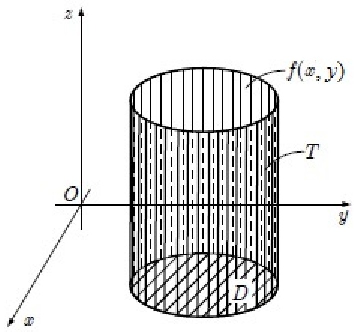
koju nazivamo dvojni integral nad oblasti D, gde oblast D posebno opisujemo u skupovnom smislu. Za ovu oznaku, svi termini su isti kao za jednostruki integral, jedino treba napomenuti da se oznaka $dxdy$ naziva površinski element oblasti D.

Sada se svakako, postavlja pitanje koje klase funkcija se mogu integraliti u ovom smislu. O tome govori naredni stav.

Stav. Neka je data neprekidna funkcija $z = f(x,y)$ na oblasti D. Tada ona ima dvojni integral na D.

Napomena. Prekidne funkcije su takve da neke od njih imaju dvojni integral, a neke nemaju. Recimo i to da se dvojni integrali mogu uopštiti u istom smislu kako je uopšten određeni integral do nesvojstvenog integrala, ali se mi time ovde nećemo baviti.

Geometrijska intepretacija dvojnog integrala je sasvim jasna na osnovu prethodnog primera i date granične vrednosti preko koje je uveden dvojni integral. Naime, neka je data neprekidna i ograničena funkcija $z = f(x, y)$ na ograničenoj oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ i neka je $f(x, y) \geq 0$, za $(x, y) \in D$. Na datoj slici uočimo cilindrično telo čije su baze (osnove) oblasti D i $f(D)$ i čiji je omotač takva površ koja nastaje kao trag (u $\mathbb{R}^3$) kretanja neke prave P (paralelne sa z osom) po rubu od oblasti D. Označimo to telo sa T.



Slika 1.3 Cilindarska površ [Izvor: Autor].

Tada važi formula

$$V_T = \iint_D f(x, y) dx dy$$

O osobinama koje imaju dvojni integrali i načunu kako ćemo izračunavati ove integrale govorimo u nastavku.

OSNOVNE OSOBINE

Metod linearnosti i aditivnost integracije za dvojni integral. Ako je funkcija nenegativna na određenoj oblasti, tada je i dvojni integral od nje nenegativan broj.

Izložićemo neke bitne osobine dvojnog integrala.

Stav. Neka su date neprekidne i ograničene funkcije $z = f(x, y)$ i $z = g(x, y)$ na ograničenoj oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

1. Za $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\beta \in \mathbb{R}$ važi

$$\iint_D [\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)]\, dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy.$$

Prethodnom formulom je dat metod linearnosti za dvojni integral.

2. Ako je $z = f(x, y) \geq 0$, za $(x, y) \in D$, tada je

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy \geq 0.$$

3. Ako je $f(x, y) \leq g(x, y)$, za $(x, y) \in D$, tada je

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x, y)dxdy.$$

4. Važi da je

$$\left| \iint\limits_D f(x, y)dxdy \right| \leq \iint\limits_D |f(x, y)|dxdy.$$

5. Neka je $D = D_1 \cup D_2 \cup l$,gde su D_1 i D_2 oblasti iz $\mathbb{R}^2$ takve da imaju površinu i da važi $D_1 \cap D_2 = \emptyset$,a l je kriva („dovoljno dobra") koja pripada oblasti D i koja razgraničava oblasti D_1 i D_2. Tada je

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy.$$

Na sličan način se može definisati prethodno pravilo za konačno mnogo disjunktnih skupova $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Ova osobina se naziva osobina aditivnosti dvojnog integrala po domenu integracije.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: definicija dvojnog integrala.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

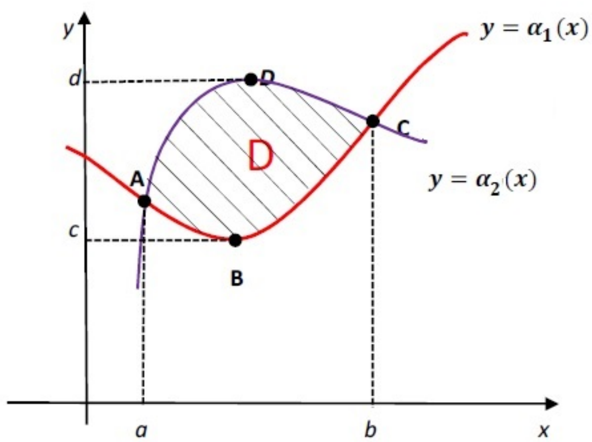
Poglavlje 2

Izračunavanje dvojnog integrala

FUBINIJEV STAV

Izračunavanje dvojnog integrala svodi se na izračunavanje dva jednostruka integrala. Za to se koristi Fubinijev stav.

U sledećem razmatranju uvešćemo bitnu tehniku za izračunavanje dvojnih integrala preko dvostrukih integral tj. dva uzastopna jednostruka integrala koja proističe iz čuvene Fubinijeve teoreme za dvojni integral. Pomenutu tehniku ćemo prikazati u nastavku. Neka je, najpre, oblast D data na elementaran način sledećom slikom.



Slika 2.1 Prikaz oblast D na kojoj sprovodimo integraciju [Izvor: Autor].

Rub oblasti D sa prethodne slike je kriva za koju važi: deo ruba koji čini luk krive ABC je grafik neke funkcije $y = \alpha_1(x), x \in [a, b]$, a deo ruba koji čini luk ADC je grafik funkcije $y = \alpha_2(x), x \in [a, b]$.

Takođe, podrazumevamo da su α_1 i α_2 neprekidne funkcije. Tada Fubinijeva teorema tvrdi da oblast D ima svoju površinu. Razmatrajmo na takvoj oblasti D neprekidnu i ograničenu funkciju $z = f(x, y)$. Tada je (prema Fubinijevoj teoremi)

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Slično, rub oblasti D može biti kriva za koju važi: deo ruba koji čini luk BAD je grafik funkcije $x = \beta_1(y), y \in [c, d]$, a deo ruba koji čini luk BCD je grafik funkcije $x = \beta_2(y), y \in [c, d]$. Takođe, podrazumevamo da su β_1 i β_2 neprekidne funkcije. Tada

Fubinijeva teorema tvrdi da oblast D ima svoju površinu. Ako razmatramo na takvoj oblasti D neprekidnu i ograničenu funkciju $z = f(x, y)$, tada je (prema Fubinijevoj teoremi)

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\beta_1(y)}^{\beta_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

BITNE NAPOMENE

Prema rezultatu iz Fubinijevog stava može menjati redosled integracija po x, odnosno po y, ali se pri tome mora voditi računa i o promeni granica u kojima se vrši integracija.

Posmatrajući prethodne formule možemo zaključiti da se prema rezultatu iz Fubinijevog stava može menjati redosled integracija po x, odnosno po y, ali se pri tome mora voditi računa i o promeni granica u kojima se vrši integracija. Granice integrala se pri ovakvim promenama redosleda integraljenja ne ostaju iste, osim, možda, u nekim najjednostavnijim primerima (kada je podintegralna funkcija konstantna po jednoj ili po obe promenljive ili kada je oblast D pravougaonik ili kvadrat). Generalno govoreći, ovde su granice unutrašnjeg integrala (integrala u zagradi) funkcionalne (zavise od određene promenljive) i rezultat takve integracije je funkcija po odgovarajućoj promenljivoj, dok su granice spoljašnjeg integrala uvek brojne. To određuje i redosled integracije i on se strogo sprovodi tako što se najpre integrali unutrašnji integral, a onda njegov rezultat se uvrštava pod spoljašnji integral i vrši druga integracija.
Uvažavajući prethodno rečeno, možemo uvesti i sledeće formule za izračunavanje dvostrukog integrala, koje su ravnopravne u upotrebi sa prethodnim

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} f(x,y)dy,$$

odnosno

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\beta_1(y)}^{\beta_2(y)} f(x,y)dx,$$

a da se ne dođe u zabludu koju od integracija je potrebno prvo sprovesti.

Može se dokazati da ovakvu oblast uvek možemo u k koraka, $k \in \mathbb{N}$, podeliti na delove (najčešće pravim linijama ili delovima krivih drugog reda) koji su oblika prikazanog na prethodnoj slici. Tada se, uz korišćenje osobine aditivnosti dvojnog integrala po domenu integracije, integracija takve funkcije na domenu (oblasti) svodi se na zbir od k integrala te funkcije po pomenutim disjunktnim podoblastima. Svaki od tih k integrala izračunamo prema navedenim rezultatima Fubinijeve teoreme i dobijemo rešenje polaznog problema, kao zbir k dobijenih vrednosti.

PRIMER 1

Izmena poretka integracije u dvojnom integralu.

Izmeniti poredak integracije u dvojnom integralu $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$.

Rešenje. Iz datog integrala možemo videti da za oblast integracije D važi $D = \{(x,y) \mid x \in [0,2] \wedge x \le y \le 2x\}$. Na osnovu ovih granica možemo skicirati oblast integracije D, koja je prikazana na datoj slici. Primetimo da su u ovom slučaju granice brojne po promenljivoj x, a funkcionalne su (zavise od x) po promenljivoj y . U tom slučaju se slika posmatra od Ox ose po kojoj je određuju brojne granice, tj. oblasti D pripadaju sve tačke ravni koje se nalaze između pravih $x = 0$ i $x = 2$. Granice po y određujemo tako što gledamo krive koje ograničavaju oblast D. Njenu donju granicu čini linija koja je bliža Ox osi i to je prava $y = x$, a dalja od nje čini gornju granicu i to je prava $y = 2x$.

Ako okrenemo redosled integracije tada je očigledno $y \in [1,4]$ (sliku sada posmatramo u odnosu na Oy osu, s obzirom da su granice za y brojne). Međutim, tada granica oblasti D po promenljivoj x se menja. Naime, za $y \in [1,2]$ iz donja granica je prava $y = 2x$, a gornja granica je prava $y = x$, pa važi $\frac{y}{2} \le x \le y$. Dalje, kada je $y \in [2,4]$ donja granica oblasti D je i dalje prava $y = 2x$, dok je gornja granica prava $x = 2$, pa važi $\frac{y}{2} \le x \le 2$. Dakle, u ovom slučaju važi da je $D = D_1 \cup D_2$,pri čemu je

$$D_1 = \{(x,y) \mid y \in [1,2] \wedge \frac{y}{2} \le x \le y\} \text{ i } D_2 = \{(x,y) \mid y \in [2,4] \wedge \frac{y}{2} \le x \le 2\}$$

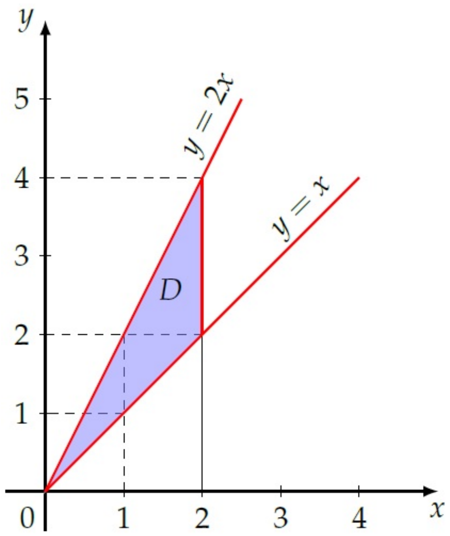
Očigledno, važi da je $D_1 \cap D_2 \ne 0$.

Dakle, možemo da primenimo sledeću osobinu

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

U našem slučaju je

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)dx.$$



Slika 2.2 Prikaz oblast na kojoj sprovodimo integraciju [Izvor: Autor].

PRIMER 2

Izračunavanje dvojnog integrala.

Izračunati dvojni integral

$$\iint_D xy^2 dxdy,$$

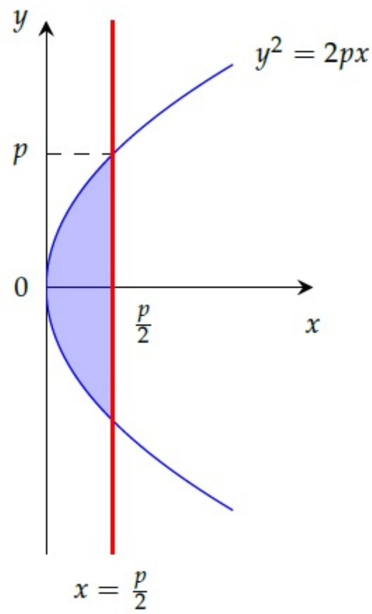
gde je D oblast ograničena parabolom $y^2 = 2px$ i pravom $x = \frac{p}{2}, p > 0$.

Rešenje. Oblast D je prikaza na slici. Tada je

$$\iint_D xy^2 dxdy = \int_0^{\frac{x}{2}} xdx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} y^2 dy = 2\int_0^{\frac{x}{2}} xdx \int_0^{\sqrt{2px}} y^2 dy =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{x}{2}} xy^3\Big|_0^{\sqrt{2px}} dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{x}{2}} x^{\frac{5}{2}} 2p\sqrt{2p}dx =$$

$$= \frac{4p}{3}\sqrt{2p}\frac{2}{7}\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{7}{2}} = \frac{p^5}{21}.$$



Slika 2.3 Prikaz oblasti na kojoj ršimo integraciju [Izvor: Autor].

PRIMER 3

Izračunavanje dvojnog integrala

Napomena. U specijalnim, jednostavnijim slučajevima granice oba integrala mogu biti i brojne i to povlači činjenicu da tada redosled integracije dvostrukih integrala nije bitan. Takođe, mogu se javiti slučajevi kada se dvostruki integral može računati kao proizvod dva jednostruka integrala, što ilustrujemo narednim primerom.

Primer. Izračunati integral:

$$\iint_D x^2 y dx dy,$$

gde je D oblast ograničena data sa $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| \, 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}$.

Rešenje. Oblast D predstavlja pravougaonik u $\mathbb{R}^2$ tako da imamo:

$$\iint_D x^2 y dx dy = \left(\int_0^3 x^2 dx\right) \cdot \left(\int_1^2 y dy\right) = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_1^2 = 9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{2}.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: promena redosleda integracije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

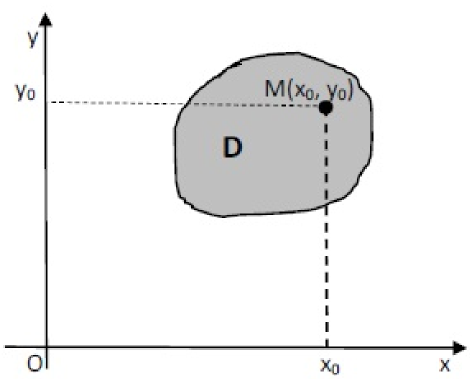
Smena promenljivih u dvojnom integralu

UVOD

Uvođenjem smene u dvojni integral se prevazilaze problemi kako u vezi sa samom podintegralnom funkcijom, tako i sa oblašću na kojoj se posmatrana integracija sprovodi.

Jedna od najbitnijih tehnika za efikasniju primenu Fubinijevog stava za izračunavanje dvojnog integrala jeste tehnika koja proističe iz tvrđenja koji se naziva Stav o smeni promenljivih u dvojnom integralu. Kako na efektivno izračunavanje dvojnog integrala, osim podintegralne funkcije, utiče i oblast u kojoj se vrši integracija, cilj uvođenja smene promenljivih u dvojni integral jeste da se prevaziđe bar jedan (ili oba) od opisanih problema koji se mogu javiti prilikom integracije. O tome govorimo u nastavku.

Neka je data oblast D iz $\mathbb{R}^2$ koja je ograničena i čiji je rub npr. sačinjen je od delova krivih drugog reda (parabola, kružnica i dr.). Uočimo Dekartov koordinatni sistem Oxy u $\mathbb{R}^2$ i tačku $M(x_0, y_0)$ u njemu (videti sliku).



Slika 3.1 Oblast D i proizvoljna tačka M(x0,y0) iz nje [Izvor: Autor].

JAKOBIJAN

Uvođenjem smene prilikom rešavanja dvojnog integrala, dolazi do promene oblasti u ravni po kojoj se vrši integracija. Jakobijan nam daje princip promene te oblasti integracije.

Pretpostavimo da postoji preslikavanje

$$\begin{aligned} x &= x(u,v), \\ y &= y(u,v). \end{aligned} \qquad (*)$$

pri kojem se tačka $M(x_0, y_0) \in D$ može predstaviti preko nekih drugih koordinata u i v (iz nekog drugog koordinatnog sistema u $\mathbb{R}^2$), takvog da su funkcije $x(u,v)$ i $y(u,v)$ neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda na oblasti D^*, gde oblast D^* predstavlja domen prethodno definisanog preslikavanja tj. svaka tačka ove oblasti je predstavljena preko koordinata u i v, a oblast D je slika ove oblast. Ovakvo definisano preslikavanje je bijekcija oblast D^* na D.

Napomena. U našem slučaju uvek će egzistirati barem jedno preslikavanje oblika $(^*)$ sa navedenim osobinama.

Za ovakvo dato preslikavanje definišemo matricu koju nazivamo Jakobijeva matrica (ova matrica je u vezi sa preslikavanjem koordinatnog sistema) na sledeći način

$$J(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix},$$

gde je J dato na D^*.

Determinanta $\det(J(u,v))$ se naziva Jakobijan i važi da je $\det(J(u,v)) \neq 0,$ na D^* zbog osobina funkcija $x(u,v)$ i $y(u,v)$.

Napomena. Vrlo često se Jakobijan označava slovom J , slično kao i Jakobijeva matrica $J(u,v)$.

Stav. Neka je dato D i D^* sa osobinama kao u prethodnom razmatranju. Ako je na D data neprekidna i ograničena funkcija $z = f(x,y)$, tada je

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv.$$

Ova formula se vrlo često primenjuje sa ciljem da se polazni zadatak pojednostavi za primenu Fubinijevog stava.

Nekada je prirodnije uvesti smene izražavanjem novouvedenih promenljivih preko starih

$$\begin{aligned} u &= u(x,y), \\ v &= v(x,y). \end{aligned}$$

gde je potrebno, najpre, iz ovog sistema jednačina izvršiti izražavanje promenljivih x i y preko promenljivih u i v, a Jakobijan $J(x,y)$ u ovom slučaju se može odrediti na sledeći način

$$J(x,y) = \frac{1}{J(u,v)}.$$

PRIMER 1

Uvođenje smene u dvojni integral.

Izračunati dvojni integral

$$\iint\limits_D (2x-y)e^{x+y}dxdy,$$

gde je oblast $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| 1 \leq x+y \leq 3,\ 2x \leq y \leq 2x+1\}$.

