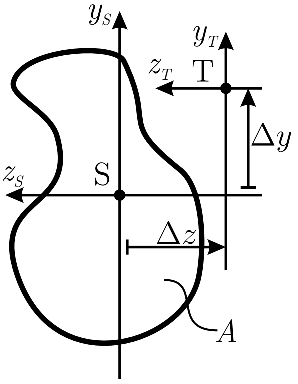
Szilárdsátan gyakorlat
2. hét

Lehotzky Dávid
Pölöskei Tamás

2017. szeptember 22.

Szükséges előismeretek

Tisztán hajlított rudak

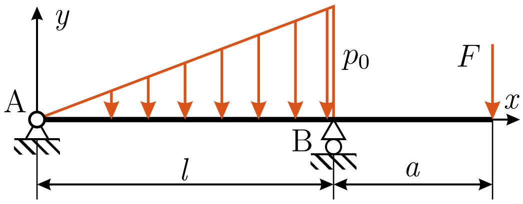


Másodrendű nyomaték téglalap, kör	I_y, I_z, I_{yz}
Feszültségállapot	$\sigma_x = \frac{M_{hz}}{I_z} y$
Steiner-tétel	$I_{zT} = I_{zS} + \Delta y^2\, A$ $I_{yT} = I_{yS} + \Delta z^2\, A$ $I_{yzT} = I_{yzS} + \Delta y\, \Delta z\, A$

Statikából igénybevételi függvények, statikai nyomaték

1. feladat

Ellenőrizze a vázolt kör keresztmetszetű tartót hajlításra és rajzoljuk meg a veszélyes keresztmetszetben a feszültségeloszlást.



$l = 0.9\,\mathrm{m}$	$p_0 = 4\,\mathrm{kN/m}$
$a = 0.3\,\mathrm{m}$	$F = 1\,\mathrm{kN}$
$d = 40\,\mathrm{mm}$	$\sigma_{\mathrm{meg}} = 100\,\mathrm{MPa}$
$F_{Ay} = 266.6\,\mathrm{N}$	$F_B = 2533\,\mathrm{N}$

Reakciók meghatározása (értékük előre ismert) Tekintsük a szerkezet szabadtest ábráját, lásd 1. ábra teteje. Ez alapján az egyensúlyi egyenletek az alábbiak:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 : F_{Ax} = 0 \\ \sum F_y &= 0 : F_{Ay} - \frac{1}{2} p_0\, l + F_B - F = 0 \\ \sum M_A &= 0 : F\,(a + l) - F_B\, l + \frac{2l}{3}\frac{1}{2} p_0\, l \end{aligned} \tag{1}$$

(1)-ből fejezzük ki a reakcióerőket:

$$F_{Ax} = 0\,\mathrm{N},\ F_{Ay} = 266.6\,\mathrm{N},\ F_B = 2533\,\mathrm{N} \tag{2}$$

Ellenőrzés hajlításra Hajlításra való ellenőrzés esetén először meg kell keresnünk azt a keresztmetszetet, ahol a hajlítónyomaték értéke abszolút értékben maximális. Ehhez határozzuk meg a hajlítónyomatéki igénybevételi függvényt.

Bontsuk kettő részre a B pontnál a szerkezetet. Ekkor a két részen a megoszló terhelés intenzitása a következő:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= -\frac{p_0}{l} x \\ p_2(x) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

A nyíró erő és a transzverzális megoszlóterhelés között differenciális kapcsolat áll fenn:

$$\begin{aligned} V_1(x) &= \int p_1(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{p_0}{2l}x^2 + C_{V1} \\ V_2(x) &= \int p_2(x)\,\mathrm{d}x = 0 + C_{V2} \end{aligned} \tag{4}$$

C_{V1} és C_{V2} konstansokat a szerkezet egy egy speciális pontjában ismert nyíróerő érték alapján határozzuk meg.

$$\begin{aligned} &V_1(0) = F_{Ay} &&\Rightarrow C_{V1} = F_{Ay} &&\Rightarrow V_1(x) = 266.7 - 2222.2x^2 \\ &V_2(l+a) = F &&\Rightarrow C_{V2} = F &&\Rightarrow V_2(x) = 1000 \end{aligned} \tag{5}$$

A hajlítónyomatéki függvény meghatározásához a nyíróerő és a hajlítónyomaték közötti differenciális kapcsolatot használjuk fel:

$$\begin{aligned} M_{h1}(x) &= \int -V_1(x)\,\mathrm{d}x = -F_{Ay}\,x + \frac{p_0}{6l}x^3 + C_{Mh1} \\ M_{h2}(x) &= \int -V_2(x)\,\mathrm{d}x = -F\,x + C_{Mh2} \end{aligned} \tag{6}$$

