Szilárdsátan gyakorlat
3. hét

Lehotzky Dávid
Pölöskei Tamás

2017. szeptember 24.

Szükséges előismeretek

ELŐISMERETEK

1. feladat

01_KIIRAS
01_KIDOLGOZAS

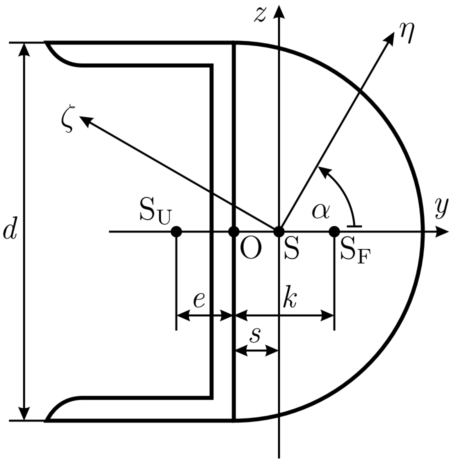
2. feladat

02_KIIRAS

02_KIDOLGOZAS

3. feladat

Az előző feladatban szereplő U140-es szelvényhez egy félkör keresztmetszetű, d átmérőjű idomot hegesztenek. Számítsuk ki a félkör saját S_F súlypontjára vonatkozó másodrendű nyomatékait, a teljes keresztmetszet másodrendű nyomatékait a keresztmetszet S súlypontján átmenő y- és z-tengelyekre, valamint az I_η, I_ζ, $I_{\eta\zeta}$ nyomatékokat.



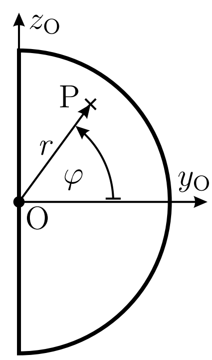
$d = 14\,\mathrm{cm}$
$k = 2.97\,\mathrm{cm}$
$s = 1.98\,\mathrm{cm}$
$\alpha = 60°$
$A_U = 20.4\,\mathrm{cm}^2$
$I_{1U} = I_{yU} = 605\,\mathrm{cm}^4$
$I_{2U} = I_{zU} = 62.7\,\mathrm{cm}^4$
$e = 1.75\,\mathrm{cm}$

Félkör másodrendű nyomatékai a saját súlypontjára Számítás szempontjából kedvezőbb, ha először az O pontra számoljuk ki a félkör másodrendű nyomatékait a definíciójuk alapján. A felületi integrált egyszerűbben tudjuk elvégezni, ha áttérünk polárkoordinátákra.

$$\begin{bmatrix} y_O \\ z_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\,\cos(\varphi) \\ r\,\sin(\varphi) \end{bmatrix} \tag{1}$$

A felületi integrál kifejezésében megjelenik y_O és z_O differenciálja, ezért képezzük ezeket a Jacobi-mátrix és a polárkoordináták differenciálja felhasználásával:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}y_O \\ \mathrm{d}z_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\,\mathrm{d}r - r\,\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ \sin(\varphi)\,\mathrm{d}r + r\,\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -r\,\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\,\cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}r \\ \mathrm{d}\varphi \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \mathrm{d}r \\ \mathrm{d}\varphi \end{bmatrix} \tag{2}$$



1. ábra. Félkör keresztmetszet és a polárkoordináta

$$I_{y\mathrm{O}} = \iint\limits_{(A_\mathrm{F})} {z_\mathrm{O}}^2 \,\mathrm{d}y_\mathrm{O}\,\mathrm{d}z_\mathrm{O} = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_{0}^{d/2} r^2 \sin^2(\varphi)\,\det(\mathbf{J})\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{d^4\pi}{128} \tag{3}$$

$$I_{z\mathrm{O}} = \iint\limits_{(A_\mathrm{F})} {y_\mathrm{O}}^2 \,\mathrm{d}y_\mathrm{O}\,\mathrm{d}z_\mathrm{O} = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_{0}^{d/2} r^2 \cos^2(\varphi)\,\det(\mathbf{J})\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{d^4\pi}{128} \tag{4}$$

$I_{yz\mathrm{O}}$ értéke zérus, mivel y_O szimmetriatengely.