Rešenje. Zadatak rešavamo uvođenjem novih promenljivih. Iz oblasti D imamo da je

$$\begin{gathered} 1 \leq x+y \leq 3, \\ 2x \leq y \leq 2x+1, \end{gathered}$$

pa ćemo uvesti smene na sledeći način:

$$x+y=u, \quad u=u(x,y),$$

$$y-2x=v, \quad v=v(x,y).$$

Nova oblast D^* je tada $D^* = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \big| 1 \leq u \leq 3,\ 0 \leq v \leq 1\}$.

Kako smo već rekli, neophodno je iz prethodnog sistema izraziti promenljive x i y u funkciji od u i v. Tada dobijamo

$$x = \frac{u}{3} - \frac{v}{3},$$

$$y = \frac{2u}{3} - \frac{v}{3}$$

Tada je Jakobijan jednak:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{9}.$$

Sada je

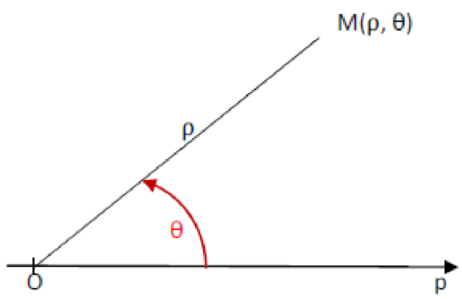
$$\begin{aligned} \iint\limits_D (2x-y)e^{x+y}dxdy &= \iint\limits_{D^*} (-v)e^u \frac{1}{9} dudv = \\ &= -\frac{1}{9}\left(\int_1^3 e^u du\right) \cdot \left(\int_0^1 vdv\right) = \\ &= -\frac{1}{18}(e^3 - e). \end{aligned}$$

POLARNE KOORDINATE

Jedna od najvažnijih smena u dvojnom integralu jeste uvođenje polarnih koordinata. Polarni koordinatni sistem se zadaje polom (tačkom) i proizvoljnom polupravom koja polazi iz nje.

Prilikom uvođenja smene u dvojni integral teško je predvideti u opštem slučaju kakva će se podintegralna funkciji pojaviti u novodobijenom dvojnom integralu. Stoga je od interesa posmatrati neke tipske smene, kao što je transformacija Dekartovih u polarne koordinate. O tome govorimo u nastavku.

Neka je data oblast D iz $\mathbb{R}^2$ koja je ograničena i čiji je rub npr. sačinjen je od delova krivih drugog reda (parabola, kružnica i dr.) Za tačke $M(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, pa samim tim i za one iz D možemo na jedinstven način (osim za tačku $O(0,0)$ koja predstavlja koordinatni početak) uvesti njihovo predstavljanje preko polarnih koordinata tj. uvođenjem polarnog koordinatnog sistema. Polarni koordinatni sistem je definisan tačkom $O(0,0)$ koja se naziva pol i koordinatnom poluosom p . U ovakvom sistemu aktuelne su koordinate ρ (rastojanje tačke M od koordinatnog početka O) i θ– ugao između poluose p i prave date tačkama O i M, meren od p u pozitivnom smeru (videti sliku).



Slika 3.2 Predstavljanje tačke $M(\rho, \theta)$ u polarnim koordinatama [Izvor: Autor].

Time se indukuje sledeće preslikavanje:

$$x = x(\rho, \theta) = \rho \cos \theta$$

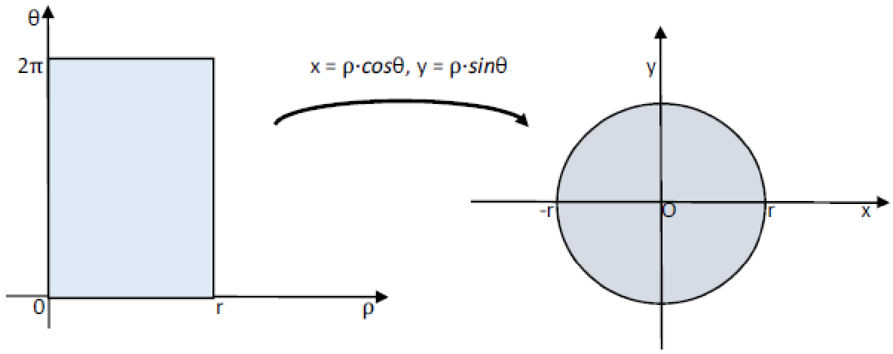
$$y = y(\rho, \theta) = \rho \sin \theta$$

za $\theta \in [0, 2\pi)$ i neko $\rho > 0$, koje predstavlja vezi između polarnog i Dekartovog pravouglog koordinatnog sistemu u ravni, pri čemu pretpostavljamo da se koordinatni početak za oba sistema poklapa, kao i da se poluosa p poklapa sa pozitivnim delom Ox ose. Može se pokazati da ovo preslikavanje bijektivno preslikava odgovarajuću oblast neke oblasti D^* iz ravni $\mathbb{R}^2$ sa polarnim koordinatama u datu oblast D iz $\mathbb{R}^2$ sa Dekartovim koordinatama. Prethodno definisano preslikavanje jedino ne tretira tačku $O(0,0)$ (dakle ne tretira se pol) i ova tačka se može pri integraciji ignorisati ako se ona nađe u D ili na rubu od D.

PRIMER 2

Slučaj kada se polarne koordinate najčešće primenjuju.

Polarnim koordinatama se uspostavlja bijektivno preslikavanje između oblasti $D^* = \{(\rho,\theta) \big| 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \rho \le r\}$ u polarnim koordinatama i oblasti $D = \{(x,y) \big| x^2 + y^2 \le r^2\}$u Dekartovim koordinatama (videti sliku).



Slika 3.3 Preslikavanje oblasti u polarnim koordinatama [Izvor: Autor].

Oblast D sa već pomenutim osobinama je svojim rubom zadala i granice buduće integracije neke funkcije $z = f(x,y)$ definisane na njoj, a samim tim, zajedno sa datim preslikavanjem dobijamo i granice za oblast D^* po koordinatama ρ i θ. U praksi treba granice po veličini θ uvek uzimati da su brojne, dok će granice po veličini ρ tada biti u nekim slučajevima funkcionalne (funkcionalno zavisne od θ), a u nekim slučajevima brojne.
Na ovaj način će biti određen i redosled integracije u novodobijenom dvostrukom integralu.

Prema definiciji Jakobijana, u slučaju polarnih koordinata, imamo da važi:

$$J(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cdot(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho,$$

pa je

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

Napomena. Na osnovu svega izloženog može se zaključiti da je pogodno uvoditi polarne koordinate kada se kvadratna forma $x^2 + y^2$ javlja u podintegralnoj funkciji bilo samostalno, bilo pod nekom funkcijom i/ili ako se javlja kao oblast integracije (tj. ako je ona centralni krug).

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: polarne koordinate.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: polarne koordinate - presek dve kružnice.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER 3

Uvođenje polarnih koordinata u dvojni integral. Kvadratna forma $x^2 + y^2$ se javlja i u zadavanju oblasti integracije i u podintegralnoj funkciji.

Izračunati

$$\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dxdy,$$

gde je oblast D ograničena krugovima $x^2+y^2=1$ i $x^2+y^2=e^2$.

$\mathbf{Rešenje.}$ Zadatak rešavamo uvođenjem polarnih koordinata

$$x = \rho\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\theta,$$

za $\rho > 0$ i $\theta \in [0, 2\pi)$, umesto Dekartovih, pri čemu je $J(\rho,\theta) = \rho$. Tada je

$$x^2+y^2 = 1 \Rightarrow \rho^2 \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 1 \Rightarrow \rho = 1,$$

$$x^2+y^2 = e \Rightarrow \rho^2 \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = e^2 \Rightarrow \rho = e,$$

Odavde zaključujemo, s obzirom da je, da se u oblast D koja predstavlja kružni prsten, preslikava oblast ograničena D^* u polarnim koordinatama sa $1 < \rho < e$ i $\theta \in [0, 2\pi)$ što predstavlja unutrašnjost pravougaonika. Tada početni integral postaje:

$$\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy = \iint_{D^*} \frac{\ln\rho^2}{\rho^2}\rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^e \frac{\ln\rho^2}{\rho}d\rho =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{smena promenljive:} & \text{promena granica} \\ \ln\rho^2 = t & \rho = e \Rightarrow t = 2 \\ \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dt}{2} & \rho = 1 \Rightarrow t = 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\pi \int_1^e \frac{tdt}{2} = 2\pi \frac{t^2}{2}\Big|_0^2 = 2\pi.$$

UOPŠTENE POLARNE KOORDINATE

Primena polarnih koordinata se može uopštiti i za druge oblike podintegralnih funkcije ili oblasti osim za kvadratne forme o kojima je bilo reči. Takođe, pol ne mora biti u tački O(0,0).

Opštije gledano u odnosu na prethodno, mogu se javljati i kvadratne forme oblika $(x-p)^2+(y-q)^2$ i tada treba uvoditi tzv. pomerene polarne koordinate sa polom u tački $O(p,q)$ u obliku

$$x = p + \rho\cos\theta$$

$$y = q + \rho\sin\theta$$

pri čemu u ovom slučaju Jakobijan ostaje isti. Takođe, može se javiti i kvadratna forma oblika

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

kada se pojednostavljivanje vrši uvođenjem sledećeg oblika polarnih koordinata

$$x = a\cdot\rho\cdot\cos\theta$$

$$y = b\cdot\rho\cdot\sin\theta$$

U ovom slučaju za Jakobijan važi $J(\rho,\theta) = ab\rho$.
Na kraju recimo da se korišćenje polarnih koordinata može dalje generalizovati. Najopštiji oblik predstavljaju uopštene polarne koordinate

$$x = a\cdot\rho^\alpha\cdot\cos^\beta\theta$$

$$y = b\cdot\rho^\alpha\cdot\sin^\beta\theta$$

$a,b,\alpha,\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, u slučaju da je pol u tački $O(0,0)$, pri čemu je Jakobijan $J(\rho,\theta) = a\cdot b\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\rho^{2\alpha-1}\cdot\cos^{\beta-1}\theta\cdot\sin^{\beta-1}\theta$

Ova generalizacija se može još jedino posmatrati ako pol nije u koordinatnom početku, već u tački $O(p,q)$. Tada je

$$x = p + a \cdot \rho^{\alpha} \cdot \cos^{\beta} \theta$$

$$y = q + b \cdot \rho^{\alpha} \cdot \sin^{\beta} \theta$$

$a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pri čemu je Jakobijan

$$J(\rho, \theta) = a \cdot b \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \rho^{2\alpha-1} \cdot \cos^{\beta-1} \theta \cdot \sin^{\beta-1} \theta.$$

Poglavlje 4

Izračunavanje površine ravnog lika

PRIMENA DVOJNOG INTEGRALA NA IZRAČUNAVANJE POVRŠINE RAVNOG LIKA

Izračunavanje površine ravnog lika se može izvršiti primenom dvojnog integrala.

Ako je data ograničena oblast D u ravni Oxy (videti sliku), tada se površina ove figure može izračunati po formuli

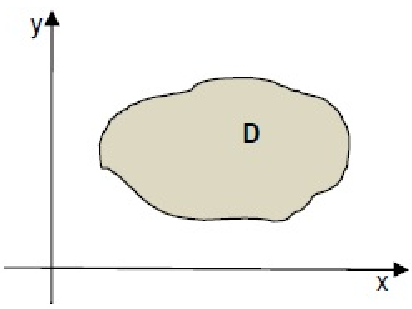
$$P=\iint_D dxdy$$

gde je P površina oblasti D. Neka je data neprekidna i ograničena funkcija $z=f(x,y)$, definisana na ovoj oblasti D i neka je

$$m=\inf_{(x,y)\in D}|f(x,y)|,\ M=\sup_{(x,y)\in D}|f(x,y)|.$$

Tada je

$$m\cdot P\leq\left|\iint_D dxdy\right|\leq M\cdot P.$$



Slika 4.1 Ograničena oblast [Izvor: Autor].

Napomena. U primeru na početku ove lekcije smo dali jednu intepreraciju dvojnog integrala, gde smo ukazali na to da nad određenom oblašću D on predstavlja prosečnu udaljenost funkcije $z=f(x,y)$ koja se integrali u ovom smislu od Oxy ravni. Sada ćemo koristeći taj primer objasniti prethodno datu formulu.Kada jespecijalno $z=1$, tada ta udaljenoststalno iznosi 1. Kao posledicu dobijamo,na osnovutoga kako smouveli intepretaciju dvojnog integrala,da se numeričke vrednosti zapremine tela koje se nalazi ispodravni $z = 1$, a iznad oblasti D, može izjednačiti sa površinom oblasti D. Svakako, ovde je i dalje na snazi pretpostavka da je ova oblast ogranuičena i merljiva.

PRIMER 1 – 1. DEO

Određivanje površine kruga primenom dvojnog integrala u Dekartovim koordinatama - bez uvođenja polarnih koordinata.

Primenom dvojnog integrala izračunati površinu kruga $x^2 + y^2 = r^2$.

Rešenje. Zadatak ćemo rešavati na dva načina: određivanjem površine kruga preko Dekartovih koordinata i uvođenjem polarnih koordinata sa polom u tački $O(0,0)$.

Prvi način: Primenićemo formulu za određivanje površine figure u ravni. U ovom slučaju je

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -r \leq x \leq r, \ -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\right\}.$$

Tada je

$$P = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-r}^{r} \left(\int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \right) dx = 2\int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Sada ćemo obnoviti kako se rešava poslednji integral. Integral $\int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx$ rešavamo smenom $x = r\sin t$ i ima da je $dx = r\cos t$. Za $x = -r$ imamo da je $t = -\frac{\pi}{2}$, dok je za $x = r$ imamo da je $t = \frac{\pi}{2}$. Tada je

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\, r\cos t dt = r^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t dt = \\
&= r^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cos t dt = r^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \\
&= r^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = r^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \ldots = \\
&= \frac{r^2\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Napomena. Iskoristili smo prilikom rešavanja prethodnog intergala u jednom koraku da je $|\cos t| = \cos t$, jer je $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Konačno je

$$P = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx = r^2\pi.$$

PRIMER 1 - 2. DEO

Određivanje površine kruga primenom dvojnog integrala uvođenjem polarnih koordinata.

Drugi način: Uvođenjem polarnih koordinata sa polom u tački O(0, 0) na sledeći način:

$$x = x(\rho, \theta) = \rho\cos\theta$$

$$y = y(\rho, \theta) = \rho\sin\theta$$

pri čemu je Jakobijan $J = \rho$ i važi da je $0 \le \rho \le r$, kao i $0 \le \theta \le 2\pi$. Tada imamo da je:

$$P = \iint_D dxdy = \left(\int_0^r \rho d\rho\right) \cdot \left(\int_0^2 \pi d\theta\right) = \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^r \cdot \theta\Big|_0^{2\pi} = r^2\pi.$$

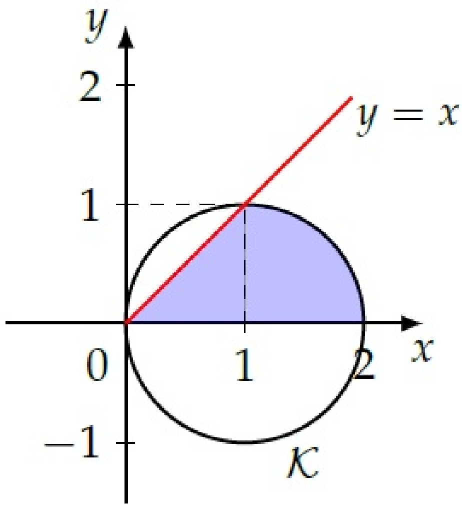
Napomena. Iz ovog primera se može videti koliko uvođenja polarnih koordinata , u određenim situacijama, može ubrzati rešavanje dvojnih integrala.

PRIMER 2

Određivanje površine dela kruga primenom dvojnog integrala bez uvođenja i sa uvođenjem polarnih koordinata.

Primer. Izračunati površinu figure koja je ograničena linijama $x^2 + y^2 = 2x, y = 0$ i $y = x$ uvođenjem i bez uvođenja polarnih koordinata

Rešenje. Iz $x^2 + y^2 = 2x$ imamo da je kanonski oblik jednačine ove kružnice glasi $\mathcal{K} : (x-1)^2 + y^2 = 1$. Ova kružnica i prave $y = 0$ i $y = x$ ograničavaju oblast D čiju površinu treba izračunati (videti sliku).



Slika 4.2 Oblast određena datim uslovima [Izvor: Autor].

Prvi način Izračunajmo, sada, površinu oblasti D uvođenjem polarnih koordinata sa polom u tački $O(0,0)$.

Tada imamo da je $x=\rho\cdot\cos\theta,\quad y=\rho\cdot\sin\theta$ pri čemu je Jakobijan $J=\rho$ i važi da je

$$\begin{gathered}x^2+y^2=2x \Rightarrow \rho^2=2\rho\cos\theta \Rightarrow 0\le\rho\le 2\cos\theta,\\ y=x \Rightarrow \rho\sin\theta=\rho\cos\theta \Rightarrow \operatorname{tg}\theta=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4},\\ y=0 \Rightarrow \sin\theta=0 \Rightarrow \theta=0.\end{gathered}$$

Iz poslednja dva uslova imamo da je $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$. Sada je

$$\begin{aligned}P=\iint\limits_D dxdy&=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int\limits_0^{2\cos\theta}\rho d\rho=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{2\cos\theta}d\theta=\\ &=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos^2\theta d\theta=\ldots=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Drugi način: Izračunajmo površinu oblasti D preko Dekartovih koordinata

$$P=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}}dy=\ldots=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: izračunavanje površine ravnog lika, primenom dvojnog integrala.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Određivanje zapremine tela i površine dela površi

PRIMENA DVOJNOG INTEGRALA ZA ODREĐIVANJE ZAPREMINE TELA

Određivanje zapremine tela se može vršiti primenom dvojnog integrala.

Neka je data neprekidna i ograničena funkcija $z = f(x,y)$ na ograničenoj oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ i neka je $f(x,y) \geq 0$, za $(x,y) \in D$. Videli smo da ako uočimo cilindrično telo, u oznaci T, čije su baze (osnove) oblasti D i $f(D)$ i čiji je omotač takva površ koja nastaje kao trag (u $\mathbb{R}^3$) kretanja neke prave P (paralelne sa z osom) po rubu oblasti D, tada važi

$$V_T = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy,$$

gde je V_T zapremina tela T.