Az igénybevétel függvényhez kapcsolódó konstansokat a szabad rúdvég feltételekből határozzuk meg.

$$\begin{aligned} &M_{h1}(0) = 0 &&\Rightarrow C_{Mh1} = 0 &&\Rightarrow M_{h1}(x) = -266.7x + 740.7x^3 \\ &M_{h2}(a+l) = 0 &&\Rightarrow C_{Mh2} = F(a+l) &&\Rightarrow M_{h2}(x) = 1200 - 1000x \end{aligned} \tag{7}$$

Az igénybevételi függvényekben x-et [m]-ben kell behelyettesíteni. Ekkor a kapott igénybevételek dimenziója az SI-mértékegységrendszernek megfelelőek. Az igénybevételi függvényeket a 1. ábrán tüntettük fel. A maximális hajlítónyomaték az $x_{max,1} = a$ helyen lép fel, itt az értéke 300 Nm.

Az első szakaszon a lokális minimum helyét függvény analízis segítségével határozzuk meg:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}M_{h1}(x) = 0 \Rightarrow V(x) = 0 \Rightarrow x_{max,2} = 0.3464\ [\mathrm{m}] \Rightarrow M_{h1}(x_{max,2}) = -61.58\,\mathrm{Nm} \tag{8}$$

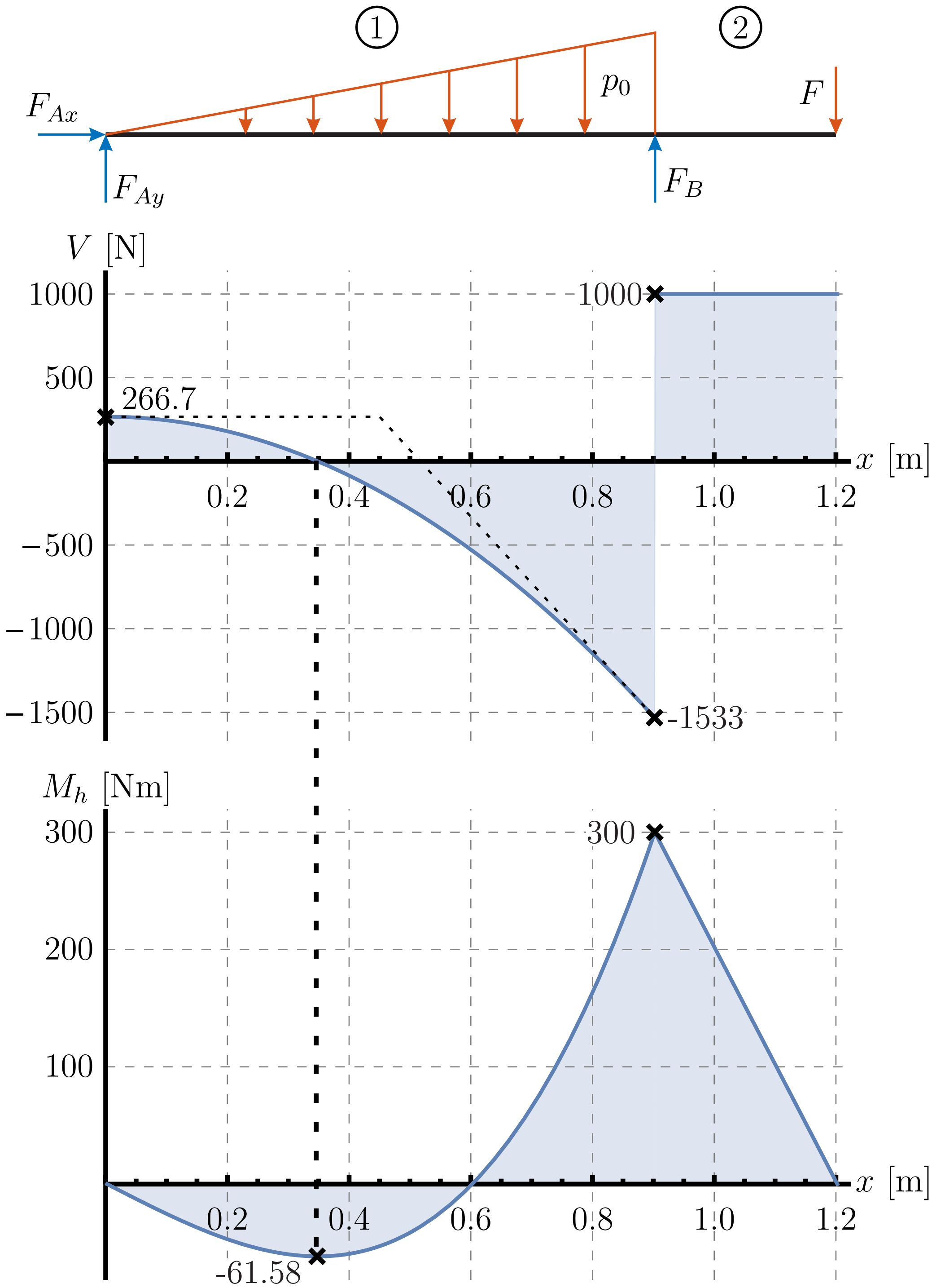
Az ellenőrzés során számoljuk ki a maximális nyomaték helyén a szélső szálakban ébredő feszültségeket a Naviér-képlet segítségével. A keresztmetszet másodrendű nyomatéka:

$$I_z = \frac{d^4\,\pi}{64} = 1.257 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} \tag{9}$$

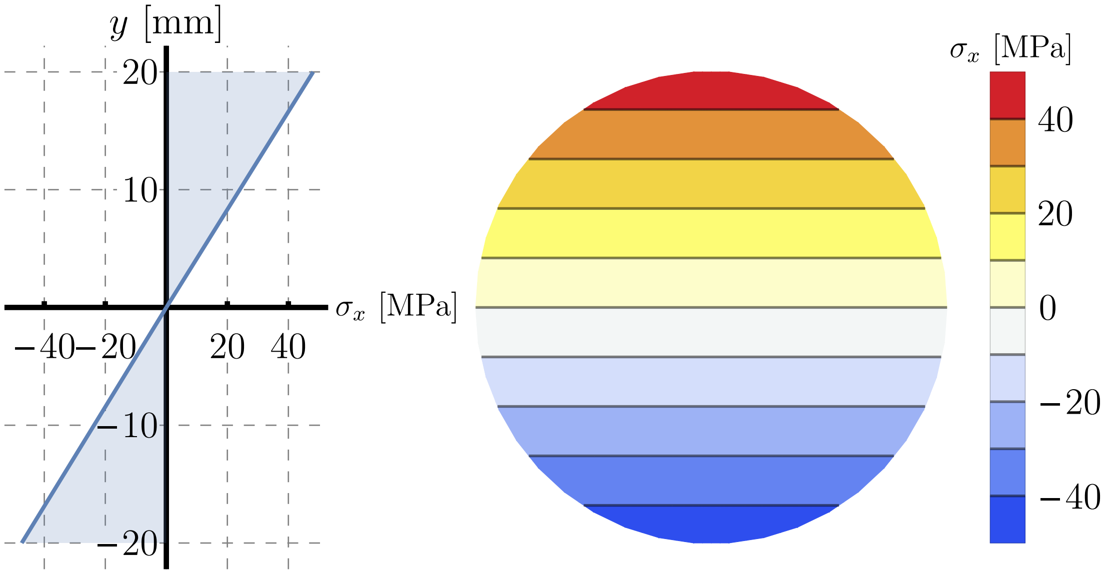
$$\sigma_x(y) = \frac{M_{h1}(a)}{I_z}\,y \Rightarrow \sigma_x^{\max} = \left|\sigma_x\left(-\frac{d}{2}\right)\right| = \left|\sigma_x\left(\frac{d}{2}\right)\right| = \boxed{47.75\,\mathrm{MPa} < \sigma_{\mathrm{meg}}} \tag{10}$$

Tehát a rúd megfelel hajlításra.

Feszültségeloszlás a veszélyes keresztmetszetben A veszélyes keresztmetszetben a feszültségeloszlást a (10) segítségével rajzoljuk fel. Látjuk, hogy y koordinátában lineáris a függvény, az origón átmegy, illetve ismert az értéke a két szélső pontban. Ezek alapján a 2. ábrán tüntettük fel a hajlítónyomatékból származó normál feszültség eloszlását.