A félkör idom saját súlypontjára vonatkozó másodrendű nyomatékok meghatározásánál a Steiner-tételt az eddigiektől eltérően "fordított elrendezésben" használjuk, mivel egy külső pontról számítjuk át a keresztmetszet rész súlypontjára a másodrendű nyomatékokat.

$$I_{y\mathrm{F}} = I_{y\mathrm{O}} - {\Delta z_\mathrm{OF}}^2\, A_\mathrm{F} = I_{y\mathrm{O}} - 0^2\,\frac{d^2\pi}{8} = \boxed{942.9\,\mathrm{cm}^4} \tag{5}$$

$$I_{z\mathrm{F}} = I_{z\mathrm{O}} - {\Delta y_\mathrm{OF}}^2\, A_\mathrm{F} = I_{z\mathrm{O}} - k^2\,\frac{d^2\pi}{8} = \boxed{263.5\,\mathrm{cm}^4} \tag{6}$$

$$I_{yz\mathrm{F}} = I_{yz\mathrm{O}} - \Delta y_\mathrm{OF}\,\Delta z_\mathrm{OF}\, A_\mathrm{F} = I_{z\mathrm{O}} - 0\,k\,\frac{d^2\pi}{8} = \boxed{0\,\mathrm{cm}^4} \tag{7}$$

Keresztmetszet másodrendű nyomatékának meghatározása a közös súlypontra
Az U szelvény és a félkör idom súlypontjairól a Steiner-tétel segítségével számítjuk át a másodrendű nyomatékokat a közös súlypontra:

$$I_y = I_{y\mathrm{U}} + {\Delta z_\mathrm{UO}}^2\, A_\mathrm{U} + I_{yF} + {\Delta z_\mathrm{FO}}^2\, A_\mathrm{F} = I_{y\mathrm{U}} + 0^2\, A_\mathrm{U} + I_{yF} + 0^2\, A_\mathrm{F} = \boxed{1548\,\mathrm{cm}^4} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} I_z &= I_{z\mathrm{U}} + {\Delta y_\mathrm{UO}}^2\, A_\mathrm{U} + I_{zF} + {\Delta y_\mathrm{FO}}^2\, A_\mathrm{F} \\ &= I_{z\mathrm{U}} + (e+s)^2\, A_\mathrm{U} + I_{yF} + (k-s)^2\, A_\mathrm{F} = \boxed{685.6\,\mathrm{cm}^4} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} I_{yz} &= I_{yz\mathrm{U}} + \Delta y_\mathrm{UO}\,\Delta z_\mathrm{UO}\, A_\mathrm{U} + I_{yz\mathrm{F}} + \Delta y_\mathrm{FO}\,\Delta z_\mathrm{FO}\, A_\mathrm{F} \\ &= 0 + (e+s)\;0\, A_\mathrm{U} + 0 + (k-s)\;0\, A_\mathrm{F} = \boxed{0\,\mathrm{cm}^4} \end{aligned} \tag{10}$$

Állítsuk elő a súlyponti másodrendű nyomatékokból azok mátrixát:

$$\underset{(y,z)}{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} I_y & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1548 & 0 \\ 0 & 685.6 \end{bmatrix} \mathrm{cm}^4 \tag{11}$$