Pretpostavimo sada da je $z = f(x,y) \leq 0$, za $(x,y) \in D$. Tada se može dokazati da je zapremina analognog cilindričnog tela (u odnosu na prethodni slučaj) jednaka sa

$$V_T = -\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Zapremine nekih komplikovanijih tela u $\mathbb{R}^3$ se mogu izračunati preko prethodnih formula uz rastavljanje tog tela na delove koji odgovaraju ovom ili prethodnom slučaju.

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: određivanje zapremine

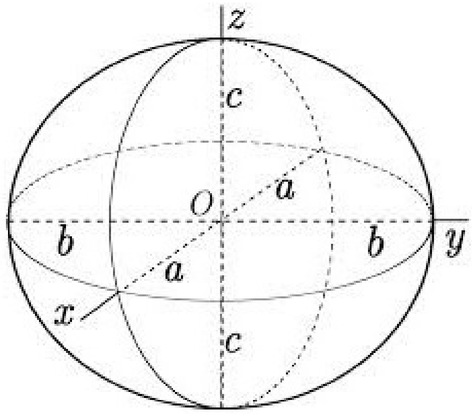
Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER 1

Određivanje zapremine tela.

Primenom dvojnog integrala izračunati zapreminu elipsoida

$$E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$



Slika 5.1 Centralni elipsoid [Izvor: Autor].

Rešenje. Zapreminu elipsoida (videti sliku) ćemo izračunati tako što ćemo izračunati njegovu zapreminu u prvom oktantu i sve pomnožiti sa 8.

$$\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \Rightarrow z=\pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

a kako je u prvom oktantu z pozitivna veličina, biramo izraz za z sa predznakom plus. Zadatak se rešava uvođenjem uopštenih polarnih koordinata. Tada je zapremina jednaka

$$\begin{aligned}
V &= 8\iint_D z\,dxdy = 8c\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy = \\
&= 8c\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dy = \\
&= \left| \begin{array}{ll} x=a\rho\cos\theta, & 0<\rho\le 1, \\ y=b\rho\sin\theta, & 0<\theta\le\frac{\pi}{2}, \\ J=ab\rho. & \end{array} \right| = \\
&= 8c\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,ab\rho d\rho = 8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho = \\
&= [\text{uvodeći smenu } 1-\rho^2=u^2 \text{ dobijamo}] = \frac{4abc\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Napomena. Iz prethodno dobijene formule za zapreminu elipsoida, može se izvesti formula za određivanje zapremine lopte. Naime, lopta je specijalni slučaj elipsoida i tada je $a=b=c=r$. Dakle, njena zapremina $V=\frac{4r^3\pi}{3}$.

PRIMER 2

Određivanje zapremine tela omeđenog sa površi i ravni.

Izračunati zapreminu ograničenu paraboloidom $z = 3 - x^2 - y^2$ i ravni $z = 0$.

Rešenje. Zadatak rešavamo uvođenjem polarnih koordinata

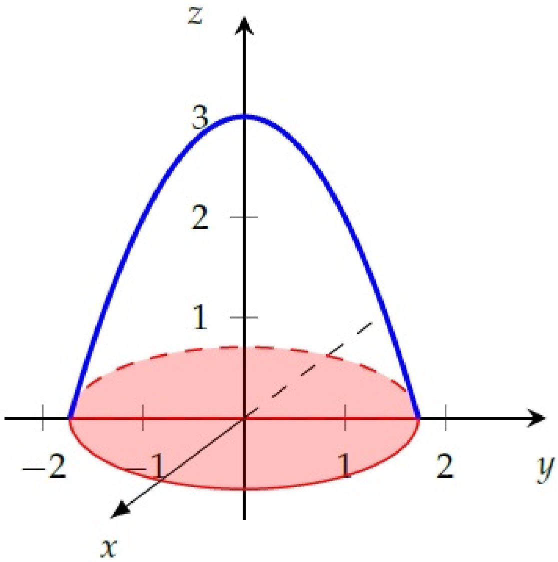
$$x = \rho \cdot \cos\theta$$

$$y = \rho \cdot \sin\theta$$

pri čemu je $\theta \in [0, 2\pi],\ \rho \in [0, \sqrt{3}]$. Tada je

$$V = \iint_D z dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} (3 - \rho^2)\rho d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{3}} d\theta = \frac{9\pi}{2}.$$

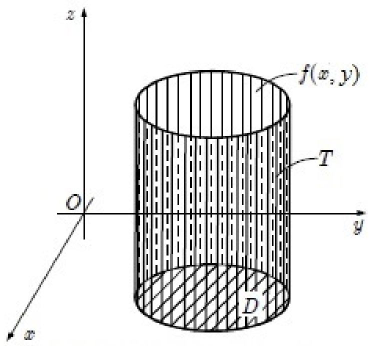


Slika 5.2 Telo čiju zapreminu određujemo [Izvor: Autor].

PRIMENA DVOJNOG INTEGRALA ZA ODREĐIVANJE POVRŠINE DELA POVRŠI U PROSTORU

Formula za određivanje površine dela površi u prostoru.

Neka data površ S jednoznačnom funkcijom $z = f(x, y), (x, y) \in D$ (tj. prave paralelne osi Oz je seku najviše u po jednoj tački), koja je diferencijabilna u oblasti D, što znači da su njeni parcijalni izvodi $p = z'_x$ i $q = z'_y$ neprekidni u oblasti D (videti sliku).



Slika 5.3 Određivanje površine del površi [Izvor: Autor].

Tada se površina površi S, u oznaci $P(S)$, određuje po formuli

$$P(S)=\iint\limits_{D}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy.$$

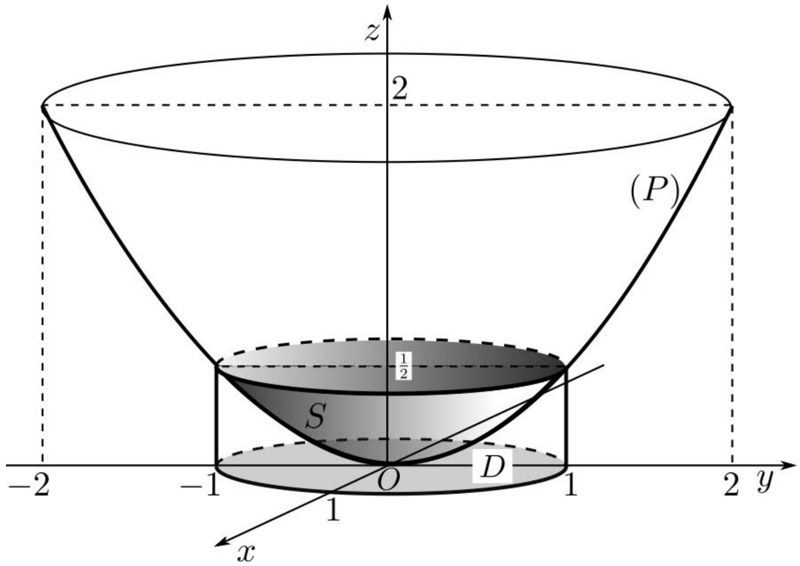
PRIMER 3

Izračunavanje površine dela površi u prostoru.

Izračunati površinu dela paraboloida $2z=x^2+y^2$ koju iseca cilindar $x^2+y^2=1$.

Rešenje. Tražena površina je označena sa S na datoj slici. Tada važi

$$\begin{aligned}
P(S)&=\iint\limits_{D}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy=\left|\begin{matrix} p=x, \\ q=y, \end{matrix}\right|=\\
&=\iint\limits_{D}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=\left|\begin{matrix} x=\rho\cos\theta, & 0\le\rho\le 1 \\ y\rho\sin\theta, & 0\le\theta\le 2\pi, \\ J=\rho, & \end{matrix}\right|=\\
&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho=2\pi\int_0^1\rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho=\\
&=2\pi\left.\frac{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1\cdot\frac{1}{2}=\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).
\end{aligned}$$



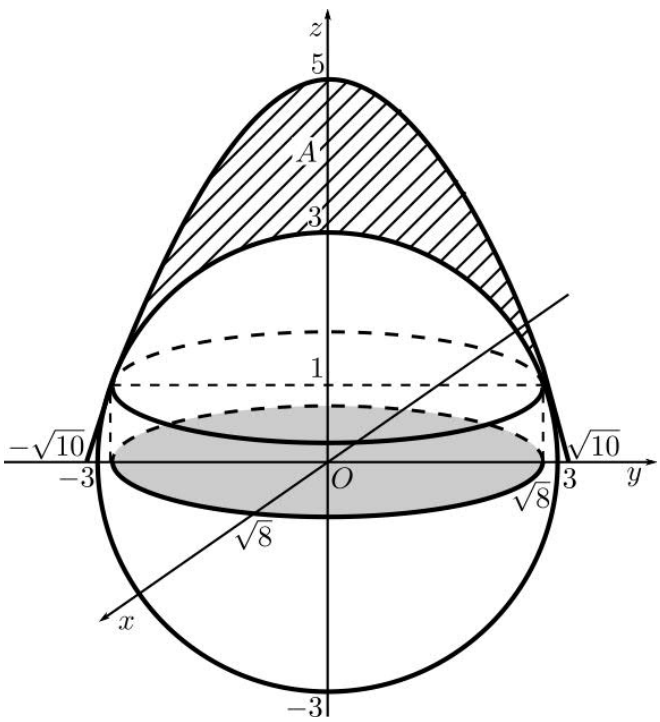
Slika 5.4 Izračunavanje površine dela površi u prostoru [Izvor: Autor].

PRIMER 4 – 1. DEO

Skiciranje slike i određivanje potrebnih veličina.

Naći površinu tela određenog uslovima $x^2+y^2+z^2 \geq 9$i $x^2+y^2+2z \leq 10$.

Rešenje. Spoljašnjost sfera $x^2+y^2+z^2=9$ i unutrašnjost paroboloida $5-z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ određuje telo čiju površinu treba odrediti (videti sliku).



Slika 5.5 Telo omeđeno datim površima [Izvor: Autor].

Presek ovih površi po koordinati z se određuje iz sistema

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9,$$

$$x^2 + y^2 + 2z = 10.$$

Oduzimanjem prve od druge jednačine dobijamo da je $z^2 - 2z + 1 = 0$, tj. da je $z = 1$. Dakle, ove dve površi se seku na visini 1 iznad Oxy ravni i kada postavimo ravan $z = 1$ ona u preseku sa ovim površima daje oblast integracije po dvojnom integralu i to je krug $x^2 + y^2 = 8$.

Tražena površina predstavlja zbir površine dela gornje polusfere (za $1 \leq z \leq 3$) i dela površine paraboloida (za $1 \leq z \leq 5$).

Jednačina gornje polusfere je $z_S = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, pa je

$$p_S = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \; q_S = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

Takođe, za paraboloid imamo da je

$$p_P = -x, \;\; q_P = -y.$$

PRIMER 4 - 2. DEO

Izračunavanje površine dela površi u prostoru tela omeđenog sa dve površi.

Tražena površina je

$$P = P_S + P_P = \iint\limits_D \left(\frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} + \sqrt{1 + x^2 + y^2} \right) dxdy =$$

$$= \left| \begin{array}{lll} D : x^2 + y^2 = 8, & x = \rho\cos\theta, & 0 < \rho \le \sqrt{8}, \\ \quad J = \rho, & y = \rho\sin\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi, \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\sqrt{8}} \left(\frac{3}{\sqrt{9 - \rho^2}} + \sqrt{1 + \rho^2} \right) d\rho =$$

$$= -6\pi \int\limits_0^{\sqrt{8}} \frac{-2\rho d\rho}{2\sqrt{9 - \rho^2}} + 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{8}} \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \sqrt{1 + \rho^2}\, 2\rho \right) d\rho =$$

$$= -6\pi \int\limits_0^{\sqrt{8}} \left(\sqrt{9 - \rho^2} \right)' d\rho + \frac{2\pi}{3} \int\limits_0^{\sqrt{8}} \left[\left(\sqrt{1 + \rho^2} \right)^3 \right]' d\rho =$$

$$= -6\pi \sqrt{9 - \rho^2} \Big|_0^{\sqrt{8}} + \left(\frac{2\pi}{3} \sqrt{1 + \rho^2}^3 \right) \Big|_0^{\sqrt{8}} =$$

$$= -6\pi(1 - 3) + \frac{2\pi}{3}(27 - 1) =$$

$$= \frac{88\pi}{3}.$$

Poglavlje 6

Pokazna vežba

ZADATAK 1 (10 MINUTA)

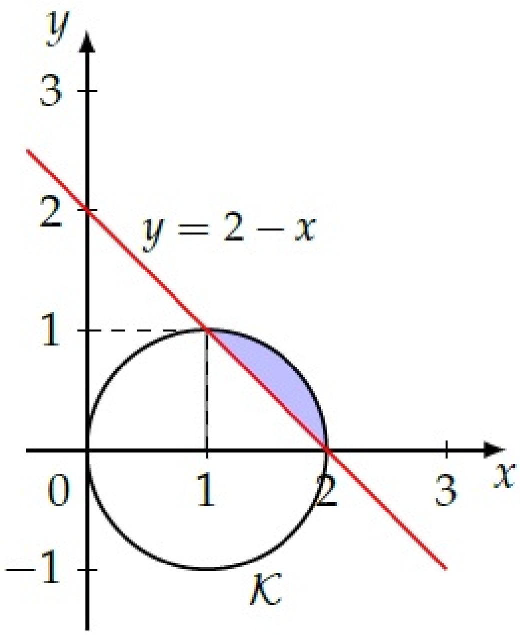
Izmena poretka integraljenja u dvojnom integralu.

Iz granica datog integrala možemo videti da za oblast integracije D važi $D=\{(x,y)\mid x\in[1,2]\wedge 2-x\leq y\leq\sqrt{2x-x^2}\}$. Iz $y=\sqrt{2x-x^2}$ dobijamo da je $y^2+x^2-2x=0$, tj. imamo da je kanonski oblik ove kružnice $K:(x-1)^2+y^2=1$. Na osnovu ovih granica možemo skicirati oblast integracije D, koja je prikazana na datoj slici. Primetimo da su u ovom slučaju granice brojne po promenljivoj x, a funkcionalne su (zavise od x) po promenljivoj y . U tom slučaju se slika posmatra od Ox ose po kojoj je određuju brojne granice, tj. oblasti D pripadaju sve tačke ravni koje se nalaze između pravih $x=1$ i $x=2$. Granice po y određujemo tako što gledamo krive koje ograničavaju oblast D. Njenu donju granicu čini linija koja je bliža Ox osi i to je prava $y=2-x$, a dalja od nje čini gornju granicu i to je prava $y=\sqrt{2x-x^2}$.

Ako okrenemo redosled integracije tada je očigledno $y\in[0,1]$ (sliku sada posmatramo u odnosu na Oy osu, s obzirom da su granice za y brojne). Odredimo sada granice za promenljivu x. Ona je funkcionalna u zavisnosti od y. Donja granica je prava $y=2-x$ (bliža Oy osa), odakle je $x=2-y$, a gornja granica je kružnica $\mathcal{K}$ odakle je $x=1\pm\sqrt{1-y^2}$. Kriva $x=1+\sqrt{1-y^2}$ predstavlja deo polukružnice koji se nalazi desno od prave $x=1$ i on nam treba.

Sada je

$$\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy=\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dy$$



Slika 6.1 Prikaz oblast na kojoj sprovodimo integraciju [Izvor: Autor].

ZADATAK 2 (10 MINUTA)

Izračunavanje dvostrukog integrala primenom Fubinijevog stava.

Izračunati

$$\iint_D xy^2 dxdy \ , \ D = [2, 4] \times [-1, 2],$$

$$\iint_D \cos(x+y) \quad dxdy, \ , \ D : 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}.$$

Rešenje:

1)

$$\iint_D xy^2 dxdy = \int_2^4 \left(\int_{-1}^{2} xy^2 dy \right) dx = \int_2^4 \left(x\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{2} \right) dx = \int_2^4 x\left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right) dx = \int_2^4 3x \quad dx = 3\frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = 3\left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) = 18$$

ili

$$\iint_D xy^2 dxdy = \int_{-1}^{2} \left(\int_2^4 xy^2 dx \right) dy = \int_{-1}^{2} \left(y^2 \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 \right) dy = \int_{-1}^{2} y^2 \left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) dy = \int_{-1}^{2} 6y^2 \quad dy = 6\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = 6\left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right) = 18.$$

2)

$$\iint_D \cos(x+y) \quad dxdy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \cos(x+y) dy \right) dx = \int_0^{\pi/2} \left(\sin(x+y)\Big|_0^{\pi/2} \right) dx = \int_0^{\pi/2} \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2} \right) - \sin x \right) dx$$

$$= -\cos\left(x + \frac{\pi}{2} \right)\Big|_0^{\pi/2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = -(-1-0) + (0-1) = 0.$$

ZADATAK 3 - 1. DEO (10 MINUTA)

Izračunavanje dvojnog integrala primenom Fubinijevog stava, lik je ograničen parabolom i pravama.

Izračunati dvojni integral

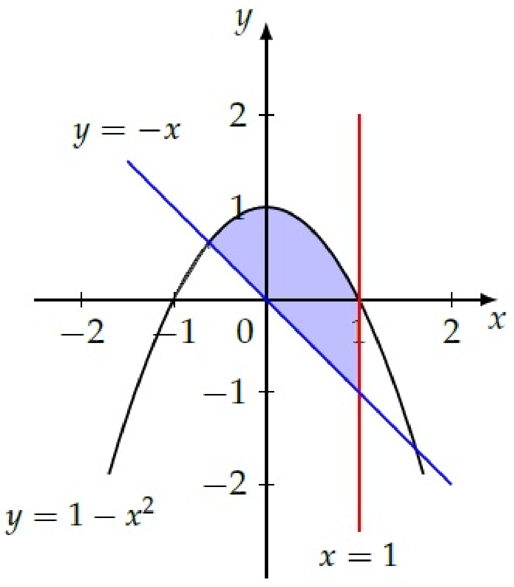
$$\iint_D (x+y^3)\,dxdy,$$

gde je $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1 \wedge -x\le y\le -x^2+1\}$.
Rešenje.

Oblast integracije je $D: 0\le x\le 1, \quad -x\le y\le -x^2+1$ (videti sliku)

$$\iint_D\left(x+y^3\right)dxdy=\int_0^1\left(\int_{-x}^{-x^2+1}\left(x+y^3\right)dy\right)dx=\int_0^1\left(xy+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{-x}^{-x^2+1}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{4}+x-x^3+\frac{5x^4}{4}-x^6+\frac{x^8}{4}\right)dx$$

$$=\left(\frac{x}{4}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{4}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{36}\right)\Bigg|_0^1=\frac{40}{63},$$



Slika 6.2 Grafički predstavljena oblast integracije [Izvor: Autor].