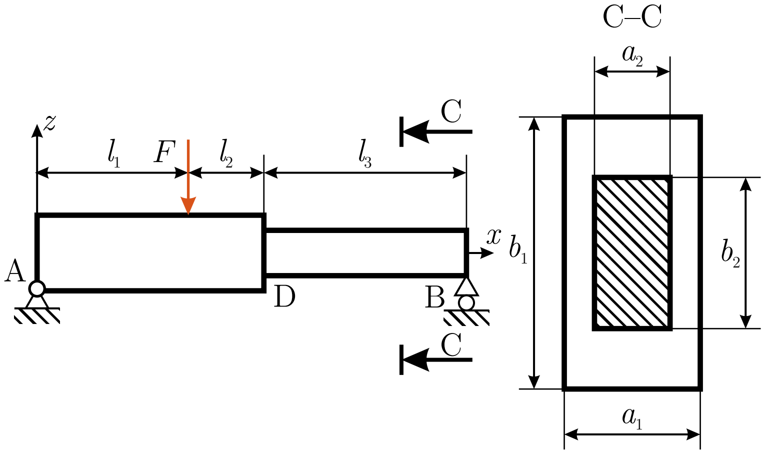
1. ábra. Igénybevételi függvények.



2. ábra. Feszültségeloszlás az (x, y) és az (y, z) síkban.

2. feladat

Határozzuk meg a tartó AD- illetve DB-részein a keresztmetszet a_1, b_1, illetve a_2, b_2 méreteit úgy, hogy a $b_1/a_1 = b_2/a_2 = 2$ viszony mellett hajlításra megfeleljen a tartó!



$l_1 = 2\,\mathrm{m}$
$l_2 = 1\,\mathrm{m}$
$l_3 = 4\,\mathrm{m}$
$F = 14\,\mathrm{kN}$
$\sigma_{\mathrm{meg}} = 100\,\mathrm{MPa}$

Reakciók és igénybevételi függvények meghatározása A reakcióerők meghatározásához távolítsuk el megtámasztásait és helyettesítsük azokat koncentrált erőkkel, lásd 3. ábra teteje. Ekkor a három ismeretlen koncentrált erőt az egyensúlyi egyenletek segítségével határozzuk meg:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: &\quad F_{Ax} = 0 \\ \sum F_z = 0: &\quad F_{Az} - F + F_B = 0 \\ \sum M_A = 0: &\quad \overset{\frown}{F\, l_1} - F_B\,(l_1 + l_2 + l_3) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

$$F_{Ax} = 0\,\mathrm{N},\ F_{Az} = 10000\,\mathrm{N}, F_B = 4000\,\mathrm{N} \tag{12}$$

Ezek alapján az igénybevételi függvények paraméteresen és számszerűleg is meghatározhatóak.

$$V\left(x\right) = \begin{cases} F_{Az} & 0 < x < l_1 \\ -F_B & l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 + l_3 \end{cases} \tag{13}$$

A nyíró igénybevételi függvényből integrálással határozzuk meg hajlítónyomatéki függvényt. A határozatlan integráláskor megjelenő konstansokat a szabad rúdvég peremfeltételekből számítjuk ki.

$$M_h\left(x\right) = \begin{cases} -F_{Az}\, x & 0 < x < l_1 \\ F_B\left(x - \left(l_1 + l_2 + l_3\right)\right) & l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 + l_3 \end{cases} \tag{14}$$

A függvényeket a 3. ábrán tüntettük fel.

Keresztmetszetek méretezése A vastagabbik rúdszakaszon a veszélyes keresztmetszet az $x_1 = 2\,\mathrm{m}$ helyen található. Ekkor a keresztmetszet mentén a hajlításból származó normál feszültség eloszlás a Naviér-képlet alapján:

$$\sigma_x\left(z\right) = \frac{M_h\left(x_1\right)}{I_{y1}} z \tag{15}$$

A másodrendű nyomaték alakja téglalap keresztmetszet esetén és felhasználva az oldalak arányát az alábbi.