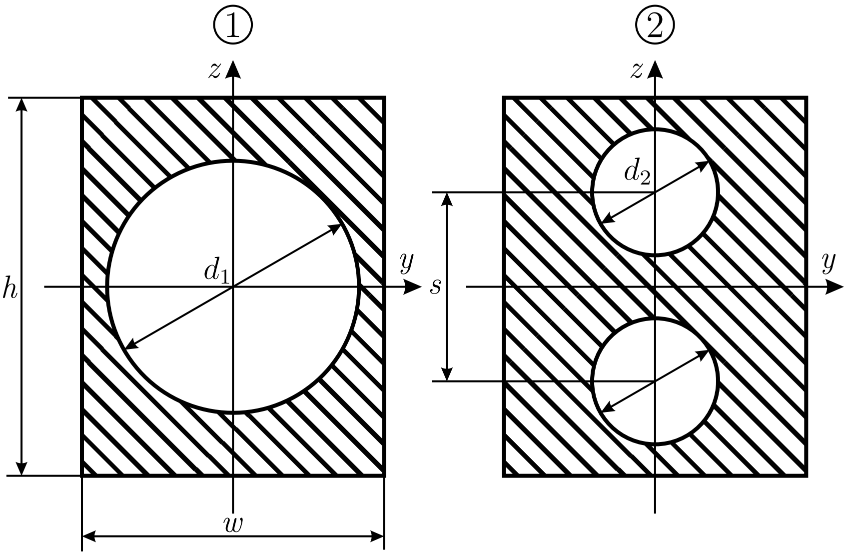
Másodrendű nyomatékok értékei az (η, ζ) koordináta rendszerben Ahhoz hogy meghatározzuk az α fokkal elforgatott koordináta rendszerben a másodrendű nyomatékok értékeit a $\mathbf{T}$ transzformációs mátrixszal kell mindkét oldalról megszoroznunk a másodrendű nyomatékok mátrixszát.

$$\mathbf{T}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\underset{(\eta,\zeta)}{\mathbf{I}} = \mathbf{T}^\mathsf{T}\,\underset{(y,z)}{\mathbf{I}}\,\mathbf{T} = \begin{bmatrix} I_\eta & -I_{\eta\zeta} \\ -I_{\eta\zeta} & I_\zeta \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 901.2 & 373.4 \\ 373.4 & 1332 \end{bmatrix} \mathrm{cm}^4} \tag{13}$$

4. feladat

Hogyan változik egy 240×300-as téglalap keresztmetszet területe és y-tengelyre számított másodrendű nyomatéka, ha egy 200 mm-es furat helyett két 100 mm-es furat van benne.



$w = 240\,\mathrm{mm}$	
$h = 300\,\mathrm{mm}$	
$d_1 = 200\,\mathrm{mm}$	
$d_2 = 100\,\mathrm{mm}$	
$s = 150\,\mathrm{mm}$	

Mindkét esetben az y és a z tengely szimmetria tengely. Ezért a keresztmetszetek súlypontjai ezek metszéspontjában helyezkednek el. A számítás során kezdetben tömörnek tekintjük a teljes keresztmetszetet, majd az üres rész hatását negatív előjellel vesszük figyelembe.

1. eset keresztmetszeti értékei

$$A_1 = w\,h - \frac{{d_1}^2\pi}{4} = \boxed{405.8\,\mathrm{cm}^2} \tag{14}$$

A tömör és az üres kör keresztmetszet súlypontja is az eredő keresztmetszet súlypontjával esik egybe, ezért a Steiner-tételből származó tagok értéke zérus:

$$I_{y1} = \frac{w\,h^3}{12} - \frac{{d_1}^4\pi}{64} = \boxed{46146\,\mathrm{cm}^4} \tag{15}$$

2. eset keresztmetszeti értékei

$$A_2 = w\,h - 2\frac{{d_2}^2\pi}{4} = \boxed{562.9\,\mathrm{cm}^2} \tag{16}$$

$$I_{y2} = \frac{w\,h^3}{12} - 2\left(\frac{{d_2}^4\pi}{64} + \left(\frac{s}{2}\right)^2\frac{{d_2}^2\pi}{4}\right) = \boxed{44183\,\mathrm{cm}^4} \tag{17}$$

Esetek összehasonlítása

$$\delta_A = \frac{A_2 - A_1}{A_1} = \boxed{38.70\%} \tag{18}$$

$$\delta_I = \frac{I_2 - I_1}{I_1} = \boxed{-4.255\%} \tag{19}$$

Tehát a keresztmeteszet felülete közel 40%-kal nőtt és míg másodrendű nyomatéka 4%-kal csökkent miután egy helyett kettő furatot helyeztünk el a téglalap keresztmetszetben.