ZADATAK 3 - 2. DEO

Izračunavanje dvojnog integrala primenom Fubinijevog stava, lik je ograničen presekom dve parabole.

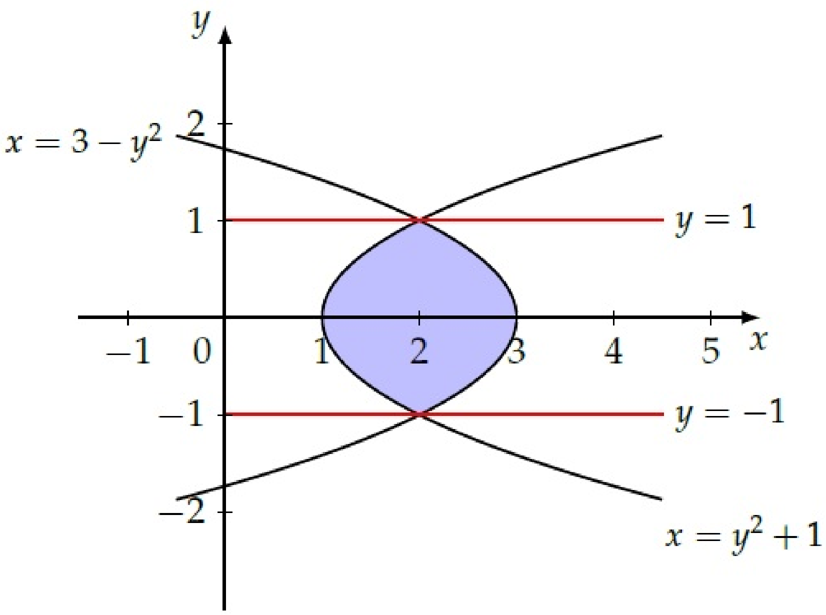
Izračunati dvojni integral $\iint\limits_D xy^4\,dxdy$, gde je $D = \{(x,y) \mid -1 \le y \le 1 \wedge y^2+1 \le x \le 3-y^2\}$.

Rešenje.

Oblast integracije je $D: -1 \le y \le 1, \quad y^2+1 \le x \le 3-y^2$

$$\iint\limits_D xy^4 dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{y^2+1}^{3-y^2} xy^4 dx\right)dy = \int_{-1}^{1} y^4 \frac{x^2}{2}\Big|_{y^2+1}^{3-y^2} dy = \int_{-1}^{1} y^4\left(\frac{\left(3-y^2\right)^2}{2} - \frac{\left(y^2+1\right)^2}{2}\right)dy$$

$$= \int_{-1}^{1} y^4\left(\frac{9-6y^2+y^4}{2} - \frac{y^4+2y^2+1}{2}\right)dy = 4\int_{-1}^{1}\left(y^4-y^6\right)dy = 4\left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{16}{35}.$$



Slika 6.3 Grafički predstavljena oblast integracije [Izvor: Autor].

ZADATAK 4 (10 MINUTA)

Izračunavanje dvojnog integrala primenom Fubinijevog stava.

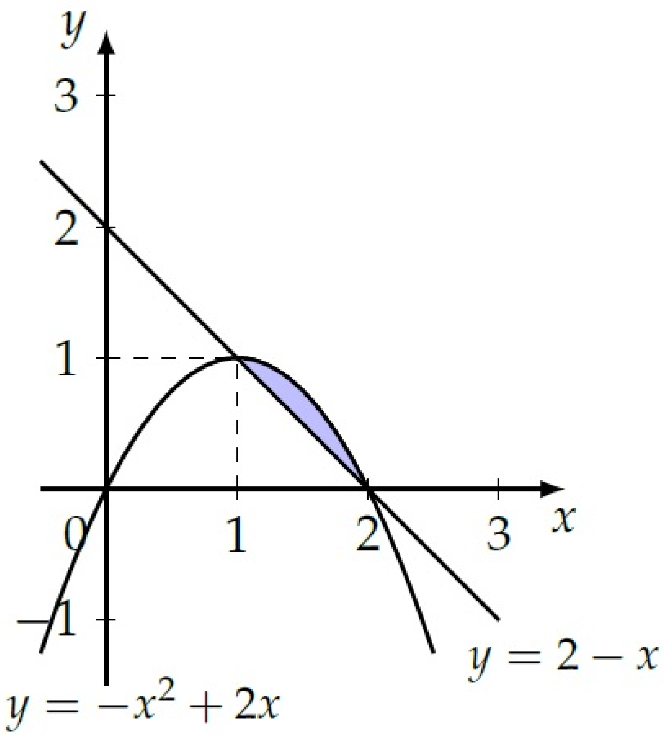
Odrediti dvostruki integral funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2$ na oblasti D ograničenoj krivama $y = -x^2 + 2x, \quad y = 2 - x.$

Rešenje: Datu oblast (videti sliku) treba podeliti na dva dela pravom $x = 1$.

$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy = \iint\limits_{D_1}\left(x^2+y^2\right)dxdy + \iint\limits_{D_2}\left(x^2+y^2\right)dxdy = \int_0^1\left(\int_0^{-x^2+2x}\left(x^2+y^2\right)dy\right)dx + \int_1^2\left(\int_0^{2-x}\left(x^2+y^2\right)dy\right)dx =$$

$$\int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{-x^2+2x} dx + \int_1^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{2-x} dx = \int_0^1 \left(x^2\left(-x^2+2x\right) + \frac{\left(-x^2+2x\right)^3}{3}\right) dx + \int_1^2 \left(x^2(2-x) + \frac{(2-x)^3}{3}\right) dx =$$

$$\cdots = \frac{61}{42}.$$



Slika 6.4 Grafički predstavljena oblast integracije [Izvor: Autor].

ZADATAK 5 (10 MINUTA)

Izračunavanje dvojnog integrala prelaskom na polarne koordinate.

Izračunati dvostruki integral

$$\iint_D e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$$

na oblast $D : x^2 + y^2 \leq 1.$

Rešenje: Data oblast integracije je jedinična kružnica sa centrom u koordinatnom početku. Prelaskom na polarne koordinate smenom

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$dxdy = rdrd\varphi$

dobijamo

$$x^2+y^2=r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=r^2$$

$$\iint_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\iint_{D^*} e^{-r^2}rdrd\varphi$$

na oblasti $D^*: 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$ što je dalje jednako

$$\iint_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\iint_{D^*} e^{-r^2}rdrd\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 e^{-r^2}rdr\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^1 d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}\right)d\varphi=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}\right)\varphi\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}\right)2\pi=\left(1-\frac{1}{e}\right)\pi.$$

ZADATAK 6 (15 MINUTA)

Izračunavanje dvojnog integrala prelaskom na polarne koordinate

Izračunati dvostruki integral

$$\iint_D \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

na oblasti D ograničenoj krivama $x^2+y^2=e^2$ i $x^2+y^2=e^4$.

Rešenje:

Data oblast integracije je kružni prsten ograničen krivama sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnika e i e^2 . Prelaskom na polarne koordinate smenom

$$x=r\cos\varphi$$

$$y=r\sin\varphi$$

$$dxdy=rdrd\varphi$$

dobijamo

$$x^2+y^2=r^2$$

Tada imamo da je

$$\iint_D \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint_{D^*} r\ \ln r^2 drd\varphi$$

na oblasti $D^*: e \le r \le e^2 \quad , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$,

što je dalje jednako

$$\iint_D \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy = \iint_{D^*} r \quad \ln r^2 dr d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_e^{e^2} r \quad \ln r^2 dr\right)d\varphi = \begin{pmatrix} \text{smena} \\ r^2 = t \\ 2rdr = dt \\ e \to e^2 \\ e^2 \to e^4 \end{pmatrix} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\int_{e^2}^{e^4} \ln t \quad dt\right)d\varphi$$

$$= \begin{pmatrix} u = \ln t & dv = dt \\ du = \frac{dt}{t} & v = t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(t\ln t\Big|_{e^2}^{e^4} - \int_{e^2}^{e^4} \frac{t}{t}dt\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(4e^4 - 2e^2 - e^4 + e^2\right)d\varphi = \frac{1}{2}\left(3e^4 - e^2\right)\varphi\Big|_0^{2\pi} = \left(3e^4 - e^2\right)\pi.$$

ZADATAK 7 (10 MINUTA)

Izračunavanje dvojnog integrala uvođenjem smene.

Izračunati vrednost integrala $\iint_D (y-x)dxdy$, ako je oblast ograničena pravama

$y - x = 1, \quad y - x = -3, \quad y + \frac{1}{3}x = \frac{7}{3}, \quad y + \frac{1}{3}x = 5$

Rešenje: Uvođenjem smene

$u = y - x, \qquad v = y + \frac{1}{3}x,$

tada je $v - u = \frac{4}{3}x$ pa je $x = \frac{3}{4}\left(v-u\right)$ i $y = u + x = u + \frac{3}{4}v - \frac{3}{4}u = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v$. Tada Jakobijan glasi:

$$J = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{9}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}$$

$y - x = 1 \to u = 1, \quad y - x = -3 \to u = -3, \quad y + \frac{1}{3}x = \frac{7}{3} \to v = \frac{7}{3}, \quad y + \frac{1}{3}x = 5 \to v = 5$

$$\iint_D (y-x)dxdy = \iint_{D'} u\frac{3}{4}dudv = \frac{3}{4}\int_{7/3}^{5} dv \int_{-3}^{1} u \quad du = \frac{3}{4}\left(5 - \frac{7}{3}\right)\frac{u^2}{2}\Big|_{-3}^{1} = \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{1^2-(-3)^2}{2} = 2\cdot\frac{1-9}{2} = -8.$$

Napomena. Za vežbu zadatak rešiti bez uvođenja smene.

ZADATAK 8 – 1. DEO (20 MINUTA)

Uvođenje smene u dvojni integral i primena Fubinijeve teoreme.

Izračunati integral $\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, gde je $D=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^4+y^4\le 1,\quad x>0,\quad y>0\right\}$.

Rešenje:

Uvedimo smenu $u=x^2,\quad v=y^2$, odakle je $x=\sqrt{u},\quad y=\sqrt{v},\quad J=\frac{1}{4\sqrt{uv}}$.

$$\iint_{x^4+y^4\le 1,\quad x>0,\quad y>0}\left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint_{u^2+v^2\le 1}\left(u+v\right)\frac{1}{4\sqrt{uv}}dudv$$

Prelaskom na polarne coordinate

$u=\rho\cos\varphi$

$v=\rho\sin\varphi$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1\rho\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right)\frac{1}{4\rho\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}\rho d\rho d\varphi=\frac{1}{4}\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^1\int_0^{\pi/2}\frac{1+\text{ctg}\ \varphi}{\sqrt{\text{ctg}\ \varphi}}d\varphi=\left|\begin{array}{c} t=\sqrt{\text{ctg}\ \varphi}\\ t^2=\text{ctg}\ \varphi\\ 2t\ \ dt=-\frac{1}{\sin^2\varphi}d\varphi\\ -\frac{2t}{1+t^4}dt=d\varphi\end{array}\right|=$$

$$\frac{1}{8}\int_{+\infty}^{0}\frac{1+t^2}{t}\left(-\frac{2t}{1+t^4}\right)dt=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{1+t^4}dt$$

Posmatrajmo poslednji integral kao neodređeni i rešimo ga metodom neodrešenih koeficijenata.

ZADATAK 8 – 2. DEO

Rešavanje nesvojstvenog integrala.

$$\int\frac{1+t^2}{1+t^4}dt=\int\frac{1+t^2}{1+t^4+2t^2-2t^2}dt=\int\frac{1+t^2}{\left(1+t^2\right)^2-2t^2}dt=\int\frac{1+t^2}{\left(1+t^2-\sqrt{2}t\right)\left(1+t^2+\sqrt{2}t\right)}dt$$

$$\frac{1+t^2}{\left(1+t^2-\sqrt{2}t\right)\left(1+t^2+\sqrt{2}t\right)}=\frac{At+B}{\left(1+t^2-\sqrt{2}t\right)}+\frac{Ct+D}{\left(1+t^2+\sqrt{2}t\right)}.$$

Metodom neodređenih koeficijenata se dobija da je $A=C=0,\quad B=D=\frac{1}{2}$.

$$\frac{1+t^2}{\left(1+t^2-\sqrt{2}t\right)\left(1+t^2+\sqrt{2}t\right)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2-\sqrt{2}t}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2+\sqrt{2}t}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-t\right)^2}+\frac{1}{\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+t\right)^2}\right)=\frac{1}{1+(1-\sqrt{2}t)^2}+\frac{1}{1+(1+\sqrt{2}t)^2}.$$

$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy = \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\int_0^b \left(\frac{1}{1+(1-\sqrt{2}t)^2} + \frac{1}{1+(1+\sqrt{2}t)^2}\right)dt = \frac{1}{4}\left(\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+(1-\sqrt{2}t)^2}dt + \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+(1+\sqrt{2}t)^2}\right) =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{smena za prvi integral } m = 1-\sqrt{2}t \\ \text{smena za drugi integral } n = 1+\sqrt{2}t \end{matrix} \right| = \dots = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

ZADATAK 9 (10 MINUTA)

Izračunavanje površine ravnog lika ograničenog parabolom i pravom.

Izračunati površinu figure ograničene parabolom $y = -x^2 + 6x - 5$ i pravom $y = x - 1$.

Rešenje: Presečne tačke datih linija su $A(1, 0)$ i $B(4, 3)$ jer jednačina

$$-x^2 + 6x - 5 = x - 1$$

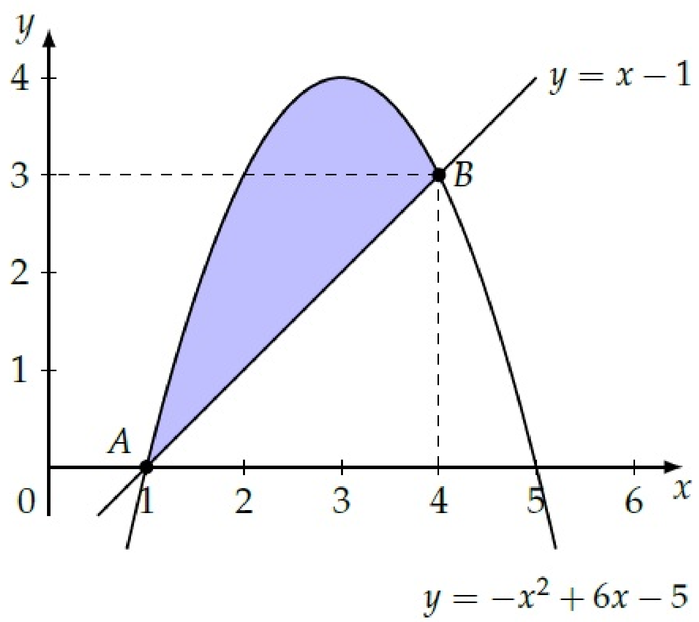
$$-x^2 + 5x - 4 = 0$$

ima rešenja $x = 1$ i $x = 4$.

Dakle, tražena površina se preko dvostrukog integrala dobija kao

$$P = \iint_D dxdy = \int_1^4 \left(\int_{x-1}^{-x^2+6x-5} dy\right)dx = \int_1^4 \left(-x^2 + 6x - 5 - x + 1\right)dx = \int_1^4 \left(-x^2 + 5x - 4\right)dx =$$

$$\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right)\Bigg|_1^4 = -\frac{4^3}{3} + \frac{5\cdot 4^2}{2} - 4\cdot 4 - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{5\cdot 1^2}{2} - 4\cdot 1\right) = 4.5.$$



Slika 6.5 Oblast integracije ograničena parabolom $y = -x^2 + 6x - 5$ i pravom $y = x - 1$ [Izvor: Autor].

ZADATAK 10 (10 MINUTA)

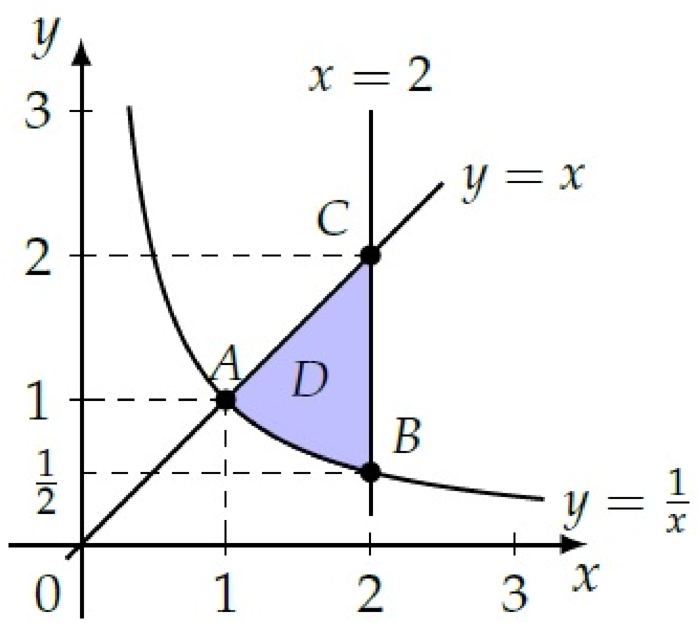
Primena dvojnog integrala na izračunavanje zapremine tela.

Izračunati zapreminu tela ograničenog ravni $z = 0$ i grafikom nenegativne funkcije $f(x, y) = \frac{x^2}{y^2}$ na oblasti D omeđene krivama $x = 2, \quad y = x$ i $xy = 1$.

Rešenje:

Sa slike vidimo da je $D : 1 \le x \le 2, \quad \frac{1}{x} \le y \le x$

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy = \int_1^2 \left(\int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy \right) dx = \int_1^2 \left(-\frac{x^2}{y} \Big|_{1/x}^{x} \right) dx = \int_1^2 \left(-x + x^3 \right) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_1^2 = -\frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4} + \frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4} = \frac{9}{4}.$$



Slika 6.6 Oblast integracije D u ravni Oxy [Izvor: Autor].

ZADATAK 11 (10 MINUTA)

Izračunavanje površine dela površi.

Odrediti površinu dela konusa $z^2 = x^2 + y^2$, isečenog cilindrom $x^2 + y^2 = 2x$.