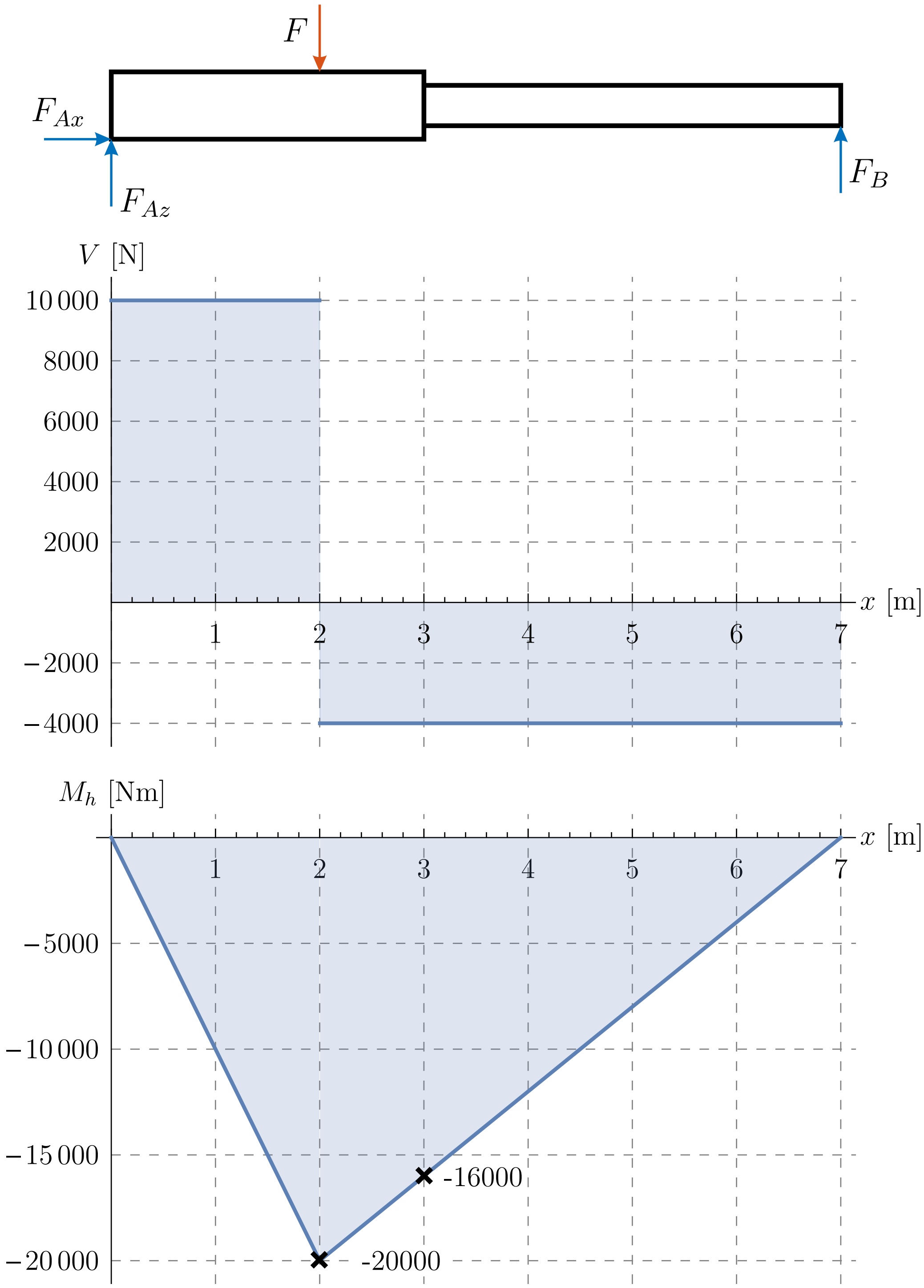
$$I_{y1} = \frac{a_1\, {b_1}^3}{12} = \frac{2{a_1}^4}{3} \tag{16}$$

(15)-be visszaírva (16)-ot és a keresztmetszet felső vagy alsó szálában kiértékelve azt a maximális feszültség helyét találjuk meg:

$$\left|\sigma_x\left(\pm a_1\right)\right| = \left|\mp\frac{3\cdot 20000}{2{a_1}^4} a_1\right| \leq \sigma_{\mathrm{meg}} \Rightarrow a_1 \geq 6.694\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \Rightarrow \boxed{a_1 = 67\,\mathrm{mm}} \tag{17}$$

A második részen a keresztmetszet változás helyén, $x_2 = 3\,\mathrm{m}$-nél fog a legnagyobb hajlítónyomaték ébredni. Az ezen a szakaszon szükséges oldalhossz meghatározásának módszere megegyezik az első szakasznál bemutatottal:

$$\left|\sigma_x\left(\pm a_2\right)\right| = \left|\mp\frac{3\cdot 16000}{2{a_2}^4} a_2\right| \leq \sigma_{\mathrm{meg}} \Rightarrow a_2 \geq 6.214\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \Rightarrow \boxed{a_1 = 63\,\mathrm{mm}} \tag{18}$$



3. ábra. Igénybevételi függvények.

3. feladat

03_KIIRAS

03_KIDOLGOZAS

4. feladat

04_KIIRAS

04_KIDOLGOZAS