Rešenje: Iz jednačine konusa imamo da je

$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2},$

Pa je odatle

$z_x' = p = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad z_y' = q = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

Primenom formule za izračunavanje površine dela površi imamo da je:

$$P = 2\iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy = 2 \iint_{(x-1)^2 + y^2 \le 1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}dxdy =$$

$$2 \iint_{(x-1)^2 + y^2 \le 1} \sqrt{2}dxdy = 2\sqrt{2} \iint_{(x-1)^2 + y^2 \le 1} dxdy = 2\sqrt{2}\pi$$

jer je

$$\iint_{(x-1)^2 + y^2 \le 1} dxdy = \pi$$

tj.prethodna formula predstavlja formulu za izračunavanje površina kruga $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ (naime $(x-1)^2 + y^2 = 1$ je kanonski oblik kružnice $x^2 + y^2 = 2x$).

ZADATAK 12 (10 MINUTA)

Određivanje zapremine tela omeđenog sa dve površi.

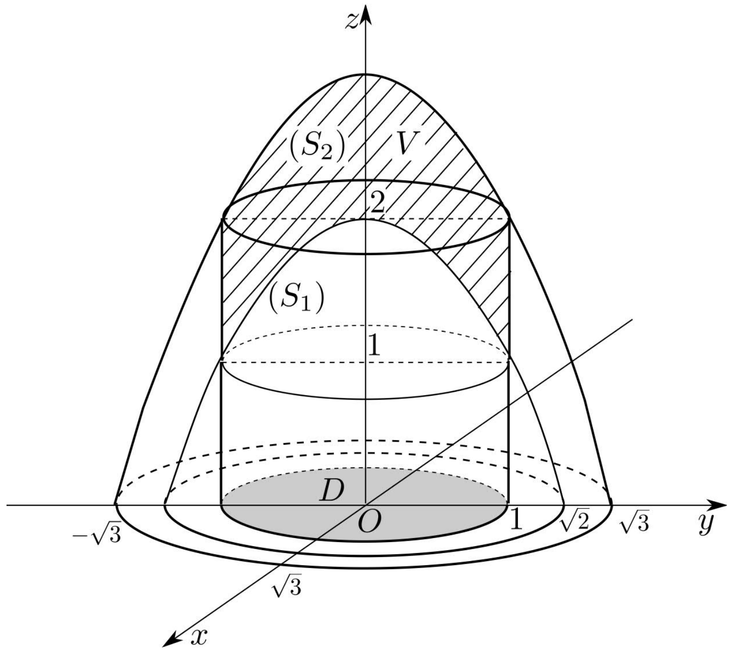
Izračunati zapreminu tela ograničenog površima $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 2-z$ i $x^2 + y^2 = 3-z.$

Rešenje. Donja i gornja granica tela čija se zapremina traži (videti sliku) su paraboloidi $S_1 : x^2 + y^2 = 2-z$ i $S_2 : x^2 + y^2 = 3-z.$

Tada traženu zapreminu izračunavamo na sledeći način:

$$V = \iint_D (z_2 - z_1)dxdy = \iint_{D:\, x^2+y^2\le 1} (3 - (x^2 + y^2) - 2 + (x^2 + y^2))dxdy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy = [\text{ površina kruga: } x^2 + y^2 \le 1] = \pi.$$



Slika 6.7 Telo čiju zapreminu računamo [Izvor: Autor].

Poglavlje 7

Zadaci za samostalan rad

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba da provežbaju.

Zadatak 1. Izračunati $\iint\limits_D \left(x^2 + 2y\right)dxdy$, gde je $D : (x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$.

$\frac{14}{3}$

Zadatak 2. Izračunati $\iint\limits_D (x + y)dxdy$, gde je D ograničena krivama $y = 4 - x^2, \quad y = 2 - x$.

$\frac{261}{20}$

Zadatak 3. Izračunati $\iint\limits_D \frac{4}{\left(y^2 + 2x + 1\right)^2}dxdy$, gde je $D : (x, y) : 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x$.

$1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

Zadatak 4. Izračunati $\iint\limits_D x^3\sqrt{y^3 + 1}dxdy$, gde je $D : (x, y) : 0 \le x \le 1, \quad x^2 \le y \le 1$.

$\frac{1}{18}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$

Zadatak 5. Izračunati $\iint\limits_D (x + 2y)dxdy$, gde je D ograničena krivama $x = y^2 - 4, \quad x = 5$.

$\frac{252}{5}$

Zadatak 6. Izračunati $\iint\limits_D xydxdy$, gde je D ograničena krivama $xy = 1, \quad xy = 2, \quad y = x, \quad y = 4x$.

$\frac{3}{2}\ln 2$

Vreme izrade: 1. 10 minuta; 2. 10 minuta; 3. 10 minuta; 4. 10 minuta; 5. 10 minuta; 6. zadatak 10 minuta

Zaključak za lekciju 11

DVOJNI INTEGRALI

Pojam dvojnog integrala, izračunavanje dvojnog integrala, uvođenje smene u dvojni integral

U ovoj lekciji smo uveli pojam dvojnog integrala i naučili

- Osnovne osobine dvojnih integrala,
- Izračunavanje dvojnog integrala,
- Smenu promenljivih u dvojnom integralu,
- Polarne koordinate,
- Primenu dvojnog integrala na određivanje površine ravne figure,
- Primenu dvojnog integrala na određivanje zapremine tela,
- Primenu dvojnog integrala na određivanje površine dela površi u prostoru.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.

UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Trojni integrali

Lekcija 14

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA202 - MATEMATIKA 2

Lekcija 14

TROJNI INTEGRALI

Uvod

UVOD

Trojni integrali

Oblast integracije višestrukih integrala je višedimenzionalna oblast D. Generalni slučaj višestrukih integrala, kada je $D \subset \mathbb{R}^n$, nećemo razmatrati na ovom kursu, već ćemo se zadržati samo na specijalnim slučajevima. To su dvojni i trojni integrali, kod kojih je oblast integracije $D \subset \mathbb{R}^2$ dvodimenzionalna (ravna) i $D \subset \mathbb{R}^3$ trodimenzionalna (prostorna) oblast, tim redom.

Sa dvojnim integralima smo se upoznali na prethodnom predavanju i istakli da dvojni integrali predstavljaju generalizaciju određenog (Rimanovog) integrala. Ideja uvođenja trojnog integrala, takođe, je analogna ideji uvođenja određenog Rimanovog integrala, samo što prilikom uvođenja trojnih integrala umesto intervala, oblast integracije postaje neka oblast u prostoru, tj. zatvorena površ.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Pojam

EGZISTENCIJA TROJNOG INTEGRALA

Datim stavom je uveden dovoljan uslov integrabilnosti funkcije f. On nije i potreban uslov, jer postoje i prekidne funkcije koje su integrabilne u ovom smislu.

Napomenimo na samom početku da u uvođenju dvojnih i trojnih integrala postoji potpuna analogija, pri čemu je jedina razlika što je u ovom slučaju oblast integracije trodimenzionalna, a podintegralna funkcija je realna funkcija tri realne promenljive.

Neka je u prostoru $\mathbb{R}^3$ dato ograničeno telo T koje je merljivo (ima svoju zapreminu). Neka je na T definisana ograničena funkcija $u = f(x, y, z)$, za $(x, y, z) \in T$. Analogno metodologijom kao i kod ostalih integrala Rimanovog tipa (tj. pomoću Darbu-Rimanovih suma) možemo uvesti integraciju posmatrane funkcije f po telu T. Ta vrsta integracije naziva se trojni integral funkcije f po oblasti T i označava sa

$$\iiint\limits_T f(x, y, z) dx dy dz,$$

gde se $dx\, dy\, dz$ i naziva zapreminski element tela T. Svakako, ovaj integral može postojati ili ne. Jedan uslov kada ovakav integral postoji daje sledeći stav.

Stav. Neka je dato zatvoreno telo T iz $\mathbb{R}^3 (T \subset \mathbb{R}^3)$ koje je merljivo (ima svoju zapreminu) i neprekidna funkcija $f(x, y, z)$ na T. Tada je ova funkcija integrabilna na T, tj. postoji njen trojni integral.

Napomena. Slično kao što se jednostruki integrali mogu uopštiti do nesvojstvenih integrala, to se može uraditi i za trojne integrale, ali time se ovde nećemo baviti.

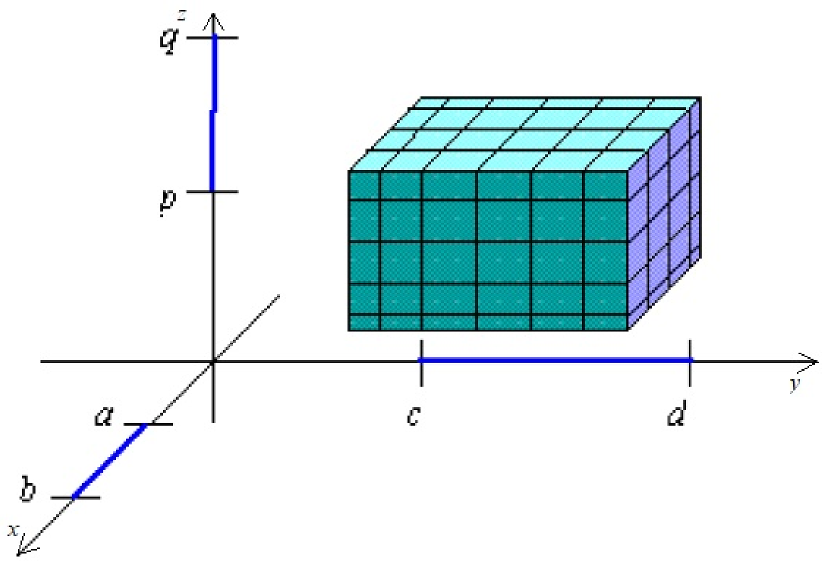
PRIMER 1

Najjednostavnija vid trojne integracije - oblast integracije je kvadar.

Najjednostavniji slučaj jeste kada posmatramo neku ograničenu funkciju $u = f(x, y, z)$ koja je definisana na oblasti T oblika

$$T = [a, b] \times [c, d] \times [p, q] = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b \land c \leq y \leq d \land p \leq z \leq q\}$$

koja je svakako merljiva. Oblast T u prostoru predstavlja kvadar (videti sliku).



Slika 1.1 Integracija po kvadru [Izvor: Autor].

Ako, analogno kao kod dvojnog integrala, dati kvadar T podelimo na $m \cdot n \cdot p$ manjih kvadra tako što ćemo interval $[a, b]$ da podelimo na m podintervala, interval $[c, d]$ da podelimo na n podintervala i interval $[p, q]$ da podelimo na p podintervala. Tada možemo uočiti trostruku sumu

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{p-1} f(x_i, y_j, z_k) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Kada u prethodnoj sumi broj podela m, n i p teže u beskonačno tada za nju uvodimo oznaku

$$\lim_{n,m,p \to \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{p-1} f(x_i, y_j, z_k) \Delta x \Delta y \Delta z = \iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

koju nazivamo trojni integral. Iz prethodnog je jasno zašto se $dx\, dy\, dz$ naziva zapreminski element, jer prestavlja zapreminu svakog od malih kvadara na koje je veliki kvadar podeljen.

PRIMER 2

Jedna intepretacija trojnog integrala.

Iz ranijih predavanja smo videli da jednostruki (određeni) integral možemo u osnovi, posmatrajući neku krivu, koristiti za izračunavanje odgovarajuće površine u ravni. Dvojni integral preko odgovarajuće površi možemo interpretirati kao odgovorajuću zapreminu u prostoru $\mathbb{R}^3$. Trostruki integral predstavlja sumiranje u četvorodimenzionalnom prostoru. Da bi ovo razumeli, zamislimo sledeću situaciju: prve 3 dimenzije predstavljaju prva prostorna koordinata x, druga prostorna koordinata y i vreme t, a da je četvrta dimenzija treća prostorna koordinata z. Pretpostavimo da imamo integral po z, gde je z funkcija od x, y i t, a da su x i y takođe funkcije od t. Integracijom po z, u odnosu na x i y dobijamo zapreminu kao funkciju od t. Ako veličini t dodelimo određenu numeričku vrednost, tada ćemo dobiti koliko iznosi odgovarajuća zapremina u određenom vremenskom trenutku.

Međutim, kako je zapremina u funkciji od t, ona se menja u odnosu na vremena. Dakle, integracijom u prethodno opisanom smislu u odnosu na t, mi sumiramo sve različite zapremine tokom posmatranog vremenskog perioda.

Na primer, zamislimo balon koji se naduvava. U bilo kom određenom trenutku možemo koristiti dvostruki integral za izračunavanje njegove zapremine. Međutim, ako bismo želeli da sumiramo sve zapremine tokom čitavog procesa naduvavanja balona, tada moramo koristiti trostruki integral.

OSNOVNE OSOBINE

U okviru datog stava izložene su najbitnije osobine trojnog integrala.

Stav. Neka su $u = f(x,y,z)$ i $v = g(x,y,z)$ integrabilne funkcije na $T \subseteq \mathbb{R}^3$.

1. Za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ važi

$$\iiint\limits_T [\alpha \cdot f(x,y,z) \pm \beta \cdot g(x,y,z)]dxdydz = \alpha \cdot \iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz \pm \beta \cdot \iiint\limits_T g(x,y,z)dxdydz.$$

Ova osobina se naziva osobina linearnosti.

2. Ako je $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$, za $(x,y,z) \in T$, tada je

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz \leq \iiint\limits_T g(x,y,z)dxdydz$$

3. Ako je $f(x,y,z) \equiv 1$, za svako $(x,y,z) \in T$, tada je

$$\iiint\limits_T dxdydz = V,$$

gde je V zapremina tela T.
4. Ako je $m \leq f(x,y,z) \leq M$, za $(x,y,z) \in T$, tada važi

$$m \cdot V \leq \iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz \leq M \cdot V$$

gde je V zapremina tela T.

5. Neka je telo T podeljeno na dva tela, tj. $T = T_1 \cup T_2$, gde su T_1 i T_2 oblasti iz $\mathbb{R}^3$ takve

da imaju zapreminu i da su disjunktne, tj. da važi $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Tada je funkcija $f(x,y,z)$, za $(x,y,z) \in T$, integrabilna na oblasti T_1 i T_2 i važi

$$\iiint\limits_{T} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{T_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{T_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

Delovi T_1 i T_2 se dobijaju kada T ,,rasečemo" pomoću određenih ravni ili površi drugog reda. Na sličan način se može definisati prethodno pravilo za konačno mnogo disjunktnih skupova $T_1, T_2, ..., T_n$.

Ako su dve funkcije f i g integrabilne na nekoj oblasti T iz $\mathbb{R}^3$, tada su integrabilne i sledeće funkcije na oblasti T :
a) $f \cdot g$,
b) $|f|$,
c) $\dfrac{1}{f}$ uz uslov $|f(x,y,z)| \geq \alpha > 0$ za $(x,y,z) \in T$,
d) $\dfrac{f}{g}$ uz uslov $|g(x,y,z)| \geq c > 0$ za $(x,y,z) \in T$,

Poglavlje 2

Izračunavanje trojnog integrala

FUBINIJEV STAV

Osnovnu metodologiju za izračunavanje trojnog integrala, kao i kod dvojnog, daje Fubinijev stav.

Prethodno pomenute osobine daju kvalitativan doprinos teoriji trojnih integrala, ali je potrebno dati osnovnu metodologiji za njihovo izračunavanje koje se zasniva na rezultatu koji se naziva Fubinijev stav u trodimenzionalnom slučaju. Navedimo jednu varijantu Fubinijevog stava

Neka je u $\mathbb{R}^3$ dato telo T koje ima svoju zapreminu i posmatrajmo njegovu projekciju na ravan Oxy. Pretpostavimo da je ta projekcija oblast Dxy iz pomenute ravni (koja ima svoju površinu). Takođe, neka je T ograničeno telo u $\mathbb{R}^3$ i neka je njegov rub koji ga ograničava (i koji predstavlja površ) takav da je unija dva grafika neprekidnih funkcija $z = \varphi_1(x,y)$ i $z = \varphi_2(x,y)$ datih na zatvorenju oblasti Dxy, takvih da je $\varphi_1(x,y) \leq \varphi_2(x,y)$, za $(x,y) \in Dxy$, i da je $\varphi_1(x,y) = \varphi_2(x,y)$, za $(x,y) \in \partial Dxy$, (tj. kada se tačke nalaze na rubu od Dxy). Neka je data neprekidna funkcija $u = f(x,y,z)$ na T. Tada, prema važi da je

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_xy} \left(\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$

Iz prethodne formule se može videti da se trojni integral svodi na rešavanje odgovarajućeg dvojnog integrala. Dalje, ako pretpostavimo da je rub oblasti Dxy takav da je unija grafika dve funkcije $y = \alpha_1(x)$ i $y = \alpha_2(x)$, za $x \in [a,b]$, gde je $\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x)$ za $x \in (a,b)$ i $\alpha_1(x) = \alpha_2(x)$, za $x = a$ ili $x = b$. Takođe, mora se pretpostaviti da su $y = \alpha_1(x)$ i $y = \alpha_2(x)$ neprekidne na $[a,b]$. Ovde je interval (a,b) projekcija oblasti Dxy na x -osu. Tada, prethodnu formulu možemo zapisati

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx.$$

Napomena. Prilikom integracije funkcije $u = f(x,y,z)$ po promenljivim z, y i x, tim redom, u prethodnoj formuli primenjuje se parcijalna integracija, po svakoj od pomenutih promenljivih.

Napomena. Generalno govoreći, projekcija površi se može vršiti u bilo koju od koordinatnih ravni, samo je bitno da projektovana oblast ima površinu u njoj. Mi smo ovde izneli samo jednu od mogućnosti, kada se projekcija vrši u Oxy ravan, pod datom pretpostavkom. Analagno se može vršiti projekcija u Oxz, odnosno Oyz ravan.

NAPOMENE U VEZI SA FUBINIJEVIM STAVOM

Najjednostavniji slučaj koji se može desiti prilikom trojne interacije jeste onaj kada je oblast integracije kvadar.

Najjednostavniji slučaj prilikom primene Fubinijevog stava, što se oblasti T tiče, je situacija kada ona predstavlja kvadar. Tada je

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ e \leq z \leq f,\ a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}\}$$

i imamo da je

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d \left(\int\limits_e^f f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx.$$

Studenti najčešće biraju da projekciju oblasti vrše u Oxy ravan. Međutim,u određenim slučajevimaje granice trojnog integrala, kao i sam integral lakše odrediti ako se projekcija oblasti T izvrši u ravan Oxz ili Oyz. Tada se analogno prethodno rečenom određuju granice integrala, kao i redosled integracije.

U sledećem primeru se bavimo određivanjem granica za integraciju trojnog integrala, jer studentima taj korak najčešće pravi problem.Tunećemo konkretno zadati podintegralnu funkciju, jer nam trenutno nije cilj integracija, već samo određivanje granica u kojima je treba vršiti.

PRIMER 1

Određivanje granica za trojni integral ako je oblast T sfera.

Postaviti granice za integraciju u trojnom integralu

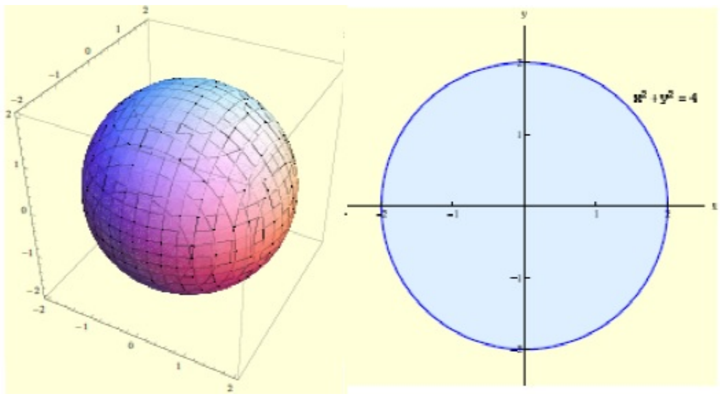
$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz,$$

ako je oblast T centralna sfera poluprečnika 2.

Rešenje. Centralna sfera poluprečnika 2 ima jednačinu

$$x^2+y^2+z^2=4.$$

Ako se ovo telo projektuje u Oxy ravan, tada granicu ove projekcije čini kružnica $x^2+y^2=4$ (videti sliku).



Slika 2.1 Centralna sfera i njena projekcija u Oxy ravan [Izvor: Autor].

Tada imamo da je

$$\begin{gathered}-2\le x\le 2,\\ -\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2},\\ -\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\end{gathered}$$

i prema prethodno datoj formuli za izračunavanje trojnog integrala važi

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dy\int\limits_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}f(x,y,z)dz.$$

PRIMER 2

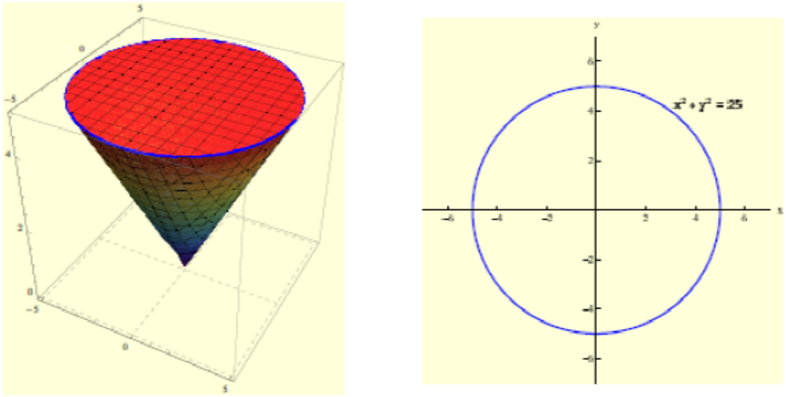
Određivanje granica za trojni integral ako je oblast T konus.

Postaviti granice za integraciju u trojnom integralu

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$$

ako je oblast T unutrašnjost konusa $x^2+y^2=z^2$,za $0\le z\le 5$.

Projekcija konusa na ravan Oxy je unutrašnjost kružnice $x^2+y^2=25$ (videti sliku).



Slika 2.2 Konus drugog reda i njena projekcija u Oxy ravan [Izvor: Autor].

Tada imamo da je

$$\begin{gathered}-5 \leq x \leq 5, \\ -\sqrt{25-x^2} \leq y \leq \sqrt{25-x^2}, \\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 5\end{gathered}$$

i prema prethodno datoj formuli za izračunavanje trojnog integrala važi:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{-5}^{5} dx \int\limits_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{5} f(x,y,z)dz.$$

U narednim primerima ćemo ukazati i na to kako se vrši integracija u trojnom integralu.

PRIMER 3

Izračunavanje trojnog integrala, ako je oblast integracije kvadar.

Izračunati trojni integral

$$\iiint\limits_T e^{x+y+z} dxdydz,$$

ako je oblast $T = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$.

Rešenje. Imamo da je

$$\iiint_T e^{x+y+z}dxdydz = \iiint_T e^x e^y e^z dxdydz =$$
$$= \left(\int_0^1 e^x dx\right)\left(\int_0^2 e^y dy\right)\left(\int_0^3 e^z dy\right) =$$
$$= (e-1)(e^2-1)(e^3-1).$$

Napomena. Ovo je najjednostavniji slučaj integracije, jer poredtoga štoje oblastintegracije kvadar, podingralnafunkcija se može zapisati u obliku $f(x) = e^{x+y+z} = e^x \cdot e^y \cdot e^z$, pa semože vršiti integracija po svakoj od promenljivih nezavisno.

PRIMER 4

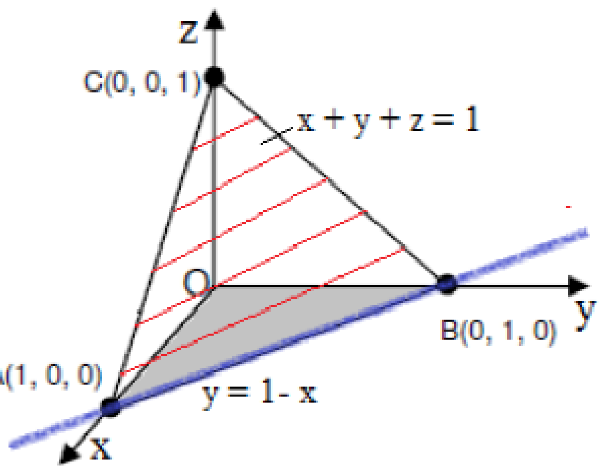
Izračunavanje trojnog integrala.

Izračunati trojni integral

$$\iiint_T (x+y+z)dxdydz,$$

gde je oblast T predstavlja tetraedar sa temenima u tačkama $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ i $C(0,0,1)$.

Rešenje. Tetraedar je omeđen ravnima OAB i ABC (videti sliku). Jednačina ravni OAB je $z = 0$, dok iz segmentnom oblika jednačine ravni (ili iz jednačine ravni kroz tri tačke) dobijamo da je ravan ABC oblika $x+y+z=1$, odakle je $z = 1-x-y$.



Slika 2.3 Tetraedar i njegova projekcija u Oxy ravan [Izvor: Autor].

Projekcija tačaka A, B i C u ravan $z=0$ (ili Oxy ravan), se tim redom svode na tačke $A'(1,0)$, $B'(0,1)$ i $O'(0,0)$. Tada je

$$0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x.\ 0 \leq z \leq 1-x-y.$$

Sada imamo da je

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_T (x+y+z)dxdydz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z)dz = \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(xz + yz + \frac{z^2}{2}\right)\Big|_{z=0}^{1-x-y} dy = \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(x(1-x-y) + y(1-x-y) + \frac{(1-x-y)^2}{2}\right) dy = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)(1+x+y)dy = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x^2-2xy-y^2)dy = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2-2xy-y^2)\Big|_{y=0}^{1-x} dx = \ldots = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: izračunavanje trojnog integrala.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

Smena promenljivih u trojnom integralu

JAKOBIJAN

Jedna od najbitnijih tehnika za efikasniju primenu Fubinijevog stava za izračunavanje trojnog integrala jeste ona koja proističe iz teoreme o smeni promenljivih u trojnom integralu.

Jedna od najbitnijih tehnika za efikasniju primenu Fubinijevog stava za izračunavanje trojnog integrala jeste tehnika koja proističe iz teoreme o smeni promenljivih trojnog integrala. Kako na efektivno izračunavanje trojnog integrala, osim podintegralne funkcije, utiče i oblast u kojoj se vrši integracija cilj uvođenja smene promenljivih jeste da se prevaziđe bar jedan (ili oba) od opisanih problema koji se mogu javiti prilikom integracije. O tome govorimo u nastavku.

Pretpostavimo da je funkcija $u = f(x, y, z)$ neprekidna funkcija u zatvorenoj oblasti T i da su funkcije: $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$, neprekidne funkcije zajedno sa svojim parcijalnim izvodima u zatvorenoj oblasti T^*. Dakle, oblast T^* je domen prethodno definisanom preslikavanju. Pretpostavimo, takođe, da se ovim funkcijama oblast T^* bijektivno preslikava u oblast T.

Napomena. U našem slučaju uvek će egzistirati barem jedno preslikavanje $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ sa navedenim osobinama.

Tada smenu promenljivih u trostrukom integralu zadajemo sledećom formulom

$$\iiint\limits_{T} f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{T^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))Jdudvdw,$$

gde je J Jakobijan funkcija $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ koji se određuje na sledeći način

$$J = J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Ponekad je pogodno uvesti smene, tako da se nove promenjive izražavaju u funkciji preko starih promenljivih. Tada je $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z), w = t(x, y, z)$ i ovaj sistem treba rešiti tako da se iz njih izrazi $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$. Jakobijan, u ovom slučaju, se dobija iz relacije

$$J(x,y,z) = \frac{1}{J(u,v,w)}.$$

PRIMER 1 – 1. DEO

Uvođenje smene u trojni integral i određivanje Jakobijana.

Izračunati trojni integral

$$\iiint_T dxdydz,$$

gde je telo T ograničeno površi

$$\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{15}} = 1.$$

Rešenje. Uvedimo smenu

$$u = \sqrt{\frac{x}{2}}, v = \sqrt{\frac{y}{3}}, w = \sqrt{\frac{z}{15}}.$$

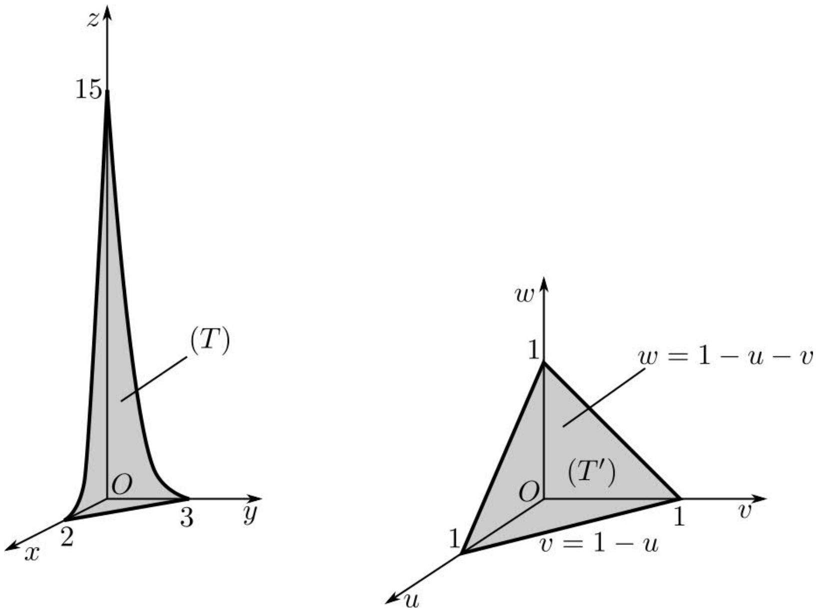
Imamo da je

$$x = 2u^2,\ y = 3v^2,\ z = 15w^2,$$

pa Jakobijan glasi

$$J = \begin{vmatrix} 4u & 0 & 0 \\ 0 & 6v & 0 \\ 0 & 0 & 30w \end{vmatrix} = 720uvw.$$

Tada se telo T transformiše u telo $T' : u + v + w = 1$, pri čemu zbog definicije korena važi $u \geq 0, v \geq 0$ i $w \geq 0$, pa se radi o tetraedru u prvom oktantu (videti sliku).



Slika 3.1 Transformacija tela uvođenjem smene u trojni integral [Izvor: Autor].

Oblast T' je određena relacijama

$$0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 1-u,\ 0 \leq w \leq 1-u-v.$$

PRIMER 1 – 2. DEO

Izračunavanje trojnog integrala

$$\iiint\limits_{T} dxdydz = \iiint\limits_{T^*} dudvdw = \int\limits_0^1 du \int\limits_0^{1-u} dv \int\limits_0^{1-u-v} 720uvwdw =$$

$$= 720 \int\limits_0^1 du \int\limits_0^{1-u} u \cdot v \cdot \frac{w^2}{2}\Big|_0^{1-u-v} dv = 360 \int\limits_0^1 du \int\limits_0^{1-u} u \cdot v \cdot (1-u-v)^2 dv =$$

$$= 360 \int\limits_0^1 du \int\limits_0^{1-u} \left(u(1-u)^2 v - 2u(1-u)v^2 + uv^3\right) dv =$$

$$= 360 \int\limits_0^1 du \int\limits_0^{1-u} \left(u(1-u)^2 \frac{v^2}{2} - 2u(1-u)\frac{v^3}{3} + u\frac{v^4}{4}\right)\Big|_0^{1-u} du =$$

$$= 360 \int\limits_0^1 u(1-u)^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) du = 360 \int\limits_0^1 \frac{u(1-u)^4}{12} du =$$

$$= \ldots = 1.$$

Prema osobinama trojnog integrala koje smo dali, dobijena vrednost predstavlja zapreminu posmatranog tela.

U mnogim primerima kod trojnog integrala su veoma značajne smene promenljive nastale uvođenjem:

- cilindričnih koordinata i
- sfernih koordinata,

u prostor $\mathbb{R}^3$ gde je već zadat Dekartov pravougli koordinatni sistem $Oxyz$. O tome će biti reči u nastavku.

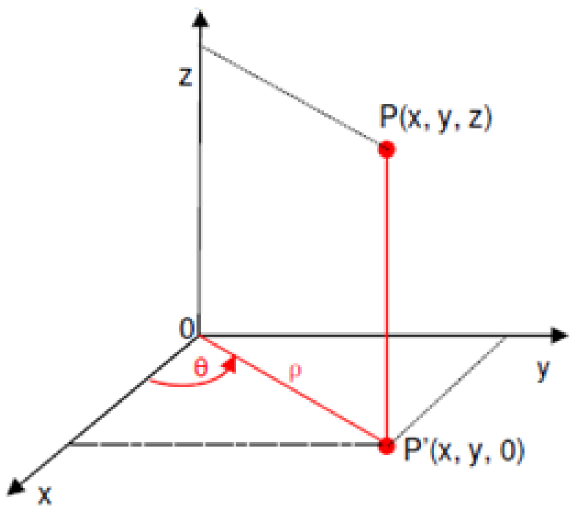
Poglavlje 4

Cilindrične i sferne koordinate

CILINDRIČNE KOORDINATE

Jedna od najčešćih smena koja se javlja u radu sa trojnim integralima jeste uvođenje cilindričnih koordinata.

Prilikom uvođenja ovih vrsta koordinata položaj tačke P određen je sa tri veličine ρ, θ i z, gde su ρ i θ polarne koordinate tačke P', koja predstavlja projekciju P u ravni Oxy. Veličine ρ, θ i z predstavljaju cilindrične koordinate (videti sliku).



Slika 4.1 Uvođenje cilindričnih koordinata [Izvor: Autor].

Dakle, u cilindričnim koordinatama tačka P ima koordinate (ρ, θ, z), gde je ρ i θ predstavljaju polarne koordinate u ravni o kojima smo već govorimo u vezi sa dvojnim integralima, a z je aplikata (koordinata na Oz osi) tačke P.

Sledećim relacijama data je veza između pravouglih i cilindričnih koordinata

$$x = \rho \cos \theta, \ y = \rho \sin \theta, \ z = z,$$

pri čemu važi da je

$$\rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < z < +\infty.$$

Imamo da je Jakobijan J u ovom slučaju jednak

$$J = J(\rho,\theta,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

UOPŠTENE CILINDRIČNE KOORDINATE

Napomene u vezi sa korišćenjem cilindričnih koordinata i uvođenje uopštenih cilindričnih koordinata.

Napomena. Potrebno je uočiti da je po samoj strukturi cilindričnih koordinata svejedno da li se one u trojni integral direktno uvode ili se trojni integral prvo svede na dvojni integral, pa se u njega uvedu polarne koordinate. Stoga, može se zaključiti da je ovu vrstu smene korisno uvoditi u slučajevima kada oblast integracije, odnosno podintegralna funkcija zavise od kvadratne forme $x^2 + y^2$.

S obzirom da se cilindrične koordinate mogu svesti na polarne koordinate, tada se za njih mogu definisati uopštene cilindrične koordinate, analogno uvođenju uopštenih polarnih koordinata kod polarnih koordinata.

Njihov najopštiji oblik, sa polom u koordinatnom početku, je:

$$x = a\cdot\rho^\alpha\cdot\cos^\beta\theta,\ y = b\cdot\rho^\alpha\cdot\sin^\beta\theta,\ z = c\cdot z^\gamma.$$

pri čemu je Jakobijan u ovom slučaju

$$J = a\cdot b\cdot c\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\rho^{2\alpha-1}\cdot z^{\gamma-1}\cdot\cos^{\beta-1}\theta\cdot\sin^{\beta-1}\theta.$$

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: cilindrične koordinate.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER 2 - 1. DEO

Ovim primerom ilustrujemo svrhu uvođenja cilindričnih koordinata. Najpre, primer rešavamo bez uvođenja ovih koordinata.

Izračunati

$$I = \iiint\limits_T ((x+y)^2 - z)dxdydz,$$

gde je telo T ograničena površima $z = 0$ i $(z–1)^2 = x^2 + y^2$.

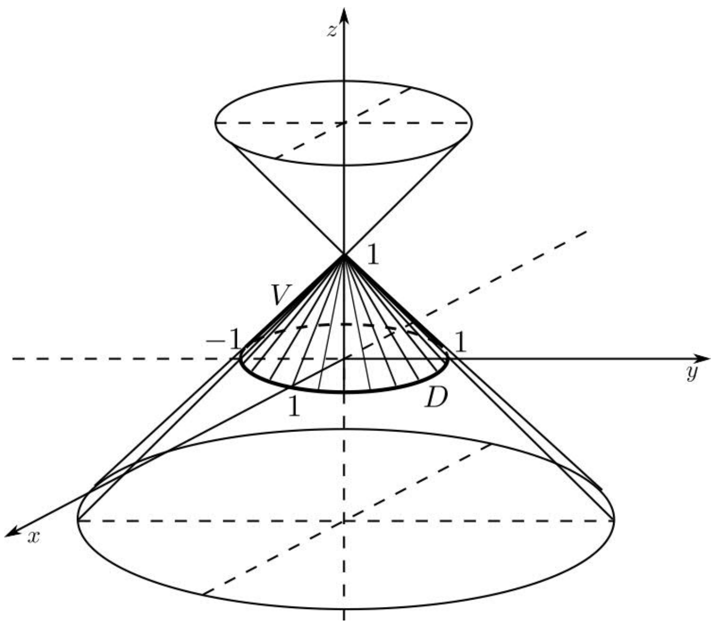
Rešenje. Zadatak se ćemo pokušati da rešimo bez uvođenja polarnih koordinata. Projekcijom datom tela na Oxy ravan, tj. za $z = 0$ imamo da je ona krug $x^2 + y^2 \leq 1$ (videti sliku). Tada je oblast T određena sledećim relacijama

$$-1 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2},\ 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2},$$

pa imamo da je

$$I = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{0}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} ((x+y)^2 - z)dz =$$
$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left((x+y)^2 \left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{2} \right) dy.$$

Rešavanje poslednjeg integrala se komplikuje, tako da ćemo ovde stati i pokušati da uradimo zadatak uvođenjem cilindričnih koordinata. Cilj njihovog uvođenja jeste da se dobijaju jednostavnije podintegralne funkcije, kao i granice integrala, kako bi se što više olakšala celokupna integracija. Studentu se preporučuje, radi uvežbavanja, da započeto integraljenje dovrši.



Slika 4.2 Određivanje oblasti integracije [Izvor: Autor].

PRIMER 2 - 2. DEO

Uvođenje cilindričnih koordinata u trojni integral.

Uvedimo, sada, cilindrične koordinate: $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ z = z$, pri čemu je $J = \rho$. Iz $x^2 + y^2 = 1$ imamo da je $\rho^2 = 1$, tj. važi $0 \le \rho \le 1$, a kako nema ograničenja za θ, tada je $0 \le \theta < 2\pi$. Dalje, iz $(z-1)^2 = x^2 + y^2$ sledi da je $(z-1)^2 = \rho^2$, pa je $|z-1| = \rho$, tj.

$$|z-1| = \begin{cases} z-1, & z \ge 1, \\ 1-z, & z < 1 \end{cases}.$$

Kako se sa slike može videti da je T telo kod koga je $z < 1$, tada je $1-z = \rho$, tj. $0 \le z \le 1-\rho$. Tada imamo da je

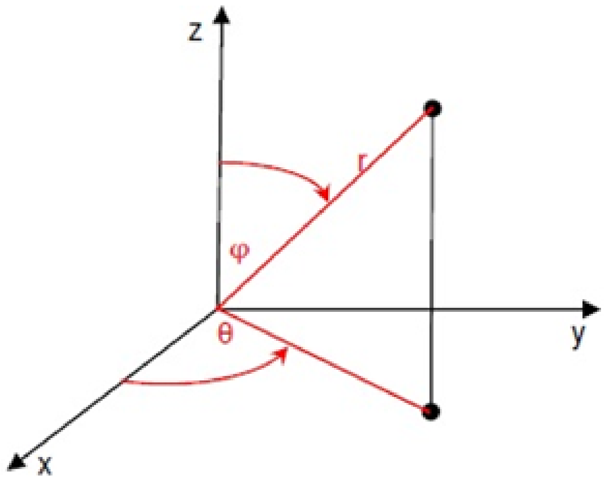
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_0^{1-\rho} \rho\left((\rho\cos\theta + \rho\sin\theta)^2 - z\right) dz = \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_0^{1-\rho} \left(\rho^3(1+\sin 2\theta) - z\rho\right) dz = \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(\rho^3(1+\sin 2\theta)z - \frac{z^2}{2}\rho\right)\Bigg|_0^{1-\rho} d\rho = \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(\rho^3(1+\sin 2\theta)(1-\rho) - \frac{(1-\rho)^2}{2}\rho\right) d\rho = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{20}(1+\sin 2\theta) - \frac{1}{24}\right) d\theta = \frac{\pi}{60}.
\end{aligned}$$

SFERNE KOORDINATE

Pored cilindričnih koordinata, jedna od najčešćih smena koja se javlja u radu sa trojnim integralima jeste uvođenje sfernih koordinata.

Druga smena o kojoj ćemo govoriti jeste transformacija Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema u prostoru u sferne koordinate.

Prilikom uvođenja ovih vrsta koordinata položaj tačke P određen je sa tri veličine r, θ i φ, gde je r rastojanje tačke P do koordinatnog početka, θ je ugao između tačke P', koja predstavlja projekciju P u ravni Oxy i pozitivnog dela Ox ose, dok je φ ugao između pozitivnog dela Oz ose i radujus vektora OP. Veličine r, θ i φ tada predstavljaju sferne koordinate (videti sliku).



Slika 4.3 Uvođenje sfernih koordinata [Izvor: Autor].

Veza između pravouglih i sfernih koordinata, što se sa date slike može uočiti, je

$$x = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta,\ y = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta,\ z = \rho\cos\varphi,$$

Dakle, u sfernim koordinatama tačka P ima koordinate (ρ, φ, θ) za koje važi da je

$$\rho > 0,\ 0 \le \theta < 2\pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Napomena. U nekim situacijama može se posmatrati i slučaj kada je $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Jakobijan J je u ovom slučaju jednak:

$$J = J(\rho, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\varphi \cdot \cos\theta & \rho \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta & -\rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta \\ \sin\varphi \cdot \sin\theta & \rho \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta & \rho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho \cdot \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2 \sin\varphi.$$

UOPŠTENE SFERNE KOORDINATE

Napomene u vezi sa korišćenjem sfernih koordinata i uvođenje uopštenih sfernih koordinata

Uvođenje sfernih koordinata je pogodno kada je oblast integracije ili podintegralna funkcija zavisi od kvadratne forme $x^2 + y^2 + z^2$, jer važi da je $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. Slično, kao i kod polarnih koordinata uvođenje sfernih koordinata se može uopštavati.

Na primer, prilikom javljanja kvadratne forme

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}+\frac{(z-r)^2}{c^2}$$

bilo u podintegralnoj funkciji, bilo u oblasti integraciji, tada se uvode uopštene sferne koordinate

$$x=p+a\cdot\rho\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta,\ y=q+b\cdot\rho\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta,\ z=r+c\cdot\rho\cdot\cos\varphi,$$

pri čemu je u ovom slučaju

$$J=a\cdot b\cdot c\cdot\rho^2\cdot\sin\varphi.$$

Svakako, kao i kod cilindričnih koordinata, mogu se i dalje ove koordinate uopštavati do najopštijeg oblika

$$x=p+a\cdot\rho^\alpha\cdot\sin^\beta\varphi\cdot\cos^\gamma\theta,\ y=q+b\cdot\rho^\alpha\cdot\sin^\beta\varphi\cdot\sin^\gamma\theta,\ z=r+c\cdot\rho^\alpha\cdot\cos^\gamma\varphi,$$

pri čemu je Jakobijan

$$J=a\cdot b\cdot c\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot r^{3\alpha-1}\cdot\sin^{2\beta-1}\varphi\cdot\cos^{\beta-1}\varphi\cdot\sin^{\gamma-1}\theta\cdot\cos^{\gamma-1}\theta.$$

Napomena. Ako se u prethodnim uopštenim sfernim koordinatama stavi $p=q=r=0$, tada se radi o uopštenim sfernim koordinatama sa polom u tački $(0,0,0)$.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: sferne koordinate.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER 3

Uviđenje uopštenih sfernih koordinata u trojni integral

Izračunati integral

$$I=\iiint\limits_T xyzdxdydz,$$

gde je $T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \right\}$.

Rešenje. Prelaskom na sferne uopštene koordinate

$$x = a \cdot \rho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta,\ y = b \cdot \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta,\ z = \cdot \rho \cos\varphi,$$
$$J = abc\rho^2 \sin\varphi,$$

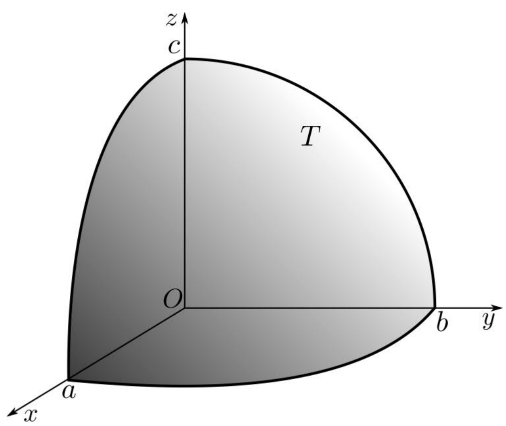
iz uslova

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,$$

dobijamo da je (videti sliku)

$$0 < \rho \leq 1,\ \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 a\rho \sin\varphi \cos\theta \cdot b\rho \sin\varphi \sin\theta \cdot \rho \cos\varphi \cdot abc\rho^2 \sin\varphi d\rho =$$
$$= a^2 b^2 c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \cos\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta \cdot \left. \frac{\rho^6}{6} \right|_0^1 d\theta =$$
$$= \frac{a^2 b^2 c^2}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \cos\varphi \cdot \left. \frac{\sin^2\theta}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi =$$
$$= \frac{a^2 b^2 c^2}{12} \cdot \left. \frac{\sin^4\theta}{4} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 b^2 c^2}{48}.$$



Slika 4.4 Oblast integracije u prvom oktantu [Izvor: Autor].

Poglavlje 5

Primena trojnog integrala

ODREĐIVANJE ZAPREMINE TELA

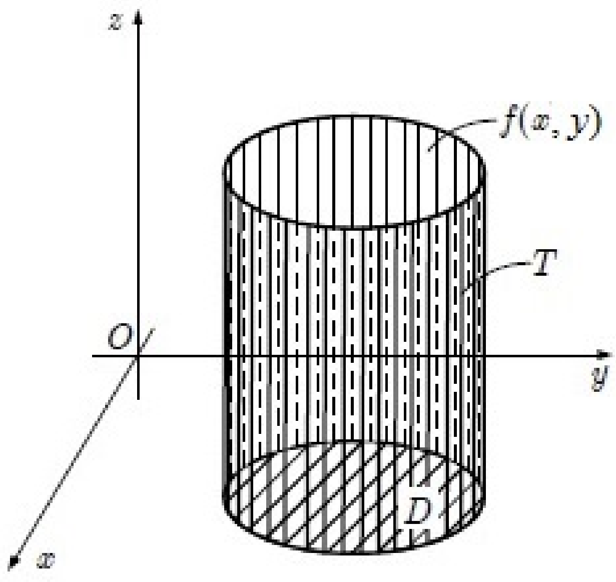
Trojni integral se može koristiti za određivanje zapremine tela.

Pokazali smo u prethodnoj lekciji kako se dvojni integral može primeniti na određivanje zapremine tela u prostoru.

Sada ćemo govoriti kako se trojni integral može upotrebiti za istu svrhu. Zapravo, prilikom izlaganja o osobinama trojnog integrala istakli smo da se zapremina nekog tela T može odrediti na sledeći način

$$\iiint_T dxdydz = V.$$

Ako je telo T ograničeno sa gornje strane nekom neprekidnom i ograničenom funkcijom $z = f(x,y)$ na ograničenoj oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ i neka je $f(x,y) \geq 0$, za $(x,y) \in D$. Na datoj slici uočimo cilindrično telo čije su baze (osnove) oblasti D i $f(D)$ i čiji je omotač takva površ koja nastaje kao trag (u $\mathbb{R}^3$) kretanja neke prave P (paralelne sa z osom) po rubu od oblasti D (tj. cilindrična površ – videti sliku).



Slika 5.1 Cilindarska površ [Izvor: Autor].

Tada je $0 \leq z \leq f(x,y)$ za $(x,y) \in D$ i važi

$$V = \iiint\limits_T dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{f(x,y)} dz.$$

U nastavku dajemo nekoliko karakterističnih primera u vezi sa primenom trojnog integrala na izračunavanje zapremine tela koje čini oblast integracije.

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: određivanje zapremine lopte - uvođenje sfernih koordinata.

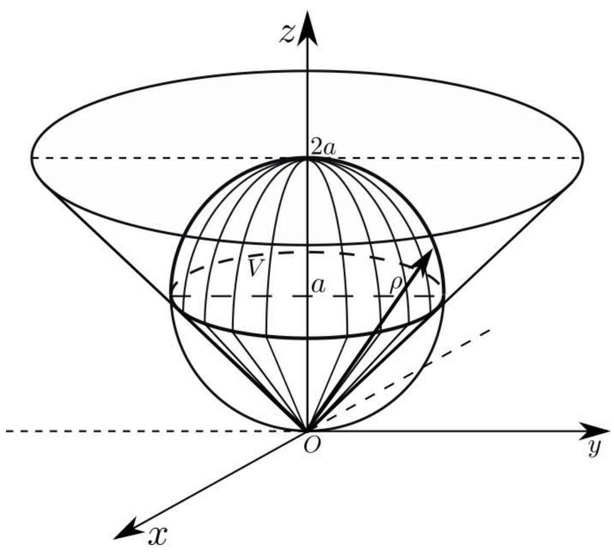
Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER 1

Izračunavanje zapremine tela koje je dobijeno kao presek dve površi.

Izračunati zapreminu tela određenog nejednačinama $x^2+y^2+z^2 \leq 2az$ i $x^2+y^2 \leq z^2$, za $a>0$.

Rešenje. Prva nejednačina $x^2+y^2+z^2 \leq 2az, (a>0)$ je deo prostora $\mathbb{R}^3$ koji predstavlja unutrašnjost sfere $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$, centrom u tački $(0,0,a)$ i poluprečnikom a. S druge strane, druga nejednakost predstavlja unutrašnjost kružnog konusa sa temenom u koordinatnom početku (videti sliku). Dakle, potrebno je izračunati zapreminu tela koje se nalazi preseku unutrašnjosti sfere i unutrašnjosti konusa. Na datoj slici ta oblast je šrafirana.



Slika 5.2 Telo dobijeno kao presek sfere i kunusa [Izvor: Autor].

Uvodimo sferne koordinate:

$$x = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta,\ y = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta,\ z = \rho\cos\varphi,$$

pri čemu je Jakobijan $J = \rho^2 \sin\varphi$.

Zamenom sfernih koordinata u jednačinama sfere i konusa, koristeći datu sliku, dobijamo sledeće granice za ovako uvedene koordinate

$$x^2+y^2+z^2 \leq 2az \ \Leftrightarrow\ \rho^2 = 2a\rho\cos\varphi \ \Leftrightarrow\ 0 < \rho \leq 2a\cos\varphi,$$
$$x^2+y^2 \leq z^2 \ \Leftrightarrow\ \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2\cos^{\varphi} \ \Leftrightarrow\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{\pi}{4} \ \Leftrightarrow\ 0 \leq \varphi\frac{\pi}{4}$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Sada imamo da je

$$V = \iiint\limits_T dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi d\rho =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{2a\cos\varphi} d\varphi = \frac{8a^3}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi =$$
$$= \left| \begin{array}{ll} smena : \cos\varphi = t, & -\sin\varphi d\varphi = dt \\ \varphi = 0 \Rightarrow t = 1, & \varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{2}{2}, \end{array} \right| = \ldots = a^3\pi,$$

PRIMER 2

Izračunavanje zapremine tela koje je dobijeno kao presek dve površi

Izračunati zapreminu tela ograničenog površima $z = 6 - x^2 - y^2$ i $z^2 = x^2 + y^2$,pri $z \geq 0$.

Rešenje. Kako je $z = 6 - x^2 - y^2$ jednačina paraboloida, a $z^2 = x^2 + y^2$ jednačina konusa uvodimo cilindrične koordinate

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ z = z,$$

pri čemu je $J = \rho$.

Rešavanjem sistem $z = 6 – (x^2 + y^2)$ i $z^2 = x^2 + y^2$ po z dobijamo da je $z = 6 – z^2$, tj. imamo $z^2 + z - 6 = 0$, čija su rešenja $z_1 = 2$ ili $z_2 = -3$. Kako je po uslovu zadatka $z \geq 0$ tada je presek konusa i paraboloida u ravni $z = 2$, čija je projekcija na ravan Oxy oblast data na slici.

Kako je je $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 = 4\right\}$imamo da je $0 < \rho \leq 2,\ 0 < \theta \leq 2\pi$. Kako je

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2),$$

odnosno

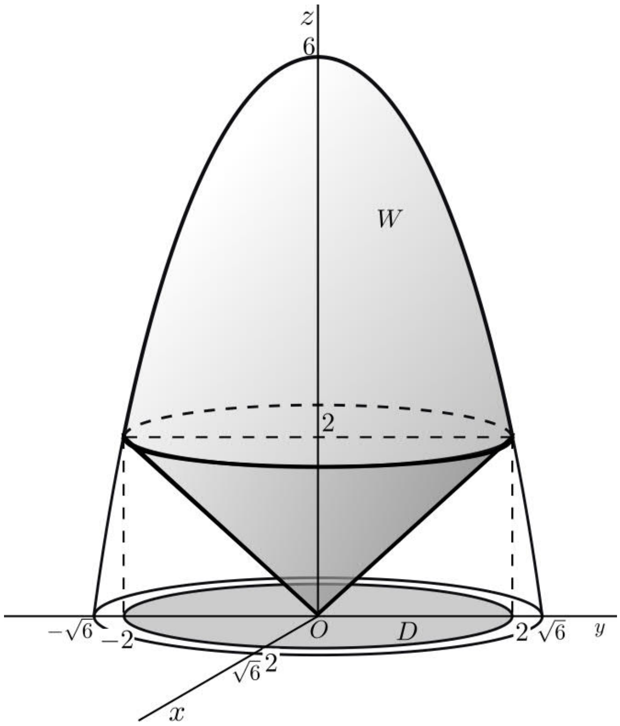
$$\rho \leq z \leq 6 - \rho^2.$$

Tražena zapremina je tada

$$V = \iiint_W dxdydz = \iint_D dxdy \int_\rho^{6-\rho^2} dz,$$

tj.

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_\rho^{6-\rho^2} dz = \ldots = \frac{32\pi}{2}.$$



Slika 5.3 Telo dobijeno presekom paraboloida i konusa [Izvor: Autor].

PRIMER 3 - 1. DEO

Određivanje granica za integral i izračunavanje zapremine tela koje je dobijeno kao presek dve površi.

Izračunati zapreminu tela T koje ograničava elipsoid i konus čije jednačine su date tim redom

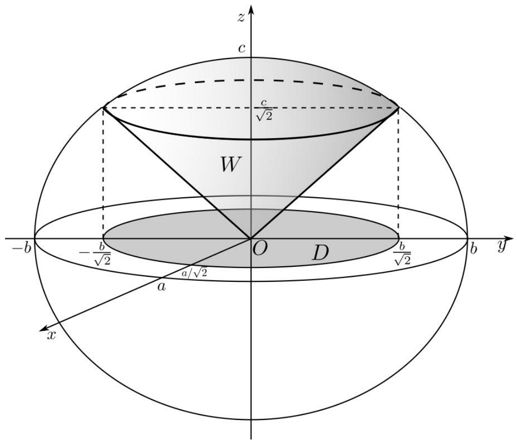
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad (z \geq 0).$$

Rešenje. Iz sistema koji čine jednačine ovih površi dobijamo da je $2\frac{z^2}{c^2} = 1,$ odnosno $z^2 = \frac{c^2}{2}$. Kako je pretpostavka da je $z > 0,$ tada je $z = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Zamenom dobijenog u bilo kojoj od jednačina datih površi dobijamo projekciju tela, koje predstavlja presek ovih površi, u Oxy ravan. Ako uvrstimo da je $z = \frac{c}{\sqrt{2}}$ u jednačinu sfere, ta projekcija predstavlja krivu drugog reda čija jednačina glasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{\frac{c^2}{2}}{c^2}=1 \text{ tj. } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}, \text{ tj. } \frac{x^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{2}}=1.$$

Dakle, ta projekcija predstavlja elipsu u Oxy ravni. Označimo je sa D. Sa slike, takođe nije teško uočiti da važi

$$c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} \leq z \leq c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$



Slika 5.4 Telo dobijeno presekom elipsoida i konusa [Izvor: Autor].

Tada je

$$V=\iiint\limits_T=\iint\limits_D dxdy \int\limits_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz =$$

$$=c\iint\limits_D\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right)dxdy.$$

PRIMER 3 – 2. DEO

Uvođenje polarnih koordinata, određivanje granica za novo uvedene promenljive i primena Fubinijeve teoreme.

Da bismo rešili poslednji intergal, uvešćemo uopštene polarne kordinate

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\rho\cos\theta, \quad y=\frac{b}{\sqrt{2}}\rho\sin\theta,$$

$$0<\rho\leq 1, \quad 0\leq\theta\leq 2\pi, \quad J=\frac{ab}{2}\rho.$$

Sada je

$$\begin{aligned} V &= c\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(\sqrt{1-\frac{1}{2}\rho^2} - \sqrt{\frac{1}{2}\rho^2}\right)\frac{1}{2}ab\rho d\rho = \\ &= \frac{abc}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\sqrt{1-\frac{1}{2}\rho^2}d\rho - \frac{abc}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\frac{\rho}{\sqrt{2}}d\rho = \\ &= I_1 - I_2. \end{aligned}$$

Za prvi od ovih integrala, u oznaci I_1, uvodimo smenu $1-\frac{1}{2}\rho^2 = t^2$.Važi da je $\rho d\rho = -2tdt$ i za $\rho = 0$ je $t = 1$, dok za $\rho = 1$ je $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tada je

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{abc}{2}\cdot \theta\Big|_0^{2\pi} \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t\cdot(-2tdt) = 2abc\pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 t^2 dt = 2abc\pi \frac{t^3}{3}\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = \\ &= \frac{abc\pi}{3}\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

Za integral I_2 imamo da je

$$I_2 = \frac{abc}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\frac{\rho}{\sqrt{2}}d\rho = \frac{abc\pi}{\sqrt{2}}\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{abc\pi}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ukupno, dobijamo

$$V = I_1 - I_2 = \frac{abc\pi}{3}\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{abc\pi}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(2-\sqrt{2})abc\pi}{3}.$$

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: određivanje zapremine lopte - uvođenje cilindričnih koordinata.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 6

Pokazna vežba

ZADATAK 1 (15 MINUTA)

Izračunavanje trojnog integrala - primena Fubinijevog stava.

Izračunati trostruki integral

$$I = \iiint\limits_{D} (x + 2y - z)dxdydz$$

ako je oblast D kocka $[0,\, 1]^3$.

Rešenje:

Kako je oblast D kvadar u prostoru $Oxyz$, posmatrani integral se svodi na

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + 2y - z)dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left.\left((x + 2y)z - \frac{z^2}{2}\right)\right|_{z=0}^{z=1} = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x + 2y - \frac{1}{2}\right)dy$$

$$= \int_0^1 dx \left.\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)y + y^2\right)\right|_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} + 1\right)dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \left.\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)\right|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

ZADATAK 2 (15 MINUTA)

Izračunavanje trojnog integrala uvođenjem smene - sferne koordinate.

Izračunati trostruki integral

$$\iiint\limits_{D} \left(x^2 + y^2\right)dxdydz$$

pri čemu je D polukugla $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad z \geq 0$.

Rešenje: Primenom sfernih koordinata

$x = \rho\cos\varphi\cos\theta \qquad y = \rho\cos\varphi\sin\theta \qquad z = \rho\sin\varphi$

dobijamo da je $x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\varphi$, pa je

$$I = \iiint\limits_{D_0} \rho^2\cos^2\varphi\rho^2\cos\varphi d\rho d\varphi d\theta = \iiint\limits_{D_0} \rho^4\cos^3\varphi d\rho d\varphi d\theta,$$

pritom je D_0 opisana sa $0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Stoga je

$$I=\left(\int_0^R\rho^4 d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)=2\pi\frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^R\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi d\sin\varphi=\frac{2\pi R^5}{5}\int_0^1\left(1-u^2\right)du=\frac{2\pi R^5}{5}\left(u-\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4\pi R^5}{15}.$$

ZADATAK 3 (15 MINUTA)

Izračunavanje trojnog integrala uvođenjem sfernih koordinata.

Izračunati integral

$$\iiint_V \ln\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz,$$

gde je V sfera poluprečnika R sa centrom u koordinatnom početku.

Rešenje: Prelaskom na sferne coordinate dobijamo

$$\iiint_V \ln\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho^2\ln\rho^2\sin\theta\quad d\rho=2\pi(-\cos\theta)\Bigg|_0^{\pi}\int_0^R 2\rho^2\ln\rho\quad d\rho=$$

$$4\pi(-\cos\pi+\cos 0)\int_0^R\rho^2\ln\rho\quad d\rho=8\pi\int_0^R\rho^2\ln\rho\quad d\rho$$

Integral $\int_0^R\rho^2\ln\rho\quad d\rho$ rešavamo parcijalnom integracijom $u=\ln\rho,\quad dv=\rho^2d\rho,\quad du=\frac{d\rho}{\rho},\quad v=\frac{\rho^3}{3}.$

$$\int_0^R\ln\rho\quad\rho^2d\rho=\ln\rho\quad\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^R-\int_0^R\frac{\rho^3}{3}\frac{1}{\rho}d\rho=\ln R\frac{R^3}{3}-\frac{1}{3}\int_0^R\rho^2d\rho=\ln R\frac{R^3}{3}-\frac{1}{3}\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^R=\ln R\frac{R^3}{3}-\frac{1}{9}R^3$$

$$\iiint_V \ln\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=8\pi\frac{R^3}{3}\left(\ln R-\frac{1}{3}\right).$$

ZADATAK 4 (15 MINUTA)

Izračunavanje trojnog integrala uvođenjem cilindričnih koordinata.

Izračunati

$$\iiint_V\left(x^2+y^2\right)dxdydz,$$

gde je oblast V ograničena površima $x^2+y^2=2z,\quad z=2.$

Rešenje. Prelaskom na cilindrične koordinate dobijamo

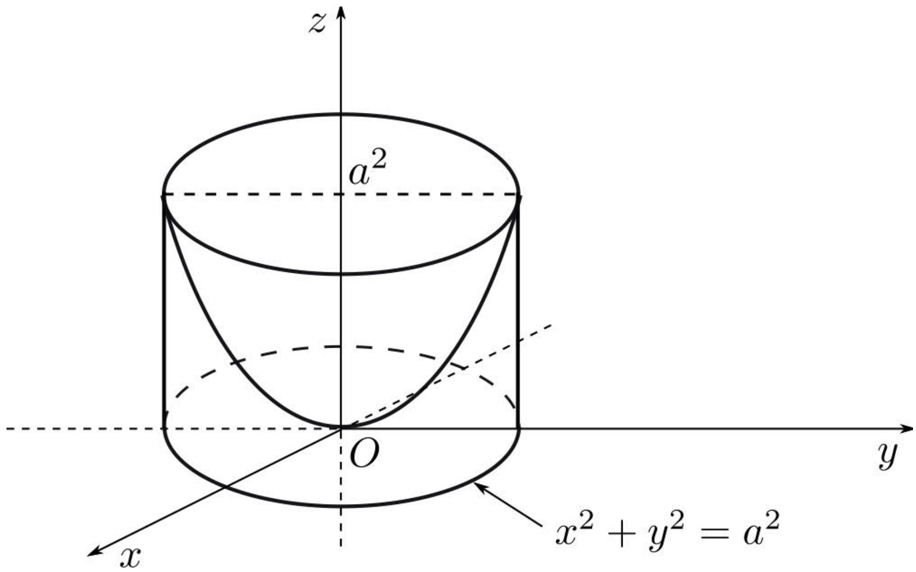
$$\iiint_V\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\int_{\rho^2/2}^{2}dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho^2\rho\quad d\rho=2\pi\int_0^2\left(2-\frac{\rho^2}{2}\right)\rho^3d\rho=2\pi\left(2\frac{\rho^4}{4}-\frac{1}{2}\frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^2=2\pi\Big|8-\frac{16}{3}=2\pi\frac{8}{3}=\frac{16}{3}\pi.$$

ZADATAK 5 (15 MINUTA)

Određivanje zapremine tela primenom trojnog integrala - uvođenjem cilindričnih koordinata.

Primenom trostrukog integrala izračunati zapreminu oblasti ograničene paraboloidom $z = x^2 + y^2$ i cilindrom $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ za $z \geq 0$.

Rešenje: Kod izračunavanja zapremine ove oblasti primenićemo cilindrične koordinate $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$. U ovim koordinatama jednačine paraboloida i cilindra glase $z = \rho^2$ i $\rho = a$.



Slika 6.1 Telo ograničeno paraboloidom i cilindrom [Izvor: Autor].

Ako sa D_0 označimo deo ovog tela koji se nalazi u prvom oktantu, tada je tražena zapremina

$$V = 4\iiint\limits_{D_0} \rho d\rho d\varphi dz,$$

a oblast D_0 u koordinatama (ρ, φ, z) odgovara zatvorena oblast definisana nejednakostima $0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leq z \leq \rho^2$. Odavde dobijamo da je

$$V = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a d\rho \int_0^{\rho^2} \rho dz = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a \rho^3 d\rho = 4\frac{\pi}{2}\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^a = \frac{\pi a^4}{2}.$$

ZADATAK 6 (15 MINUTA)

Određivanje zapremine lopte poluprečnika R primenom trojnog integrala.

Primenom trostrukog integrala izračunati zapreminu kugle $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Rešenje:

Ako sa D označimo posmatranu zatvorenu kuglu, a sa D_0 njen deo koji se nalazi u prvom oktantu, tada je

$$V = \iiint_D dxdydz = 8\iiint_{D_0} dxdydz.$$

Ako sada primenimo sferne koordinate

$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta \qquad y = \rho\cos\varphi\sin\theta \qquad z = \rho\sin\varphi$$

tada je Jakobijan transformacije $J = \rho^2$, njegova apsolutna vrednost $|J| = J = \rho^2$ i $dxdydz = \rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$. Pritom oblasti D_0 u koordinatama (ρ, φ, θ) odgovara oblast $\Omega : 0 \le \rho \le R, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Stoga je

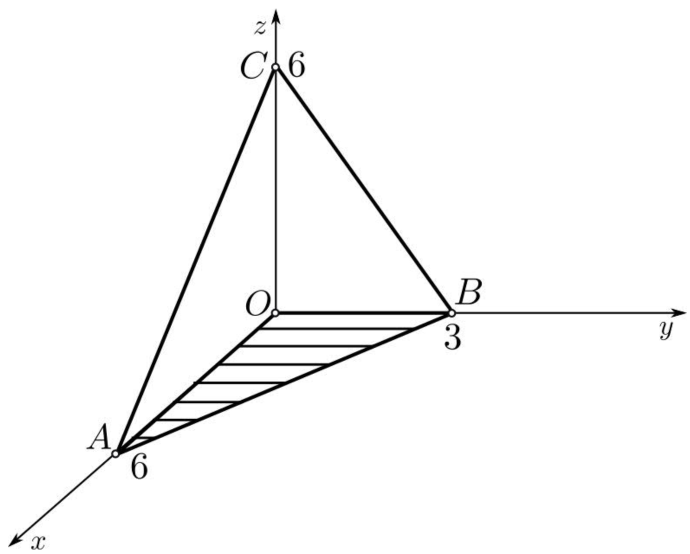
$$V = 8\int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \rho^2\sin\theta d\theta = 8\int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^2 d\varphi = 4\pi\int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

ZADATAK 7 (15 MINUTA)

Određivanje zapremine tela primenom trojnog integrala.

Izračunati zapreminu tetraedra ograničenog ravnima $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + 2y + z - 6 = 0$.

Rešenje:



Slika 6.2 Tetraedar ograničen datim ravnima [Izvor: Autor].

Projekcija tetraedra u ravni Oxy je trougao ograničen pravim linijama $x = 0, \quad y = 0$ i $x + 2y - 6 = 0$, tako da x varira od 0 do 6 , i za fiksirano $x = x_0 \quad \left(0 \le x_0 \le 6\right)$, y varira od 0 do $3 - \frac{x}{2}$. Ako su x, y fiksirane vrednosti, koordinata z varira od $z = 0$ (ravan Oxy) do ravni $x + 2y + z - 6 = 0$, odnosno z varira od 0 do $6 - x - 2y$.

Dobijamo

$$V = \int_0^6 dx \int_0^{3-x/2} dy \int_0^{6-x-2y} dz = \int_0^6 dx \int_0^{3-x/2} (6-x-2y)dy = \int_0^6 \left(6y - xy - y^2\right)\Bigg|_{y=0}^{y=3-\frac{x}{2}} dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^6 (6-x)^2 dx = -\frac{1}{2}\int_0^6 (6-x)^2 d\left(6-x\right) = -\frac{1}{2}\frac{(6-x)^3}{3}\Bigg|_0^6 = 36.$$

ZADATAK 8 (15 MINUTA)

Određivanje zapremine tela primenom trojnog integrala - cilindrične koordinate.

Odrediti zapreminu tela ograničenog površima $z = x^2 + y^2$ i $z = 2 - x^2 - y^2$.

Rešenje:

U cilindričnim koordinatama imamo da je $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$. Jednačine datih površi u cilindričnim koordinatama su redom $z = \rho^2$ i $z = 2 - \rho^2$. Presek ovih površi je linija

$$L^* : \begin{cases} \rho = 1 & (\text{kružni} \quad \text{cilindar}) \\ z = 1 & (\text{ravan}) \end{cases},$$

čija ja projekcija u ravni Oxy kriva (kružnica)

$$L : \begin{cases} \rho = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Iz gornjih relacija dobijamo da je $0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \rho^2 \le z \le 2 - \rho^2$, pa je

$$V = \iiint_{\Omega} dxdydz = \iiint_{\Omega^*} \rho \quad d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \quad d\rho \int_{\rho^2}^{2-\rho^2} dz = 2\pi\int_0^1 \left(2 - 2\rho^2\right)\rho \quad d\rho = 4\pi\left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \pi.$$

ZADATAK 9 (15 MINUTA)

Izračunavanje zapremine tela - uvođenjem sfernih koordinata.

Odrediti zapreminu tela ograničenog površima $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad (a < b)$.

Rešenje:

Oblast Ω leži unutar kupe $x^2 + y^2 = z^2$, pritom imamo dve koncentrične sfere unutar kupe. U sfernim koordinatama je

$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta \qquad y = \rho\cos\varphi\sin\theta \qquad z = \rho\sin\varphi.$$

Iz prve dve jednačine sledi da je $a \le \rho \le b$, a iz treće nalazimo opseg ugla θ : $\rho^2 \sin^2\theta = \rho^2 \cos^2\theta$, pa je $\theta = \frac{\pi}{4}$, odnosno $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$.

$$V = \iiint_{\Omega} dxdydz = \iiint_{\Omega^*} \rho^2 \sin\theta \ \ d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin\theta \ \ d\theta \int_a^b \rho^2 \ \ d\rho = 2\pi \left(-\cos\theta \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} \ \ \frac{\rho^3}{3} \Bigg|_a^b =$$

$$2\pi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{\pi}{3}(2 - \sqrt{2})\left(b^3 - a^3 \right).$$

Poglavlje 7

Zadaci za samostalan rad

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba da provežbaju.

Zadatak 1. Izračunati

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3},$$

gde je V oblast ograničena površima $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+y+z=1.$

Rezultat: $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$

Zadatak 2. Izračunati

$$\iiint\limits_V |x|dxdydz,$$

gde je V oblast ograničena površima $x^2+y^2=1,\quad z=x^2+y^2,\quad z=0.$

Rezultat: $\frac{4}{5}$

Zadatak 3. Izračunati zapreminu oblasti ograničenu površima $z=2-x-2y,\quad x=2y,\quad x=0,\quad z=0.$

Rezultat: $\frac{1}{3}$

Zadatak 4. Izračunati zapreminu oblasti ograničenu površima $y=\sqrt{z-x^2-z^2},\quad z=\sqrt{x^2+y^2}\;$ i $\;xz$ ravni.

Rezultat: $\frac{\pi}{16}$

Zadatak 5. Izračunati zapreminu oblasti ograničenu površima $z=\sqrt{x^2+y^2},\qquad z=5.$

Rezultat: $\frac{125}{3}\pi$

Zadatak 6. Izračunati zapreminu oblasti ograničenu površima $x^2+y^2+z^2=a^2,\quad a>0,\quad z=\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}.$

Rezultat: $\frac{2-\sqrt{3}}{3}a^3\pi$

Vreme izrade: 1. 15 minuta; 2. 15 minuta; 3. 15 minuta; 4. 15 minuta; 5. 15 minuta; 6. 15 minuta.

Zaključak za lekciju 12

TROJNI INTEGRALI

Pojam, osobine, izračunavanje, smena promenljivih u trojnom integralu, primena.

U ovoj lekciji smo uveli pojam dvojnog integrala i naučili

• Osnovne osobine trojnih integrala,

• Izračunavanje trojnog integrala,

• Smenu promenljivih u trojnom integralu,

• Polarne cilindrične koordinate,

• Polarne sferne koordinate

• Primenu trojnog integrala na određivanje zapremine tela.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.